

4 因子分解による 3 次元圧縮性流れの陰解法

藤井孝藏*

**FOUR-FACTORED IMPLICIT TIME INTEGRATION SCHEME
FOR COMPRESSIBLE FLOW SIMULATIONS**

by

Kozo Fujii*

ABSTRACT

A new implicit time integration scheme is proposed based on the two-factored relaxation-type scheme. By approximating the positive and negative flux Jacobian matrices in the streamwise direction similarly to the LU-SGS scheme, both the implicit factors are diagonalized by the eigenmatrices for the other two directions. The SGS factorization used in the LU-ADI scheme is next adopted. The resultant scheme has four factors, each of which consists of a simple scalar sweep. The scheme is called FF-SGS (Four-Factored Symmetric Gauss Seidel) scheme. The implicit operations in the present scheme differs slightly from those of the LU-ADI scheme and therefore can be easily developed from the existing codes. Several computations are carried out and the results show the present scheme's applicability and the efficiency. For the simulations where most of the flow field is supersonic, local iterations at each streamwise station make the present scheme much more efficient. The results indicate the present FF-SGS scheme can be a versatile tool for a wide variety of the flow fields.

1. はじめに

圧縮性流れに対する効率的な陰解法は今でも大きな課題である。現在最も効率的であると考えられている時間積分法は LU-SGS 法[1]と LU-ADI 法[2]であろう。LU-SGS 法は流束ジャコビアン行列を近似化することで行列反転をスカラーの反転に簡略化したもの、LU-ADI 法は対角化と流束分離によって行列反転をスカラーの反転と行列積演算に簡略化したものである。LU-SGS 法はベクトル化に工夫が必要であるが演算量が少なく、LU-ADI 法はベクトル化は自然にできるが、LU-SGS に比べると演算量が多いという特徴がある。

高速流れにおいては、流れの大半の部分が超音速で

ある場合も少なくない。このような領域に対しては時間方向積分ではなくいわゆる空間前進型の積分が利用できる。また、亜音速領域を含む場合でも局所的な繰り返しを利用することで効率的に解を得ることができている。これらは relaxation タイプのコードと呼ばれ、1980 年代中期から後期にかけて多くの研究がなされている[3-6]。これらの手法は、流れが超音速に支配されている場合には繰り返し数が激減できるため効率が良いが、亜音速や遷音速流れにおいては 1 つの繰り返しに要する演算が多いために逆に計算時間がかかるという欠点を持つ。すなわち、上記 2 つの手法に比べて演算自体が多いため一般の流れに対しては効率が悪いことになる。

ここではこれら relaxation タイプのプログラムを効率化する工夫をすることで総ての流れ領域で効率的な手法を考えてみる。以下に示すように得られるスキームは FF-SGS 法と呼ばれ超音速流れについては LU-ADI や LU-SGS よりも圧倒的な効率で定常解が得られると同時に亜音速流れにおいてもより効率的に定常解を得ることが出来る。以下に計算法の概要と実際に流れ計算に適用した結果について述べる。

2. 定式化

2.1 SS-SGS 法の導出

Relaxation タイプのスキームの代表的なものは Walters[4]や Newsome ら[5]のものである。Steger らによる 2 因子分解法[7]は一般の時間積分法として定義されており relaxation 法を意識したものではなかったが、実はそのスキームの構造は Newsome らの方法と非常に似ている。ここではまず Steger らによる 2 因子分解法からスタートする。2 因子分解法は

$$(I + \Delta t \delta_{\xi}^b \hat{A}^+ + \Delta t \delta_{\xi}^c \hat{C})(I + \Delta t \delta_{\xi}^f \hat{A}^- + \Delta t \delta_{\eta} \hat{B}) \Delta \hat{Q}^n = -\Delta t \left(\frac{\partial \hat{E}}{\partial \xi} + \frac{\partial \hat{F}}{\partial \eta} + \frac{\partial \hat{G}}{\partial \zeta} \right)^n \quad (1)$$

と書ける。このスキームでは陰解法部分においてある方向 ξ の流束ジャコビアン行列のみを Flux Vector Splitting によって土に分離し、他の方向については中心差分を利用する。実際の演算では第 1 番目の因子は ξ 方向の前進解法となる。すなわち、 ξ 方向のインデックス j の位置では ξ による後退差分から生ずる $j-1$ や $j-2$ の項はすでに計算できているのでこれを右辺に移してやるとその結果左辺は ζ 微分の差分表示から得られる項に j の対角成分のみが加わったものとなり、通常の ADI 型のブロック 3 重対角方程式反転が利用できる。演算としては各 j で ζ に対する 3 項方程式の反転を行いながら j の大きい方向にスイープしていくことになる。同様に 2 番目の因子は j の大きな方から小さな方に η の反転をしながらスイープすることになる。 ξ 方向の前進、後退スイープが終了するとそれが時間 1 ステップとなり、これを繰り返して行うことで収束に至る。

まず式(1)を対角優位の分解に修正し、 Δt で両辺を割る。結果は

$$\begin{aligned} & \left(\frac{I}{\Delta t} - \frac{1}{\Delta \xi} \hat{A}_j^- + \delta_{\xi}^b \hat{A}^+ + \delta_{\xi}^c \hat{C} \right) \left(\frac{I}{\Delta t} + \frac{1}{\Delta \xi} (\hat{A}_j^+ - \hat{A}_j^-) \right)^{-1} \\ & \left(\frac{I}{\Delta t} + \frac{1}{\Delta \xi} \hat{A}_j^+ + \delta_{\xi}^f \hat{A}^- + \delta_{\eta} \hat{B} \right) \Delta \hat{Q}^n \\ & = - \left(\frac{\partial \hat{E}}{\partial \xi} + \frac{\partial \hat{F}}{\partial \eta} + \frac{\partial \hat{G}}{\partial \zeta} \right)^n \end{aligned} \quad (2)$$

やはりブロック 3 項方程式を解きながら ξ 方向に前進、後退のスイープを行い 1 つの時間ステップとするが、対角優位性の確保によって安定性が向上する。例えば第 1 因子の実際の演算を書き下してみると

$$\begin{aligned} & \left(\frac{I}{\Delta t} + \frac{1}{\Delta \xi} (\hat{A}_j^+ - \hat{A}_j^-) + \delta_{\xi}^c \hat{C} \right) \Delta \hat{Q}^* \\ & = - \left(\frac{\partial \hat{E}}{\partial \xi} + \frac{\partial \hat{F}}{\partial \eta} + \frac{\partial \hat{G}}{\partial \zeta} \right)^n + \frac{1}{\Delta \xi} \hat{A}_{j-1}^+ \Delta \hat{Q}_{j-1}^* \end{aligned} \quad (3)$$

但し、

$$\Delta \hat{Q}^* = \left(\frac{I}{\Delta t} + \frac{1}{\Delta \xi} (\hat{A}_j^+ - \hat{A}_j^-) \right)^{-1} \left(\frac{I}{\Delta t} + \frac{1}{\Delta \xi} \hat{A}_j^+ + \delta_{\xi}^f \hat{A}^- + \delta_{\eta} \hat{B} \right) \Delta \hat{Q}^n$$

となっている。説明を簡単にするために ξ 方向は 1 次精度としたが、高次精度への拡張は容易である。

ここで LU-SGS 法で用いられて成功している近似、すなわち $A^+ = \frac{A + \sigma_{\xi}}{2}$, $A^- = \frac{A - \sigma_{\xi}}{2}$ を導入する[1]。これによって因子中の ξ に関する項は $\hat{A}_j^+ - \hat{A}_j^- = \sigma_{\xi_j} I$ となりスカラー量となる。その結果、この因子は ζ の固有一行列によって対角化が可能となる。すなわち、

$$\left(\frac{I}{\Delta t} + \frac{1}{\Delta \xi} (\hat{A}_j^+ - \hat{A}_j^-) + \delta_{\xi}^c \hat{C} \right) = R_{\xi} \left(\frac{I}{\Delta t} + \frac{1}{\Delta \xi} \sigma_{\xi_j} I \right) + \delta_{\xi}^c \hat{\Lambda}_{\xi} R_{\xi}^{-1} \quad (4)$$

とできる。それにより 式(3)は近似的に

$$\begin{aligned} & \left(\frac{I}{\Delta t} + \frac{1}{\Delta \xi} \sigma_{\xi_j} I \right) + \delta_{\xi}^c \hat{\Lambda}_{\xi} \left(R_{\xi}^{-1} \Delta \hat{Q}^* \right) = \\ & - R_{\xi}^{-1} \left[\left(\frac{\partial \hat{E}}{\partial \xi} + \frac{\partial \hat{F}}{\partial \eta} + \frac{\partial \hat{G}}{\partial \zeta} \right)^n + \frac{1}{\Delta \xi} \hat{A}_{j-1}^+ \Delta \hat{Q}_{j-1}^* \right] \end{aligned} \quad (5)$$

となる。この段階で左辺の演算はブロックの三重対角行列の反転から行列演算とスカラーの三重対角行列の演算とに簡略化されている。さらに LU-ADI で用いたように ζ 微分について Flux Vector Splitting を利用して風上差分をとり[2]、対角優位の因子化を施すと、さらに演算が軽減化できて左辺のオペレータは

$$\begin{aligned}
& \left(\left(\frac{1}{\Delta t} + \frac{1}{\Delta \xi} \sigma_{\xi j} I \right) + \delta_{\xi} \hat{\Lambda}_{\xi} \right) (R_{\xi}^{-1} \Delta \hat{Q}^*) \\
& = \left(\left(\frac{1}{\Delta t} + \frac{1}{\Delta \xi} \sigma_{\xi j} I \right) - \frac{1}{\Delta \xi} \hat{\Lambda}_{\xi}^* + \delta_{\xi} \hat{\Lambda}_{\xi}^* \right) \\
& \quad \left(\left(\frac{1}{\Delta t} + \frac{1}{\Delta \xi} \sigma_{\xi j} I \right) + \frac{1}{\Delta \xi} \left| \hat{\Lambda}_{\xi} \right| \right)^{-1} \\
& \quad \left(\left(\frac{1}{\Delta t} + \frac{1}{\Delta \xi} \sigma_{\xi j} I \right) + \frac{1}{\Delta \xi} \hat{\Lambda}_{\xi}^* + \delta_{\xi} \hat{\Lambda}_{\xi}^* \right) (R_{\xi}^{-1} \Delta \hat{Q}^*)
\end{aligned} \tag{6}$$

となる。式(6)ではjにおける左辺の演算は ξ 方向の前進、後退のスカラー演算スイープからなっている。この演算はLU-ADIの ξ 方向の演算と対角要素に $\frac{1}{\Delta \xi} \sigma_{\xi j}$ が加わっていることだけが違うのですでにLU-ADIのコードを持っていれば書き直しは数行ですむ。

もう1つの因子についてもjの後退スイープにおいて同様な作業を η 方向の微分に対して行うだけである。最終的に全体の演算構成は

jの前進スイープ
 [1の前進スイープ
 1の後退スイープ
 jの後退スイープ
 [kの前進スイープ
 kの後退スイープ

となる。例えばLU-ADI法からの書き直しはj, k, lの陰解法演算のうちjの演算をはずし、k, lのループをjのDOループで囲む。k, lの演算の際に右辺にrelaxationから出てくるj-1やj+1といった項をつけ加える—といった簡単な変更で本スキームを得ることができる。本スキームは4つの因子から構成されており、jの方向にもk, lの方向にもそれぞれSGS的な分解を用いているのでFF-SGS (Four-factored Symmetric Gauss Seidel)法と呼ぶことにする。左辺の離散化は右辺に対応するものをとる方が一般に収束性がよいが、通常そうであるようにFlux Difference Splittingなどの離散化を用いてもよい。このようにして得られたFF-SGS法は例えばLU-ADI法に比べてj方向の演算が少ない分1時間ステップの演算が軽減化される。

ちなみに当然のことながら式(5)を用いて演算することも可能である。この場合は2因子の分解法となるが、いわゆる対角化法のコードを持っていればやはり対角項に $\frac{1}{\Delta \xi} \sigma_{\xi j}$ を足し込むだけでより効率のよい方法が得られる。

以上がFF-SGS法の導出である。1つの前進、後退のjスイープが1つの時間積分を構成する。これを繰り返して定常解を得る。もちろん非定常の解も限られた精度範囲ではあるが得ることができるし、右辺に時間微分項を加えることでより時間精度を高めることもできる。予想されるように既存のLU-SGS法やLU-ADI法に比べて演算が極端に少ないわけではない。しかし、最初に述べたように本方法を導出する目的は超音速流れにおいて高い収束性を得ることにある。

2.2 Relaxation法としての利用

流れが非粘性で完全に超音速である場合を考えよう。この場合jでの流れはそれより上流j-1などの値から決まり、j+1など下流の影響を受けない。そこで、上記のスキームでのjminからjmax, jmaxからjminまで行う前進後退スイープの幅を1つのj単独でのスイープとする。つまり1つのjで上記の時間ステップ演算を行う。そして時間積分のループの外側に新たにjminからjmaxのループを作る。下流からの影響はないから各jでの時間積分(1つのjでの上記陰解法)は数十回の繰り返しで収束解に至る。収束解が得られると次のjに進む。という具合に局所的な時間積分によって定常解は各jについて次第に求めていく。時間積分ループを囲む外側のjのループがjmaxまで行き着けばそれで定常解が完全に求まったことになる。このような局所的な時間イタレーションを局所イタレーションと呼ぶ。これに対して最初に定義したj全体にスイープを行う作業を繰り返していく方法を全体イタレーションと呼ぶ。一種のLine Gauss Seidel法となっている。局所イタレーションを利用する方法で Δt を無限大にするといわゆるニュートン法になるが[4,5]、ここでは適当に大きな Δt として収束させる。

もちろんナビエ・ストークス方程式を扱う場合は境界層内の亜音速部分における擾乱の前方への伝わりを抑えるために、PNS 法と同じように境界層内に Vignerón による近似[8]を施さなければならない。

以上得られた方法は内側の j のループを j_{lin} から j_{2in} , 外側のループの幅を j_{1out} から j_{2out} としてこれらを計算の頭で定義してやればプログラム上は 1 つのプログラムで全体イタレーションを利用した通常の時間積分プログラムとしても局所イタレーションを利用した緩和法的なプログラムとしても利用することができる。局所的に亜音速部分がある場合にも局所イタレーションに j の幅を持たせて亜音速部分をその中に完全に含む形とし、局所イタレーションをその領域幅で行うことにすれば効率的な演算が可能である。また、仮に近似的な超音速解が局所イタレーションを利用する方法で得られればそれが完全な収束解でなくとも途中から全体イタレーションのプロセスに移ることによって希望する収束解を得ることもできる。

以上のことから本方法は亜音速、遷音速でも通常の効率的な陰解法に負けない収束性を維持しつつ、超音速流れではさらに高い収束性を持つ方法であると予想される。以下の章では具体的な例を利用してこのこと

を検証してみる。

3. 計算結果と検討

3.1 全体イタレーションによる計算例

最初に迎角を持つ円錐まわりの流れの計算例を示す。マッハ数は 2.0, 迎角は 8 度でオイラー方程式による計算である。図 1 は得られた密度等高線を図 2 は収束の過程を示している。計算格子点数は $31 \times 11 \times 31$ とかなり粗いため衝撃波はあまりきれいではないが計算には問題ないことがわかる。図 2 には比較のため LU-ADI 法と Steger による 2 因子分解法を利用した同じ計算の収束履歴

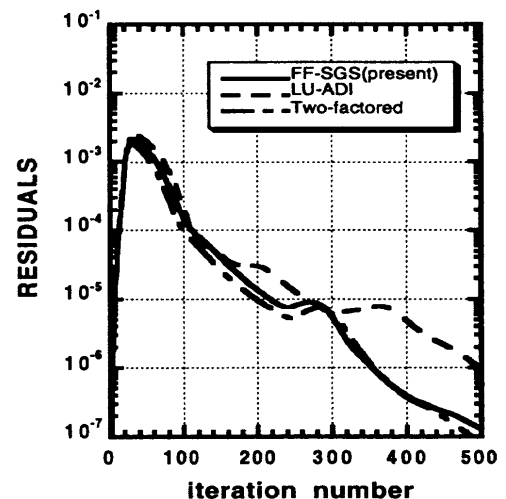


図 2 図 1 のケースの収束履歴

歴も示した。比較を公平に行うために右辺の定常項は総て 3 次精度の Roe の FDS を利用している。左辺は 1 次の風上差分となっているから左辺、右辺の矛盾からマシンゼロへの収束性は得られていない。しかし、約 500 ステップ程度で残差は 3-4 桁おちて、実質的な収束解となっている。本 FF-SGS 法は 2 因子分解法とはほぼ同じ様な収束履歴を示し、LU-ADI 法よりも少しよい傾向を持っている。このことは流れ方向の流束ジャコビアン近似化が収束性の劣化を引き起こしていないことを示している。定式化のところからわかるように FF-SGS 法は 2 因子分解法に比べて (プログラミングの方法にもよるが) 1 つのイタレーションに要する時間は

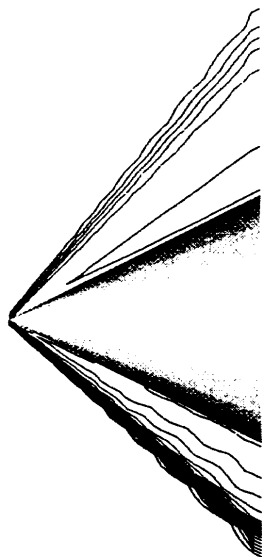


図 1 密度等高線 (全体イタレーションの結果) : $M=2.0$, $\alpha=8.0$

1/3-6程度である。実際の計算時間は右辺演算も含めて1/4であった。またLU-ADI法に対しても1ステップに要する計算時間は右辺を含めても1割程度少ない。

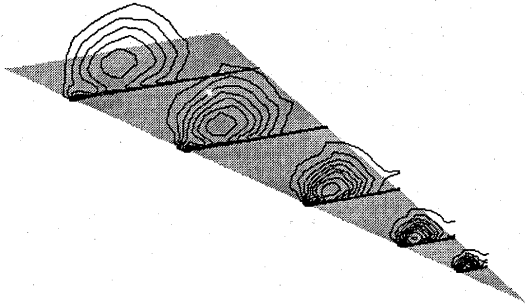


図3 デルタ翼上の前縁剥離渦のシミュレーション
—総圧分布—: $M=0.3$, $\alpha=12.0$

第2の例は亜音速の例でデルタ翼上の前縁剥離渦のシミュレーションである。方程式はナビエ・ストークス方程式、格子点数は $55 \times 35 \times 55$ である。マッハ数は0.3、迎角は12度とした。前縁剥離渦の流れ場は完全な定常解とはならないために残差は3桁近く下がってそこで変化しなくなる。図3に計算結果のうち総圧の等高線分布を示すが前縁剥離渦の存在が明らかで流れの計算が問題なく行われていることがわかる。

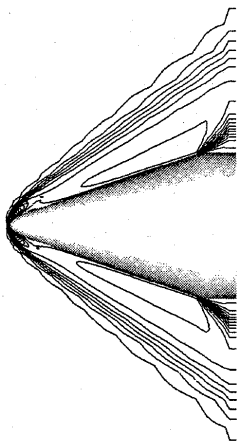


図4 ロケット頭部を過ぎる超音速流れ
—密度等高線— ($M=2.0$, $\alpha=0.0$)

3番目の例としてロケット頭部の形状を過ぎる超音速流れの例を図4に示す。マッハ数は2.0、迎角は0と

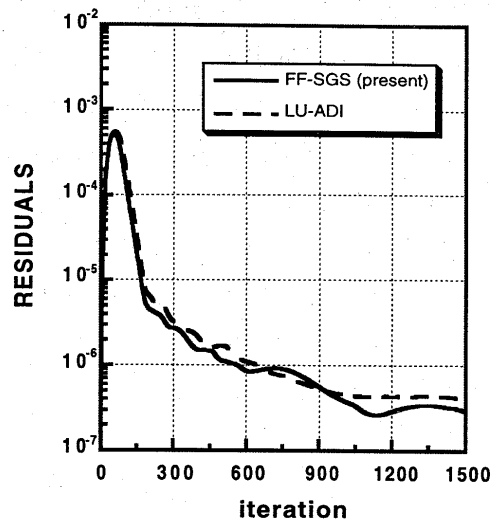


図5 図4のケースの収束履歴
した。この例では頭部付近の亜音速部分が存在する。この場合の残差履歴をLU-ADIのそれとともに図5に示す。ほとんど同じ様な収束履歴を示している。これは

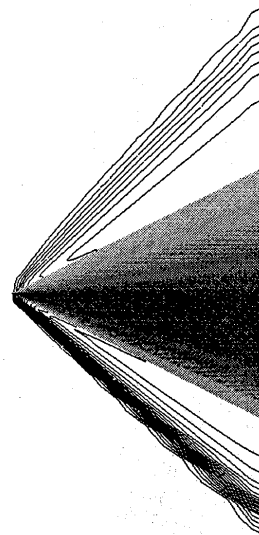


図6 密度等高線 ($M=2.0$, $\alpha=8.0$)
亜音速部分の影響があるからであろう。

3.2 局所イタレーションによる計算例

現在のところオイラー方程式の計算のみを行っている。ナビエ・ストークス方程式にするための境界層の処理はこれからの課題である。円錐に対する超音速

流れの例(密度分布)を図6に示す。マッハ数は2.0, 迎角は8度である。現在はスキームの確認のため1次精度で計算しているので, 図1に比べて衝撃波は厚い。特に局所イタレーションの収束判定をしていないので各jで40回の局所イタレーションを行うことにしたが, 総てのjについて40回で3桁以上の残差の落ちが観測されている。計算結果も問題ない。図1のマッハ数2.0の例で約400回程度の全体イタレーションを要しているので, この局所イタレーションによる方法は全体イタレーションによる一般の時間依存型の積分に比べておよそ10倍程度早く収束が得られることになる。

図7にはマッハ数が4.0のケースの密度等高線を示す。こちらと同じ局所イタレーション数で定常解が得られている。これらの結果から少なくとも流れが完全に超音速であればこの方法は効率に優れたものであることがわかる。当初は流れ方向の流束ジャコビアンの評価を厳密に行わないと局所イタレーションの収束に問題が出るのではないかと考えたが, 計算した結果は全体イタレーションと同じく全く問題がないことを示したと考えられる。境界層における Vigneron の近似は特別問題なく組み込められると思われるのでナヴィエ・ストークス方程式への拡張は可能と考える。

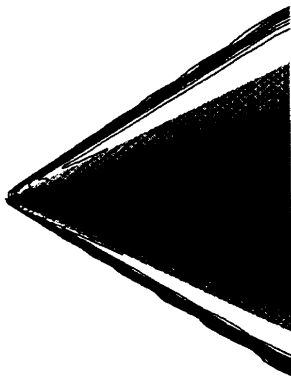


図7 密度等高線 ($M=4.0, \alpha=8.0$)

4. おわりに

新たな効率的な陰解法を提案した。考え方は単純で

いわゆる relaxation タイプのスキームから出発し, LU-SGS 法の流束ジャコビアンの近似化を流れ方向のみに導入する。これによって陰解法の近似因数分解された各オペレータは他の2方向の固有マトリックスによって対角化が可能となる。さらにLU-ADIの優対角分解を施すことで4因子の陰解法FF-SGS法が定義できる。各オペレータの演算はオリジナルのLU-ADI法のそれとほとんど同じで数行の書き直しでFF-SGS法となる。全体の演算は流れ方向のインデックスのループの中に他の2方向のオペレータが挟まるといった形式となる。得られたFF-SGS法はLU-ADI法などよりも演算量が少なく, 総ての速度領域で効率的な陰解法となる。同時に流れが超音速の場合には緩和法としての計算が可能で10倍程度の効率化が簡単に見込める。

亜音速から超音速に至るいくつかの流れ場への適用結果から以上の事実を確認することができた。今後さらに一般的な流れ場への適用によって本手法の汎用性を高めていきたいと考えている。

参考文献

1. S. Yoon and A. Jameson: AIAA Paper 87-0600, 1987.
2. S. Obayashi, K. Matsushima, K. Fujii and K. Kuwahara: AIAA Paper 86-338, 1986.
3. S. R. Chakravarthy: AIAA Paper 84-0165.
4. R. W. Walters and D. L. Dwoyer: AIAA Paper 85-1529CP, 1985.
5. R. W. Newsome, R. W. Walters and J. L. Thomas: AIAA Paper 87-1113CP, 1987.
6. A. C. Taylor III, W. F. Ng and R. W. Walters: J. C. P. Vol. 99, pp. 68-78, 1992.
7. S. Ying and J. L. Steger: AIAA Paper 86-2179, 1986.
8. Y. C. Vigneron, J. V. Rakich and J. C. Tannehill, AIAA Paper 78-1137, 1978.