

DE 研修(レベル 2)資料

# 軌道設計の応用 いろいろな衛星ミッションと摂動の利用と制御

2010 年 12 月

宇宙航空研究開発機構 研究開発本部  
軌道・航法グループ

歌島昌由

## 目次

1. はじめに.....	1
2. 軌道の摂動と接触・平均軌道.....	1
2.1 接触軌道.....	1
2.2 短周期摂動、長周期摂動、永年摂動.....	1
2.3 平均軌道.....	1
2.4 ラグランジュの惑星方程式.....	2
3. 軌道決定誤差.....	3
3.1 中高度軌道の決定誤差(1 周波 GPSR による自律航法の場合).....	3
3.2 中高度衛星の精密軌道決定誤差(2 周波 GPSR の搬送波位相も使う場合).....	3
3.3 静止軌道の決定誤差(RARR による場合).....	3
3.4 L1,L2 点軌道の決定誤差(RARR による場合).....	4
3.5 惑星間軌道の決定誤差.....	4
4. 軌道の制御.....	5
4.1 ガウスの惑星方程式.....	5
4.1.1 $e=0, i=0$ のための non-singular 要素.....	6
4.1.2 $e=0, i=0$ のための non-singular 要素.....	6
4.1.3 non-singular 要素に対するガウスの惑星方程式.....	7
4.2 インパルス的な制御による軌道変化.....	7
4.3 連続的な低推力制御の効率.....	8
4.3.1 軌道長半径の制御効率.....	8
4.3.2 離心率ベクトルと傾斜角ベクトルの制御効率.....	9
4.4 軌道投入最終 V におけるロケットと衛星の効率比較.....	9
4.5 準回帰軌道保持における制御周期、大気密度、保持精度の関係.....	11
5. いろいろなミッション軌道の設計・解析.....	13
5.1 静止軌道(GEO: Geostationary Earth Orbit).....	13
5.2 宇宙太陽発電システムの軌道間輸送とミッション軌道.....	16
5.2.1 SSPS の軌道間輸送.....	16
5.2.2 SSPS のミッション軌道.....	19
5.3 オール電化静止衛星の遷移軌道.....	20
5.4 地球観測軌道.....	21
5.4.1 太陽同期性.....	21
5.4.2 準回帰性.....	21
5.4.3 1 周内の高度変動.....	23
5.5 超低高度軌道.....	24
5.5.1 大きな大気抵抗の離心率への影響(新凍結軌道の発見).....	24
5.5.2 大きな大気抵抗の傾斜角への影響.....	25

5.6	高高度略円極軌道.....	25
5.7	太陽 - 地球系 L2 点周り軌道 .....	27
5.7.1	L2 点周り軌道の基本関係式 .....	28
5.7.2	L2 点周りの基準軌道の設計 .....	29
5.8	太陽 - 地球系 L4,L5 点周り軌道 .....	31
5.8.1	1AU 軌道の運動.....	31
5.8.2	L4,L5 点周り軌道に対する地球軌道の離心率の影響 .....	31
5.8.3	月の影響 .....	32
5.8.4	惑星(木星と金星)の影響 .....	32
5.8.5	太陽輻射圧の影響 .....	33
5.9	作用圏境界軌道 .....	34
5.9.1	Mathieu 方程式への帰着と共鳴安定化.....	34
5.9.2	火星 - フォボス系による擬周回軌道の共鳴安定化の実証 .....	36
5.10	小惑星周回軌道 .....	36
5.11	木星 swingby 利用の太陽極軌道 .....	38
5.11.1	2 段式上段モータで直接木星に向かう場合.....	38
5.11.2	固体モータによる中間軌道 + 地球 swingby で木星に向かう場合 .....	41
5.11.3	電気推進系による E V-EGA を経て木星に向かう場合 .....	42
5.12	高離心率軌道の寿命計算法.....	44
5.13	フォボスのホバリング V 解析.....	44
5.14	耐熱シールドを使わない再突入の可能性 .....	46
5.15	衛星群による光干渉計に適した軌道 .....	48
5.16	Solar Sail を利用した軌道設計 .....	49
6	軌道力学の豆知識.....	53
6.1	$ e/V $ は $f$ (真近点離角)に依存しない.....	53
6.2	静止軌道長半径の変動.....	54
6.3	$J_2$ 項による $r$ と $V$ の変動 .....	55
6.4	大気抵抗による略円軌道の低下率 .....	57
7	おわりに .....	58
8	参考文献.....	58

## 1. はじめに

本資は、JAXA 研究開発本部が実施する DE 研修(レベル 2)の講義資料として作成したものである。宇宙機ミッションの軌道設計において、摂動がどのように利用されているか、どのような軌道制御がおこなわれているかを、筆者が検討した複数のミッションに対して概要を記した。扱ったミッションは、地球周回だけでなく、惑星間を飛行するものも含む。本資の記述方針として、議論の詳細は参考文献に譲り、概要を述べる事とした。通常の文献などでは記述される事の少ない情報なども記した。

はじめの 3 つの章で、軌道摂動、軌道決定、軌道制御の基本的な事を記した後、第 5 章で本論を述べる。第 6 章では、軌道力学における豆知識的な事柄を 4 つ紹介する。

## 2. 軌道の摂動と接触・平均軌道

### 2.1 接触軌道

接触軌道の定義を以下に記す。

#### **接触軌道の定義**

接触軌道というのは、ある瞬間の宇宙機(or 天体)の位置・速度ベクトルを、(二体問題として)ケプラー軌道要素に変換して得られる軌道。

つまり、その瞬間に、中心天体の球対称の中心力場の他は、全て消えた場合の仮想的な軌道である。地上局からの range & range-rate(RARR)等によって決定される軌道や、オンボードで GPSR からのデータで決められる軌道は、この接触軌道である。接触軌道は基本となる軌道であり、軌道要素の交換などに際してしばしば利用される。

### 2.2 短周期摂動、長周期摂動、永年摂動

軌道の摂動には、大きく分けて安定な摂動と不安定な摂動がある。不安定な摂動は、時間の指数関数で変動が発散するようなものである。三体問題における L1, L2, L3 点周りの運動がその例である。

安定な摂動運動をする宇宙機の接触軌道要素(ケプラー要素)は、一般に複数の周期項を持つ。周期項のうち、周期が極めて長いもの(例えば数万年以上)は時間の多項式で近似し、永年摂動と呼ばれる。いわゆる周期項は、短周期摂動と長周期摂動に分類される。短周期摂動は、摂動周期が、宇宙機の軌道周期以下のものと定義されている。それ以外のものが、長周期摂動である。

### 2.3 平均軌道

接触軌道から周期摂動を取り除いたものを平均軌道という。どの周期までの摂動を取り除くかにより、平均軌道には幾つかの種類がある。静止軌道を例に説明すると、短周期摂動(周期 1 日以下)だけを取り除いた平均軌道を日平均軌道、周期 1 ヶ月以下の摂動を取り除いたものを月平均軌道、周期 1 年以下の摂動を取り除いたものを年平均軌道と呼ぶ。

平均軌道は、静止衛星や地球観測衛星の軌道保持を行なう時に便利な軌道である。軌道保持には、保持精度要求があり、それ以下の周期的な軌道変動は無視して良い。軌道保持を考える時、保持精度要求より小さい振幅

の周期摂動を取り除いた平均軌道を使うと便利である。短周期摂動の解析的導出は比較的簡単であるが、それ以上の周期摂動の導出は、解析的には難しいことが多い。

静止気象衛星「ひまわり」の1号機を打ち上げる時(1977年)、米国 Hughes 社(現ボーイング社)から軌道運用ソフトウェアが NEC を経由して導入された。その中に KEEP という軌道保持計画ソフトがあり、平均軌道を用いていた。その導出法は、接触軌道を1ヶ月間軌道伝播して、複数の周期項を含む式にフィッティングする方法であった。平均軌道の伝播には、毎年更新する必要のある各周期項の振幅と位相を用いる。KEEP を使う時は、いつも初期接触軌道に対して、処理時間の掛かる1ヶ月間の軌道生成が必要であった。

広田正夫氏と私は、平均軌道を解析的に求める事を可能にして、KEEPLAN という新しい軌道保持計画ソフトを開発した。平均軌道の伝播は、摂動理論から求めた平均要素の変化率を1日刻みで数値積分する事で行なっている。KEEP に比べて処理速度が高速になり精度も向上した。1981年打上げの「ひまわり」2号機から使用している。

1987年に打ち上げられた我が国初の地球観測衛星 MOS-1 の打上げに備え、OMS という軌道保持計画ソフトを開発した。この設計方針も、平均軌道を用いて軌道保持計画を作成するものであった。軌道長半径の短周期項  $a$  を完全に解析的に求めるのは、実際に使う時の計算量の観点からも妥当とは思えなかった。固定した軌道長半径、離心率、傾斜角の下で、 $a$  を算出する係数群を事前に求めておく方式を採用した。平均軌道の  $a$  の誤差は1mを切る。

今までは、摂動理論に基づいて主に解析的に短周期項を求めてきた。今後は、特に地球観測衛星において、オンボードでの自律軌道保持制御が使われて行くと考えられる。ヒドラジン・スラスタによるインパルスの軌道制御であれば、今までの解析的な取扱が可能であるが、超低高度衛星のように電気推進系をほぼ常時噴射して飛行する衛星の場合、摂動源の中に電気推進系の推力も加わる事になる。これは、解析的には扱い難いため、軌道1周に亘り GPS 受信機(GPSR)から得られる細かい間隔(1~10秒程度)の接触軌道を単純平均する事で平均軌道を求める事が行なわれるであろう。なお、平均軌道長半径の把握には、この単純平均よりも赤道面通過時刻から得られる交点周期を用いる方が高精度である。

## 2.4 ラグランジュの惑星方程式

摂動力が保存力の場合、摂動関数<sup>\*</sup>)を使ったラグランジュの惑星方程式で、軌道要素の変化率を表わすことができる。以下の式である。

$$\begin{aligned}
 \frac{da}{dt} &= \frac{2}{na} \frac{\partial R}{\partial M} \\
 \frac{de}{dt} &= \frac{1-e^2}{na^2e} \frac{\partial R}{\partial M} - \frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2e} \frac{\partial R}{\partial \omega} \\
 \frac{di}{dt} &= \frac{\cot i}{na^2\sqrt{1-e^2}} \frac{\partial R}{\partial \omega} - \frac{1}{na^2\sqrt{1-e^2}\sin i} \frac{\partial R}{\partial \Omega} \\
 \frac{d\Omega}{dt} &= \frac{1}{na^2\sqrt{1-e^2}\sin i} \frac{\partial R}{\partial i} \\
 \frac{d\omega}{dt} &= \frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2e} \frac{\partial R}{\partial e} - \frac{\cot i}{na^2\sqrt{1-e^2}} \frac{\partial R}{\partial i}
 \end{aligned} \tag{2.4-1}$$

$n$  : 平均運動( $=\sqrt{\frac{\mu}{a^3}}$ )

$$\frac{dM}{dt} = n - \frac{2}{na} \frac{\partial R}{\partial a} - \frac{1-e^2}{na^2e} \frac{\partial R}{\partial e}$$

$\mu$  : 地心重力定数(  $3.986 \times 10^{14} \text{m}^3/\text{s}^2$  )

\*)摂動関数とは

天体力学では、通常の物理学で使われるポテンシャルとは符号が逆のものをポテンシャル  $U$  として用いる慣例がある。二体問題の場合の天体力学でのポテンシャルは次式のように負号が付かない。

$$U = \frac{\mu}{r} \quad (2.4-2)$$

保存力の摂動が有る場合、ポテンシャルは以下のように表わされ、 $R$  を摂動関数と呼ぶ。

$$U = \frac{\mu}{r} + R \quad (2.4-3)$$

摂動関数や(2.4-1)式については、参考文献(1)に書かれているが、結果のみである。(2.4-1)式の導出は、参考文献(2)に記した。

### 3. 軌道決定誤差

本章では、軌道設計において必要となる場合のある軌道決定誤差を、代表的な幾つかの軌道に対して整理する。

#### 3.1 中高度軌道の決定誤差(1 周波 GPSR による自律航法の場合)

中高度衛星の軌道決定は、今後は搭載した GPSR による自律航法がメインになると考えられる。高度 200km 前後を飛行する超低高度衛星に対する、1 周波 GPSR(搬送波位相は使わない)による自律航法の精度<sup>50)</sup>を、表 3.1-1 に示す。中高度軌道の決定誤差も同程度と思われる。

表 3.1-1 1 周波 GPSR による超低高度軌道の自律航法誤差

表 3.1-1 は、カルマン・フィルターによる 10 秒毎の推定値の誤差であるが、**毎週の降交点通過時刻の計測から得られる 1 周平均の軌道長半径の誤差は、1m 以下と高精度である。**

	平均誤差	標準偏差
位置誤差(m)	21	13
速度誤差(m/s)	0.006	0.24
長半径誤差(m)	37	79
傾斜角誤差(deg)	0.000013	0.00019

#### 3.2 中高度衛星の精密軌道決定誤差(2 周波 GPSR の搬送波位相も利用する場合)

前節の航法誤差は、衛星バス運用には問題ないと思われるが、ミッションによっては更に高精度の軌道決定を要求するものがある。例えば、地図作成を目的の 1 つとしている **ALOS では、位置誤差 数十 cm 以下、速度誤差 1mm/s 以下の軌道決定がオフラインで**行なわれている。この目的のために、ALOS には 2 周波 GPSR が搭載され、搬送波位相も用いている<sup>51)</sup>。

#### 3.3 静止軌道の決定誤差(RARR による場合)

JAXA の現状として、データ中継衛星 DRTS の軌道決定誤差を記すと、**位置誤差 300m 程度、速度誤差 0.05m/s 程度**である。S バンドの RARR により決定されている。

1995 年の文献<sup>52)</sup>によると、NASA の TDRS も S バンドの RARR によって軌道決定されており、位置推定誤差は

30～40mである。TDRSの方が約10倍高精度である。日本は国内局のみを使って決定しているが、TDRSはNew Mexico、Australia、American Samoa、アセンション島の4ヶ所の追跡局を使用しており、計測誤差に対する感度が大きく異なる。それが大きく影響していると考えられる。TDRSの速度誤差は、文献52)には記載されていないが、位置誤差にほぼ比例すると考えられるので、約5mm/sであろう。

### 3.4 L1, L2 点軌道の決定誤差(RARRによる場合)<sup>53)</sup>

ラグランジュ点軌道の軌道決定は、LEO(Low Earth Orbit)の軌道決定とは異なり、ダイナミクスからの寄与が小さい。そのため、たくさんの軌道計測期間と tracking data が必要である。

今までの殆どのラグランジュ点ミッションは、GSFCが支援し、軌道決定はDSNのコヒーレント・ドップラーも使った RARR データを用いて行なわれて来た。この場合の軌道決定誤差は、以下の様に整理できる。

**地上局で Range と 2way Doppler のデータを取得する方法では、1つの局を使用し、毎日1時間程度の tracking を20日間ほど行なう事で、位置誤差で数km、速度誤差で数mm/sの軌道決定精度が期待できる。**

DSNの運用負荷が大きくなっており、今後は、今まで通りDSNが面倒を見るのは困難な情勢である。代案として、DSNへの負担を減らす事のできる先進技術の適用が検討されている。例えば、オンボード軌道決定(CelNav:Celestial Navigator、CelNavはone-way forward Doppler measurementsとonboard attitude sensor dataを処理するカルマン・フィルター)やDOR(VLBI Delta Differenced One-Way Range)など。

### 3.5 惑星間軌道の決定誤差

惑星間を飛行する宇宙機の位置決定においては、レンジ・データだけでは宇宙機方向の推定が困難であり、**地球自転に伴う coherent doppler の変化を利用して、それを推定している**<sup>54)</sup>。然しながら、coherent dopplerによる軌道決定では、地球から見た宇宙機方向の赤緯 $\delta$ がゼロ付近になると、軌道決定誤差が大きくなる。図3.5-1を参照。

一方、DOR(Delta Differential One-way Range)というVLBIの方法を使用すれば、図3.5-1に示すように、1970年代末の時点で、50nradの誤差で宇宙機方向を推定できた。

NASAは、1999年にMars Climate Orbiterを火星周回軌道に入れるのに失敗した事を契機に、DORの精度向上と惑星ミッションへの利用を積極的に進めた<sup>56)</sup>。Mars Climate Orbiterでは、コスト削減のためにDORを使用しなかった。

2001 Mars Odyssey missionでは、DORも使い5nradレベルの精度を出し、Mars Exploration RoversやMars Reconnaissance Orbiterでは、2nradレベルの精度を実現している<sup>57)</sup>。

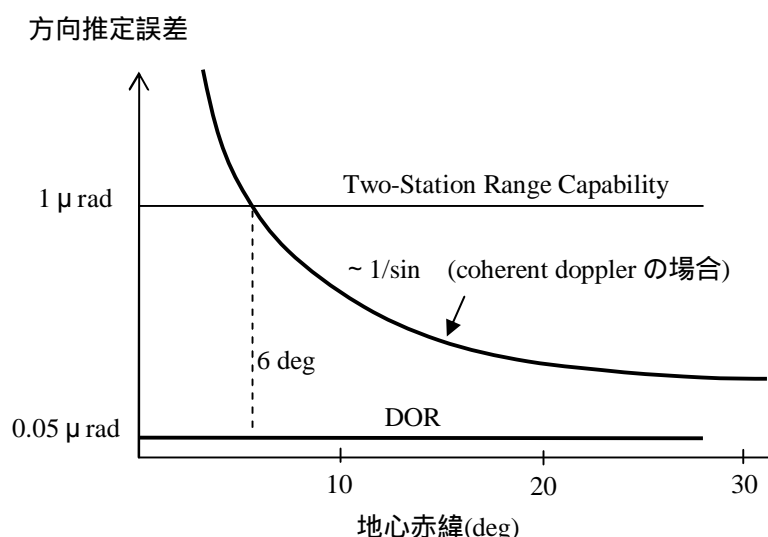


図 3.5-1 地上からの電波計測による宇宙機方向の推定誤差 (文献55)より)

## 4. 軌道の制御

本章では、軌道制御の検討においてしばしば使われるガウスの惑星方程式を紹介し、それを用いてインパルス制御による軌道要素の変化を説明する。更に、推力が微小になった場合の制御効率についても述べる。swingbyによる軌道制御は、5.11 節の「木星 swingby 利用の太陽極軌道」の所で簡単な説明をするが、詳細は文献(3),(4)等を参照。

### 4.1 ガウスの惑星方程式<sup>3)</sup>

大気抵抗のような非保存力による摂動を受ける場合、2.4 節のラグランジュの惑星方程式は適用できない。その場合は、本節で述べるガウスの惑星方程式を使用する。スラスタ噴射の軌道制御による軌道変化にも使用できる。ガウスの惑星方程式は、図 4.1-1 に示す互いに直交する 3 方向の加速度により、ケプラー軌道要素がどのように変化するかを与えるものである。

衛星の位置ベクトル  $\mathbf{r}$  を  $r, f, z$  の円筒座標で表現すると(図 4.1-1 を参照)、 $(S, T, W)^T$  で表わされる加速度が次式で与えられるような摂動関数  $R(r, f, z)$  が、この位置ベクトルにおいて存在する。

$$\begin{pmatrix} S \\ T \\ W \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial R}{\partial r} \\ \frac{1}{r} \frac{\partial R}{\partial f} \\ \frac{\partial R}{\partial z} \end{pmatrix} \quad (4.1-1)$$

ケプラー軌道要素から成るベクトル  $\mathbf{K}$  を以下の様に定義すると、

$$\mathbf{K} = (a \ e \ i \ \Omega \ \omega \ M)^T \quad (4.1-2)$$

$\mathbf{K}$  による摂動関数  $R$  の微分は、次式で与えられる。

$$\left( \frac{\partial R}{\partial \mathbf{K}} \right)^T = \begin{pmatrix} \frac{\partial R}{\partial r} \\ \frac{\partial R}{\partial f} \\ \frac{\partial R}{\partial z} \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial \mathbf{K}} \begin{pmatrix} r \\ f \\ z \end{pmatrix} \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} \frac{\partial R}{\partial r} \\ \frac{\partial R}{\partial f} \\ \frac{\partial R}{\partial z} \end{pmatrix} \quad (4.1-3)$$

上式の最右辺の左側の行列は、以下のように求められる。

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial \mathbf{K}} \begin{pmatrix} r \\ f \\ z \end{pmatrix} \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} \frac{r}{a} & 0 & 0 \\ -a \cos f & \left( \frac{1}{1-e^2} + \frac{a}{r} \right) \sin f & 0 \\ 0 & 0 & r \sin(\omega + f) \\ 0 & \cos i & -r \sin i \cos(\omega + f) \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{ae \sin f}{\sqrt{1-e^2}} & \left( \frac{a}{r} \right)^2 \sqrt{1-e^2} & 0 \end{pmatrix} \quad (4.1-4)$$

(4.1-4)式を(4.1-3)式に代入すると、摂動関数のケプラー軌道要素による微分が次式で表わされる。

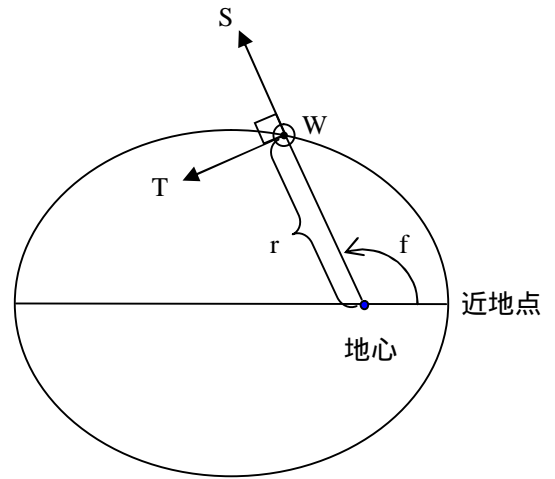


図 4.1-1 加速度の 3 成分



$$\begin{pmatrix} \frac{\partial R}{\partial a} \\ \frac{\partial R}{\partial e} \\ \frac{\partial R}{\partial i} \\ \frac{\partial \Omega}{\partial R} \\ \frac{\partial \Omega}{\partial e} \\ \frac{\partial \Omega}{\partial i} \\ \frac{\partial \omega}{\partial R} \\ \frac{\partial \omega}{\partial e} \\ \frac{\partial \omega}{\partial i} \\ \frac{\partial M}{\partial R} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S \frac{r}{a} \\ -S a \cos f + T \left( \frac{r}{1-e^2} + a \right) \sin f \\ W r \sin(\omega + f) \\ T r \cos i - W r \sin i \cos(\omega + f) \\ T r \\ S \frac{a e \sin f}{\sqrt{1-e^2}} + T \frac{a^2}{r} \sqrt{1-e^2} \end{pmatrix} \quad (4.1-5)$$

この式を 2.4 節のラグランジュの惑星方程式に代入すると、以下のガウスの惑星方程式が得られる。

$$\begin{aligned} \frac{da}{dt} &= \frac{2}{n\sqrt{1-e^2}} \left\{ S e \sin f + T \frac{a(1-e^2)}{r} \right\} \\ \frac{de}{dt} &= \frac{\sqrt{1-e^2}}{na} \{ S \sin f + T (\cos u + \cos f) \} \\ \frac{di}{dt} &= \frac{1}{na\sqrt{1-e^2}} W \frac{r}{a} \cos(\omega + f) \\ \sin i \frac{d\Omega}{dt} &= \frac{1}{na\sqrt{1-e^2}} W \frac{r}{a} \sin(\omega + f) \\ \frac{d\omega}{dt} &= \frac{\sqrt{1-e^2}}{nae} \left\{ -S \cos f + T \left( \frac{r}{a(1-e^2)} + 1 \right) \sin f \right\} - \cos i \frac{d\Omega}{dt} \\ \frac{dM}{dt} &= n - \frac{2r}{na^2} S - \sqrt{1-e^2} \frac{d\omega}{dt} - \sqrt{1-e^2} \cos i \frac{d\Omega}{dt} \end{aligned} \quad (4.1-6)$$

n: 平均運動  
u: 離心近点離角

(4.1-6)式を見ると、分母に e と i が現れる項がある。静止軌道のように e=0, i=0 が基準軌道の場合は、そのままでは適用が難しい。そこで、このような場合に使用される non-singular 要素を以下に示し、non-singular 要素に対するガウスの惑星方程式を記す。なお、non-singular 要素は、equinoctial 要素とも呼ばれる<sup>3)</sup>。

#### 4.1.1 e=0, i=0 のための non-singular 要素

静止軌道が代表的な軌道であり、non-singular 要素として幾つかの定義があるが、我々は以下の定義を用いている。

軌道長半径 : a

$$\text{離心率ベクトル: } \mathbf{e} = \begin{pmatrix} e_x \\ e_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = e \begin{pmatrix} \cos(\Omega + \omega) \\ \sin(\Omega + \omega) \end{pmatrix} \quad (4.1.1-1)$$

$$\text{傾斜角ベクトル: } \mathbf{i} = \begin{pmatrix} i_x \\ i_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} = \sin i \begin{pmatrix} \cos \Omega \\ \sin \Omega \end{pmatrix} \quad (4.1.1-2)$$

$$\text{平均経度 : } = + + M \quad (4.1.1-3)$$

#### 4.1.2 e=0, i=0 のための non-singular 要素

地球観測衛星の軌道の多くが、これに属する。この場合、我々は、以下の定義を用いている。

軌道長半径 : a

$$\text{離心率ベクトル: } \mathbf{e} = \begin{pmatrix} e_x \\ e_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = e \begin{pmatrix} \cos \omega \\ \sin \omega \end{pmatrix} \quad (4.1.2-1)$$

傾斜角 : i

昇交点赤経 :

$$\text{平均緯度引数: } \varphi = \omega + M \quad (4.1.2-2)$$

### 4.1.3 non-singular 要素に対するガウスの惑星方程式

以下に、 $e=0, i=0$  のための non-singular 要素の時間微分の式を記す<sup>5)</sup>。4.1.2 節の non-singular 要素に対する式は省略する。

$$\begin{aligned} \frac{da}{dt} &= -\frac{2}{n\sqrt{1-e^2}} \left\{ S e \sin f + T \frac{a(1-e^2)}{r} \right\} \\ \frac{d\xi}{dt} &= \frac{\sqrt{1-e^2}}{na} \sin(\Omega + \omega + f) S \\ &\quad + \frac{\sqrt{1-e^2}}{na} \left\{ (\cos E + \cos f) \cos(\Omega + \omega) - \left( \frac{r}{a(1-e^2)} + 1 \right) \sin(\Omega + \omega) \sin f \right\} T \\ &\quad - \frac{er}{na^2\sqrt{1-e^2}} \tan \frac{i}{2} \sin(\Omega + \omega) \sin(\omega + f) W \\ \frac{d\eta}{dt} &= -\frac{\sqrt{1-e^2}}{na} \cos(\Omega + \omega + f) S \\ &\quad + \frac{\sqrt{1-e^2}}{na} \left\{ (\cos E + \cos f) \sin(\Omega + \omega) + \left( \frac{r}{a(1-e^2)} + 1 \right) \cos(\Omega + \omega) \sin f \right\} T \\ &\quad + \frac{er}{na^2\sqrt{1-e^2}} \tan \frac{i}{2} \cos(\Omega + \omega) \sin(\omega + f) W \\ \frac{dp}{dt} &= \frac{r}{na^2\sqrt{1-e^2}} \{ \cos i \cos \Omega \cos(\omega + f) - \sin \Omega \sin(\omega + f) \} W \\ \frac{dq}{dt} &= \frac{r}{na^2\sqrt{1-e^2}} \{ \cos i \sin \Omega \cos(\omega + f) + \cos \Omega \sin(\omega + f) \} W \\ \frac{d\lambda}{dt} &= n - \frac{1}{na} \left( \frac{2r}{a} + \frac{e\sqrt{1-e^2}}{1+\sqrt{1-e^2}} \cos f \right) S + \frac{e\sqrt{1-e^2}}{na(1+\sqrt{1-e^2})} \left( \frac{r}{a(1-e^2)} + 1 \right) \sin f T \\ &\quad + \frac{r}{na^2\sqrt{1-e^2}} \tan \frac{i}{2} \sin(\omega + f) W \end{aligned} \quad (4.1.3-1)$$

(4.1.3-1)式において、 $e=0, i=0$  を代入しても問題ない。

### 4.2 インパルスの制御による軌道変化

non-singular 要素に対するガウスの惑星方程式において、 $e=0, i=0$  を代入すると、次式が得られる。

$$\frac{da}{dt} = \frac{2}{n} T \quad (4.2-1)$$

$$\frac{d\xi}{dt} = \frac{\sin \lambda}{na} S + \frac{2 \cos \lambda}{na} T \quad (4.2-2)$$

$$\frac{d\eta}{dt} = -\frac{\cos \lambda}{na} S + \frac{2 \sin \lambda}{na} T \quad (4.2-3)$$

$$\frac{dp}{dt} = \frac{\cos \lambda}{na} W \quad (4.2-4)$$

$$\frac{dq}{dt} = \frac{\sin \lambda}{na} W \quad (4.2-5)$$

$$\frac{d\lambda}{dt} = n - \frac{2}{na} S \quad (4.2-6)$$

上式に出て来る  $na$  は、円軌道速度に等しい。

(4.2-2)式と(4.2-3)式より、インパルス的な面内  $V$  による離心率ベクトルの変化は、図 4.2-1 のようになる。  $V_T$  の方が、2 倍の効率で離心率ベクトルを動かす事が分かる。

(4.2-4)式と(4.2-5)式より、インパルス的な面外  $V_w$  による傾斜角ベクトルの変化は、図 4.2-2 のようになる。

$V_s$  により、平均経度が変化する事も注意する必要がある。

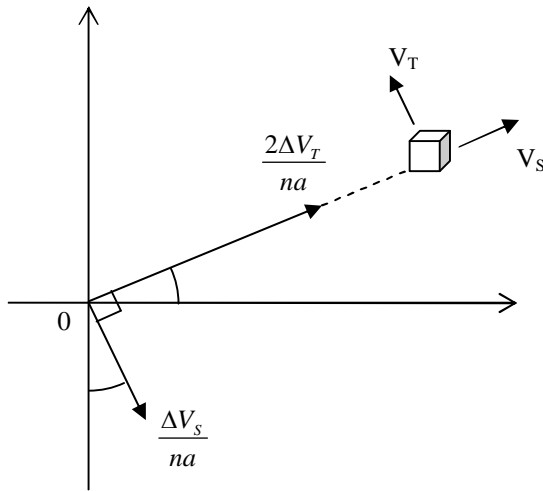


図 4.2-1 面内  $V$  による離心率ベクトルの変化

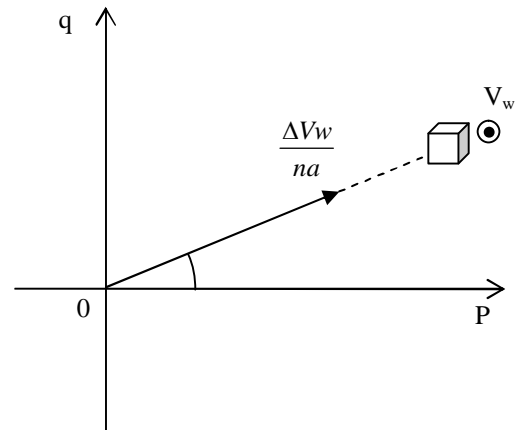


図 4.2-2 面外  $V_w$  による傾斜角ベクトルの変化

### 4.3 連続的な低推力制御の効率

本節では、推力が小さくなった場合の軌道制御の効率を述べる。

#### 4.3.1 軌道長半径の制御効率

ここでは、同じ面内の円軌道から円軌道への軌道変換を考える。(4.2-1)式から分かるように、軌道長半径を変えるには、 $V_T$  が必要である。2 つの円軌道の半径比  $r_2/r_1$  が 11.94 より小さい時、2 ホーマン移行が  $V$  最小解を与える<sup>3,4)</sup>。低推力で軌道長半径を変える時は、この 2 ホーマン移行に比べて、どの程度大きな  $V$  が必要になるかを評価する。本節では、低推力として、その極限の無限小推力を想定する。

半径  $r_1$  の円軌道から半径  $r_2$  の円軌道に 2 ホーマン移行するのに必要な  $V_H$  は、次式で与えられる。

$$\Delta V_H = V_1 \left( \sqrt{2 \left( 1 - \frac{1}{1+C} \right)} - \sqrt{2 \left( \frac{1}{C} - \frac{1}{1+C} \right)} + \frac{1}{\sqrt{C}} - 1 \right) \quad (4.3.1-1)$$

$C = r_2/r_1$

$V_1$ : 半径  $r_1$  の円軌道速度

無限小推力の場合は、次式の  $V_L$  が必要となる<sup>6)</sup>。

$$\Delta V_L = V_1 - V_2 = V_1 \left( 1 - \frac{1}{\sqrt{C}} \right) \quad (4.3.1-2)$$

$V_L$  と  $V_H$  の比は、次式で表わされる。

$$\frac{\Delta V_L}{\Delta V_H} = \frac{1}{(1 + \sqrt{C}) \sqrt{\frac{2}{1+C} - 1}} \quad (4.3.1-3)$$

図 4.3.1-1 に(4.3.1-3)式を描いた。高度 250km の低軌道から静止軌道までの移行の場合を示した。この場合、約 1.2 倍の増速量が必要と分かる。

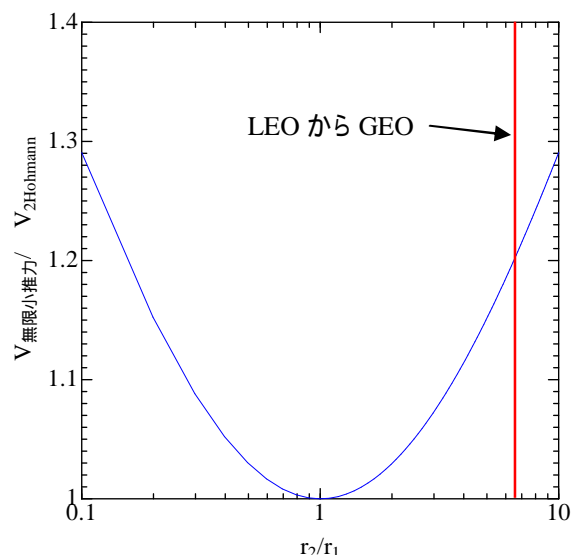


図 4.3.1-1 無限小推力による  $a$  制御の効率

#### 4.3.2 離心率ベクトルと傾斜角ベクトルの制御効率

低推力で離心率ベクトルを制御する場合、軌道 1 周に亘って推力を出し続けると、図 4.3.2-1 の赤円のように元に戻るだけになってしまう。角  $\theta$  の期間だけ噴射して、 $e_0$  から  $e_1$  に制御する場合の制御効率は、弦と弧の比で表わされ、次式となる。

$$\text{離心率ベクトル制御効率} = \frac{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}{\left(\frac{\theta}{2}\right)} \quad (4.3.2-1)$$

=180 度(=  $\pi$ ) だけ噴射しても、制御効率は 0.637 に留まる。

傾斜角ベクトルの制御効率も、(4.3.2-1)式で表わされる。

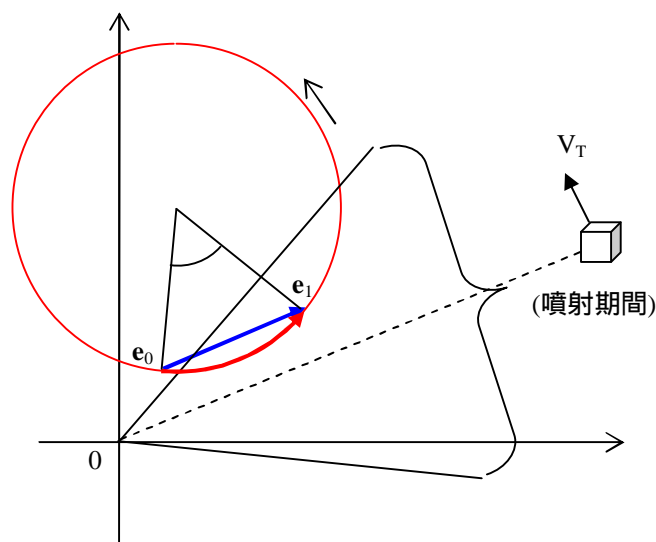


図 4.3.2-1 低推力による離心率ベクトルの制御

#### 4.4 軌道投入最終 $V$ におけるロケットと衛星の効率比較<sup>58)</sup>

ロケット能力に余裕があれば、ミッション軌道に衛星を直接投入して貰うのが良い。しかし、ロケット能力が不足して、ミッション軌道に直接投入出来ない場合もある。そのような場合、投入時の最後の  $V$  を衛星搭載推進系で実施する事により、ミッション軌道への投入が可能となる場合もある。本節では、どのような条件の時に、この事が可能になるかを検討した。

初めに、最後の  $V$  もロケットで実施する場合を考える。図 4.4-1 を参照。ロケット方程式で  $m_{FL}$  を求めると、

$$m_{FL} = (m_{PL} + m_{DRY}) \left\{ \exp\left(\frac{\Delta V}{gI_{SP}}\right) - 1 \right\} \quad (4.4-1)$$

となる。 $m_{PL}$  は衛星質量、 $m_{DRY}$  はロケット最終段の乾燥質量、 $m_{FL}$  は  $\Delta V$  を発生させるのに必要な燃料質量、 $I_{SP}$  はロケット最終段の比推力である。

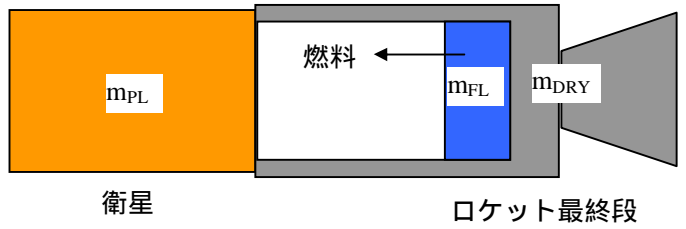


図 4.4-1 ロケット最終段と衛星

次に、同じ  $\Delta V$  を衛星分離後に衛星が実施する場合を考える。この場合は、図 4.4-1 の  $m_{FL}$  だけ衛星質量が大きいと考え、 $\Delta V$  発生のために  $m'_{FL}$  だけの燃料を使うと考える。図 4.4-2 を参照。この場合の  $m'_{FL}$  は、

$$m'_{FL} = (m_{PL} + m_{FL}) \left\{ 1 - \exp\left(-\frac{\Delta V}{gI'_{SP}}\right) \right\} \quad (4.4-2)$$

となる。 $I'_{SP}$  は衛星搭載推進系の比推力である。

$m'_{FL} - m_{FL}$  の正負により、どちらの推進系で  $\Delta V$  を発生させるのが、得策かが判る。正であればロケットで  $\Delta V$  を発生させるのが良いとなり、負であれば衛星で  $\Delta V$  を発生させるのが良いとなる。但し、衛星で  $\Delta V$  を発生させる時、タンクを大きくする必要がある等のマイナス要因があるが、ここではそれらは無視する。

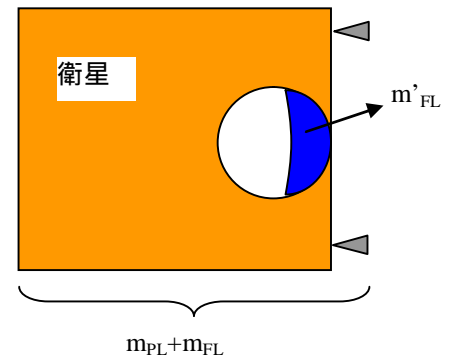


図 4.4-2 衛星で  $\Delta V$  を発生させる場合

(4.4-1)式と(4.4-2)式から  $m'_{FL} - m_{FL}$  を求めると、次式となる。

$$m'_{FL} - m_{FL} = m_{PL} - \left\{ (m_{PL} + m_{DRY}) \exp\left(\frac{\Delta V}{gI_{SP}}\right) - m_{DRY} \right\} \exp\left(-\frac{\Delta V}{gI'_{SP}}\right) \quad (4.4-3)$$

H2A ロケットを想定して、第2段  $I_{SP}=447$  秒、第2段乾燥質量  $m_{DRY}=3100\text{kg}$  を使用し(これらの値はH2Aのパネルレットによる)、 $m_{PL}=1600\text{kg}$ 、衛星搭載推進系の比推力  $I'_{SP}=220$  秒とした時の  $m'_{FL} - m_{FL}$  を  $\Delta V$  に対して描くと図 4.4-3 となる。例えば、 $\Delta V = 70\text{m/s}$  の場合は、衛星で軌道制御の方が約  $20\text{kg}$  の節約となる。この節約分は、衛星搭載タンクを大きくする必要等がなければ、衛星の機能追加に回す事ができる。

(4.4-3)式より、 $m'_{FL} = m_{FL}$  となる条件を求めると、次式が得られる。

$$\frac{I'_{SP}}{I_{SP}} = \frac{\frac{\Delta V}{gI_{SP}}}{\ln\left\{ \left( 1 + \frac{m_{DRY}}{m_{PL}} \right) \exp\left(\frac{\Delta V}{gI_{SP}}\right) - \frac{m_{DRY}}{m_{PL}} \right\}} \quad (4.4-4)$$

図 4.4-3 と同じ条件で(4.4-4)式をグラフにすると、図 4.4-4 となる。 $500\text{m/s}$  程度までの  $\Delta V$  では、衛星搭載推進系の比推力が  $170$  秒以上であれば、衛星側で軌道制御するのが燃料節約になる事がわかる。

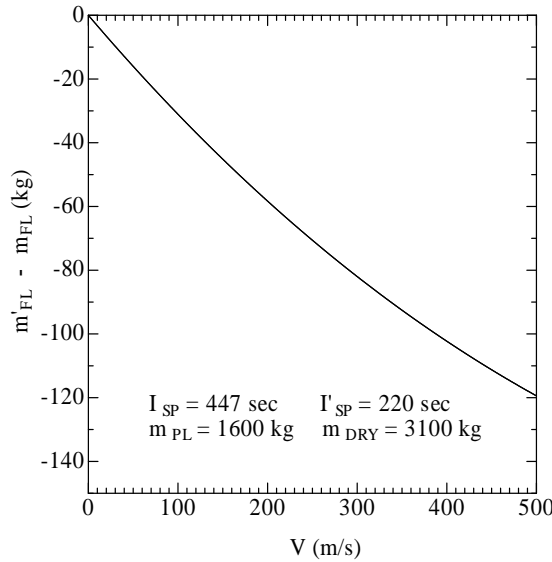


図 4.4-3 V に対する衛星とロケットの燃料消費量の差

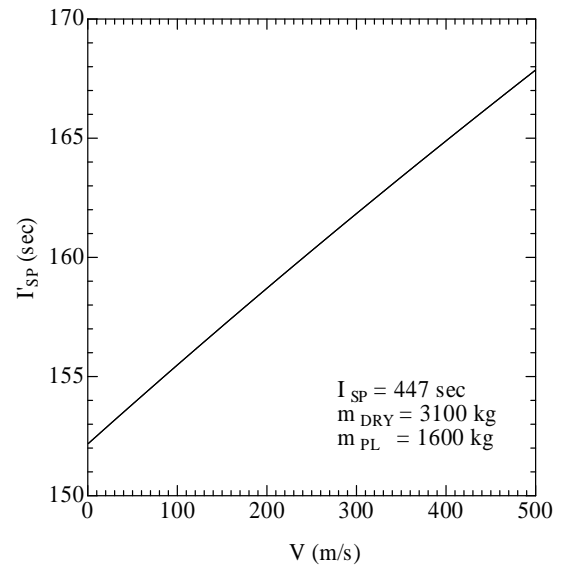


図 4.4-4 燃料消費量が一致する時の衛星推進系比推力

#### 4.5 準回帰軌道保持における制御周期、大気密度、保持精度の関係<sup>59)</sup>

高度 200km 程度の超低高度は電気推進系を使わなければ定常飛行は困難であるが、高度 300km 付近以上の軌道では、ヒドラジン・スラスタでも軌道保持が可能と思われる。因みに TRMM はヒドラジン・スラスタを使って高度 350km を保持していた。

高度 300km 付近をヒドラジン・スラスタで軌道保持する場合、その制御周期がどの程度短くなるかが気に掛かる。そこで、制御周期  $T_m$ 、大気密度、経度保持精度  $m$  の関係を検討した。

準回帰軌道を飛行する衛星の経度保持制御の制御周期  $T_m$  は、文献 19) の(7-11)式と(7-12)式を用いると、次式で表わされる。

$$T_m = 4 \sqrt{\frac{2a\Delta\lambda_m}{3\dot{\theta}_g |\dot{a}|}} \quad (4.5-1)$$

$m$ : 保持経度幅 ( $\pm m$  の範囲に保持)  
 $\dot{\theta}_g$ : 地球自転角速度 ( $7.2921150 \times 10^{-5} \text{ rad/s}$ )

高度低下率は次式で近似できるので(6.4 節を参照)、

$$|\dot{a}| = \frac{C_D S}{m} \rho V a \quad (4.5-2)$$

$m$ : 衛星質量  $S$ : 衛星断面積  $\rho$ : 大気密度

(4.5-1)式に代入すると、以下の式が得られる。

$$T_m = 4 \sqrt{\frac{2m\Delta\lambda_m}{3\dot{\theta}_g C_D S \rho V}} \propto \frac{1}{\sqrt{\rho}} \quad (4.5-3)$$

衛星形状、質量、保持精度要求が同じならば、制御周期  $T_m$  は、大気密度  $\rho$  の平方根に反比例する。高度 300km と 600km の大気密度の比は約 168 なので、高度 300km の衛星の制御周期は、高度 600km のその約  $\frac{1}{\sqrt{168}} = 0.077$  倍となる。高度 600km の衛星の制御周期が 5 日ならば、300km を飛ぶ衛星の制御周期は約 0.38

日となり、1 日に約 3 回の保持制御が必要になる。地上からのコントロールでこれを実現するのは困難であるが、GPSR を使用した自律航法・自律軌道制御を行えば可能である。自律軌道制御では、制御周期は軌道 1 周回まで短縮可能である。但し、**ヒドラジン・スラスタでは姿勢外乱が大きく、1 日に何度も制御すると、ミッション運用に支障が出かねない。イオンエンジンのような電気推進系を使用すれば、姿勢外乱なく保持制御を実施できる。**

更に、(4.5-3)式を  $\sigma_m$  について解くと、次式となり、

$$\Delta\lambda_m = \frac{3}{32} \dot{\theta}_g \frac{C_D S}{m} V \rho T_m^2 \propto T_m^2 \quad (4.5-4)$$

経度保持精度  $\sigma_m$  は制御周期  $T_m$  の 2 乗に比例する事が分かる。上記の例では、高度 300km の場合に、1 日 3 回の保持制御を 1 日 16 回(1 周の制御周期)にする事で、経度保持精度を  $(16/3)^2$ (=約 28)倍に向上する事もできる。

## 5. いろいろなミッション軌道の設計・解析

本章では、筆者が設計・解析した経験を持ついろいろなミッション軌道に対して、その概要を記す。詳細は、紹介する参考文献などを参照の事。

### 5.1 静止軌道(GEO: Geostationary Earth Orbit)

静止衛星は、アーサー・C・クラークが 1945 年に論文発表した事でも有名である。最初の静止衛星は、1964 年 8 月にアメリカが打ち上げた通信衛星・シンコム 3 号であり、その年の 10 月 10 日には、東京オリンピックの開会式を世界へと中継している。

静止軌道に有意な影響を与える摂動は、以下のものである。

- ・ 地球重力場の非球対称性
- ・ 太陽の潮汐力
- ・ 月の潮汐力
- ・ 太陽輻射圧

木星などの惑星の影響は、無視し得る。

上記の各摂動が静止軌道の軌道要素に及ぼす変動を以下に表の形にまとめる<sup>7,8)</sup>。

表 5.1-1 短周期摂動の振幅(周期は 1 日以下)

摂動源	軌道長半径 $a$ (m)	離心率ベクトル $e$	傾斜角ベクトル $i$ (deg)	直下点経度 (deg)
月の潮汐力	1000	5E-5	3E-4	0.002
太陽の潮汐力	500	2E-5	1E-4	0.001
輻射圧	30*	微小	微小	微小
$J_2$ 項	微小	4E-5	2E-5	微小

表 5.1-2 長周期摂動の振幅(周期は 1 ヶ月以下又は 1 年以下)

摂動源	ドリフトレート (deg/day)	離心率ベクトル $e$	傾斜角ベクトル $i$ (deg)
月の潮汐力	0.0014	4E-5	0.004
太陽の潮汐力	0.0006	微小	0.03
輻射圧	微小	2E-4*	微小

\* $C_R S/m=0.02m^2/kg$  の時( $C_R$ : 反射係数、 $S$ : 衛星断面積、 $m$ : 衛星質量)

表 5.1-3 永年摂動の大きさ

摂動源	ドリフトレート (deg/day)	傾斜角ベクトル $i$ (deg/year)
月の潮汐力	- 0.0045	0.6***
太陽の潮汐力	- 0.0021	0.3***
$J_2$ 項	0.0268	微小
non-zonal 項	経度に依存**	微小



長周期摂動及び永年摂動は、摂動関数  $R$  を平均近点離角  $M$  で平均して得られる平均摂動関数を(2.4-1)式の右辺の  $R$  として用いる事で評価できる。(2.4-1)式から分かるように、 $da/dt$  は  $M$  による微分で表わされ、平均摂動関数は  $M$  を含まないため、 $da/dt$  はゼロとなる。表 5.1-3 のドリフトレート  $\dot{\lambda}$  の non-zonal 項は、地球と衛星の運動が同期している事によって生じる  $a$  の共鳴現象の結果である。ドリフトレートの摂動は、 $a$  の摂動だけでなく、 $\lambda$ 、 $\dot{\lambda}$ 、 $M$  の長周期及び永年摂動によっても生じ、表 5.1-2、表 5.1-3 の月の潮汐力、太陽の潮汐力、 $J_2$  項のところ、それに相当する。

表 5.1-3 中の\*\*印の項は、地球重力ポテンシャルとの共鳴によって生じ<sup>1)</sup>、これによるドリフト加速度は次式で近似できる<sup>9)</sup>。これは、地球重力ポテンシャル係数として GEM-L2<sup>10)</sup>の(4, 4)までを使った場合である。

$$\ddot{\lambda} [\text{deg/day}^2] = -6.822 \times 10^{-4} \times \begin{pmatrix} -2.155 \sin 2\lambda - 1.252 \cos 2\lambda \\ + 0.114 \sin \lambda - 0.014 \cos \lambda \\ - 0.157 \sin 3\lambda + 0.307 \cos 3\lambda \\ + 0.009 \sin 4\lambda + 0.013 \cos 4\lambda \end{pmatrix} \quad (5.1-1)$$

(5.1-1)式の経度依存性を図 5.1-1 に示す。

経度  $\lambda$  の上空に静止し続けるために必要な年間制御量  $V_{EW}$  は、次式で近似できる<sup>3)</sup>。

$$\Delta V_{EW} [\text{m/s}] = 1037 \times \ddot{\lambda} [\text{deg/day}^2] \quad (5.1-2)$$

東経 140 度付近では年間 1.4m/s 程度の減速制御が必要と分かる。

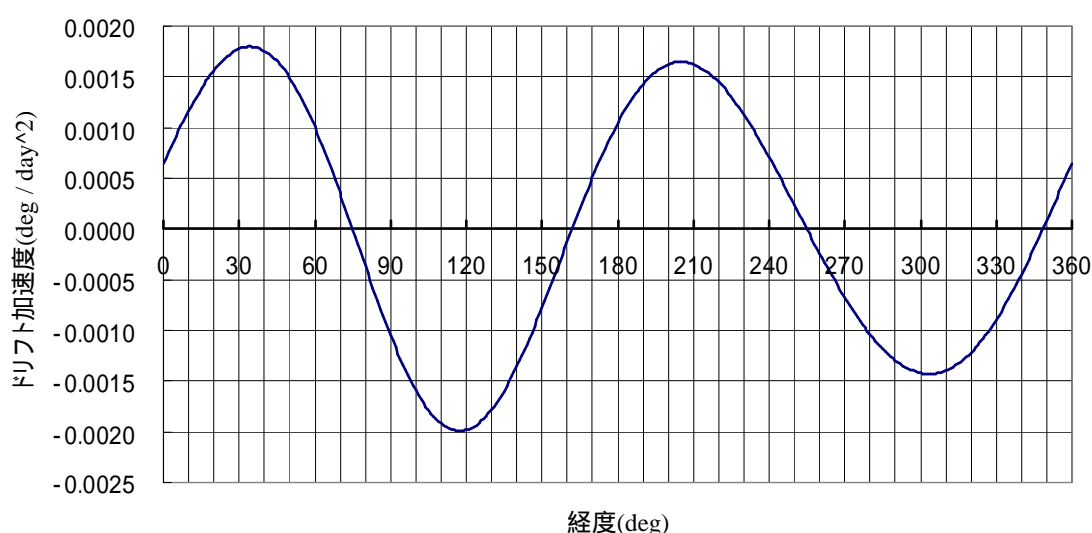


図 5.1-1 静止軌道のドリフト加速度

表 5.1-3 中の\*\*\*印の項は、次式の傾斜角の年変化率の定数項の内訳であり、0.859deg/year の約 2/3 が月の潮汐力、約 1/3 が太陽の潮汐力による事を示している<sup>8)</sup>。

$$\frac{di}{dt} [\text{deg/year}] = 0.859 + 0.098 \cos N - 0.008 \cos 2N \quad (5.1-3)$$

$N$ : 白道の黄道に対する昇交点経度( = 125.1deg 19.34deg/year  $\times$   $T$  )

$T$  は 2000 年 1 月 1 日からの年数

図 5.1-2 に 2000 年～2030 年の傾斜角の年変化率を描いた。

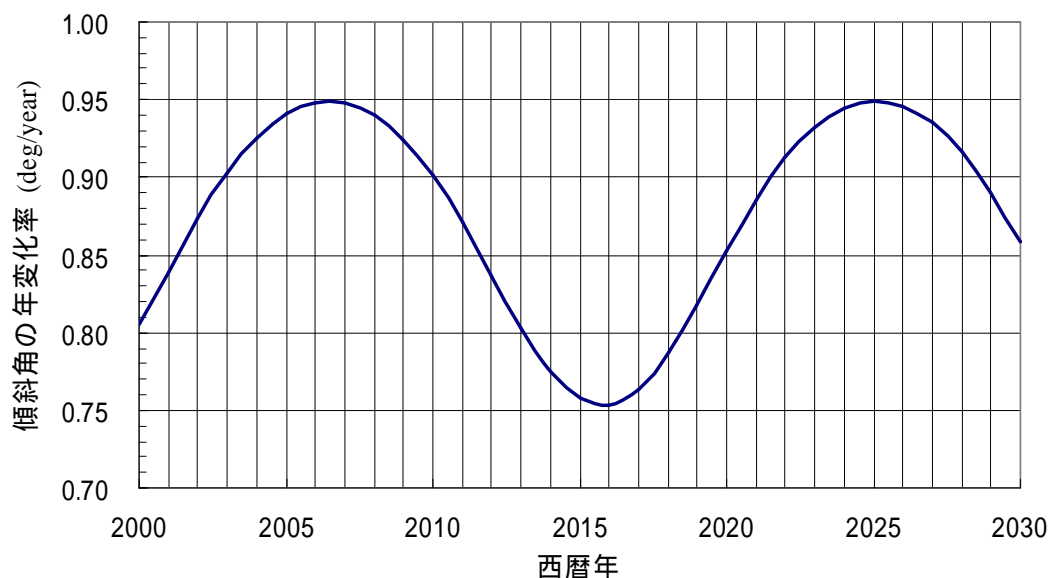


図 5.1-2 静止軌道面の年変化率

(5.1-3)式で表わされる軌道傾斜角の変化は、傾斜角ゼロ近傍における変化率であり、南北制御を行わない場合は、図 5.1-3 に示す変化をする。この変化は、 $i = 7.6\text{deg}^{(1)}$ ,  $\omega = 0\text{deg}$  を中心とするほぼ円に近い時計回りの運動であり、その周期は約 54 年である<sup>1)</sup>。

1983 年に打ち上げられた米国の追跡データ中継衛星 TDRS-1 は、25 年後の 2008 年も運用されており、軌道傾斜角は約 13 度になっている。TDRS-1 はスペースシャトルで低軌道に打ち上げられ、IUS(Inertial Upper Stage)という 2 段式固体ステージで静止軌道に投入される筈であった。ところが、IUS の不具合でかなり低い軌道に投入されたため、衛星搭載の 2 次推進系を使って静止軌道に入れられた。この

時、南北制御用の燃料を大量に消費したものと思われる。ほぼゼロ傾斜角に投入された後、25 年間放置されると、図 5.1-3 より 15 度位の傾斜角になり、現在の約 13 度という値と符合する。

その後 TDRS-1 は、通信機器が停止したため、2009 年 10 月に運用を終了した模様。

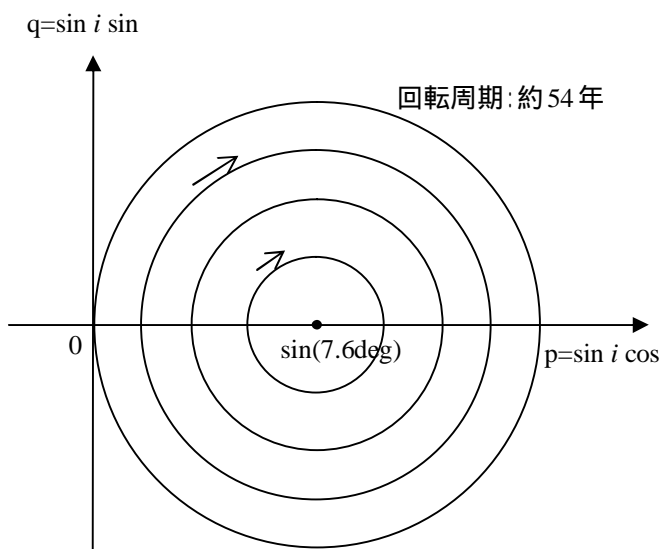


図 5.1-3 摂動による傾斜角ベクトルの動き

表 5.1-2 の輻射圧による離心率ベクトルの長周期摂動は、図 5.1-4 に示すような運動に因っている。太陽を指向する半径  $R_{SP}$  で 1 年周期の円運動である。 $R_{SP}$  は次式で近似できる<sup>7)</sup>。

$$R_{SP} = \frac{3C_R P S}{2\pi n_S m} \quad (5.1-4)$$

P: 輻射圧( $4.57 \times 10^{-6} \text{N/m}^2$ )

$n_S$ : 地球の公転角速度( $1.991 \times 10^{-7} \text{rad/s}$ )

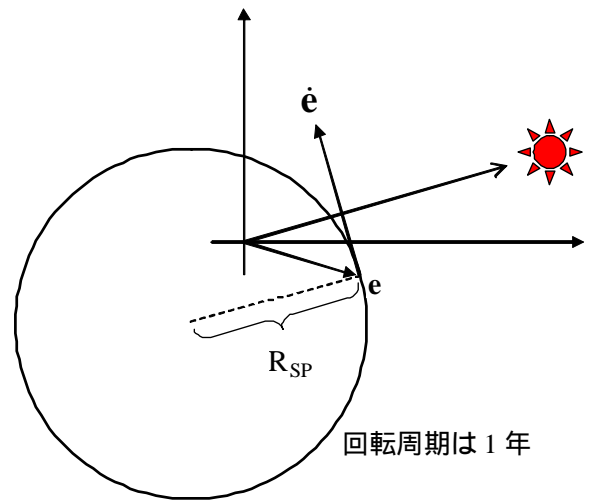


図 5.1-4 輻射圧による離心率ベクトルの回転

## 5.2 宇宙太陽発電システムの軌道間輸送とミッション軌道

2002 年に宇宙太陽発電システム(SSPS: Space Solar Power System)の LEO(Low Earth Orbit)から GEO への軌道間輸送とミッション軌道の検討に参加した。このミッションは、地上に 1GW の電力を送信できる宇宙太陽発電衛星を静止軌道で運用し、将来のエネルギー問題を解決しようというものである。以下に検討の概要を述べる。

### 5.2.1 SSPS の軌道間輸送<sup>5)</sup>

SSPS は低軌道で完全に組み立てられた後、静止軌道(GEO)まで電気推進系を用いて数ヶ月程度の期間をかけて運搬されると想定されていた。この電気推進系による低高度から GEO までの最適軌道変換を検討した。

LEO から GEO への軌道変換においては、地球による蝕、 $J_2$  項、放射線による太陽電池劣化の影響などを考慮する必要がある。この問題の解法として従来は間接法である変分法が用いられて来たが、摂動なども考慮すると非常に複雑となるだけでなく、随伴変数の初期値の設定も容易ではない。1998 年に、直接法である非線型計画法を使い、変分法の解と比べて誤差 1% 程度の準最適解が容易に得られる方法が示された<sup>12)</sup>。そこで、文献(12)の方法を適用して、GEO への軌道変換が、地球による蝕、 $J_2$  項、放射線による太陽電池劣化によりどのような影響を受けるかを検討した。

#### (1)基本的な解析方法

種子島射点から打ち上げられた LEO を初期軌道とすると、高度を静止高度まで上げると共に軌道傾斜角と離心率をゼロにする必要がある。つまり、燃料最小で  $a$ ,  $e$ ,  $i$  を目標値にする必要がある。これを実現するために、蝕期間以外は常に電気推進系の推力を発生させ、その推力方向を時々刻々変える事になる。推力方向として、 $a$  変化率最大、 $e$  変化率最大、 $i$  変化率最大となる 3 種類の推力方向を重み係数で融合したものを使用する。重み係数は、軌道変換期間中は緩やかに変化すると考え、軌道変換期間とそれを 20 等分した各時点における重み係数群を最適化パラメータとする非線型計画問題として定式化し、逐次二次計画法(SQP 法; Sequential Quadratic Programming Method)で解いた。

運動方程式は、(4.1.3-1)式の non-singular 要素のガウスの惑星方程式を用いた。軌道変換期間は数ヶ月にも及ぶため、通常の数値積分では時間が掛かり過ぎる。そこで、軌道 1 周のガウス積分で各要素の平均変化率を求め、それを 1～2 日刻みで積分する事で高速化する方法を使用した。

## (2)LEO(高度 550km, 傾斜角 28.5 度)から GEO への軌道変換の結果

静止軌道上 10 年後のセル保存率が 0.92(ETS-V のシリコン太陽電池より 5% 程度放射線に強い)という耐放射線を想定して、LEO から GEO への最適軌道変換を求めた。結果の概要を述べる。

図 5.2.1-1 に放射線の蓄積量とセル保存率の低下を示した。発電量が 60%にまで低下しており、電気推進系の推力も同じ比率で低下している。図 5.2.1-2 に、長半径と傾斜角の変化を示した。破線は、放射線による劣化を無視した場合であり、放射線の影響は大きい事が分かる。

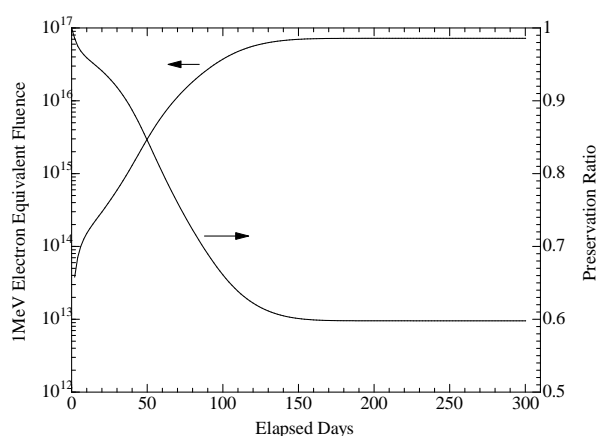


図 5.2.1-1 1MeV 電子等価 Fluence とセル保存率の変化

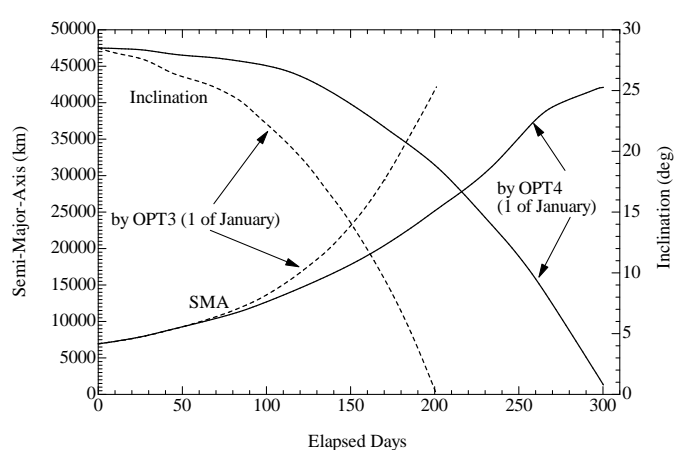


図 5.2.1-2 長半径と傾斜角の変化 (LEO からの移行)

図 5.2.1-3 に離心率の変化を示した。放射線を無視した場合に比べて、離心率がなかなか小さくならない。これは推力低下により移行期間が延び、170～270 日の間、蝕が発生しているためである。図 5.2.1-4 から、260 日以降にピッチ角振幅を 180 度にして離心率を下けている事が分かる。

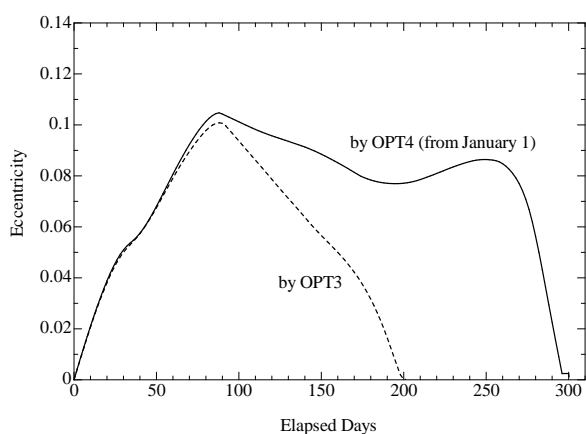


図 5.2.1-3 離心率の変化(LEO からの移行)

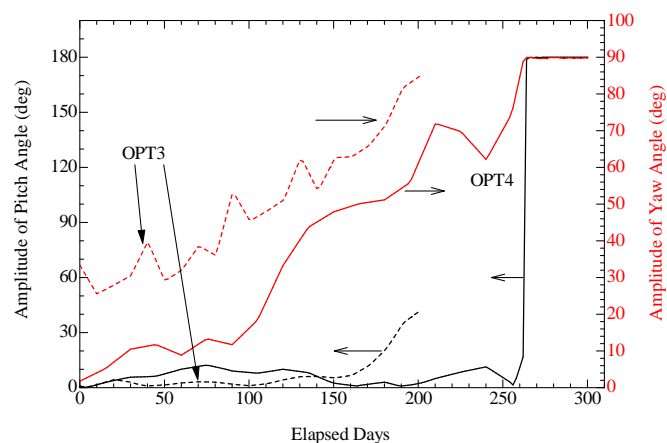


図 5.2.1-4 推力方向の振幅変化 (LEO からの移行)

### (3)組立軌道の検討結果

SSPS の打上げは、赤道に近いキリバス共和国のクリスマス島から行なうと想定し、RLV(Reusable Launch Vehicle)による投入軌道は、傾斜角ゼロの円軌道とした。そこから電気推進系により GEO に移行するが、RLV で打ち上げられた SSPS のコンポーネントをどの高度で組み立てるかが問題となる。これを考える上で、デブリと放射線が重要な要因となる。

高度 400km でのデブリ衝突頻度を ESA 開発のデブリ解析ソフト MASTER-2001 で検討した。10cm 以上のデブリとの衝突/ニアミスが 6 ヶ月間の組立期間中に約 2 回、1cm 以上のデブリは 10 個近く、1mm 以上のデブリは数千個も衝突する事が分かった<sup>13)</sup>。高度 400km での衝突頻度の 1/10 以下が必要と考え、図 5.2.1-5 より高度は 3000km 以上が要求される。

一方、放射線によるセル劣化は、図 5.2.1-6 より、高度 3000km ~ 11000km の範囲で致命的である<sup>14)</sup>。

以上の検討より、低軌道で SSPS を組み立てた後、電気推進系で GEO に運ぶという当初想定したシナリオは、大きな壁にぶち当たった。従って、筆者は、RLV で低軌道に打ち上げられた SSPS のコンポーネント(50トン程度)は、組み立てずにその単位毎に電気推進系で GEO に運び、GEO で組み立てるのが妥当と考えるようになった。

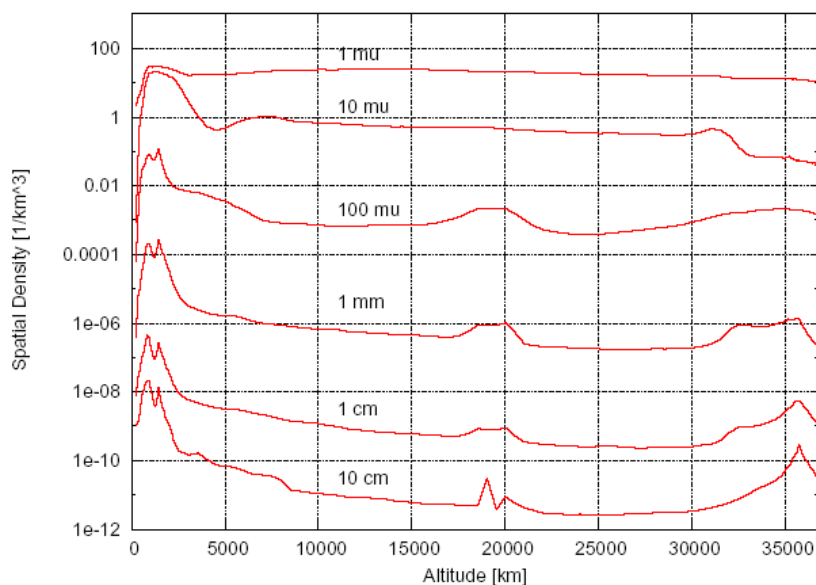


図 5.2.1-5 サイズ毎のデブリ空間密度

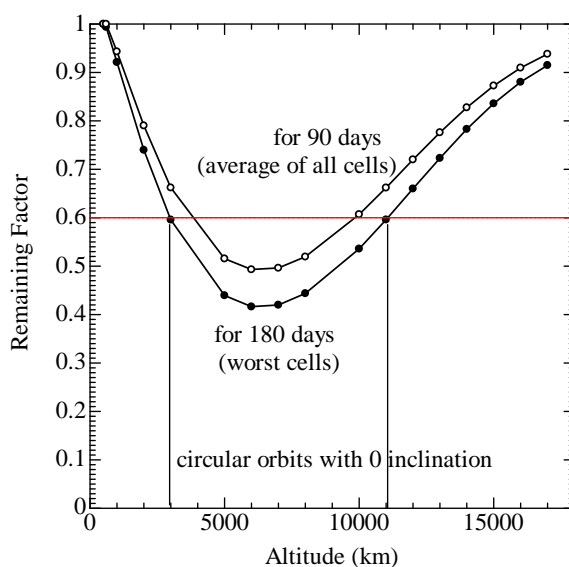


図 5.2.1-6 組立軌道 6 ヶ月間のセル劣化

### (4)SSPS 軌道間輸送時の推力方向制御<sup>15)</sup>

SSPS は傾斜角と離心率が共にゼロの LEO に投入され、そこから電気推進系により GEO に運ばれるため、推力方向制御の内、面外ヨー角はゼロに固定できる。一方、面内ピッチ角は離心率をゼロするために制御する必要があった。軌道間輸送中の離心率は、主に蝕のために増大し、その程度は打上げ時期によって変化する。図 5.2.1-7 に示すように、最大ピッチ角は打上げ日により約 30 ~ 70 度の変化がある。

組立前とは言え 50 トン程度もある大型衛星を每周回数数十度の振幅の姿勢運動させるのは問題が大きいと考えた。そこで、離心率をゼロにするための方法として、近地点近傍で推力をオフする事を考えた。衛星は常にピッチ

角ゼロを維持し、近地点付近で最適な期間だけ推力をオフする方法である。従来のピッチ角制御法に比べて、ペイロード質量の最大損失は 0.11% に過ぎない事を確認した。

### 5.2.2 SSPS のミッション軌道<sup>16,17)</sup>

SSPS のミッション軌道は、以前から静止軌道が想定されていた。筆者は、SSPS を静止軌道で運用した場合の問題点を 2 つの観点から検討した。一つはデブリ衝突の問題であり、もう一つは輻射圧による離心率ベクトルの周期摂動の増大の問題である。

MASTER-2001 を用いて静止軌道における SSPS へのデブリ衝突回数を解析した<sup>16)</sup>。表 5.2.2-1 に結果を示す。10cm 級デ

ブリは人工デブリが殆どであり、衝突速度は 1.5km/s を超えるものは少ない。1cm 級デブリは約 8 割を meteoroid が占める。2 割の人工デブリの衝

突速度は 1.5km/s 以下であるが、meteoroid の衝突速度は 5km/s ~ 30km/s と非常に高速である。1mm 級デブリは 99% が meteoroid であった。これだけのデブリ衝突が予測される静止軌道で、SSPS の運用を行なうのは、貴重な静止軌道の環境を大きく悪化させる恐れがあり、大きな問題と考えられる。

デブリという外的要因だけでなく、SSPS は断面積/質量という比が通常の静止衛星に比べて桁違いに大きいため、輻射圧による離心率ベクトルの 1 年周期摂動が大きいという問題がある。想定している 1GW 級の SSPS では、離心率は 0.026 に達すると予測される。離心率  $e$  が存在すると、直下点経度以下の振幅の 1 日周期の変動が生じる。

$$\Delta \lambda = 2e \text{ (rad)} \tag{5.2.2-1}$$

離心率が 0.0262 の時、 $\Delta \lambda = 3.0\text{deg}$  となる。つまり、輻射圧による離心率変化を制御しない場合、1 基の SSPS 当り約 6deg の経度幅が必要となる。保持制御により輻射圧の離心率摂動をキャンセルするには、1 年間当り約 340m/s の制御量が必要となる。これは南北制御量 50m/s の約 7 倍の大きさである。保持制御量の観点からも、狭い保持範囲を守る事が要求される静止軌道は、SSPS の運用軌道としては問題であろう<sup>17)</sup>。

文献(17)では、静止軌道より 2000km 程度高い軌道を提案した。東西制御、南北制御、離心率制御を全く行わない軌道である。この新軌道は、約 - 25 度/日のドリフト・レートを持つ。日本の上空に滞在中に電力を受信し、外国の上空では、その国の受電アンテナ(レクテナ)に電力を送信する。筆者は、SSPS は日本だけのミッションとは考えず、全世界に電力を供給するミッションと考えている。

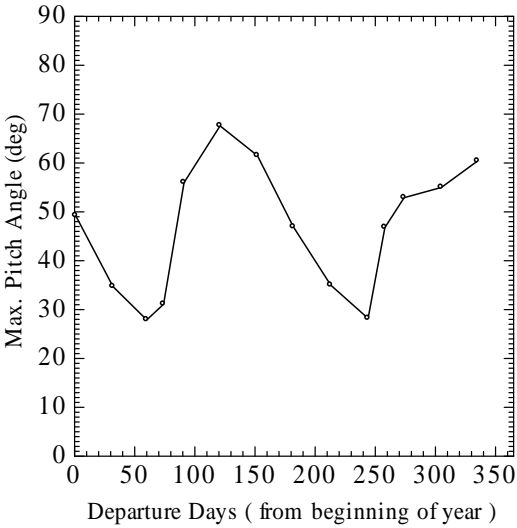


図 5.2.1-7 出発日による最大ピッチ角の変化

表 5.2.2-1 年間の衝突数(静止軌道の 1GW 級 SSPS)

コンポーネント	年間衝突回数		
	10cm 級デブリ	1cm 級デブリ	1mm 級デブリ
発送電/廃熱部	0.05 回	1.26 回	9800 回
レンズ(2 枚)	0.43 回	5.40 回	36900 回
1 次ミラー(2 枚)	0.68 回	8.14 回	56500 回
SSPS 全体	1.16 回	14.8 回	103200 回



### 5.3 オール電化静止衛星の遷移軌道<sup>18)</sup>

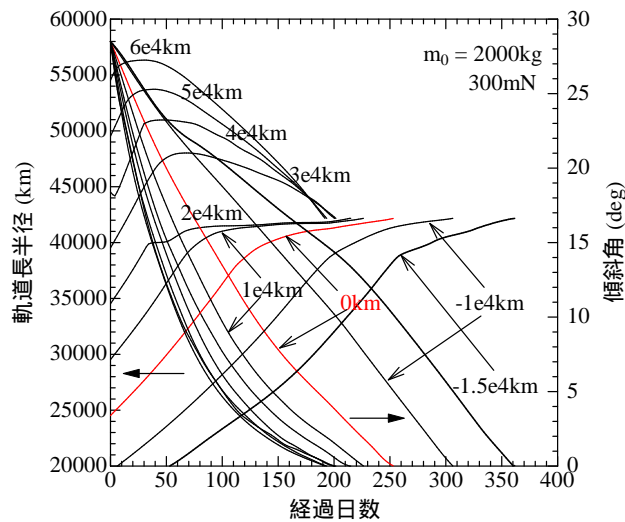


図 5.3-1 長半径と傾斜角の変化

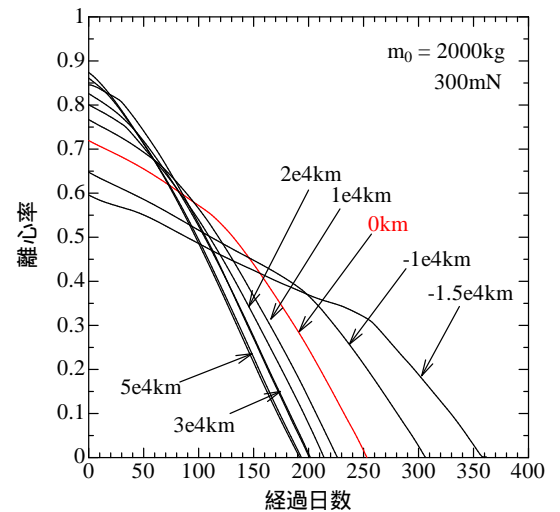


図 5.3-2 離心率の変化

現在の多くの静止衛星は、GTO(Geostationary Transfer Orbit)から GEO への軌道変換のための二液式推進系、南北方向軌道保持のための電気推進系、東西方向軌道保持及び姿勢制御のための一液式推進系、と 3 種類の推進系を搭載しており、複雑なシステムになっている。これらの推進系を比推力の高い電気推進系に 1 本化する事で、推進系の簡素化を図りつつ、ペイロード質量を増加させる事ができる。その場合に最も影響を受ける制御が、GTO から GEO への軌道変換である。LEO から出発する方がペイロード質量の増加は大きい、軌道変換に要する期間は長くなり、バンアレン帯の放射線の影響を大きく受ける。そこで、本検討では、GTO に近い軌道から GEO への軌道変換を対象とした。遠地点高度だけをパラメトリックに変更し、逐次二次計画法により解析した。5.2 節で述べた SSPS の軌道間輸送の解析で作成したソフトを微修正して用いた。SSPS とは異なり、打上げは種子島からとした。

出発軌道の遠地点高度を変えた場合の長半径と傾斜角の変化を図 5.3-1 に、離心率の変化を図 5.3-2 に示す。図中の数値は、遠地点高度から静止高度を引いたもの(以下  $R_a$  と呼ぶ)である。 $R_a > 0$  の場合は、super synchronous 軌道と呼ばれている。 $R_a$  が 2 万 km を超えると、SQP 法の制御変数を変更する必要が生じた。図 5.3-1 から分かるように、長半径変化が単調増加ではなくなるからである。

$R_a$  を大きくするほど、短期間に GEO に達する。しかし、 $R_a$  を大きくすると、H2A 202 の投入能力が落ちるため、GEO に投入できる質量は減少する。図 5.3-3 に  $R_a$  に対する GEO での有効衛星質量を示す。有効衛星質

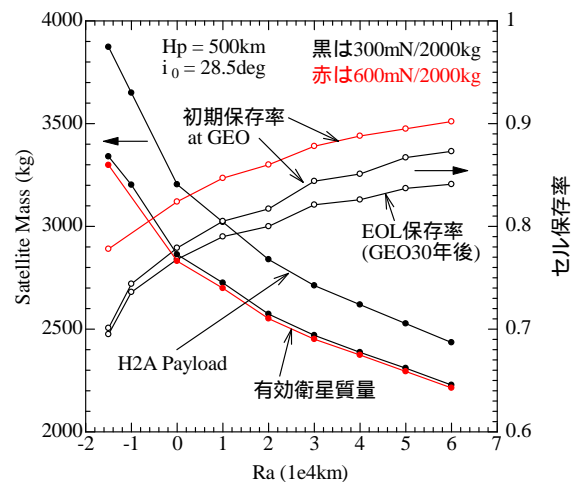


図 5.3-3  $R_a$  に対する有効衛星質量とセル保存率

量は、静止時の衛星質量からセル保存率減少分のパドル質量を引いたものである。

種子島からの打上げのために初期傾斜角が 28.5 度と大きい事、GTO からの出発である事のために、SSPS の軌道間輸送で述べた簡易なステアリング則は使えず、推力方向制御が複雑になる。ここまでの解析では、太陽光は常にパドルに垂直に入射すると仮定しているが、これを実現するのも容易ではない。

#### 5.4 地球観測軌道

地球観測軌道は、大きくは太陽同期準回帰軌道と太陽非同期軌道に分けられる。前者は、軌道面の太陽同期性と地上軌跡の準回帰性が求められる。代表例は ALOS(Advanced Land Observing Satellite)である。後者は、観測緯度範囲を確保しつつ、観測物理量の 24 時間変動をできるだけ短期間に観測する事が望まれている。観測量の日周変化を知るためである。準回帰性は求められない事が多い。代表例が TRMM(Tropical Rainfall Measuring Mission)である。

これらの地球観測軌道は、高度が約 350km ~ 1000km の円軌道が多い。

##### 5.4.1 太陽同期性<sup>19)</sup>

太陽同期性は地球重力場の  $J_2$  項による軌道面回転を利用して実現される。それは、次式で近似される。この式を用いれば、軌道高度を与える事で、必要な傾斜角を求める事ができる。

$$\dot{\Omega} = -\frac{3}{2} n \left( \frac{a_e}{a} \right)^2 J_2 \cos i = n_{SUN} \quad (5.4.1-1)$$

$a_e$  : 赤道半径(6378.137km)

$n_{SUN}$  : 地球の平均公転角速度

(2 / 365.25636 日 =  $1.99098661 \times 10^{-7}$  rad/s)

図 5.4.1-1 に高度と傾斜角のグラフを示す。

上式より、傾斜角  $i$  の摂動により、太陽同期性が乱される事が分かる。傾斜角は、地球重力場の non-zonal 項、月潮汐力によっても変化するが、周期的な変化であり、放置しても現時点では問題にはならない。保持制御が要求されるのは、太陽潮汐力による摂動であり、太陽同期軌道では太陽方向と軌道面の関係がほぼ固定されるために、次式で近似できる永年変化率を持つ。

$$\frac{di}{dt} = \frac{3}{4} \frac{n_{SUN}^2}{n} \sin i \left( 1 - \frac{1}{2} \sin^2 \varepsilon \right) \sin 2(\Omega - L_{SUN}) \quad (5.4.1-2)$$

: 黄道面傾斜角(23.44deg)

$L_{SUN}$  : 太陽の黄経

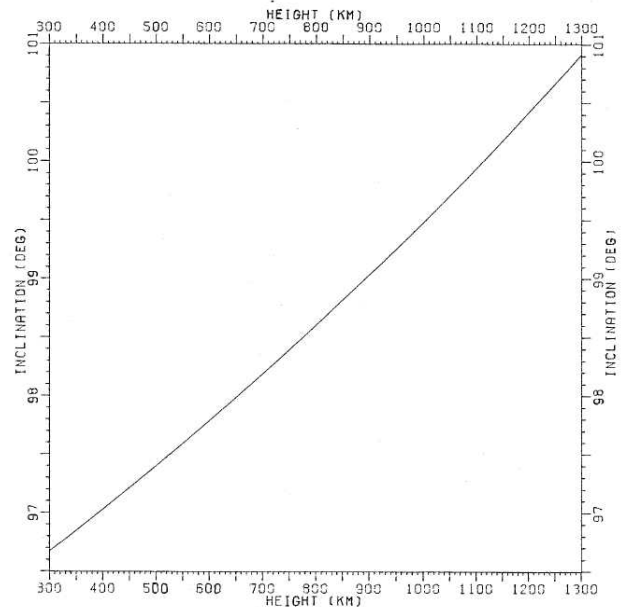


図 5.4.1-1 太陽同期軌道の高度と傾斜角

##### 5.4.2 準回帰性<sup>19)</sup>

以下の関係が満足される時、準回帰軌道となる。



$$\dot{\phi} = \left( N + \frac{L}{M} \right) (\omega_e - \dot{\Omega}) \quad (5.4.2-1)$$

N : 日周回数      M : 回帰日数      L : 日移動数

$\omega_e$  : 地球自転角速度 ( $7.2921150 \times 10^{-5}$  rad/s)

$\phi$  : 平均緯度引数 (=  $\phi + M$ )

N, M, L と傾斜角が与えられると、(5.4.2-1)式を解く事で、準回帰性を満たす軌道高度を求める事ができる。太陽同期準回帰軌道の場合は、(5.4.1-1)式と(5.4.2-1)式を連立して解く事で、軌道高度と傾斜角を求める事ができる。

図 5.4.2-1 と図 5.4.2-2 に太陽同期準回帰軌道の  $N+L/M$  と高度、傾斜角の関係を示す。

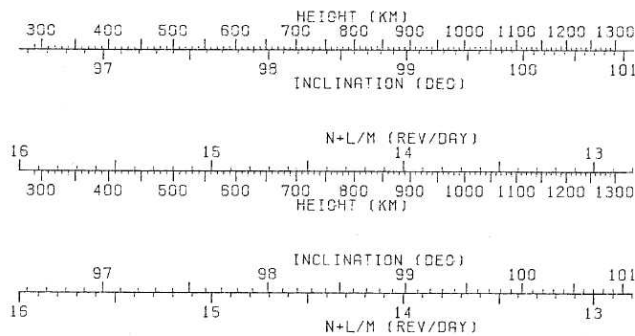


図 5.4.2-1 太陽同期準回帰軌道チャート

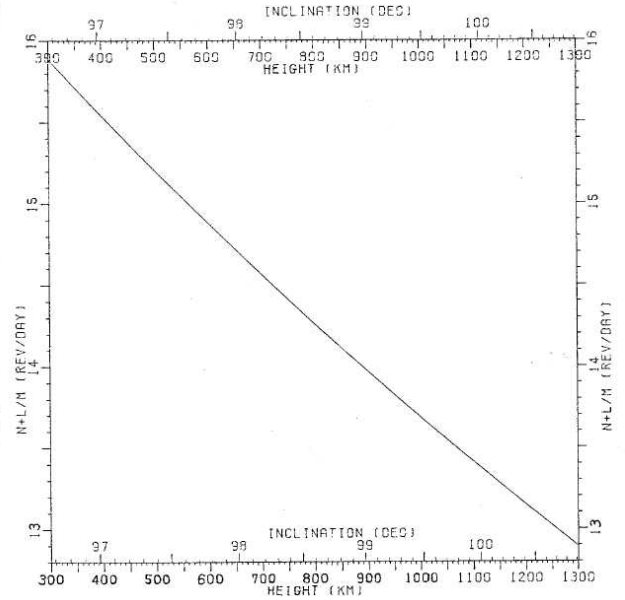


図 5.4.2-2 太陽同期準回帰軌道の高度と傾斜角

準回帰性を乱す最大の摂動は、大気抵抗による高度(軌道長半径)の低下である。それは、次式で近似できる。導出は 6.4 節を参照。

$$\frac{da}{dt} = -C_D \frac{S}{m} \rho V a \quad (5.4.2-2)$$

$\rho$  : 大気密度

$S/m$  : 衛星の断面積/質量比

上式の中の大気密度は、太陽活動の変動による 11 年周期変化、太陽自転による 27 日周期変化、太陽風の変動による 7~9 日周期変化、solar flare 等による突発的な変化がある。図 5.4.2-3 に変動も含めた大気密度グラフを示す。

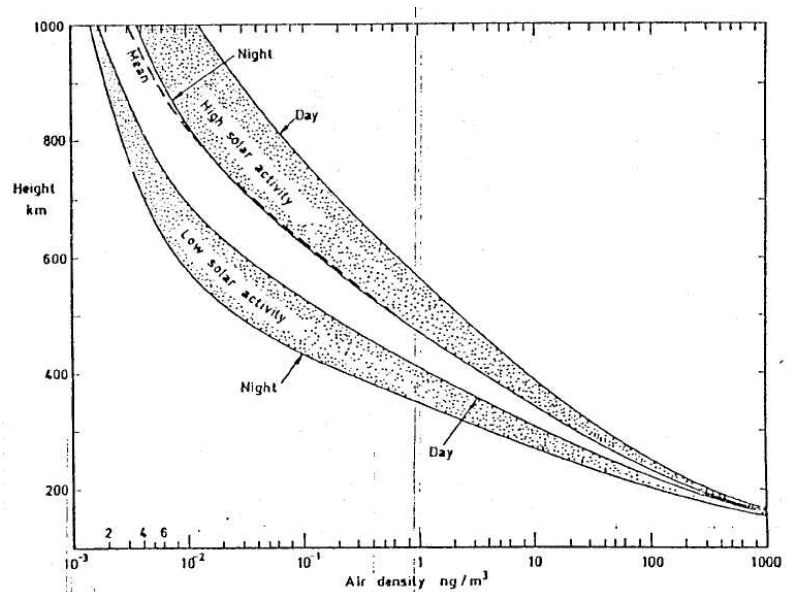


図 5.4.2-3 変動も考慮した大気密度

#### 5.4.3 1 周内の高度変動

地球観測ミッションにおいては、観測緯度毎に衛星通過時の高度はほぼ一定である事が望ましい。合成開口レーダのようなアクティブ・センサにおいては特にそうである。これを実現するには、平均高度の変動を小さく抑えた上で、平均離心率ベクトルの変動を抑える必要がある。地球重力場の非球対称性を利用する事で実現できる凍結離心率ベクトル(frozen eccentricity vector)がこれを可能にする。この軌道を凍結軌道(frozen orbit)と呼ぶ。最も簡単な  $J_2$ ,  $J_3$  項だけを考慮した凍結離心率ベクトルは、次式で近似できる<sup>19)</sup>。

$$\mathbf{e}_f = \begin{pmatrix} \xi_f \\ \eta_f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{2} \frac{J_3}{J_2} \frac{a_e}{a} \sin i \end{pmatrix} \quad (5.4.3-1)$$

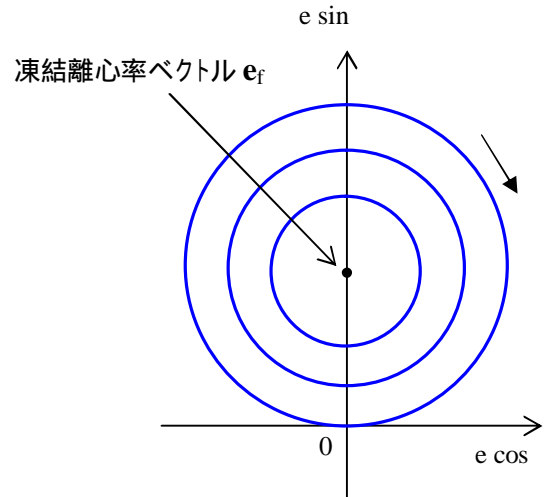


図 5.4.3-1  $J_2$ ,  $J_3$  項による平均離心率ベクトルの長期変化

平均離心率ベクトルは、図 5.4.3-1 に示すように、 $\mathbf{e}_f$  を中心とした円運動をする。回転周期は、高度に依存するが、100 日前後である。平均離心率ベクトルを  $\mathbf{e}_f$  の位置に合わせれば、変動がなくなる。

高精度の軌道保持にとっては、地球重力場の高次項および輻射圧の影響も無視できない<sup>20)</sup>。地球重力場の zonal 項の高次まで考慮した凍結離心率ベクトルの計算法は、文献(21), (22)を参照。

余談であるが、この凍結軌道を最初に考えた人は、G.E.Cook という人であり<sup>23)</sup>、1966 年の事らしい。この軌道を観測衛星に適用する事を最初に言及したのは、1977 年に論文<sup>24)</sup>を発表した E.Cutting 氏達であった。文献(24)は SEASAT への適用を記した論文である。SEASAT は 1978 年に打ち上げられた最初に SAR を搭載した衛星である。しかし、電源系の故障により運用期間は僅かに 100 日余りであった。

有名な LANDSAT 衛星も凍結軌道を採用しているが、3 号機の運用期間の終盤(1982 年 7 月頃)までは、まだ採用されていなかったようである。筆者が 1982 年 7 月の LANDSAT-3 の軌道を解析した時<sup>25)</sup>、平均離心率ベクトルが凍結離心率ベクトルから大きく外れていたからである。LANDSAT-3 の最後の頃か、LANDSAT-4 から採用したと思われる。日本では、1987 年に打ち上げられた我が国初の地球観測衛星 MOS-1 から凍結軌道を採用している。

凍結離心率ベクトルを採用すると、平均離心率ベクトル変動による高度変動はなくなるが、地球の極半径と赤道半径の差による高度変化や、地球重力場の扁平性( $J_2$  項等)に起因する短周期摂動による 1 周内の高度変動は残る。

地球重力場の  $J_2$  項、地球の扁平率、平均離心率を 1 次まで考慮した軌道 1 周内の高度変化は、次式で近似できる<sup>26)</sup>。

$$H = a - a_e + \frac{1}{2} a_e f \sin^2 i (1 - \cos 2\varphi) - a_e \cos(\varphi - \omega) + \frac{3}{2} \frac{a_e^2}{a} J_2 \left( \frac{1}{6} \sin^2 i \cos 2\varphi - 1 + \frac{3}{2} \sin^2 i \right) \quad (5.4.3-2)$$

$f$  : 地球の扁平率( 0.00335)

$\varphi$  : 平均緯度指数

運用当初の TRMM の軌道に対して、上式を適用すると、図 5.4.3-2 となる。高度変動幅は約 10km である。上の式の誤差は数十 m である。

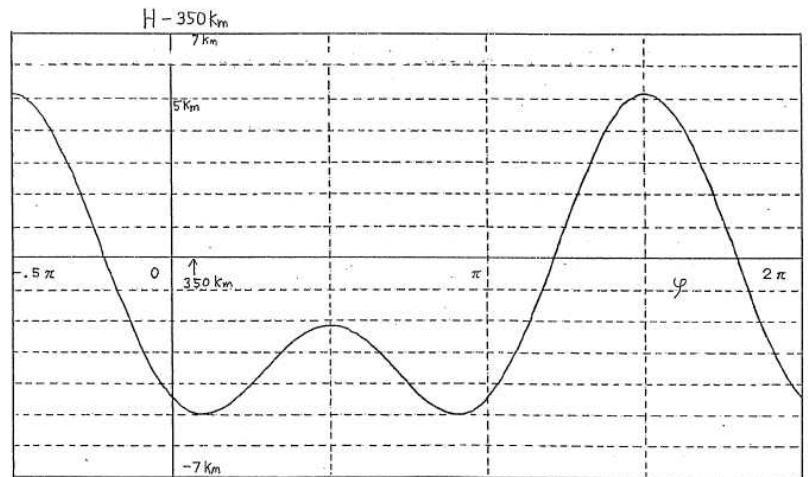


図 5.4.3-2 TRMM 軌道の 1 周内高度変化

## 5.5 超低高度軌道

衛星から地上付近(表面だけでなく、地下や地表付近の大気も含む)を観測する場合、一般に高度を下げる程、観測分解能は向上し、アクティブ・センサでは観測に要する電力は減少する。分解能は高度に比例し、アクティブ・センサの所要電力は高度の 2~3 乗に比例する。現状の観測衛星と同程度の性能を高度 180~200km の超低高度軌道で実現する場合、観測機器のサイズ、質量、電力消費を桁違いに小さくできる。更に、従来の高度 600km 程度から 10~20cm 分解能の観測をしようとする、極めて大口径の光学系(ハッブル宇宙望遠鏡の口径 2.4m クラス)が必要となるが、超低高度軌道からは、現実的なサイズの光学系で済む。

現在の地球観測衛星は、インパルス近似のできるヒドラジン・スラスタを搭載し、地上で作成する軌道保持計画に基づいて軌道保持されている。この方式で運用された最も低高度の地球観測衛星は、TRMM である。打上げから数年間は、高度 350km で運用された。打上げ前の予測では、太陽活動極大期においては、2 日毎の軌道保持制御が必要とされた。TRMM の高度は、この方式で運用できる下限に近いと考えられる。軌道決定、軌道保持計画作成もオンボードで行なう自律軌道保持方式を採用すれば、TRMM の高度でも運用負荷はかなり軽減される。毎日軌道保持制御を行なう事も可能となり、高度を 300km 程度まで下げる事もできよう。しかし、高度を 300km 程度まで下げる事ができても、ヒドラジン・スラスタ噴射による姿勢外乱は、高分解能の観測には適さない。この問題は、スラスタ推力を小さくする事で解決され、電気推進系の利用が考えられる。

上記の電気推進系を使いオンボードで自律軌道保持する方式が、地球観測衛星の今後の一つの流れと考えられる。この方式で保持できる高度の下限は、180km 程度である。ここでは、高度 180km の超低高度軌道について記す。超低高度軌道に特有な摂動は、極めて大きな大気抵抗である。高度 600km に比べて、大気密度は数千倍となる。この大気抵抗は、軌道長半径(高度)を大きく減少させるだけでなく、離心率や傾斜角にも大きな影響を与える。

### 5.5.1 大きな大気抵抗の離心率への影響(新凍結軌道の発見)<sup>27,28)</sup>

超低高度軌道において離心率が存在すると、大気抵抗により、遠地点高度の低下率が近地点のそれを上回るため、離心率はゼロ(円軌道)に向かう。この大気抵抗による離心率ベクトルの運動は、図 5.4.3-1 の  $J_2$

$J_3$  項による回転運動と釣り合い、図 5.5.1-1 に示す正の安定性を持つ点に収束する。この安定点 B を新凍結離心率ベクトルと名付け、この軌道を新凍結軌道と名付けた。

平均高度が適切に保持されれば、大きな大気抵抗は離心率ベクトルにとっては問題とはならない。大気抵抗が小さい時は、点 B は図 5.5.1-1 の青線領域の点 A に近づき、大気抵抗が大きくなると、点 B は原点 O に近づく。この変化は自動的に生じる。

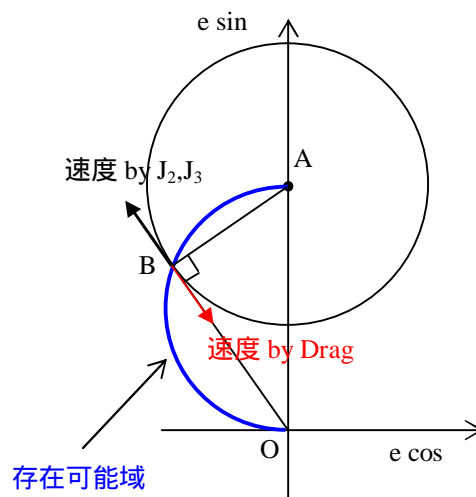


図 5.5.1-1 新凍結離心率ベクトルの存在可能域

### 5.5.2 大きな大気抵抗の傾斜角への影響

通常、大気抵抗の計算においては、大気は地球自転角速度と同じ角速度を持っていると仮定している。しかし、この事は必ずしも明確ではない。特に、高度 180 ~ 200km の超低高度領域においては、観測が殆どない。ここでは、大気も地球と同じ角速度で運動していると仮定する。

赤道上空においては、大気は慣性系に対して約 480m/s の速度を持っている。衛星は、赤道通過時にこの大きさの横風を受ける。この横風のために軌道傾斜角が減少する。高度 180km 程度では、年間 0.5 度程度減少する。衛星質量 500kg、断面積 × 抵抗係数  $C_D S$  が  $2\text{m}^2$ 、太陽活動極大期の場合である。(5.4.1-2)式の太陽潮汐力による傾斜角の減少(降交点地方時 10 時 30 分の軌道では、0.029 度/年)の約 17 倍と大きい。この傾斜角変化を打ち消すためには、衛星に緯度引数に応じたヨーステアリングを施す必要がある。然しながら、このヨーステアリングは、光学観測機器や SAR が要求するヨーステアリングとほぼ同じものであり、新たなコスト増無く横風に対応できる<sup>29)</sup>。

### 5.6 高高度略円極軌道

2003 年から国立天文台が主導する赤外線位置天文観測衛星(JASMINE: Japan Astrometry Satellite Mission for INfrared Exploration)の検討に参加した。ESA の GAIA が可視波長域で  $10 \mu\text{as}(\text{arc sec})$  の精度の観測をするのに対し、近赤外域で同程度の精度の観測を狙うミッションである。ミッション軌道は、GAIA と同じ高精度の天文観測に適した太陽 地球系 L2 点を想定していた。しかし、低コストで実現するための 1 手段として、L2 点よりも地球に近い軌道での観測も検討した。その候補の一つが、高高度略円極軌道(HCPO: High-altitude Circular Polar Orbit)であった。図 5.6-1 に HCPO の模式図を示す。

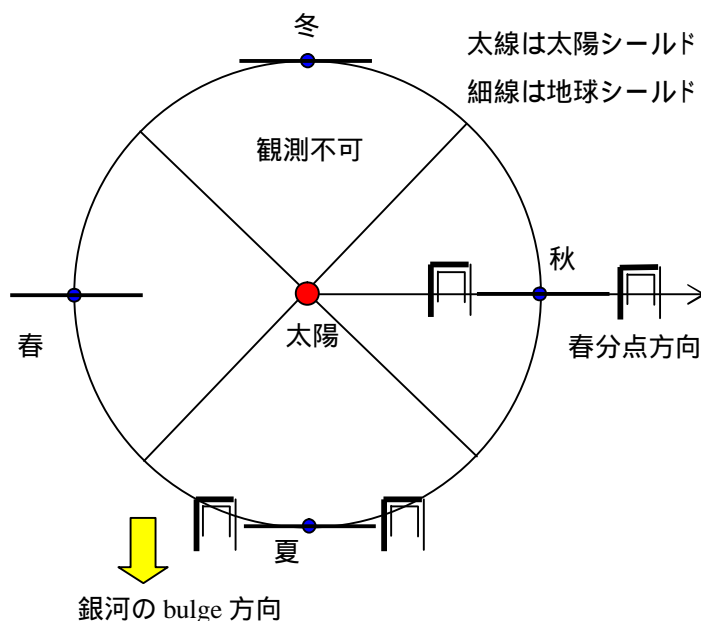


図 5.6-1 HCPO からの観測

軌道面は黄道面に垂直にする。

JASMINE は温度安定要求が厳しい宇宙機であり、蝕を嫌う。L2 点周りのリサージュ軌道では 6 年間蝕なしを実現できるが、もっと地球に近い軌道で蝕無しを実現する軌道の一つが HCPO である。図 5.6-2 において地球が角の範囲に存在する期間を T1、1 周の内図 5.6-3 の領域外に存在する期間を T2 とすると、

$$T1 < T2$$

であれば、蝕を避ける事ができる。更に、半年が HCPO 軌道周期の半整数倍(26.5 等)に近ければ、春と秋のどちらでも蝕を避ける事ができる。地心半径を約 14 万 km 以上とすれば、蝕を避けられる結果を得たので、半径 15 万 ~ 20 万 km の HCPO を候補とした<sup>30)</sup>。

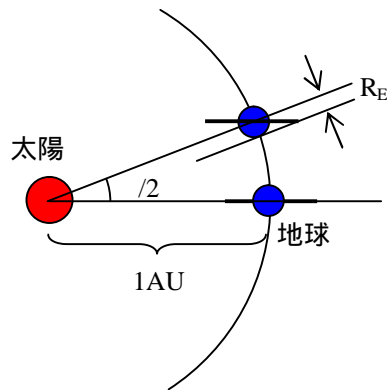


図 5.6-2 蝕に入る可能性のある地球位置

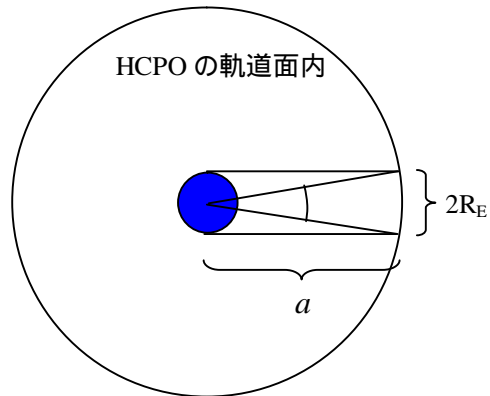


図 5.6-3 蝕に入る JASMINE 位置

上記の蝕なしを実現するには、月・太陽潮汐力による軌道面変化が小さい必要がある。潮汐力による永年項は、とにのみ存在し、次式で近似できる<sup>31)</sup>。

$$\frac{d\Omega}{dt} = -C_t \frac{1+3e^2/2}{\sqrt{1-e^2}} \cos i \quad i: \text{黄道面に対する傾斜角} \quad (5.6-1)$$

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{C_t}{\sqrt{1-e^2}} \left( 2 - \frac{5}{2} \sin^2 i + \frac{e^2}{2} \right) \quad (5.6-2)$$

$$C_t = \frac{m_s}{m_E + m_s} \frac{3n_s^2}{4n} \quad (\text{潮汐力による摂動の特性角速度})$$

$n_s$ : 摂動天体の平均運動     $m_s$ : 摂動天体の質量     $m_E$ : 地球の質量

黄道面に対する傾斜角を 90 度にすれば、(5.6-1)式より、は一定になる事が分かる。

15 万 ~ 20 万 km の HCPO を JASMINE に利用するには、離心率の長期変化も気になるので、離心率ベクトルの潮汐力による長期変化を先ず解析的に検討した。図 5.6-4 に離心率ベクトルの変動の傾向を示す。この変化は、次式のように指数関数で近似できる<sup>32)</sup>。

$$\exp\left(\frac{m_s}{m_E + m_s} \sqrt{\frac{27}{8}} \frac{n_s^2}{n} t\right) \quad (5.6-3)$$

数値積分による検討結果を図 5.6-5(離心率の長期変化)、図 5.6-6(軌道面の長期変化)に示す<sup>32)</sup>。0.1 程度までの離心率は許容できるとすれば、6 年程度は制御は不要である。軌道面の変化も問題ない。

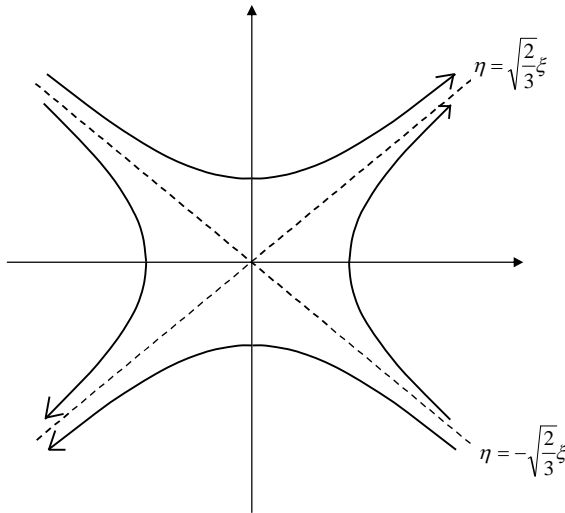


図 5.6-4 潮汐力による離心率ベクトルの長期変化の近似解

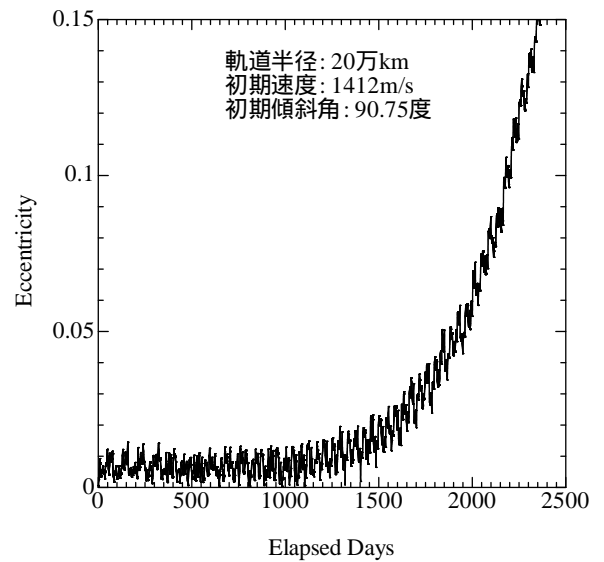


図 5.6-5 離心率の長期変化

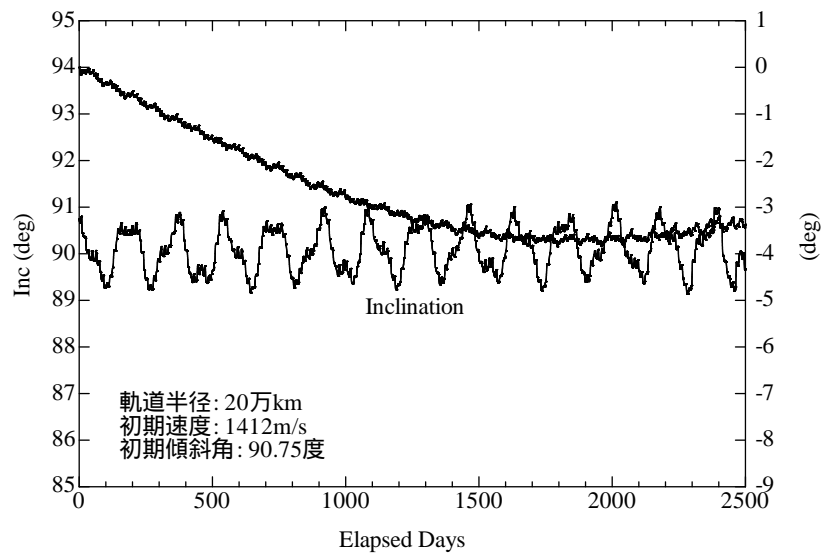


図 5.6-6 傾斜角と の長期変化

### 5.7 太陽 地球系 L2 点周り軌道<sup>3)</sup>

太陽 地球系 L2 点は、天文観測に邪魔になる太陽と地球が常に同じ方向に見えるため、天文観測ミッションに適した位置である。投入できるペイロード質量は、静止軌道より幾分大きいという利点もある。但し、L2 点周り軌道は原理的に不安定なため、数ヶ月毎に軌道保持制御が必要である。

図 5.7-1 に黄道面に投影した L1, L2 点周り軌道の模式図を示す。これらの点周りの軌道には、八

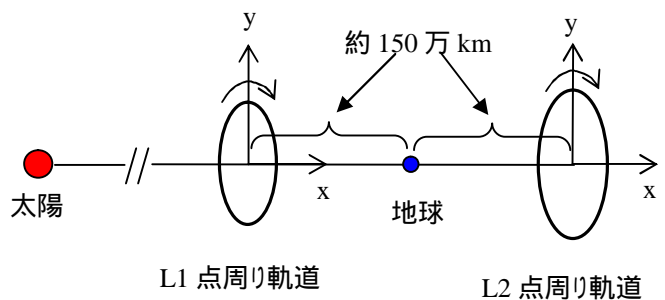


図 5.7-1 L1, L2 点周り軌道(黄道面への投影図)

ロー軌道とリサージュ軌道の 2 種類がある。黄道面への投影図では両者はサイズが異なるだけであるが(ハロー軌道の方が大きい)、黄道面に垂直な面への投影図で見ると、図 5.7-2 のように明確に区別できる。

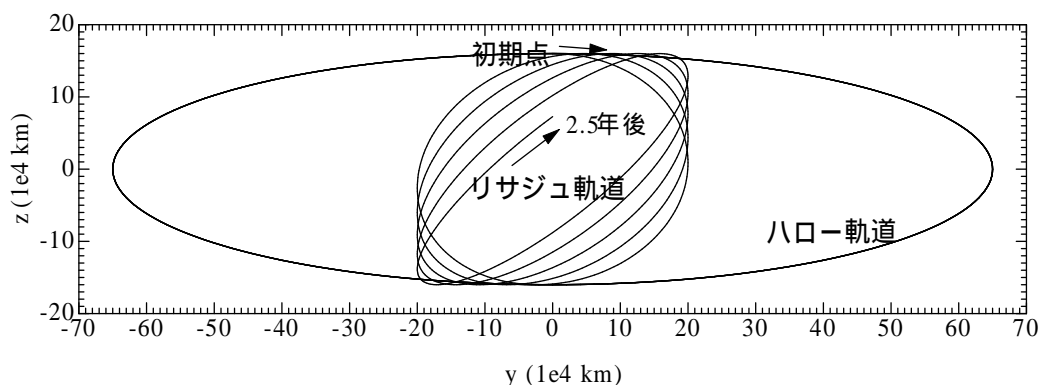


図 5.7-2 L1, L2 点周り軌道(黄道面に垂直な面への投影図)

#### 5.7.1 L2 点周り軌道の基本関係式<sup>33)</sup>

円制限三体問題の近似から得られる L1、L2 点周り軌道の運動方程式を以下に記す。座標系は図 5.7.1-1 を参照。

$$\begin{aligned}\ddot{x} - 2\dot{y} - (2B_L + 1)x &= 0 \\ \ddot{y} + 2\dot{x} + (B_L - 1)y &= 0 \\ \ddot{z} + B_L z &= 0\end{aligned}\tag{5.7.1-1}$$

$$\text{ここで、} B_L \equiv \frac{1-\mu}{(1 \mp p_L)^3} + \frac{\mu}{p_L^3} \quad (\text{複号の上は L1 点、下は L2 点の場合})$$

上式の  $p_L$  は、L1 点か L2 点かによって、図 5.7.1-1 に示した  $p_{L1}$  または  $p_{L2}$  の値を取る。z 成分は x、y 成分とは独立に単振動するだけである。x、y 成分の一般解は、次式の様に求められ、初期値を巧く選べば第 2 項以下の exponential 項をゼロにする事ができる。しかし、僅かな誤差があると exponential 項が生じて発散するため、L1、L2 点是不安定である。

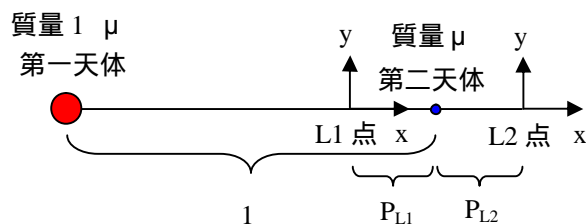


図 5.7.1-1 L1, L2 点近傍の回転座標系

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \alpha_1 \begin{pmatrix} \cos(\lambda_p t + \alpha_2) \\ -C_{y1} \sin(\lambda_p t + \alpha_2) \end{pmatrix} + \alpha_3 e^{-\lambda_N t} \begin{pmatrix} 1 \\ C_{y2} \end{pmatrix} + \alpha_4 e^{\lambda_N t} \begin{pmatrix} 1 \\ -C_{y2} \end{pmatrix}\tag{5.7.1-2}$$

$\alpha_1 \sim \alpha_4$  は積分定数、 $p_N$  は、(5.7.1-1)式の特性方程式の根である。 $C_{y1}$ 、 $C_{y2}$  は特性方程式の根で決まる係数であり、x 方向と y 方向のサイズ比である。 $p_2$ 、 $C_{y1}$  3.2 なので、L1、L2 点近傍の周期運動は、y 方向サイズが x 方向の約 3.2 倍で周期が約半年(太陽 - 地球系の場合)の右回りの運動である。

$\sqrt{B_L}$  と  $p$  の大きさが僅かに異なるため、線型近似が適用できるサイズの小さい軌道は完全な周期軌道ではなく、リサージュ軌道となる。サイズを大きくすると、z 方向の周期と xy 面内の周期を一致させる事ができ、完全な周期軌道を実現できる。これをハロー軌道と言う。ハロー軌道の y 方向のサイズは L1 点で約 65.4 万 km 以上、L2 点で約



67.6 万 km 以上の必要があり、(5.7.1-2)式の線型解では表現できない。

L1、L2 点のハロー軌道における y 方向サイズ  $A_y$  と z 方向サイズ  $A_z$  の関係は、次式で近似できる。

$$A_y(\text{万km}) = \sqrt{1.137A_z(\text{万km})^2 + 4281} \quad (\text{L1 点}) \quad (5.7.1-3)$$

$$A_y(\text{万km}) = \sqrt{1.364A_z(\text{万km})^2 + 4573} \quad (\text{L2 点}) \quad (5.7.1-4)$$

(5.7.1-2)式の線型解より、ハロー軌道/リサージュ軌道の発散時定数(ずれが e 倍になる時間) は、

$$\tau = \frac{1}{\lambda_N} \quad (5.7.1-5)$$

と表わされる。 $\lambda_N$  は次式で求められる。

$$\lambda_N = \sqrt{\frac{B_L}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{B_L(9B_L - 8)}} - 1 \quad (5.7.1-6)$$

地球の無次元質量  $\mu = 3.040423375 \times 10^{-6}$ 、 $p_{L1} = 0.010010977203$ 、 $p_{L2} = 0.01007824041$  を使うと、L1、L2 点軌道の発散時定数は、以下の値となる。

$$\tau = \begin{cases} 22.953 \text{ 日} & (\text{L1点軌道}) \\ 23.400 \text{ 日} & (\text{L2点軌道}) \end{cases} \quad (5.7.1-7)$$

次に、リサージュ軌道の yz 面内運動の周期  $T_{yz}$  を線型解から求めておく。xy 面内運動の角速度は  $\lambda_p$  であり、z 方向運動の角速度は  $\sqrt{B_L}$  なので、

$$T_{yz} = \frac{2\pi}{\lambda_p - \sqrt{B_L}} \quad (5.7.1-8)$$

となる。 $\lambda_p$  は次式で求められる。

$$\lambda_p = \sqrt{1 - \frac{B_L}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{B_L(9B_L - 8)}} \quad (5.7.1-9)$$

よって、L1、L2 点でのリサージュ軌道の yz 面内運動の周期  $T_{yz}$  は、以下の値となる。

$$T_{yz} = \begin{cases} 14.036 \text{ 年} & (\text{L1点軌道}) \\ 13.901 \text{ 年} & (\text{L2点軌道}) \end{cases} \quad (5.7.1-10)$$

$T_{yz}$  が約 14 年であることから、その 1/2 に近い約 6 年間蝕なしの軌道を設定できる。

## 5.7.2 L2 点周りの基準軌道の設計<sup>34,35)</sup>

L1、L2 点軌道は、発散時定数が約 23 日の不安定軌道であるため、数ヶ月間隔の軌道保持制御が必須である。その保持制御量を小さくするには、高精度の太陽系モデルに対して、前以て  $\Delta V$  ゼロの基準軌道を設計しておき、打上げ後は基準軌道に沿うように保持制御を行なうのが良い。この方法は、1995 年打上げの SOHO から適用されている。

欧米では、基準軌道を設計する際に、高次の解析解を初期軌道として使っている。一方、円制限三体問題の線型解のみから得られるラフな初期軌道を使って、高精度の基準軌道を設計する事も可能である。以下に、この線型解のみから基準軌道を設計する方法の概要を述べる。ハロー軌道とリサージュ軌道では、解法に小さい違いはあるが、概ね同じ手法と言える。



## 線型解のみからの基準軌道の設計法

(1)線型解からラフな初期軌道を作成する。

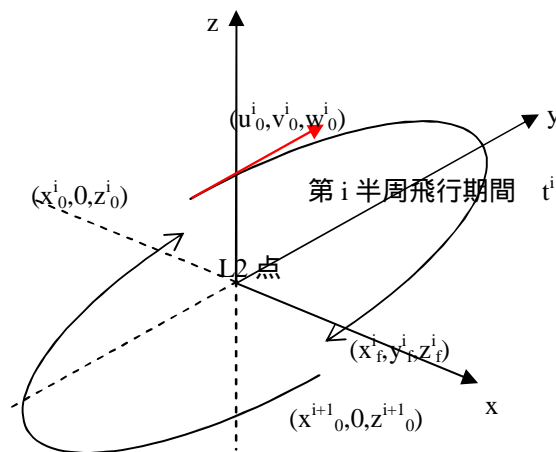


図 5.7.2-1 L2 点周りの分割された軌道群

図 5.7.2-1 に示す様に、xz 面で分割された半周軌道(期間約 90 日)を、ミッション期間だけ、線型解を基にして減速ニュートン法で作成する。得られる初期軌道の位置・速度は、xz 面において、一般に不連続である。図 5.7.2-2 に、ハロー軌道の初期軌道の例を示す。摂動として、地球公転軌道の離心率と月潮汐力を考慮している。xz 面において、位置に約 10 万 km の gap、速度に約 100m/s の gap が存在する。

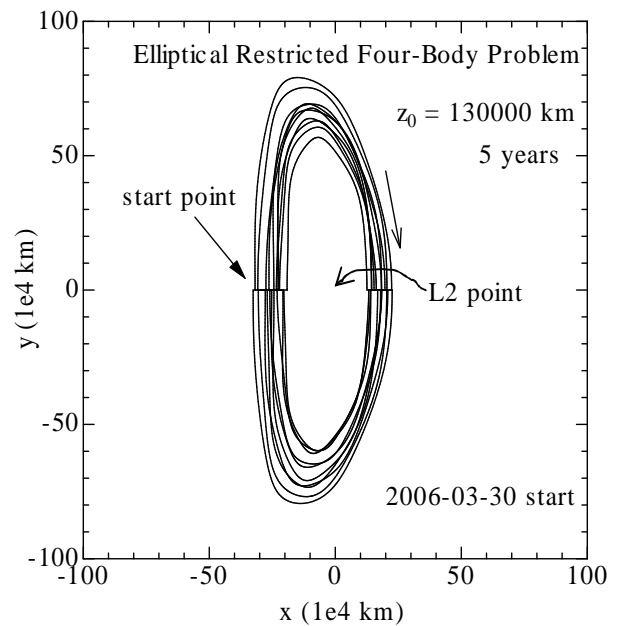


図 5.7.2-2 楕円制限 4 体問題での初期軌道

(2)SQP 法により位置・速度 gap が微小の trajectory を作成する。

各半周軌道を規定するパラメータを制御変数とし、xz 面通過時の位置・速度 gap がゼロという等号制約を課し、各周回の軌道の変動を最小にする、という定式化の非線形計画問題を SQP 法 (Sequential Quadratic Programming 法) で解く。通常のレンジ・ドップラー計測の場合、L1, L2 点軌道の現時点の軌道決定誤差は、位置で約 1km、速度で約 1mm/s である。SQP 法で得られる trajectory の位置・速度 gap が、この軌道決定誤差に比べて十分小さければ、基準軌道として良い。現在までの検討では、軌道決定誤差より 2 桁～5 桁小さい gap の解が得られている。5 桁小さい gap は数値積分誤差と同じオーダーである。図 5.7.2-3 に、図 5.7.2-2 の初期軌道を入力して、SQP 法で得た trajectory を示す。最後の数ヶ月の軌跡がずれているが、ミッション期間よりも

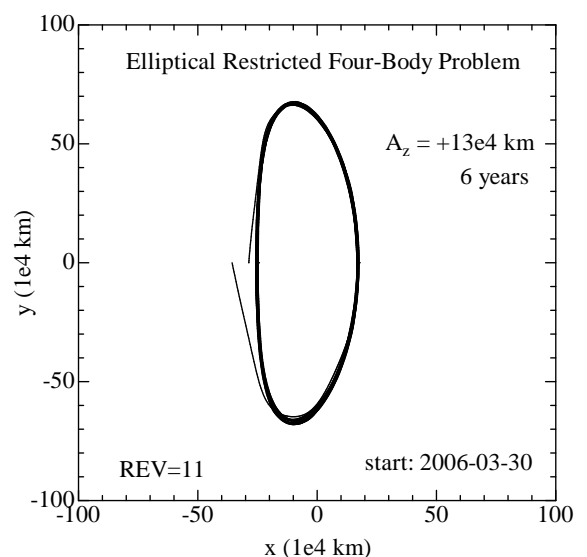


図 5.7.2-3 SQP 法で得た trajectory

1 年程度余分に基準軌道を作っておけば問題ない。

(3) (2)の位置・速度 gap が不十分な時、最小二乗最小ノルム解法により位置・速度 gap を小さくする。

(2)で得た trajectory の位置・速度 gap がまだ不十分であれば、その trajectory を初期値として使う最小二乗最小ノルム解法を適用する事で、gap を更に数桁小さくする事は容易である。(2)で得られた trajectory は基準軌道にかなり近いものであり、SQP 法における目的関数(各周回の軌道の変動を最小にする)は無視して、等号制約だけを満たす解を求めれば良い。制御変数の自由度が等号制約の数より多いため、制御変数の修正量を最小にするという目的関数を設定する。この解が、最小二乗最小ノルム解である。

## 5.8 太陽 地球系 L4,L5 点周り軌道<sup>36, 37)</sup>

L4, L5 点は安定なラグランジュ点であり、適切に初期軌道の設定が行なわれれば、基本的に軌道保持制御は不要である。これらの点を利用するミッションとして、太陽 - 地球系 L5 点を利用する太陽定点観測ミッション等が提案されているが、現時点で確定しているミッションは無い。

### 5.8.1 1AU 軌道の運動<sup>38)</sup>

L4, L5 点軌道は、太陽 - 地球系の場合、日心距離が地球と同じ 1AU の略円軌道である。地球からは ±60 度離れている。ここでは、±60 度に限定せず、黄道面内の 1AU 軌道全体の運動を最初に述べる。1AU 軌道の任意の点に地球に対して相対静止した初期状態からの運動を検討する。初期時刻における地球からの離角 を図 5.8.1-1 のように定義する。すると、10 年間の宇宙機の移動量は、図 5.8.1-2 のようになる。移動量が異なる原因は、地球潮汐力である。図 5.8.1-2 の移動量  $\Delta L$  は、円制限三体問題近似において次式で表わされる。

$$\Delta L(10\text{年間}) = -266 \sin \theta \left[ 1 - \frac{1}{(2(1 - \cos \theta))^{\frac{3}{2}}} \right] (\text{万 km}) \quad (5.8.1-1)$$

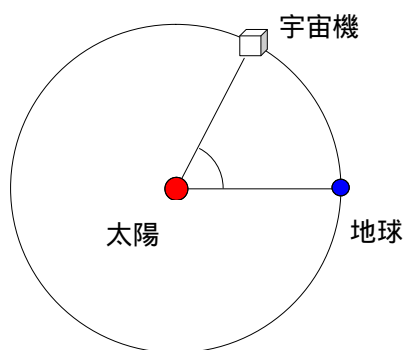


図 5.8.1-1 地球からの離角 の定義

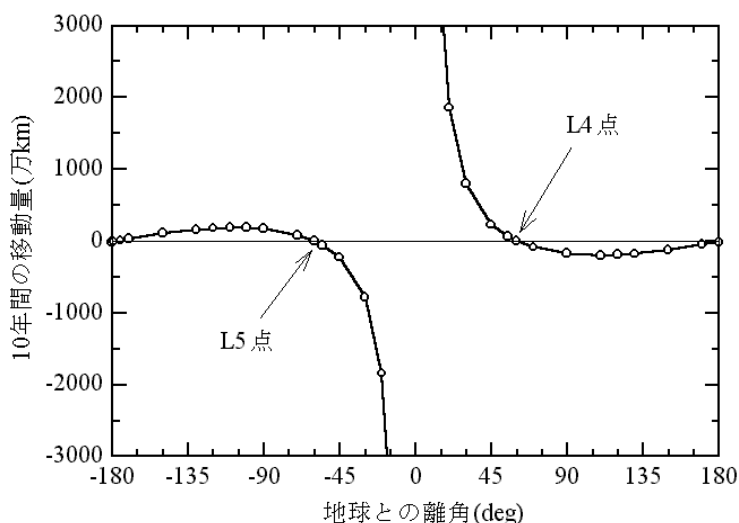


図 5.8.1-2 1AU 軌道の 10 年間の移動量

### 5.8.2 L4,L5 点周り軌道に対する地球軌道の離心率の影響

地球軌道に離心率があると、太陽(第一天体)と地球(第二天体)の距離  $r$  は変化する。このような問題は楕円制限

三体問題と呼ばれる。位置座標を  $r$  で割った回転座標系(pulsating coordinates、角速度も一定ではない)で検討する事により、第三天体の平衡点(L1 ~ L5 点)は、円制限三体問題と同じになる事が示される。つまり、pulsating coordinates において、L4, L5 点は、第一天体及び第二天体と共に、正三角形を成す。

しかし、平衡点近傍の運動は、closed form の解は知られておらず、数値的に求める事となる。L4, L5 点近傍の周期軌道には、周期が約 1 年の短周期運動と、周期が約 222 年の長周期運動がある。短周期運動では、離心率がゼロの場合の初期速度を使うと、離心率の影響で図 5.8.2-1 のように周期軌道がずれる。初期速度を 1% 以下(地球軌道の離心率の半分程度、具体的には 2.5m/s 程度)の微調整を行えば、この離心率の影響を消す事ができる。長周期運動の場合、初期速度の微調整を行っても時間が経つと離心率の影響が現れるが、10 年程度の期間では、その影響は微小である。

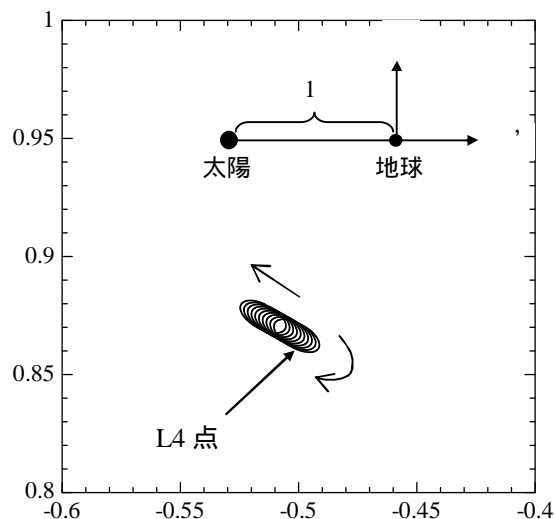


図 5.8.2-1 10 年間の短周期運動  
(離心率 = 0.0167)

### 5.8.3 月の影響

無視できる。

### 5.8.4 惑星(木星と金星)の影響

地球軌道の離心率を考慮した場合は、解析的に L4, L5 点を定義できた。木星や金星が存在する場合も、その定義を採用し、時々刻々の太陽と地球の位置と共に正三角形を構成する点を L4, L5 点の定義とする。これらの惑星の影響は、L4, L5 点付近の宇宙機に直接影響する直接項と、惑星の影響を受けた地球の運動が宇宙機に影響する間接項とに分ける事ができる。地球と惑星の黄経差が色々な値となる月日から、惑星が存在しない時に L4

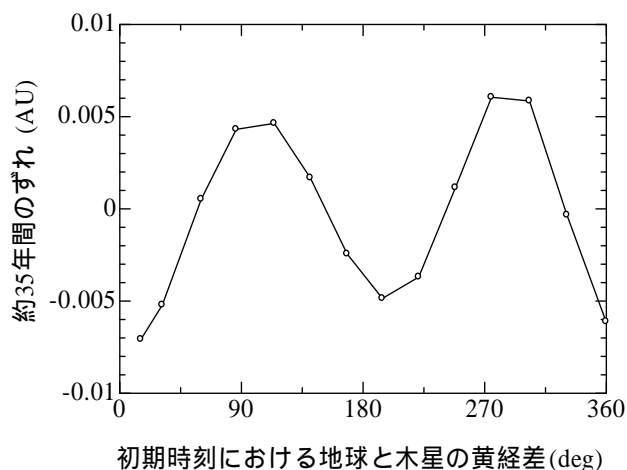


図 5.8.4-1 木星による L4 点宇宙機の位置ずれ

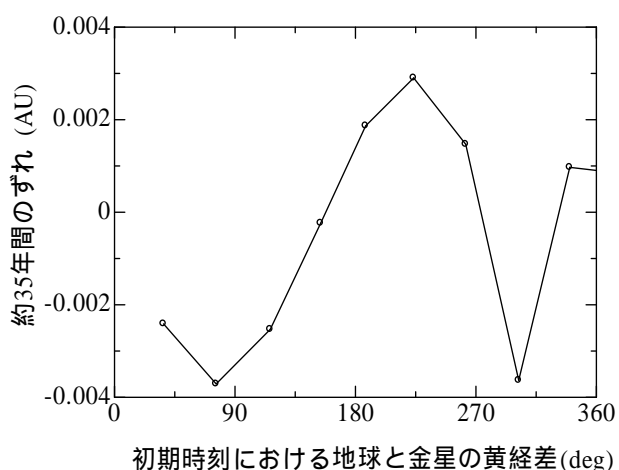


図 5.8.4-2 金星による L4 点宇宙機の位置ずれ

点に静止する初期条件を使い、数十年間の宇宙機の軌道計算を行なった。木星だけが存在する場合の約 35 年間の位置のずれを図 5.8.4-1 に、金星だけが存在する場合の約 35 年間の位置のずれを図 5.8.4-2 に示す。横軸は、初期時刻における地球と木星又は金星の黄経差である。

この位置ずれは、以下に記すメカニズムによって生じている。惑星の潮汐力により、地球及び宇宙機の軌道長半径に短周期変動が発生する。地球と宇宙機の黄経が 60 度異なるため、両者の短周期変動は一致しない。惑星が存在しない場合に宇宙機が L4 点に静止する初期条件を使って惑星の存在を考慮すると、両者の短周期変動の差が平均軌道長半径の差になり、そのため時間に比例した位置ずれが発生する。このメカニズムに従った解析的な検討から図 5.8.1-4、図 5.8.1-5 を再現する事ができる。惑星潮汐力による宇宙機の軌道長半径の短周期変動は直接項であり、惑星潮汐力による地球の軌道長半径の短周期変動は間接項である。両者は同じオーダーであり、間接項と直接項が同程度に影響している事が判る。そして、初期時刻において、惑星の位置を考慮して求めた小さな速度修正(1m/s 以下)を施せば、その後の運動から惑星の影響を殆ど消す事ができる。

木星と金星は、地球及び宇宙機の軌道長半径に対してほぼ同じ大きさの短周期変動(約 1500km の振幅)を生じさせるが、地球に相対的な L4 点軌道への影響は木星が 2 倍近く大きい。それは、金星が内惑星であるのに対し、木星は外惑星である事が起因している。

### 5.8.5 太陽輻射圧の影響

太陽 - 地球系 L4, L5 点近傍軌道に及ぼす太陽輻射圧の影響を述べる。太陽輻射圧は太陽重力と逆向きの力を及ぼす。そのため、平衡点である L4, L5 点は、太陽及び地球と正三角形を構成する位置からずれる。輻射圧は重力と同様に日心距離の逆 2 乗則に従うため、その存在は宇宙機に対しては太陽重力を減じる事と等価である。二体問題の関係式と力の釣り合い式を用いる事により、輻射圧が存在すると、地球との距離は 1AU のままで太陽に接近した点が平衡点(新 L4, 新 L5 点)となる事を示す事ができる(図 5.8.5-1 参照)。つまり、**正三角形点から二等辺三角形点に変わる**訳である。宇宙機の質量を有効断面積で割った質量/断面積比  $B$  に対して、L4, L5 点のシフト量等がどのようになるかを図 5.8.5-2 に示す。 $B$  を 4 桁程度の範囲で変えて、シフト量  $r$  (1 万 km 単位)と太陽から見た方位角の変化量  $-60$ (度)を示した。方位角の定義は図 5.8.5-1 を参照。

現在の宇宙機の  $B$  値は数十  $\text{kg}/\text{m}^2$  であり、図 5.8.5-2 の右端がそれに相当。その場合のシフト量は 1000km 程度である。太陽電池パドルの各辺が 10 倍になり  $B$  値が  $1/100$  になると、シフト量は 10 万 km のオーダーになる。

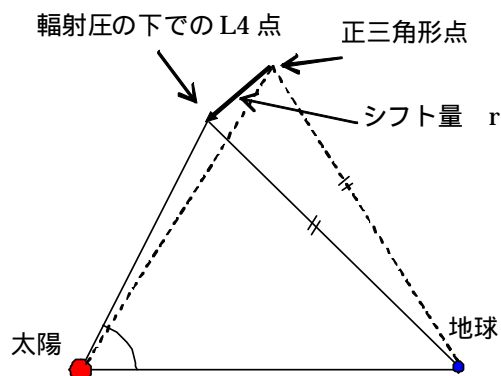


図 5.8.5-1 シフト量と方位角変化

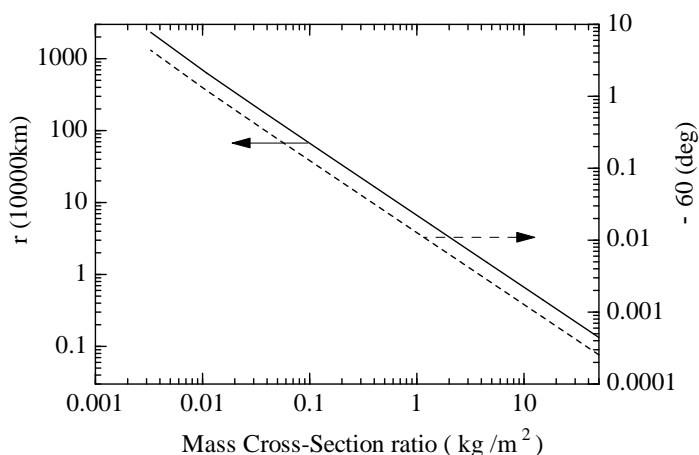


図 5.8.5-2 太陽輻射圧による L4, L5 点のシフト

## 5.9 作用圏境界軌道<sup>39,40)</sup>

興石 肇氏と松島弘一氏が中心となって始められた「フォボス探査研究会」に 1992 年 7 月から参加させて戴き、軌道設計を担当した。フォボスは火星の第一衛星であり、火星重力に捕らえられた小惑星ではないかとも言われている半径約 10km の小天体である。フォボスの軌道面は火星の赤道面に極めて近い。この研究会の目的は、この小天体の周りを回る宇宙機を実現して、フォボス全球を高精度(分解能 1m 程度)に観測する事であった。

フォボスは 1970 年代のマリナー 9 号やバイキング・オービターによりフライバイ軌道から観測され、分解能 100m 程度の地図が作成されていた。1980 年代末に旧ソ連がフォボス・ミッションを実行したが、失敗に終わっている。

分解能 1m 程度となると、宇宙機軌道のフォボスとの距離はおおよそ数十 km となる。火星-フォボス系におけるフォボスの作用圏半径を評価すると、約 7.8km となり、フォボスの外側は全て作用圏の外になる。

フォボス軌道面と同じ軌道面から観測する場合の軌道を図 5.9-1 に示す。このような軌道を「擬周回軌道(Pseudo Orbit)」と名付けた。フォボスの高緯度地域も観測するには宇宙機軌道に傾斜角  $i$  を持たせる必要がある。その場合の擬周回軌道を図 5.9-2 に示す。傾斜角ゼロの擬周回軌道は安定であるが、おおよそ  $i > e$  になると不安定になりフォボス近傍から逸脱してしまう。この不安定性は解明されていなかった。

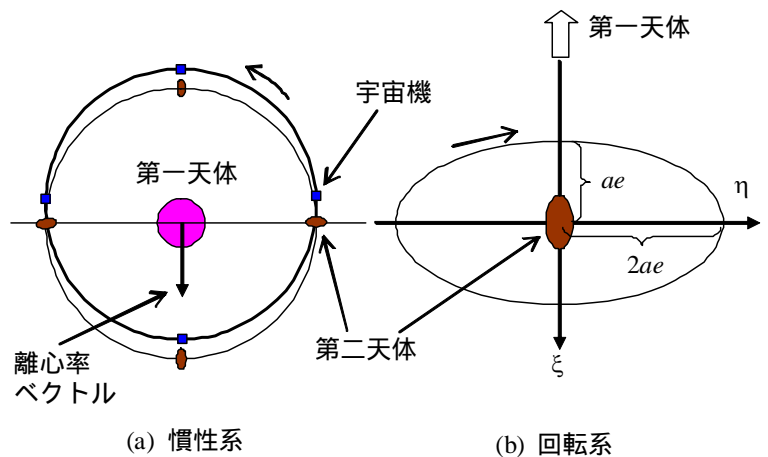


図 5.9-1 擬周回軌道

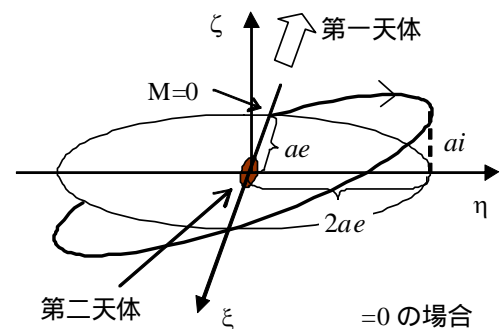


図 5.9-2 傾斜角を持った擬周回軌道

### 5.9.1 Mathieu 方程式への帰着と共鳴安定化

本節では、擬周回軌道の運動が Mathieu 方程式<sup>41)</sup>で近似できる事を述べる。

擬周回軌道上の宇宙機の運動は、外力がない場合の Hill の方程式の解に、第二天体(フォボス)から受ける重力による  $c$  を付加した次式で近似できる。図 5.9-2 の座標系を使用する。  $c$  は擬周回軌道の中心の座標である。

$$\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -A \cos M \\ 2A \sin M + \eta_c \\ B \sin(M + \omega) \end{pmatrix} \quad A = ae, \quad B = ai \quad (5.9.1-1)$$

擬周回軌道は面外運動により、第二天体の前後を通過する時の第二天体との距離が変化して、第二天体から見た楕円形の擬周回軌道に  $\eta$  軸方向の振動が生じる。この振動が安定性の議論において最も重要であるため、本節ではこの  $\eta$  軸方向の運動に着目する。上式の軌道に宇宙機が存在する時の第二天体重力による加速度の

成分  $b$  は以下の式で与えられる。

$$b_\eta = -\frac{Gm_2\eta}{(\varepsilon^2 + \eta^2 + \zeta^2)^{3/2}} \quad m_2: \text{第二天体の質量} \quad (5.9.1-2)$$

$c$  の 2 次以上を無視し、 $b$  の 1 周平均  $\bar{b}_\eta$  を考える。

$$\bar{b}_\eta = -\frac{Gm_2}{2\pi A^2} \int_0^{2\pi} \frac{(2\sin M + \varepsilon)dM}{(\cos^2 M + 4\sin^2 M + 4\varepsilon\sin M + \gamma\sin^2(M + \omega))^{3/2}} \quad \varepsilon \equiv \frac{\eta_c}{A}, \gamma \equiv \left(\frac{B}{A}\right)^2 \quad (5.9.1-3)$$

(5.9.1-3)式右辺の被積分関数を  $\varepsilon = 0$ ,  $\gamma = 0$  (傾斜角 = 0) の回りで展開し、 $\varepsilon$  の 1 次項と  $\gamma$  の項だけを取り出すと、次式を得る。

$$\bar{b}_\eta = \frac{Gm_2}{2\pi A^3} \eta_c [I_\varepsilon - \gamma(I_{\varepsilon\gamma 1} + I_{\varepsilon\gamma 2} \sin^2 \omega)] \quad (5.9.1-4)$$

ここで、 $I_\varepsilon$ ,  $I_{\varepsilon\gamma 1}$ ,  $I_{\varepsilon\gamma 2}$  は、次式で定義した定積分である。

$$I_\varepsilon \equiv \int_0^{2\pi} \frac{8\sin^2 M - \cos^2 M}{(\cos^2 M + 4\sin^2 M)^{5/2}} dM = 0.630 \quad I_{\varepsilon\gamma 1} \equiv \int_0^{2\pi} \frac{24\sin^4 M - \frac{3}{2}\sin^2 M \cos^2 M}{(\cos^2 M + 4\sin^2 M)^{7/2}} dM = 0.951$$

$$I_{\varepsilon\gamma 2} \equiv \int_0^{2\pi} \frac{\left(24\sin^2 M - \frac{3}{2}\cos^2 M\right)\cos 2M}{(\cos^2 M + 4\sin^2 M)^{7/2}} dM = -0.757$$

次に、擬周回軌道の 1 周平均の運動を考える。それは、第二天体から  $c/a$  だけ平均近点離角がずれた略円軌道上の仮想質点の運動と近似できる。この仮想質点は、第一天体からの重力の他に(5.9.1-4)式の  $\bar{b}_\eta$  という加速度を常時受ける。Vis-viva の式などを用いると、この仮想質点の軌道の平均運動の変化率は以下の様に近似できる。

$$\frac{dn}{dt} = \frac{\dot{\eta}_c}{a} = -\frac{3}{a} \frac{dV}{dt} = -\frac{3}{a} \bar{b}_\eta \quad (5.9.1-5)$$

上式より、以下の ( $= c/A$ ) の運動方程式を得る。

$$\ddot{\varepsilon} + \frac{3Gm_2}{2\pi A^3} [I_\varepsilon - \gamma(I_{\varepsilon\gamma 1} + I_{\varepsilon\gamma 2} \sin^2 \omega)] \varepsilon = 0 \quad (5.9.1-6)$$

は第二天体重力のために、ほぼ一定の負の変化率を持つので、独立変数を  $t$  から  $\omega$  に変え、更に  $\lambda$  と  $h^2$  を以下のように定義すると、

$$\lambda \equiv \frac{3Gm_2}{2\pi A^3 \dot{\omega}^2} \left[ I_\varepsilon - \gamma \left( I_{\varepsilon\gamma 1} + \frac{1}{2} I_{\varepsilon\gamma 2} \right) \right] \quad (5.9.1-7)$$

$$h^2 \equiv -\frac{3Gm_2}{8\pi A^3 \dot{\omega}^2} \gamma I_{\varepsilon\gamma 2} \quad (5.9.1-8)$$

(5.9.1-6)式は、以下の Mathieu 方程式<sup>41)</sup>になる。

$$\frac{d^2 \varepsilon}{d\omega^2} + (\lambda - 2h^2 \cos 2\omega) \varepsilon = 0 \quad (5.9.1-9)$$

Mathieu 方程式は、 $h^2 = 0$  の場合は単振動の方程式になり、これは、(5.9.1-8)式より、 $\gamma = 0$ 、つまり、傾斜角ゼロの場合である。傾斜角が大きくなると、 $h^2$  が大きくなり、 $\lambda = 0$ 、で、復元力  $\lambda - 2h^2 \cos 2\omega$  が最小となる。説明を省略したが、 $\lambda = 0$ 、 $h^2 = 2h^2$  では、面内の擾乱も最大となっている。 $\lambda = 2h^2$  となるまで傾斜角が大きくなると、 $\lambda = 0$ 、で復元力がゼロとなる。

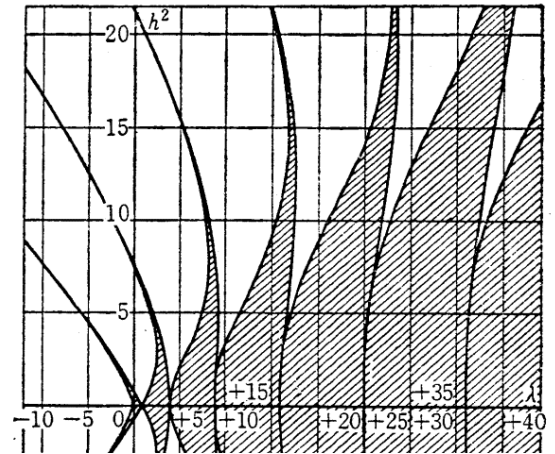


図 5.9.1-1 Mathieu 方程式の安定領域(文献(41))



これが擬周回軌道の平均的な安定限界である。この時、(5.9.1-7)、(5.9.1-8)式より、 $i/e = 1.0$  となる。つまり、 $i/e = 1$  が平均的な安定限界である事が分かる。

Mathieu 方程式の安定領域は一般に  $i$  と  $h^2$  の平面で表現され、図 5.9.1-1 に示すように特徴ある複数の髭状領域から成っている。 $h^2$  の大きい髭状領域は、 $i$  の変動と擬周回軌道の  $i$  軸方向の変動とが共鳴関係にある境界で挟まれている。この髭状の安定領域を採用する事で、傾斜角の大きい安定な擬周回軌道を実現できる。この事を「共鳴安定化」と呼んでいる。

## 5.9.2 火星-フォボス系による擬周回軌道の共鳴安定化の実証

図 5.9.2-1 に円制限三体問題におけるフォボス擬周回軌道の安定領域を  $(e_0, i_0)$  平面にて示す。青  $\circ$  が安定点、赤  $\times$  が不安定点である。 $e_0, i_0$  は、初期時刻における接触要素である。髭状の共鳴安定領域が存在している事が分かる。

(5.9.1-7)式と(5.9.1-8)式を使うと、 $(e_0, i_0)$  平面での安定領域を  $(i, h^2)$  平面に変換できる。上記 2 式をそのまま用いた変換は精度が不十分であり、図 5.9.2-1 の髭状領域が図 5.9.1-1 のどの

髭状領域に対応するか判断できない。そこで、不安定軌道の 1 周平均の  $i$  の変動周期と  $h^2$  の周期の関係を検討する事により、その不安定軌道の近くの髭状安定領域が  $i$  軸のどこを通過するかが明らかになる事を利用する。この考察結果を使って変換した安定領域を図 5.9.2-2 に示す。Mathieu 方程式の安定領域も重ねて表示した。擬周回軌道にも、Mathieu 方程式と同じ共鳴安定領域が存在する事が分かる。

## 5.10 小惑星周回軌道<sup>42,43)</sup>

1990 年代になると、惑星だけでなく小惑星も宇宙機による探査の対象となり始めた。そこで特定の小惑星ではなく、軌道半径が 1.5AU~3AU でサイズ(半径)が 100km 以下の小惑星全体を対象として、それらの周回観測軌道を検討した。

小惑星周回軌道は、小惑星のサイズ・質量が惑星に比べて桁違いに小さいため、惑星の周回軌道に比べて摂

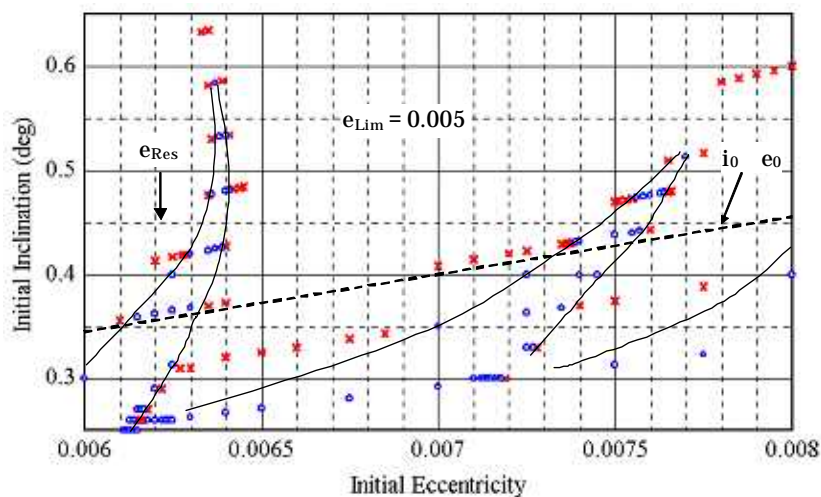


図 5.9.2-1 円制限三体問題におけるフォボス擬周回軌道の安定領域

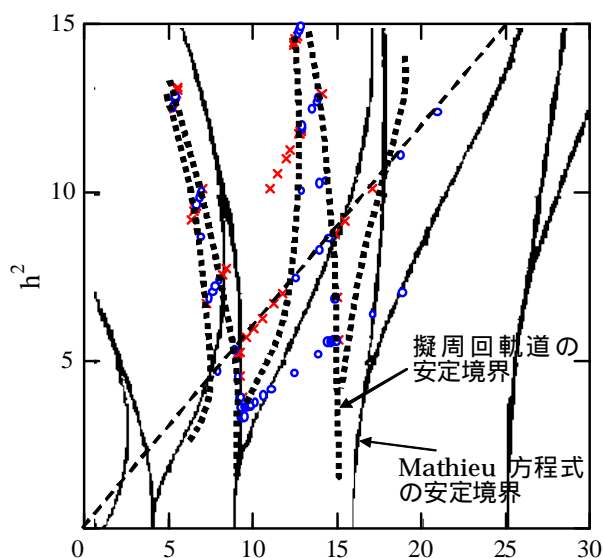


図 5.9.2-2 フォボス擬周回軌道の安定領域と Mathieu 方程式の安定領域

動の影響が大きく異なる。小惑星周りの軌道においては、太陽輻射圧、歪な形状の影響の二つが重要である。太陽潮汐力は、上記 2 つの摂動に比べて小さい。輻射圧の影響が大きいのは、小惑星の重力が非常に小さいためである。また、一般に小惑星は非常に歪な形状をしており、その影響も大きい。

小惑星半径の数倍～数十倍の軌道では、輻射圧が主要な摂動となり、その領域では凍結軌道という特殊な軌道が可能である。ここでの凍結軌道は、輻射圧の摂動を受けても軌道要素が変化しない軌道であり、宇宙機の探査軌道として望ましい性質を持っている。凍結軌道には、図 5.10-1 に示す 2 つの種類がある。公転面内凍結軌道と solar plane-of-sky 凍結軌道である。solar plane-of-sky 凍結軌道は、その軌道面の法線ベクトルが太陽方向又は反太陽方向に一致する軌道である。実は、静止軌道の離心率ベクトルが 1 年で 1 回転する(図 5.1-4 参照)のは、この公転面内凍結軌道と同じ原理である。

各摂動源の大きさを比較し、凍結軌道の可能な領域を検討した。

図 5.10-2 に公転面内凍結軌道の可能領域を示した。小惑星の軌道半径 = 2AU、宇宙機の質量/断面積比 =  $60\text{kg/m}^2$  の場合である。ハッチ領域辺りが凍結軌道になる所である。図 5.10-2 の説明を以下に記す。

- (1) 公転面内凍結軌道は、半径が数十 km の小惑星に適用可能である。
- (2) 公転面内凍結軌道は高度が 350km~1000km と高く、高分解能の観測には不向きである。
- (3) 図 5.10-2 の ① の輻射圧の平均化方程式の妥当な範囲は、この線以上に高度が高くなると、輻射圧の影響で宇宙機軌道全体が風下側に流されるようになり、この解析で使用した近似が使えなくなる恐れがある事を考慮したもの。しかし、接触軌道の数値シミュレーションにより、この線はもっと上で良い事が分かっている。
- (4) 3 つの離心率(e)の値の曲線は、その点で凍結軌道が実現される時の離心率を示す。大きな離心率は、全球観測に適さないもので、0.3 までの離心率とした。
- (5)  $C_t/C_p=0.1$  は、太陽潮汐力の影響が輻射圧の影響の 1/10 であるラインを示す。
- (6)  $C_p/C_s=10$  は、輻射圧の影響が、小惑星の扁平の影響の 10 倍であるラインを示す。

図 5.10-3 では、条件 ① と ② に共通領域がないが、上記のように ① のラインはもっと上で良いので、solar plane-of-sky 凍結軌道は、半径が数 km 程度より小さい小惑星に適用可能である。高度が低いため、1m 以下の分解能の観測が期待できる。

半径が 10km 程度よりも大きい小惑星に対して、極軌道を検討した。極軌道は小惑星の扁平の影響を受けず、

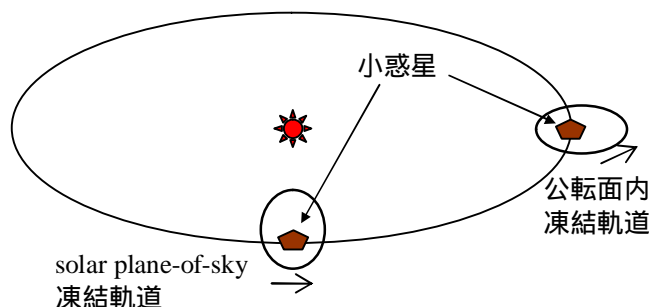


図 5.10-1 輻射圧が卓越時の 2 つの凍結軌道

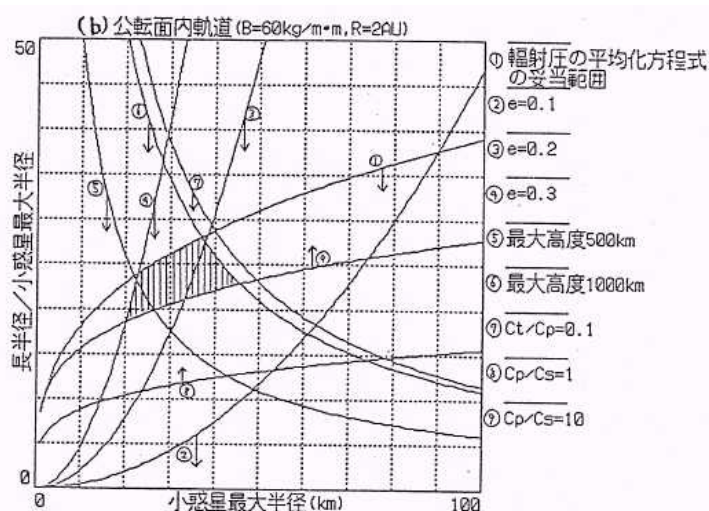


図 5.10-2 公転面内凍結軌道の可能な領域



離心率をゼロ付近に保持する事だけを考えれば良い。輻射圧が離心率を増大させるからである。離心率の保持に要する $\Delta V$ は、微小である事が分かった。

以上の検討をまとめると、

- (1) 半径数 km 以下の小惑星では、solar plane-of-sky 凍結軌道を第一に検討する。
- (2) 半径 10km 以上の小惑星では、極軌道を検討する。
- (3) 半径数 km ~ 10km の小惑星では、自転運動が安定軸回りのシンプルなものであれば、極軌道が妥当であるが、そうでない場合は、別途、検討が必要。

となる。

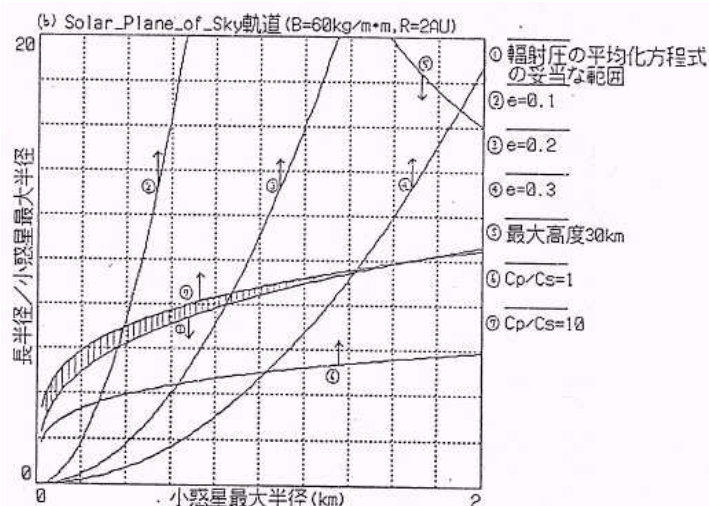


図 5.10-3 Solar plane-of-sky 凍結軌道の可能な領域

## 5.11 木星 swingby 利用の太陽極軌道

ユリシーズ(Ulysses)というESA/NASA 共同ミッションの宇宙機(質量 370kg)が太陽極軌道を約 17 年間飛行した。1990 年に打ち上げられ、2009 年 6 月 30 日に停波された。2008 年春頃から原子力電池の発電力低下により運用継続が危ぶまれていた。飛行した太陽極軌道は、遠日点半径が約 5AU(木星軌道半径)、近日点半径が約 1.4AU、傾斜角は約 80 度であった。このミッションは、太陽の周りの空間を色々な緯度から観測するのが主目的であった。

日本においても 2000 年頃から、黄道面から大きく離れた空間からの太陽磁場、黄道光、宇宙背景放射などの観測への期待が高まってきた。これを実現する軌道の一つとして、上記のユリシーズ型太陽極軌道が考えられ、この軌道への投入法として、以下の方法を検討した。

- (1) H2A に 2 段式上段モータを付けて直接木星に向かい、木星 swingby で投入。
- (2) H2A+固体モータで中間軌道に入れ、地球 swingby を経て木星に向かう。
- (3) 電気推進系による EAV-EGA\*)を経た木星に向かう。

\*) Electric  $\Delta V$ -Earth Gravity Assist, JAXA 川口淳一郎教授の考案による

(1)では 317kg の宇宙機を 1 年 3 ヶ月で木星まで届ける事ができ、(2)では 448kg の宇宙機を 4 年 4 ヶ月で届ける事ができた。(3)は 1095kg の宇宙機を約 3 年で木星まで届ける事ができた。以下の各節で(1)~(3)を説明する。

### 5.11.1 2 段式上段モータで直接木星に向かう場合<sup>44)</sup>

#### (1)出発時 $V$ の最小値の検討

2013 ~ 2020 年の範囲での打上げに対し、地球出発時に必要な無限遠速度  $V$  の最小値を検討した。始めに、各惑星が全て黄道面内の円軌道を運動していると近似したモデルで、ホーマン軌道遷移の場合の 2013 ~ 2020 年の間の地球から木星への打上げ機会を検討した。その結果を、表 5.11.1-1 に示す。最初の打上げ日の 2013 年 9 月 14 日を含む 100 日間を打上げ候補とした場合の地球出発時  $V$  の等高線を図 5.11.1-1 に示す。この図は、

MAnE(Mission Analysis Environment for Heliocentric High-Thrust Missions)という市販ソフトを用いた。

図中の勾配の小さい右肩上がりの複数の直線は、木星までの飛行日数一定のラインであり、右端に飛行日数を記している。遷移軌道には、目標惑星までの遷移角が 180 度以下の Type 軌道と、180 度以上の Type 軌道とがある。

太陽極軌道を目指すには、木星到着時に大きな相対速度が必要であり、地球出発時の無限遠速度  $V$  は 11km/s 程度が必要になる。ユリシーズは、1990 年 10 月 6 日に  $V = 11.4\text{km/s}$  で地球を出発している。図 5.11.1-1 より、 $V = 11\text{km/s}$  の曲線付近の打上げが必要となり、短期間に太陽極軌道を実現するためには、Type の出発時  $V$  最小解である点 A から下に描いた直線付近が望ましい。

点 A の打上げ日付近に出発し、木星 swingby 後に近日点半径 = 1.8AU で黄道傾斜角 = 90 度の太陽極軌道に入る計画を MAnE を用いて作成した。MAnE は Patched Conics Method のソフトである。必要な出発時  $V$  は 11.95km/s である。表 5.11.1-1 の全ての機会に対する太陽極軌道への出発時  $V$  を図 5.11.1-2 に示す。最も出発時  $V$  の小さい 2018 年 1 月打上げの場合の軌道図を図 5.11.1-3 に示す。出発時  $V$  は 11.5km/s である。

表 5.11.1-1 木星への概略打上げ機会

地球出発日( $t_0$ )	$t_0$ の地球黄経(deg)	木星到着日
2013- 9-14	353.30	2016- 6- 7
2014-10-18	26.46	2017- 7-11
2015-11-20	59.62	2018- 8-14
2016-12-23	92.78	2019- 9-17
2018- 1-26	125.94	2020-10-20
2019- 3- 1	159.10	2021-11-23
2020- 4- 3	192.26	2022-12-26

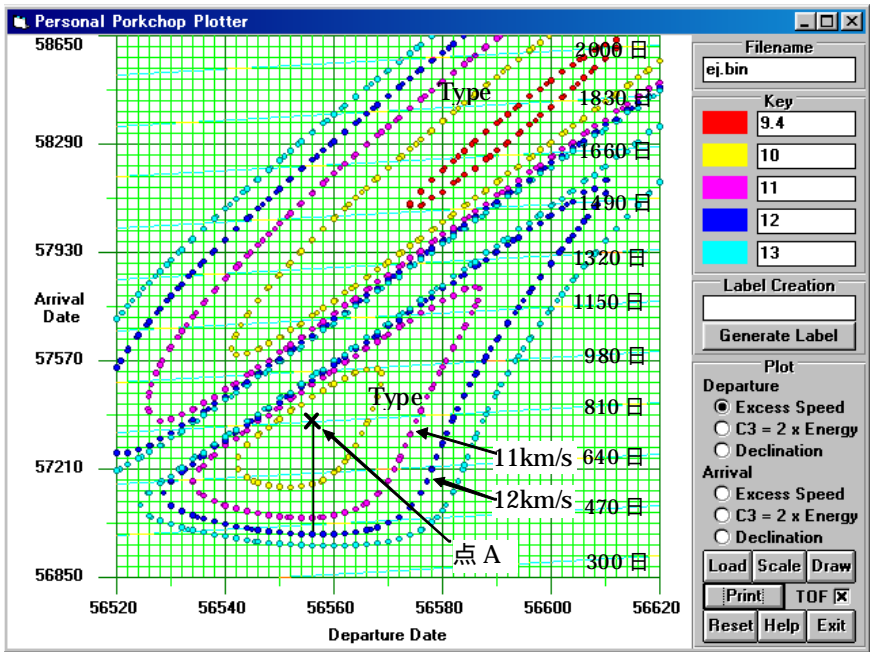


図 5.11.1-1 2013 年の 8 月 ~ 11 月の打上げ窓

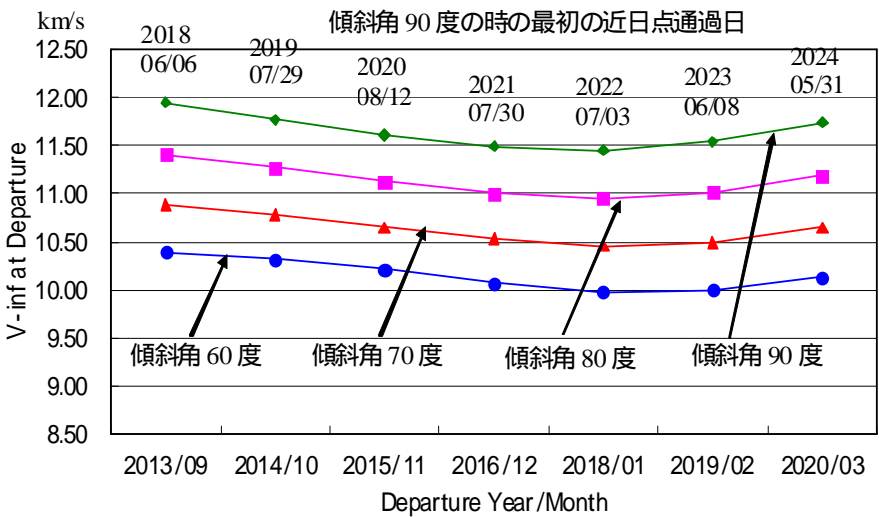


図 5.11.1-2 出発時に要する  $V$  の変化

## (2)V 実現のための 2 段式上段モータの質量配分

出発時  $V$  とパーキング軌道での増速量  $V_T$  の関係は、次式で表わされる。

$$\Delta V_T = \sqrt{V_\infty^2 + 2V_C^2} - V_C \quad (5.11.1-1)$$

$$V_C = \sqrt{\frac{\mu_E}{r_P}}$$

$\mu_E$ : 地球重力定数 ( $3.986 \times 10^{14} \text{ m}^3/\text{s}^2$ )

$r_P$ : パーキング軌道の半径

この式より、 $V = 11.5 \text{ km/s}$  の場合、パーキング軌道の高度を 300km とすると、 $V_T = 8136.9 \text{ m/s}$  となる。この大きな増速を短時間に行なうには、固体モータを使うのが妥当であり、2 段式以上が必要となる。ユリシーズ

では、固体推進系の IUS(2 段式)と PAM-S を使って加速しており、実質的に 3 段式になっている。ここでは、2 段式上段モータを仮定し、先ず第 1 段と第 2 段の最適な質量配分を検討する。

第 1 段と第 2 段の 2 つのロケット方程式を連立させ、 $V_T$  を満足する  $m_1$  と  $m_2$  の関係を求め、図 5.11.1-4 に黒実線で表示した。 $m_1$  と  $m_2$  は、第 1 段と第 2 段の全質量である。図 5.11.1-4 では、パーキング軌道への H- A の投入能力を 10 トンと仮定した。各段の性能は、Thiokol 社(現在の社名は ATK Launch Systems Group)のカタログから選んだ STAR75 と STAR31 のものを使用した。表 5.11.1-2 に示す。宇宙機質量を固定した時の  $m_1$  と  $m_2$  の関係は、傾き 1 の直線となり(図 5.11.1-4 に赤破線で表示)、黒実線と傾き 1 の直線との接点が、以下の最適な各段質量を与える。

[最適質量配分の結果]

第 1 段モータ全質量 = 8046.9kg

第 2 段モータ全質量 = 1579.1kg

宇宙機質量 = 324kg

最適解のサイズの固体モータを新規に製作する事はコストの上から考え難いため、STAR75 と STAR31 をそのまま用いた場合の宇宙機質量を検討した。宇宙機質量のみが可変パラメータとなる。宇宙機質量の変化による  $V$  の変化を図 5.11.1-5 に示す。傾斜角 90 度を実現するには  $V = 11.5 \text{ km/s}$  が必要であり、図 5.11.1-5 より、宇宙機質量は、316.9kg となる。

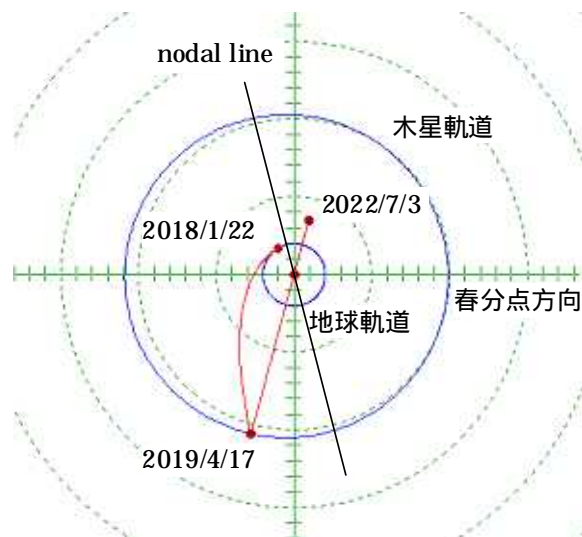


図 5.11.1-3 2018 年 1 月打上げの傾斜角 90 度の場合

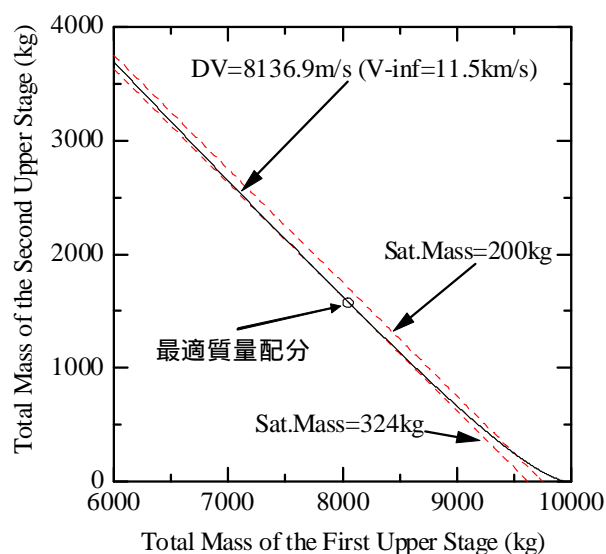


図 5.11.1-4  $V_T$  一定曲線と宇宙機質量の関係

表 5.11.1-2 固体モータの性能

モータ名	構造効率	比推力(sec)	全質量(kg)
STAR75	0.930	288	8068
STAR31	0.929	293.5	1384

### 5.11.2 固体モータによる中間軌道 + 地球 swingby で木星に向かう場合

標記の場合の軌道計画を検討した。この方法は、V-EGA( V-Earth Gravity Assist)と呼ばれている。基本的な考え方を図 5.11.2-1 を用いて述べる。この図は文献(45)に載っているものに加筆したものである。

図 5.11.2-1 の横軸はロケット及び宇宙機による速度増分を表わし、縦軸は遠日点半径を表わす。直接木星に向かう場合、パーキング軌道で  $V_T = 8137\text{m/s}$  の増速が必要であった。図 5.11.2-1 の曲線(1)が、直接目標惑星に向かう場合のパーキング軌道での増速量と遠日点半径の関係を表わしている。横軸の  $8137\text{m/s}$  に対応する曲線(1)の値より、遠日点は天王星よりも遠い事が分かる。

V-EGA では、図 5.11.2-2 に示したように、最初に周期が約 2 年 ~ 4 年の中間軌道に投入した後、その遠日点付近で比較的小さい減速制御(deep space maneuver)を行なう。この制御により、地球近傍に戻った時の地球との相対速度が大きくなり、地球 swingby でこの速度差を接線方向に回転して木星に向かう。deep space maneuver による影響は、図 5.11.2-1 では曲線(2)で表わされている。これは、周期が約 3 年の中間軌道の場合である。deep space maneuver だけでは目標に届かないので、地球 swingby 時に推力も発生させる powered swingby を行なう。それが破線(3)で表わされている。破線(3)上の赤丸がこのミッションを実現する点である。横軸

に示した  $804\text{m/s}$  が deep space maneuver の増速量、 $372\text{m/s}$  が powered swingby 時の増速量である。

MAnE を使って上記の計画を refine すると、以下の計画が得られた。

#### MAnE による軌道計画

2014 年 12 月 22 日に地球を出発し、遠日点半径が約 3.3AU の楕円軌道に入る。遠日点で  $610\text{m/s}$  の deep space maneuver を行ない、地球出発から 3 年余後に地球と swingby を行なう。swingby 時に同時に約  $460\text{m/s}$  の軌道制御も行なう。出発から 4 年 4 ヶ月後に木星に到着し、木星 swingby を経て太陽極軌道に入る。

MAnE で得られた軌道図を図 5.11.2-2 に掲げる。

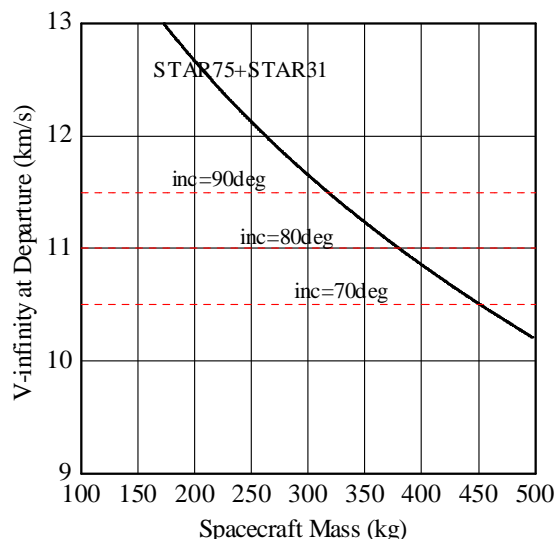


図 5.11.1-5 出発時 V と宇宙機質量の関係

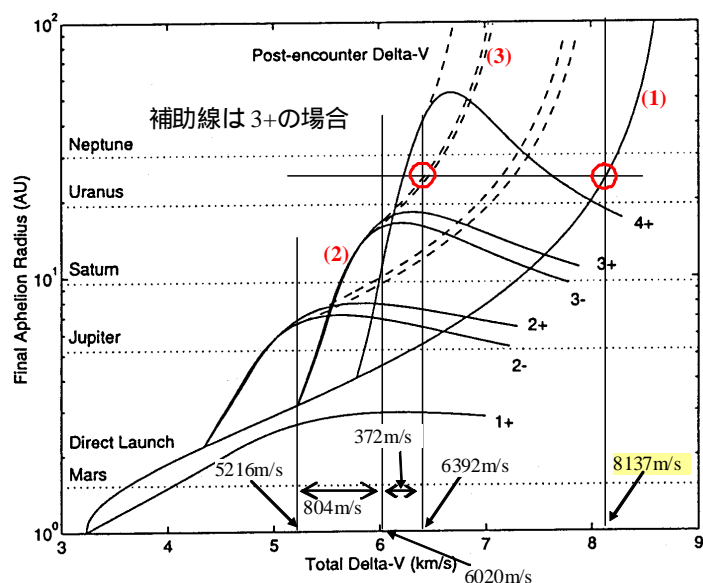


図 5.11.2-1 V-EGA 性能



直接木星に飛行する場合に比べて、約 131kg 大きい 448kg をユリシーズ型太陽極軌道に投入できる。地球パークینگ軌道からの脱出には、STAR75 規模の固体上段ロケットが必要である。

### 5.11.3 電気推進系による E V-EGA を経て木星に向かう場合<sup>46)</sup>

本節では、川口淳一郎教授による E V-EGA (Electric Delta V-Earth Gravity Assist)<sup>47)</sup>を用いる事で、太陽極軌道への投入質量がどの程度改善されるかを検討する。E V-EGA は、 $C_3 = 0$  で地球を脱出した後、1AU 軌道の近傍で電気推進系を噴射し続け、1~2 年後に地球に戻った時の相対速度を大きくし、地球 swingby(EGA: Earth Gravity Assist)によって遠くの惑星

などに飛行する方法である。 $C_3 = 0$  の軌道への投入は H-A の第 2 段ステージの再着火で実施し、約 2500kg を投入することができる。相対速度を大きくするフェーズは、エネルギー蓄積軌道(EGO: Energy Garnering Orbit)と呼ばれており、太陽から 1AU 付近を飛行するため電気推進系に大きな電力を供給できる利点がある。エネルギー蓄積軌道で蓄える相対速度  $V$  が 6~7km/s 以上になると、地球 swingby 時の速度ベクトル偏向角が小さくなり効率が下がってしまう。太陽極軌道を実現するために必要な地球出発時  $V$  は約 11.5km/s(5.11.1 節の(1)を参照)であり、地球 swingby 時の効率低下を如何に抑えるかが重要となる。その方法として、地球 swingby 後もイオンエンジン噴射を続ける方式<sup>48)</sup>を採用した。

$C_3=0$  で地球重力を脱出した時の宇宙機質量を 500kg、電気推進系の日心距離 1AU における比推力を 3000 秒とした。日心距離変化による推力と比推力の変化は、共に距離に反比例とした。

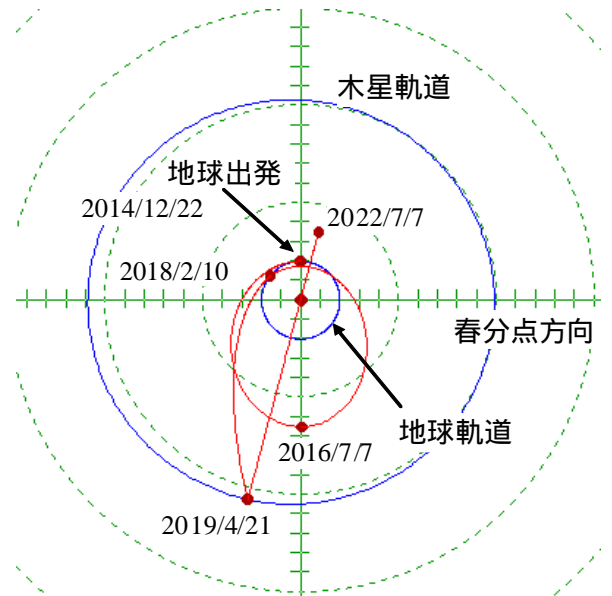


図 5.11.2-2 2014 年 12 月 22 日出発の軌道

#### (1)解法

エネルギー蓄積軌道における加速は、その期間を等分割する 48 個のインパルスで近似する。インパルスとインパルスの間は太陽重力のみ考慮した二体問題で伝播する。EGA 後は、可能な最大推力で速度ベクトル方向に加速するとした。そして、以下に示すような非線型計画問題として定式化し、SQP 法で解いた。エネルギー蓄積軌道は黄道面内の軌道であるので、2 次元問題として扱った。

#### [最適化パラメータの定義]

エネルギー蓄積軌道では、以下の量を最適化パラメータとした。

- (a)インパルスを加える各分点の位置ベクトルと、インパルス付加直後の速度ベクトル
- (b)エネルギー蓄積軌道の期間

エネルギー蓄積軌道後では、以下の量を最適化パラメータとした。

- (c)EGA 後の速度ベクトル
- (d)最大推力での加速期間  $t$

最適化パラメータの総数は、194 個である。

### **[目的関数の定義]**

EGA 後に、更に電気推進系を  $t$  間にわたり最大噴射した後の宇宙機質量を最大にするという定義を使用する。これは、燃料消費量を最小にする事と等価である。

### **[等号制約の定義]**

等号制約の定義を以下に示す。

- (1)各分点において位置が連続である。
- (2)エネルギー蓄積軌道の最後の速度ベクトルに地球 swingby を反映した速度ベクトルが、最適化パラメータの一つである「EGA 後の速度ベクトル」に等しい。
- (3)木星軌道に達した時、木星との相対速度の大きさが、極軌道に必要な 16073 m/s になる。

等号制約の個数は、99 である。EGA 時の高度は 200km とした。16073m/s は、太陽極軌道の近日点半径が 1.8AU の場合に必要相対速度である。

### **[不等号制約の定義]**

不等号制約の定義を以下に示す。

- (1)各分点における速度ベクトル差の大きさが、その期間に発生できる増速量より小さい。
- (2)収束させるために追加した本質的でない条件が数個。

不等号制約の個数は、52 個である。

以上の定式化は multiple shooting method と呼ばれているものである。最適化パラメータ(a)の数を減らすため、各分点の位置ベクトルだけを採用し、分点間の軌道を Lambert 法で繋ぐ方法も試みたが、収束性が極めて悪かった<sup>49)</sup>。

### **(2)解析結果**

日心距離 1AU における推力(ノミナル推力と呼ぶ)を 90mN ~ 180mN の範囲で変えて解を求めた。90mN が解を得た最小推力であり、ペイロード質量が最大になるのは、130mN の場合であった。図 5.11.3-1 に、ノミナル推力が 90mN と 130mN の場合の trajectory を示した。どちらの場合も点 A が地球出発時である。点 B, C は、EGA 後の加速期間の終端である。

図 5.11.3-2 に、ノミナル推力を変えた時の、特徴的な点の日心距離と EGA 時の相対速度  $V$  を示す。180mN の所に 2 つの相対速度がプロットされているが、大きい方は EGA 後の加速を行なわない場合の結果を示している。図 5.11.3-2 より、EGA 後も加速を行なう事で、 $V$  が大きく減少し、EGA の効率が向上している事が伺える。ノミナル推力を小さくして EGA 後の加速期間を長くする事により、 $V$  が更に減少し、130mN 付近でペイロード質量が最大になっている。

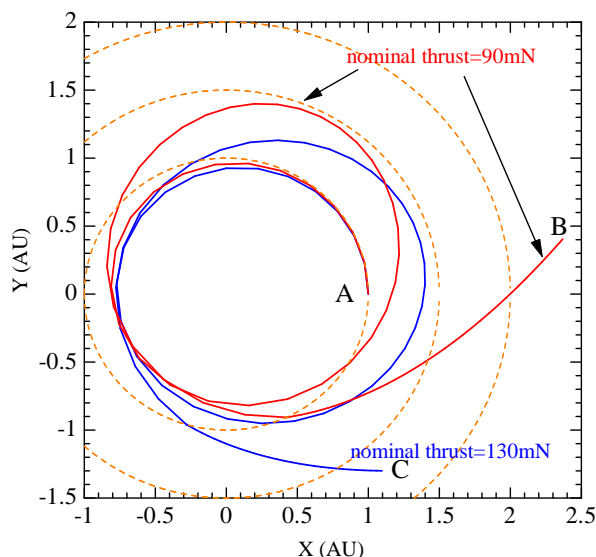


図 5.11.3-1 E V-EGA による trajectory

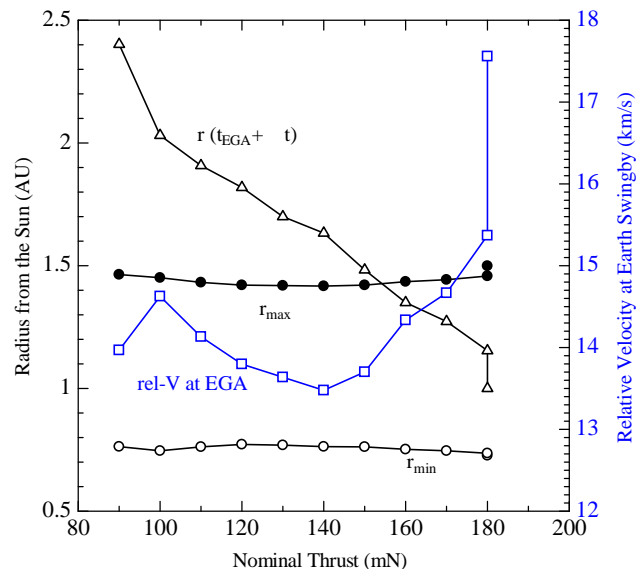


図 5.11.3-2 ノミナル推力に対する日心距離と EGA 時の相対速度の変化

## 5.12 高離心率軌道の寿命計算法<sup>60,61)</sup>

この検討を開始した動機は、1978 年 9 月に打ち上げられ、中央追跡管制所で軌道決定されていた科学衛星 EXOS-B(JIKIKEN)の近地点高度が、不可解な変化をしていた事である。当時のこの衛星の近地点高度は約 230km、遠地点高度は約 3 万 km であった。なお、文献(62)のサイトを見ると、2010 年 1 月現在も、以下の軌道を周回している。

2010 年 1 月の EXOS-B の軌道:近地点高度 204km、遠地点高度 16,567km、傾斜角 31.3°

上記の近地点高度の不可解な変化とは、打上げ当初は約 230km であった近地点高度が、約 1 ヶ月後には約 200km まで落ち、打上げから半年後には逆に約 290km まで増大した事である。当時は、軌道決定が正常に行なわれているのか等の懸念もあった。検討の結果、太陽と月の潮汐力と地球重力場の  $J_2$  項が原因である事が分かった。主に遠地点付近を飛行中に月・太陽の潮汐力を受けて近地点高度が変動する。近地点高度が上がるか下がるかは、遠地点方向と月・太陽方向の関係による。遠地点方向は、 $J_2$  項により変化する。

近地点高度の変化の近似計算は、以下のように行なった<sup>60)</sup>。

$J_2$  項と月・太陽の潮汐力の摂動関数を平均近点離角で平均して平均摂動関数  $R_S$  を求める。

$R_S$  をラグランジュの惑星方程式(2.4 節参照)に代入して、平均ケプラー要素の変化率を得る。

その変化率を Runge-Kutta 法により数日の積分刻みで数値積分して、平均ケプラー要素を得る。

上記の方法で、長期間の近地点高度の変化を容易に知る事ができるようになった。

長楕円軌道の近地点高度の予測は、この種の軌道を回る衛星やスペースデブリの寿命予測にも用いる事ができる。多数のデブリの落下予測をより高速に行なうために、広田正夫氏は、上記の Runge-Kutta 積分の部分も解析的に行ない、近地点高度の変化式を導いている<sup>61)</sup>。

## 5.13 フォボスのホバリング V 解析<sup>63)</sup>

1990 年代に、火星の第一衛星フォボスの探査軌道の検討を行なった。本節ではその中で、フォボス表面付近の

ホバリングに要する  $V$  解析を紹介する。当時、Chao らのフォボス・ポテンシャル係数(4×4)が妥当と判断し、それを用いた。

宇宙機の運動はフォボスのごく近傍に限られるので、火星中心の宇宙機軌道のフォボス軌道からの差の1次項のみ考慮する線型化運動方程式を用いる。以下に、フォボス固定座標系 (図5.13-1参照)で表現した宇宙機の線型化方程式を示す。この式は、地球周回のランデブ軌道の検討にしばしば使用されるHill's equationと同じものである。

$$\mathbf{b} = \begin{pmatrix} \ddot{\xi} - 2n\dot{\eta} - 3n^2\xi \\ \ddot{\eta} + 2n\dot{\xi} \\ \ddot{\zeta} + n^2\zeta \end{pmatrix} \quad (5.13-1)$$

$$n = \sqrt{\frac{\mu_M}{a^3}} = 2.27876 \times 10^{-4} \text{ rad/s} \quad \mu_M: \text{火星の重力定数} \quad a: \text{フォボス軌道の長半径(9378km)}$$

加速度 $\mathbf{b}$ は、フォボスから受ける重力加速度と推力加速度の和である。

任意の位置(  $\xi, \eta, \zeta$  )でのホバリングに必要な $\mathbf{b}$ を求めるには、ホバリング中は  $\dot{\xi}, \dot{\eta}, \dot{\zeta}$  の時間微分がゼロである事を使うと、

$$\mathbf{b} = \begin{pmatrix} -3n^2\xi \\ 0 \\ n^2\zeta \end{pmatrix} \quad (5.13-2)$$

となり、フォボスからの重力加速度を引く事で、次式の推力加速度ベクトル  $\mathbf{a}$  が得られる。

$$\mathbf{a} = \mathbf{b} - (\mathbf{g}_{2B} + \mathbf{g}_{NS}) \quad (5.13-3)$$

$\mathbf{g}_{2B}$ : フォボスからの球対称重力加速度

$\mathbf{g}_{NS}$ : フォボスからの非球対称重力加速度

図 5.13-2 に、 $\xi$  軸、 $\eta$  軸、 $\zeta$  軸の各軸上でフォボス公転周期(約 7.66 時間)の間のホバリングに要する  $V$  を高度に対して描いた。高度 5.3km 付近に、ラグランジュ点(L1, L2)が存在する事が分かる。

図 5.13-3 に、フォボス全球のホバリング  $V$  を描いた。フォボス表面すれすれに 7.66 時間ホバリングする場合である。経度は、火星直下点から東向きに測る。(5.13-2)式より、 $\zeta$  軸から離れて極に近づくほど  $V$  が大きくなると言える。火星直下点及びその反対側で  $V$  は小さくなる。

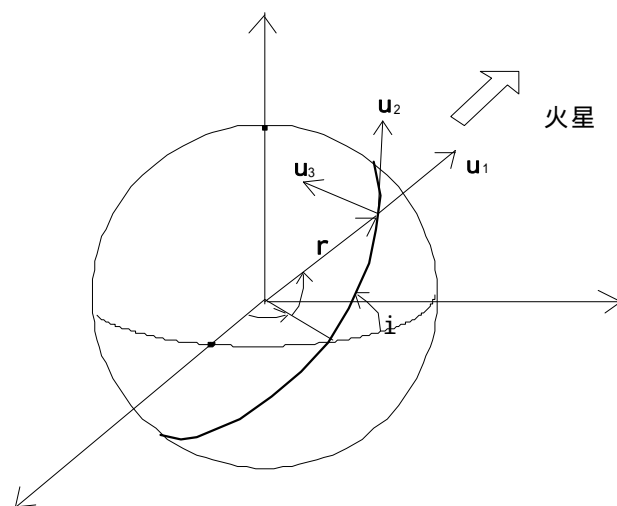


図 5.13-1 フォボス固定座標系と探査機の機体座標系

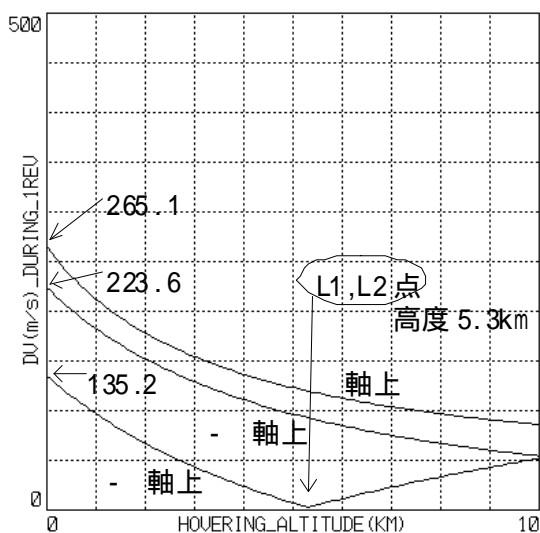


図 5.13-2 ホバリング  $V$  (Chao らの係数考慮)



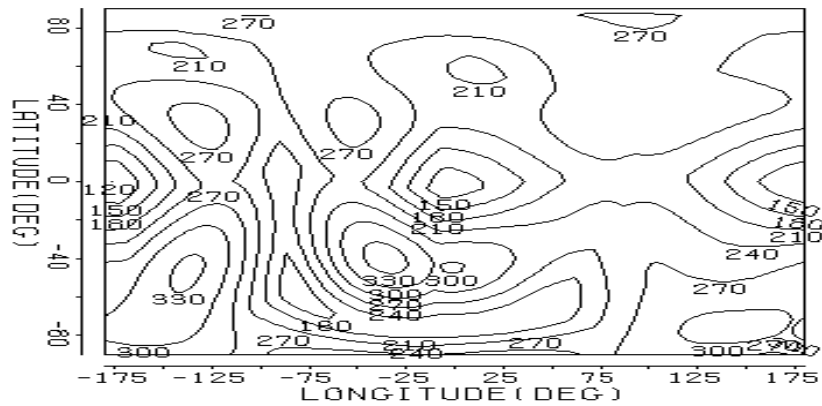


図5.13-3 高度ゼロでのホバリング V(m/s)  
Chaoらのポテンシャル係数を考慮

#### 5.14 耐熱シールドを使わない再突入の可能性<sup>64,65)</sup>

地球周回軌道にある宇宙機から物体を地上に回収する場合、耐熱シールドを持ったカプセルにその物体を入れて宇宙機本体から分離して大気圏に突入させるか、スペース・シャトルのように宇宙機そのものが耐熱シールドを装備して宇宙機ごと地上に回収する事が行われている。どちらにしても、耐熱シールドが必要であった。

1997 年頃、耐熱シールドを持たない衛星の地上回収の可能性を検討した。これは、当時の小型衛星研究室の増田室長から依頼を受けたものであり、基本的なアイデアも増田室長から提示されたものである。

初めに、空力加熱率を一定に抑えて降下する軌道を検討した。高度 150km の円軌道を短時間だけ熱的に耐えられる衛星を想定する。この高度から、衛星温度を大きく上げる事なく地上付近まで降ろしたい。

大気抵抗も考慮した以下の運動方程式を使用した。地球の自転は無視し、地球は球対称と近似する。

$$\begin{aligned}\frac{dr}{dt} &= V \sin \gamma \\ \frac{dV}{dt} &= -\frac{D}{m} - \frac{\mu}{r^2} \sin \gamma \\ \frac{d\gamma}{dt} &= -\frac{\mu}{r^2 V} \cos \gamma + \frac{V}{r} \cos \gamma\end{aligned}\quad D = \frac{1}{2} \rho V^2 S C_D \quad (5.14-1)$$

: flight path angle    m: 宇宙機質量    : 大気密度    S: 宇宙機断面積

$\mu$ : 地球重力定数(=  $3.986 \times 10^{14} \text{ m}^3/\text{s}^2$ )

大気密度は、U.S. Standard Atmosphere 1976 の高度 50km から 120km までのデータを、一定の scale height の指数関数モデルで以下のように近似した。

$$\rho = \rho_s e^{-\beta(h-h_s)} \quad (5.14-2)$$

$$\rho_s = 3.0968 \times 10^{-4} \text{ kg} / \text{m}^3$$

$$\beta = 1.4100 \times 10^{-4} \text{ m}^{-1}$$

$$h_s = 60 \times 10^3 \text{ m}$$

空力加熱率の計算には次式を使用した。

$$\dot{Q} = k \sqrt{\rho} V^{3.15} \quad k \text{ は、MKS 単位系で表して、} 9.652 \times 10^{-5} \text{ を使用する。} \quad (5.14-3)$$

空力加熱率一定の条件より、(5.14-2)式も用いて、次の  $r$  と  $V$  の関係式が得られる。

$$\frac{3.15}{V} \frac{dV}{dt} = \frac{\beta}{2} \frac{dr}{dt} \quad (5.14-4)$$

これを、初期高度 150km、初期速度 7800m/s として、積分すると、次式が得られる。

$$h(\text{km}) = 150 + 44.7 \ln \frac{V}{7800} \quad (5.14-5)$$

この  $h - V$  関係を図 5.14-1 に示す。比較のために、OREX の  $h - V$  関係も点線で示した。**OREX に比べて、高空で減速する必要のある事が分かる。**

次に、この空力加熱率一定の軌道を実現するために必要な宇宙機の断面積  $S$  を求める。(5.14-4)式の  $dV/dt$  と  $dr/dt$  に (5.14-1)式の運動方程式を代入すると、時々刻々の必要な断面積  $S$  が以下の様に表わされる。

$$S = -\frac{2m}{\rho C_D} \left( \frac{\beta}{6.3} + \frac{\mu}{r^2 V^2} \right) \sin \gamma \quad (5.14-6)$$

時々刻々の  $S$  を求めるには、flight path angle の値が必要であり、運動方程式を数値的に解く必要がある。図 5.14-2 に、数値積分で得た、高度 150km からの空力加熱率一定降下を実現する断面積を描いた。 **$m=50\text{kg}$** 、 $C_D=2.5$  とした。降下してすぐに、 $7000\text{m}^2$  近くまで断面積を大きくする必要がある。直径約 100m のパラシュートに相当する。高度約 60km で約  $3\text{m}^2$  まで小さくなる。つまり、降下開始から高度 60km 位まで大きなパラシュートが必要となる。なお、高度 10km まで降下するのに要した時間は約 15 分である。

次に、質量 50kg の小型衛星が高度 150km の円軌道まで降下した所で、何らかの方法で断面積を大きくして再突入する場合の trajectory と空力加熱率を検討した。簡単のため断面積は一定とした。直径 30m のバルーン(断面積は約  $700\text{m}^2$ )を開いた場合の高度 - 速度関係を図 5.14-3 に示す。最大加熱率は初期加熱率の約 3.5 倍になった。高度 150km の所で衛星温度を 40 とすると、最大で約 155 となる。なお、初期加熱率を越えている期間は、最初の約 7 分間である。

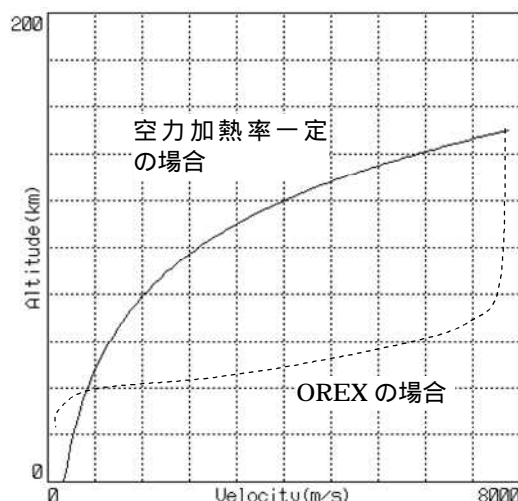


図 5.14-1 空力加熱率一定の高度 - 速度関係

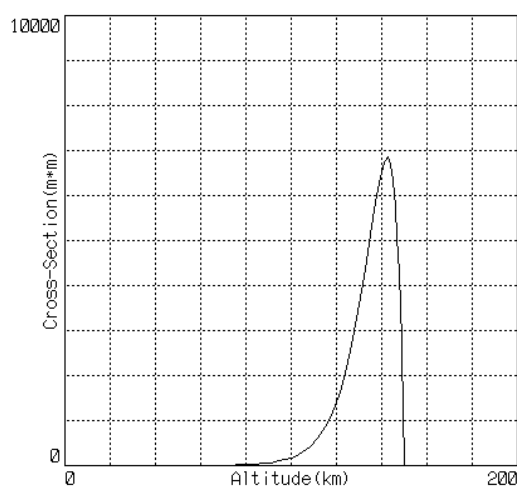


図 5.14-2 加熱率一定降下中の必要断面積

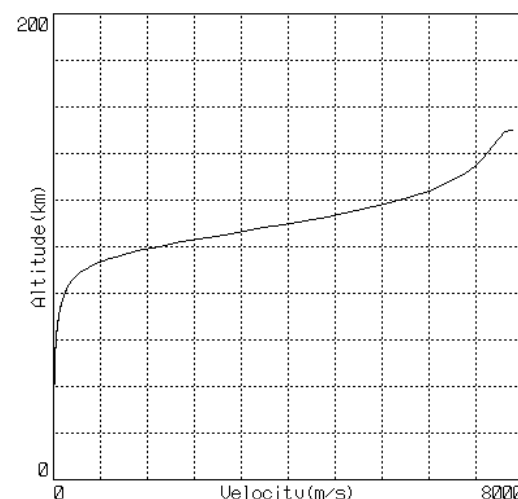


図 5.14-3 直径 30m のバルーンの場合

## 5.15 衛星群による光干渉計に適した軌道<sup>66)</sup>

1997 年頃、近未来の高分解能天文観測装置として、光(赤外線)領域での干渉計を複数の宇宙望遠鏡で実現する計画が、NASA 及び ESA で検討されていた。

NASA は、New Millennium 計画の Deep Space ミッション第 3 号機 DS3 を、光干渉計の実証ミッションとして計画し、2001 年頃の打上げを想定していた。しかし、2010 年現在、まだ実現していない。3 機の宇宙機から成り、heliocentric solar orbit に投入される予定であった。この軌道は私が「地球ドリフト軌道」と呼んでいる軌道であり、地球重力圏を脱出して少しずつ地球から離れる軌道である。DS3 では、衛星間距離 1km の相対位置を 1cm の精度で把握及び保持し、2 衛星からの光を導いて第 3 衛星の内部で干渉させる。第 3 衛星の内部で光路長の微調整を行ない、10nm 程度の光路差の精度を数分間維持する。

一方、ESA は、太陽 - 地球系ラグランジュ点の一つ L2 点に、3 機の望遠鏡を投入して光干渉計を構成する検討をしていた。ESA の計画では、最大衛星間距離を 5km とし、観測時間は 5 分としている。

相対位置・速度を、1cm 及び 0.1mm/s の精度で把握する事は、GPS の技術を利用する事で可能である<sup>67)</sup>。本節では、地球近傍空間の重力加速度勾配を調査して、**相対距離が 1km の場合に 10 分間の相対位置ずれが 1cm 以内に留まる領域(軌道)を検討した。**

探査機(光干渉計)が天体から受ける加速度は、慣性系において次式で表わされる。

$$\ddot{\mathbf{r}} = -\left(\frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}}\right)^T \quad (5.15-1)$$

$$U = -G \left( \frac{m_1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|} + \frac{m_2}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_2|} + \frac{m_3}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_3|} \right)$$

$m_1$  : 太陽の質量、  $m_2$  : 地球の質量、  $m_3$  : 月の質量

$G$  : 万有引力定数(  $6.672 \times 10^{-11} \text{ m}^3/(\text{kg s}^2)$  )

各天体から受ける加速度の勾配のオーダーは次式で評価できる。

$$F_i = \left| \frac{\partial \ddot{\mathbf{r}}}{\partial \mathbf{r}} \right| = \left| \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \left[ G m_i \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \left( \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|} \right) \right] \right|^T \left| \frac{2 G m_i}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|^3} \right| \quad (5.15-2)$$

$i$  は、太陽(=1)、地球(=2)、月(=3)を表わす。

### 太陽重力による加速度勾配

太陽から約 1AU の距離にある地球の近傍における太陽重力による加速度勾配は、(5.15-2)式より、

$$F_1 = 7.9 \times 10^{-14} \text{ m/s}^2/\text{m}$$

となる。相対距離が 1000 m の場合、加速度の差  $a_1$  は、

$$a_1 = 7.9 \times 10^{-11} \text{ m/s}^2$$

であり、これが 10 分間(600 秒間)続くと、相対距離の変化  $\Delta r_1$  は、

$$\Delta r_1 = 0.5 \times 7.9 \times 10^{-11} \times (600)^2 \text{ m} = 1.4 \times 10^{-5} \text{ m} = 0.0014 \text{ cm} \ll 1 \text{ cm}$$

となり、許容値 1 cm に比べて十分小さく、1AU 離れた太陽の重力は、問題では無い事が分かる。

### 地球重力による加速度勾配

表 5.15-1 に、地球中心からの距離が 7000km(中高度軌道)、42166km(静止軌道)、384000km(月軌道)、150 万 km(L1, L2 ラグランジュ点)の場合の重力加速度勾配  $F_2$ 、1000m 当たりの加速度差  $a_2$ 、10 分間の位置変化  $\Delta r_2$  を示す。

表 5.15-1 地球重力による加速度勾配の影響

地心からの距離 (km)	重力加速度勾配 $F_2(\text{m/s}^2/\text{m})$	1000m 当たりの加速度差 $a_2(\text{m/s}^2)$	10 分間の位置変化 $r_2(\text{cm})$
7000.	$2.3 \times 10^{-6}$	$2.3 \times 10^{-3}$	41400.
42166.	$1.1 \times 10^{-8}$	$1.1 \times 10^{-5}$	191.
384000.	$1.4 \times 10^{-11}$	$1.4 \times 10^{-8}$	0.25
150 万	$2.4 \times 10^{-13}$	$2.4 \times 10^{-10}$	0.004

表 5.15-1 より、月の軌道よりも遠くに行けば、10 分間の位置変化が 1cm 以下になる事が分かる。

### 月重力による加速度勾配

表 5.15-2 に、月中心からの距離が 10 万 km、384000km の場合の重力加速度勾配  $F_3$ 、1000m 当たりの加速度差  $a_3$ 、10 分間の位置変化  $r_3$  を示す。

表 5.15-2 月重力による加速度勾配の影響

月心からの距離 (km)	重力加速度勾配 $F_3(\text{m/s}^2/\text{m})$	1000m 当たりの加速度差 $a_3(\text{m/s}^2)$	10 分間の位置変化 $r_3(\text{cm})$
100000.	$9.8 \times 10^{-12}$	$9.8 \times 10^{-9}$	0.18
384000.	$1.7 \times 10^{-13}$	$1.7 \times 10^{-10}$	0.003

月の影響は、約 10 万 km 離れると、  
ほぼ無視できる事が分かる。

以上の検討から、衛星群による  
光干渉計を設置する場所として  
可能な所は、地球の近傍では、  
地球から約 50 万 km 以上離れた  
領域であると言える。図 5.15-1 を  
参照。

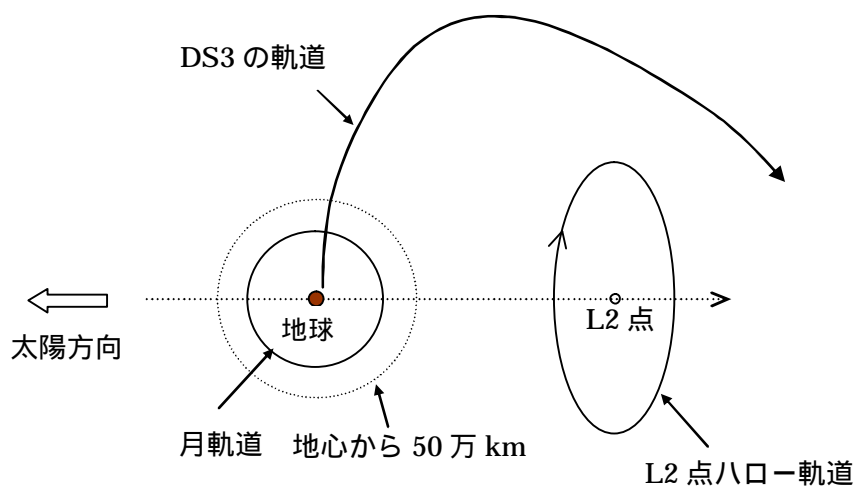


図 5.15-1 衛星群による光干渉計に適した軌道

## 5.16 Solar Sail を利用した軌道設計<sup>68)</sup>

衛星の小型化、太陽電池パドルの軽量化などが進んできたため、Solar Sail(太陽帆)を利用した軌道制御・保持の可能性も出て来た。そこで、2000 年頃、NASA、ESA 等が考えていた Solar Sail を軌道制御・保持に利用するミッションを幾つか調査し、簡単な検討を行なった。

2000 年頃に欧米で検討されていた Solar Sail ミッションを以下に掲げる。

### (A)Early Warning System beyond L1

輻射圧を利用して L1 点よりも太陽に近い点に観測機を設置し、太陽風などの予報時間を長くする。具体的には、地球-L1 点間距離の 2 倍の点に軌道保持し、予報時間を 2 倍にする事を考えていた。面密度  $15\text{g/m}^2$  の実現が必

要である。

### (B)North and South Pole Sitters(南北極上空観測衛星)

NASA は、2001 年度 NASA 予算案の中で、「Living with a Star(太陽との共生)プログラム」と呼ばれる太陽観測ネットワーク構築プログラムを提案していた。そのプログラムの構成要素の一つに、「南北極上空観測衛星(North and South Pole Sitters)」があった。太陽帆技術により、2 機の衛星がそれぞれ地球の北極・南極のはるか上空に滞在し、太陽が同地域に与える影響を観測する。2010 年以降の打上げを予定していた。面密度  $10\text{g/m}^2$  の実現が必要である。

### (C)Solar Polar Sail Mission<sup>69)</sup>

JPL を中心としたチームが、軌道半径  $0.48\text{AU}$  で傾斜角  $90$  度の太陽極軌道を周回する Solar Polar Sail Mission を検討していた。4 年程度で太陽極軌道に達し、その後 2 年間程度ミッション運用を行なう。その間に太陽を 6 周回する。面密度  $6\sim 7\text{g/m}^2$  で  $200\text{m}$  四方の太陽帆ができればこのミッションを実現できるとしていた。打上げ時の全質量は約  $380\text{kg}$ 。

当時の Solar Sail の技術実証としては、ESA と DLR 及び独インベント社が、 $50\text{kg}$  で  $400\text{m}^2$  の Solar Sail(面密度  $125\text{g/m}^2$ )を開発し、1999 年 12 月に地上展開デモを行なっている。上記ミッションに適用するには、1 桁以上の軽量化が必要であった。

上記(A)ミッションに対し、太陽帆の面密度  $m_{\text{sail}}/S$  がいくらの時、地球から太陽方向に幾ら離れた点に Solar Sail 宇宙機を保持できるかを検討した。図 5.16-1 を参照。太陽帆の質量を  $m_{\text{sail}}$ 、面積を  $S$  とし、宇宙機の太陽帆以外の質量を  $m_{\text{sail}}$  とした。

Solar Sail 宇宙機に作用する太陽重力、地球重力、太陽輻射圧、遠心力の釣り合いを考えると、以下の 5 次方程式を得る。なお、 $x$  は、 $X$  を  $R$  で無次元化したもの。

$$x^5 - (3 - \mu)x^4 + (3 - 2\mu)x^3 - (\mu + Q)x^2 + 2\mu x - \mu = 0 \quad (5.16-1)$$

$$Q = \frac{2G_1 S}{G(m_{\text{SUN}} + m_E)(1 + \eta)m_{\text{sail}}}$$

$$G_1 = 1.0218 \times 10^{17} \text{N(太陽定数)}$$

$Q$  は輻射圧による加速度と太陽重力による加速度の比であり、lightness number と呼ばれている。 $Q = 0$  とすると、(5.16-1)式は、 $L_1$  点の位置を求める方程式に一致している。

Solar Sail 部分とそれ以外とが同じ質量と近似して  $= 1$  とした場合の(5.16-1)式の数値解を図 5.16-2 に示す。 $L_1$  点の約 2 倍まで釣合位置を伸ばすには、 $m_{\text{sail}}/S$   $15\text{g/m}^2$  で良い事が分かる。

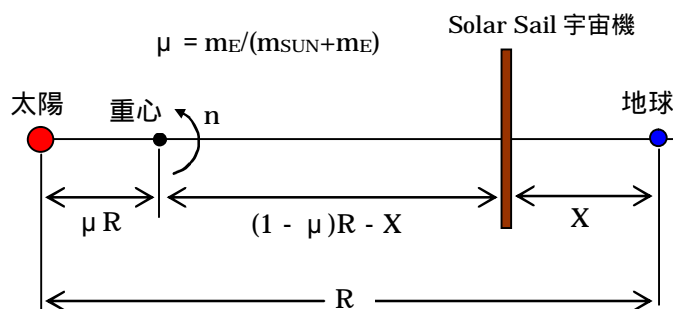


図 5.16-1  $L_1$  点以遠で釣り合う Solar Sail 宇宙機

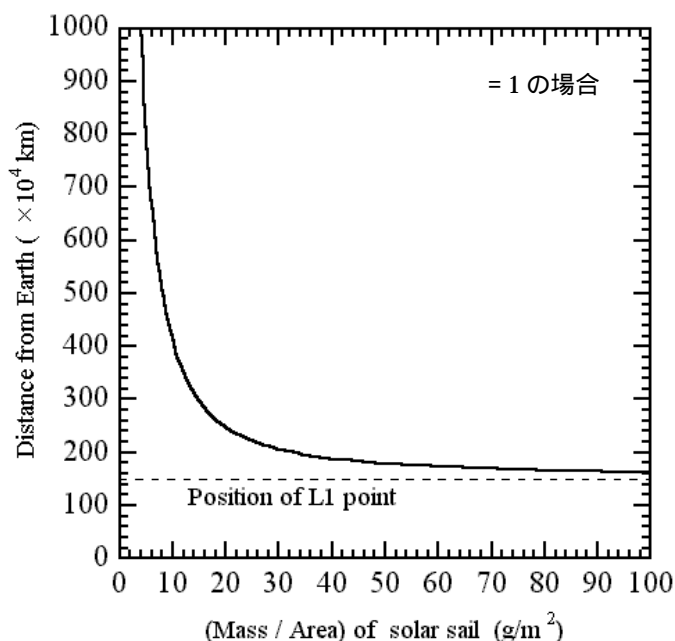


図 5.16-2 太陽帆宇宙機の太陽-地球間の釣り合い位置

上記(B)ミッションに対しては、黄道面垂直方向の力の釣り合い式も用いると、Pole Sitter の相対静止位置が、図 5.16-3、図 5.16-4 のように求められる。図中の  $\theta$  は、Sail の法線方向の上下角である。ここでも、 $\eta = 1$  としている。

$\theta$  が 10 数度～30 数度で、釣り合い位置が黄道面から最も離れる。面密度を  $10\text{g/m}^2$  以下にできると、地球の極の上空に滞在させる事ができる。

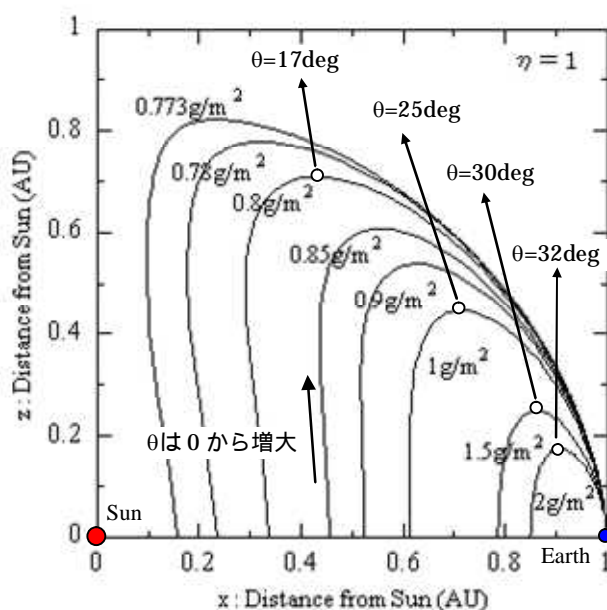


図 5.16-3 Pole Sitter の相対静止可能位置

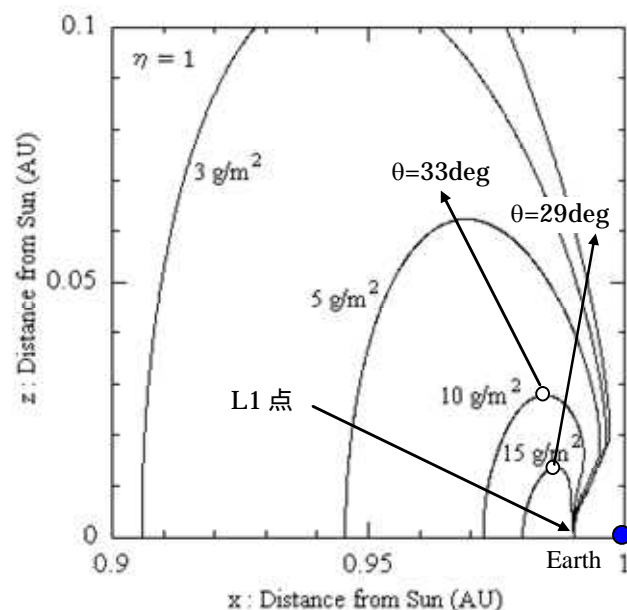


図 5.16-4 Pole Sitter の相対静止可能位置(地球近傍)

太陽極軌道の実現に対しては、黄道面に対する傾斜角を 90 度にするまでの年数を検討した。Sail の  $m_{\text{sail}}$  を黄道面垂直加速度が最大になる値(約 35 度)に保持し、軌道半周毎に  $\theta$  の符号を反転させる。 $\eta = 1$  とすると、1 周当たりの傾斜角変化量  $\Delta i$  (deg/rev) は、次式で見積もる事ができる。なお、**90 度になるまでに要する周回数は軌道長半径には依存しない**。但し、必要な日数は軌道長半径の  $3/2$  乗に比例して長くなる。従って、短期間で 90 度を達成するには、**できるだけ太陽に近い軌道で傾斜角を大きくするのが良い**。

$$\Delta i = \frac{0.0679}{m_{\text{sail}}/S} \text{ (deg/rev)} \quad (m_{\text{sail}}/S \text{ は } \text{kg/m}^2 \text{ 単位}) \quad (5.16-3)$$

Solar Polar Sail Mission の  $m_{\text{sail}}/S = 0.007\text{kg/m}^2$  と、Early Warning System beyond L1 の  $m_{\text{sail}}/S = 0.015\text{kg/m}^2$  の場合に対して、傾斜角が 90 度になるまでの期間を見積もってみる。

(5.16-3)式に  $m_{\text{sail}}/S = 0.007\text{kg/m}^2$  を代入すると、 $\Delta i = 9.7\text{deg/rev}$  となり、約 9.3 周回で傾斜角が 90 度となる。軌道長半径を Solar Polar Sail Mission の 0.48AU とすると、約 3.1 年で極軌道を実現できる。軌道半径を 1AU よりも小さくする場合には、初めに減速方向の加速度を主に発生させる必要があるため、極軌道実現までの期間は 3.1 年よりは長くなる。文献(69)では 4 年余りとなっている。

(5.16-3)式に  $m_{\text{sail}}/S = 0.015\text{kg/m}^2$  を代入すると、 $\Delta i = 4.5\text{deg/rev}$  となり、約 20 周回で傾斜角が 90 度となる。軌道長半径を上記と同じ 0.48AU とすると約 6.7 年となり、減速制御も必要な事も考慮すると、約 9 年で極軌道を実現できる。この程度の期間までは、検討に値すると思われる。

Solar Sail を利用した幾つかのミッションの軌道計画を検討し、それらのミッションを実現するために必要な太陽



帆の面密度を評価した。ESA 等が 2000 年頃に開発した太陽帆の面密度( $125\text{g/m}^2$ )に比べて、約 1 桁の軽量化ができれば、Early Warning System beyond L1、Pole Sitter、太陽極軌道を実現できることが判った。



## 6. 軌道力学の豆知識

本章では、軌道の設計・解析において、知っておくと役立つかも知れない事柄を幾つか紹介する。

### 6.1 $\left| \frac{\partial \mathbf{e}}{\partial V} \right|$ は $f$ (真近点離角) に依存しない

図 6.1-1 に示すように、楕円軌道の真近点離角  $f$  の点で、速度ベクトル方向に速度増分を加えたとする。

その時、速度増分に対する  $\mathbf{e}$  の感度  $\left| \frac{\partial \mathbf{e}}{\partial V} \right|$

は、 $f$  に依存しない。この事を証明する。

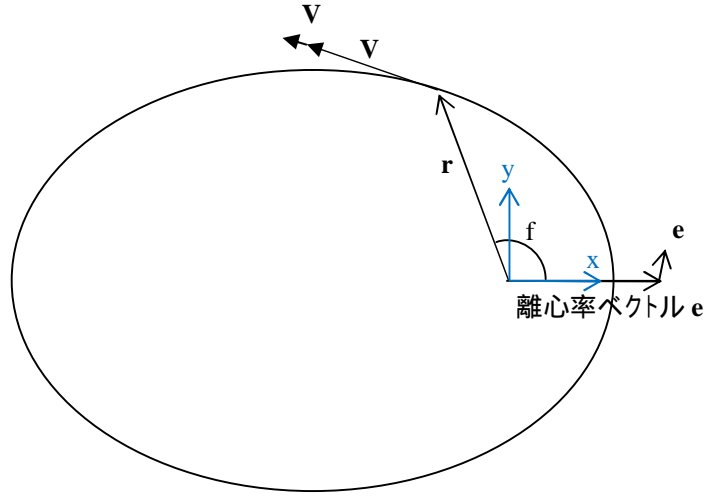


図 6.1-1 速度ベクトル方向の  $\mathbf{V}$  とそれによる  $\mathbf{e}$

離心率ベクトルは、次式で表現できる。

$$\mathbf{e} = \frac{\mathbf{V} \times (\mathbf{r} \times \mathbf{V})}{\mu} - \frac{\mathbf{r}}{r} \quad \mu: \text{地心重力定数} \quad (6.1-1)$$

これを  $\mathbf{V}$  で微分すると、

$$\delta \mathbf{e} = \frac{\delta \mathbf{V} \times (\mathbf{r} \times \mathbf{V}) + \mathbf{V} \times (\mathbf{r} \times \delta \mathbf{V})}{\mu} \quad (6.1-2)$$

となり、これに  $\delta \mathbf{V} = \delta V \mathbf{u}_V$  ( $\mathbf{u}_V$  は  $\mathbf{V}$  方向の単位ベクトル) を代入すると、

$$\delta \mathbf{e} = \frac{2\delta V}{\mu V} \mathbf{V} \times (\mathbf{r} \times \mathbf{V}) \quad (6.1-3)$$

となる。(6.1-1)式を変形して(6.1-3)式に代入すると、次式が得られ、

$$\delta \mathbf{e} = \frac{2\delta V}{V} \left( \mathbf{e} + \frac{\mathbf{r}}{r} \right) \quad (6.1-4)$$

$\delta \mathbf{e} / \delta V$  が以下のように表わされる。

$$\frac{\partial \mathbf{e}}{\partial V} = \frac{2}{V} \left( \mathbf{e} + \frac{\mathbf{r}}{r} \right) \quad (6.1-5)$$

図 6.1-1 に描いた軌道面座標系(x,y)で(6.1-5)式を表現すると、次式となる。

$$\frac{\partial \mathbf{e}}{\partial V} = \frac{2}{V} \left( \begin{pmatrix} e \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cos f \\ \sin f \end{pmatrix} \right) = \frac{2}{V} \begin{pmatrix} e + \cos f \\ \sin f \end{pmatrix} \quad (6.1-6)$$

$\delta \mathbf{e} / \delta V$  の絶対値は、次式となる。

$$\left| \frac{\partial \mathbf{e}}{\partial V} \right| = \frac{2}{V} \sqrt{(e + \cos f)^2 + \sin^2 f} = \frac{2}{V} \sqrt{e^2 + 2e \cos f + 1} \quad (6.1-7)$$

ここで、 $V$  を  $f$  で表現する。エネルギーの式に現れる  $r$  に、以下の  $r$  と  $f$  の関係式

$$r = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos f} \quad (6.1-8)$$

を代入すると、次式が得られる。

$$V = \sqrt{\mu \left( \frac{2}{r} - \frac{1}{a} \right)} = \sqrt{\mu \left( \frac{2(1 + e \cos f)}{a(1 - e^2)} - \frac{1}{a} \right)} = \sqrt{\frac{\mu(e^2 + 2e \cos f + 1)}{a(1 - e^2)}} = \sqrt{\frac{\mu}{a(1 - e^2)}} \sqrt{e^2 + 2e \cos f + 1} \quad (6.1-9)$$

(6.1-7)式に上式を代入すると、以下の式が得られ、この感度は  $f$  に依存しない事が分かる。

$$\left| \frac{\partial \mathbf{e}}{\partial V} \right| = 2 \sqrt{\frac{a(1-e^2)}{\mu}} \quad (6.1-10)$$

この事は、1995 年に小惑星周回軌道を検討している時に、数値的に気付いた。予想外の事だったので、上記のように証明した。

## 6.2 静止軌道長半径の変動

静止軌道長半径は、衛星の平均角速度が地球自転角速度に等しくなる時の平均軌道長半径の事である。つまり、平均ドリフト・レートがゼロになる平均軌道長半径である。

平均ドリフト・レートは、月・太陽・地球の摂動により変動するので、静止軌道長半径も変動する。本節では、静止軌道長半径がどの程度変動するかを示す。

平均ドリフト・レートは、 $10^{-4}$ deg/day 以下を無視すると、次式で近似できる<sup>7,8)</sup>。

$$\dot{\lambda} = \dot{\lambda}_{2B} + \Delta\dot{\lambda}_{J_2} + \Delta\dot{\lambda}_{sun,moon} + \Delta\dot{\lambda}_{NZ} \quad (6.2-1)$$

$$\dot{\lambda}_{2B} = n_{mean} - \omega_e \quad \text{二体問題近似のドリフト・レート} \quad (6.2-2)$$

$$n_{mean} = \sqrt{\frac{\mu}{a_{mean}^3}} \quad \omega_e: \text{地球自転角速度} \quad a_{mean}: \text{平均軌道長半径}$$

$$\Delta\dot{\lambda}_{J_2} = 3n_{mean} \left( \frac{a_e}{a_{mean}} \right)^2 J_2 \quad J_2 \text{ 項による補正項} \quad (6.2-3)$$

$a_e$ : 地球の赤道半径

$$\Delta\dot{\lambda}_{sun} = n_{mean} \frac{m_{sun}}{m_e} \left( \frac{a_{mean}}{r_{sun}} \right)^3 \left[ \begin{aligned} &2 - 3 \cos^2 \delta_{sun} - \frac{21}{8} \sin 2\delta_{sun} \sin i \sin(\alpha_{sun} - \Omega) \\ &- 3 \left( \frac{a_{mean}}{r_{sun}} \right)^2 \left( 1 - 5 \cos^2 \delta_{sun} + \frac{35}{8} \cos^4 \delta_{sun} \right) \end{aligned} \right] \quad (6.2-4)$$

$m_e$ : 地球質量

$\delta_{sun}$ : 太陽の赤経

$\alpha_{sun}$ : 太陽の赤緯

上式は、太陽潮汐力による補正項。月による項も、(6.2-4)式と同じ形。

$$\Delta\dot{\lambda}_{NZ} = 18n_{mean} \left( \frac{a_e}{a_{mean}} \right)^2 (C_{2,2} \cos 2\lambda + S_{2,2} \sin 2\lambda) \quad \text{Non-Zonal 項による補正項} \quad (6.2-5)$$

$C_{2,2}, S_{2,2}$ : Non-Zonal 項の係数

$\lambda$ : 衛星の経度

平均ドリフト・レートがゼロとなる  $a_{mean}$  (静止軌道長半径) を求めて描くと、図 6.2-1 となる。黒線は、1977 年の 1 月、3 月、6 月、9 月の各 1 ヶ月間の静止軌道長半径を数値的に求めたもの。赤線は、(6.2-1)式=0 を近似的に解いた(6.2-6)式を描いたもの。なお、(6.2-6)式では、Non-Zonal 項は無視している。

$$\begin{aligned} a_{syn}(km) = & 42165.768 + 0.046 \cos N \\ & - 0.067 \cos \bar{\omega}_{moon} \cos \lambda_{moon} - 0.046 \sin \bar{\omega}_{moon} \sin \lambda_{moon} \\ & - (0.105 + 0.046 \cos N) \cos 2\lambda_{moon} - 0.046 \sin N \sin 2\lambda_{moon} \\ & - 0.051 \cos 2\lambda_{sun} \end{aligned} \quad (6.2-6)$$

$$N = 248.644^\circ - 0.0529538^\circ \times (t - 1975.0)$$

白道の黄道に対する昇交点経度

$$\lambda_{moon} = 124.875^\circ + 13.1763965^\circ \times (t - 1975.0)$$

$$\bar{\omega}_{moon} = 145.960^\circ + 0.1114037^\circ \times (t - 1975.0)$$

$\bar{\omega}_{moon}$  は  $\omega_{moon} + \dot{\omega}_{moon}$

$$\lambda_{\text{sun}} = 279.041^\circ + 0.9856474^\circ \times (t - 1975.0)$$

t 1975.0 は、1974 年 12 月 31 日 0 時 UT からの日数

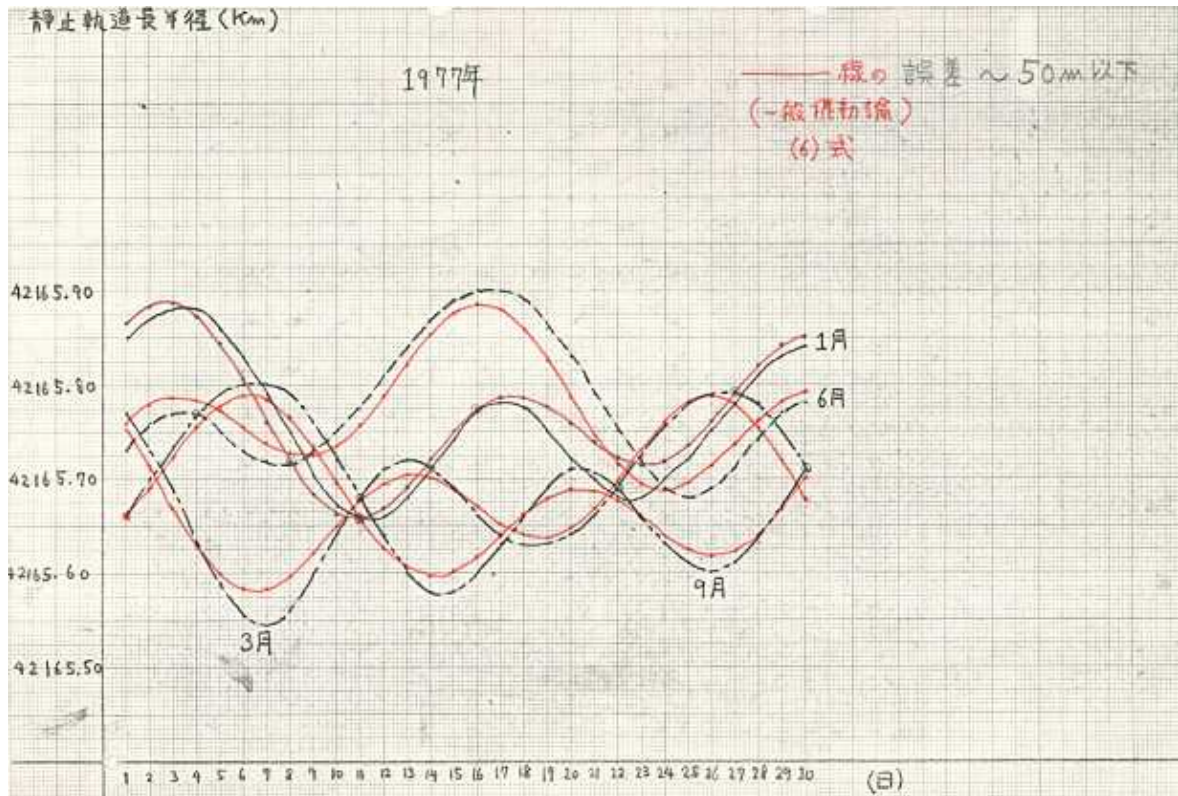


図 6.2-1 静止軌道長半径の変動

42165.7km の周りに  $\pm 200\text{m}$  程度変動している事が分かる。

### 6.3 $J_2$ 項による $r$ と $V$ の変動

地球周りの軌道において  $J_2$  項による影響は大きい。本節では、略円軌道 1 周における  $J_2$  項による  $r$  と  $V$  の変動を記す。

$r$  の式を、離心率  $e$  の 1 次までで近似する。 $f$  を真近点離角、 $M$  を平均近点離角とすると、

$$r = \frac{a(1-e^2)}{1+e\cos f} \approx \frac{a(1-e^2)}{1+e\cos(M+2e\sin M)} \approx \frac{a}{1+e\cos M} \quad (6.3-1)$$

となる。以下の離心率ベクトル( , )の定義と平均緯度引数  $\varphi$  の定義、

$$\xi = e\cos\omega, \quad \eta = e\sin\omega \quad \varphi = M + \omega \quad (6.3-2)$$

を使うと、

$$e\cos M = e\cos(\varphi - \omega) = \xi\cos\varphi + \eta\sin\varphi \quad (6.3-3)$$

となり、(6.3-1)式は以下のように表わされる。

$$r = \frac{a(1-e^2)}{1+e\cos f} \approx \frac{a}{1+\xi\cos\varphi + \eta\sin\varphi} \quad (6.3-4)$$

$J_2$  項による短周期摂動量を  $\Delta a, \Delta \xi, \Delta \eta, \Delta \varphi$  とし、これらの変動による  $r$  を、微小量の 1 次までの近似で表現する

と、

$$\begin{aligned}
 r_0 + \Delta r &\approx \frac{a_0 + \Delta a}{1 + (\xi_0 + \Delta \xi) \cos(\varphi_0 + \Delta \varphi) + (\eta_0 + \Delta \eta) \sin(\varphi_0 + \Delta \varphi)} \\
 &\approx \frac{a_0 + \Delta a}{1 + \xi_0 \cos \varphi_0 + \eta_0 \sin \varphi_0 + \Delta \xi \cos \varphi_0 + \Delta \eta \sin \varphi_0} \\
 &\approx r_0 \left( 1 + \frac{\Delta a}{a_0} \right) (1 - \Delta \xi \cos \varphi_0 - \Delta \eta \sin \varphi_0)
 \end{aligned} \tag{6.3-5}$$

となる。J<sub>2</sub> 項が存在しない時の量に添え字 0 を付けた。 0, 0 も 1 次の微小量として扱っている。 従って、次式が得られる。

$$\Delta r \approx r_0 \left( \frac{\Delta a}{a_0} - \Delta \xi \cos \varphi_0 - \Delta \eta \sin \varphi_0 \right) \tag{6.3-6}$$

J<sub>2</sub> 項による短周期項  $a$ 、 $\xi$ 、 $\eta$  は、以下のように近似できる<sup>19)</sup>。

$$\Delta a \approx \frac{3}{2} J_2 \frac{a_e^2}{a_0} \sin^2 i \cos 2\varphi_0 \tag{6.3-7}$$

$$\Delta \mathbf{e} \equiv \begin{pmatrix} \Delta \xi \\ \Delta \eta \end{pmatrix} \approx \frac{3}{4} \left( \frac{a_e}{a_0} \right)^2 J_2 \begin{pmatrix} \left( 2 - \frac{5}{2} \sin^2 i \right) \cos \varphi_0 + \frac{7}{6} \sin^2 i \cos 3\varphi_0 \\ \left( 2 - \frac{7}{2} \sin^2 i \right) \sin \varphi_0 + \frac{7}{6} \sin^2 i \sin 3\varphi_0 \end{pmatrix} \tag{6.3-8}$$

(6.3-7)式と(6.3-8)式を、(6.3-6)式に代入すると、

$$\frac{\Delta r}{r_0} \approx \frac{3}{2} \left( \frac{a_e}{a_0} \right)^2 J_2 \left( \frac{1}{6} \sin^2 i \cos 2\varphi_0 - 1 + \frac{3}{2} \sin^2 i \right) \tag{6.3-9}$$

となる。

V の変動は、以下のエネルギーの式(Vis-viva の式)を利用して求める。

$$V^2 = \mu \left( \frac{2}{r} - \frac{1}{a} \right) \tag{6.3-10}$$

r と a による V を 1 次の近似で求めると、次式となる。

$$\Delta V \approx \frac{\mu}{2V_0} \left( \frac{\Delta a}{a_0^2} - \frac{2}{r_0^2} \Delta r \right) \tag{6.3-11}$$

上式に、(6.3-7)式の a と(6.3-9)式の r を代入すると、次式となる。

$$\frac{\Delta V}{V_0} \approx \frac{3}{4} \left( \frac{a_e}{a_0} \right)^2 J_2 \left( \frac{2}{3} \sin^2 i \cos 2\varphi_0 + 2 - 3 \sin^2 i \right) \tag{6.3-12}$$

例として、

$$a_0=r_0=7000\text{km(高度 622km)}, i=98 \text{ 度}, V_0=7546\text{m/s}$$

を、(6.3-9)式と(6.3-12)式に代入すると、

$$\begin{aligned}
 \frac{\Delta r}{r_0} &\approx 2.20 \times 10^{-4} \cos 2\varphi_0 + 6.35 \times 10^{-4} \\
 \Delta r(\text{km}) &\approx 1.54 \cos 2\varphi_0 + 4.45
 \end{aligned} \tag{6.3-13}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{\Delta V}{V_0} &\approx 4.41 \times 10^{-4} \cos 2\varphi_0 - 6.35 \times 10^{-4} \\
 \Delta V(\text{m/s}) &\approx 3.33 \cos 2\varphi_0 - 4.79
 \end{aligned} \tag{6.3-14}$$

となる。(6.3-13)式、(6.3-14)式から分かるように、 $r$ 、 $V$  にはバイアス成分が存在する事に注意。

#### 6.4 大気抗力による略円軌道の低下率

大気抗力による略円軌道の軌道長半径変化率(高度低下率)は、次式で評価できる。

$$\frac{da}{dt} = -\rho V a \frac{C_D S}{m} \quad (6.4-1)$$

$C_D$ :抵抗係数       $S$ :衛星の断面積       $m$ :衛星質量

本節では、上式の導出を説明する。

以下のエネルギーの式(Vis-viva の式)を使用する。

$$V^2 = \mu \left( \frac{2}{r} - \frac{1}{a} \right) \quad \mu : \text{地心重力定数} \quad (6.4-2)$$

大気抗力により、速度  $V$  が減少し、その結果、軌道長半径  $a$  が減少する。従って、(6.4-2)式において、 $V$  と  $a$  の微小変化の関係を考えると、次式が得られる。

$$\Delta a = \frac{2Va^2}{\mu} \Delta V \quad (6.4-3)$$

よって、

$$\frac{da}{dt} = \frac{2Va^2}{\mu} \frac{dV}{dt} \quad (6.4-4)$$

となる。大気抗力による加速度は、次式で表わされ、

$$\frac{dV}{dt} = -\frac{1}{2} \rho V^2 \frac{C_D S}{m} \quad (6.4-5)$$

これを、(6.4-4)式に代入すると、最初の(6.4-1)式が得られる。但し、以下の式で  $\mu$  を消している。

$$\mu = n^2 a^3 = V^2 a \quad (6.4-6)$$

## 7. おわりに

本資料では、基礎的な事項として、第2章で軌道の摂動と接触・平均軌道の概要を述べ、第3章で軌道決定誤差について記し、第4章で軌道制御の概要を述べた後、第5章で、筆者が行ってきた軌道設計の中から16個の軌道設計の概要を記した。第6章に、軌道力学の豆知識と題して、知っていると思っても役立つかも知れない事を4つ書いた。

第5章の軌道設計の説明では、詳細を記述するスペースが無いため、1つの軌道設計当たり数頁の範囲で要点を記した。詳細は、第8章の参考文献を参照して頂きたい。

## 8. 参考文献

- (1)古在由秀, “人工衛星の軌道”, 宇宙開発事業団 追跡管制部資料, 1979年2月.
- (2)歌島昌由, “地球重力ポテンシャル(Zonal 項)の摂動理論の解説”, 個人資料, 1983年5月.
- (3)JAXA 安全・信頼性推進部, “ミッション・軌道設計ハンドブック,” JERG-2-151-HB001, 2008年9月.
- (4)木下 宙, “天体と軌道の力学,” 東京大学出版会, 1998年.
- (5)歌島, “電気推進系による静止軌道への軌道変換の最適化,” 宇宙開発事業団報告 NASDA-TMR-020027, 2003年1月.
- (6)T.N.Edelbaum, "Theory of Maxima and Minima," Chapter 1 of 'Optimization Techniques' (G.Leitmann, Ed.), Academic Press, New York, 1962.
- (7)広田, 田中, 歌島, “人工衛星静止化の力学”, 1978年.
- (8)田中 彰, “人工衛星静止化の力学(第2版) 理論編”, TK-M15307, 1986年.
- (9)歌島, “2トン静止衛星の軌道保持の精度上の限界の検討,” 中央追跡管制所資料 TK-M95108, 1984年.
- (10)F.J.Lerch, S.M.Klosko, G.B.Patel: “A Refined Gravity Model from LAGEOS (GEM-L2)”, Geophysical Research Letters, Vol.9, No.11, pp.1263-1266 (Nov. 1982).
- (11)広田, “一般摂動法による静止衛星の軌道面及び離心率の長周期解,” 宇宙開発事業団技術報告 TR-16, 1983年.
- (12)C.A.Kluever and S.R.Oleson, Direct Approach for Computing Near-Optimal Low-Thrust Earth-Orbit Transfers, Journal of Spacecraft and Rockets, Vol.35, No.4 (1998), pp. 509-515.
- (13)歌島, “SSPS 組立軌道のデブリ解析,” システム解析・ソフトウェア研究開発センター資料 GLA-03015, 2003年4月.
- (14)歌島, “放射線によるセル劣化及びデブリ衝突を考慮した SSPS 軌道間輸送,” ISAS アストロダイナミクス・シンポジウム, 2003年.
- (15)歌島, “SSPS 軌道間輸送の新しい制御法,” 宇宙技術, Vol. 2, pp. 19-23, 2003.
- (16)歌島, “静止軌道における SSPS のデブリ解析,” システム解析・ソフトウェア研究開発センター GLA-03029, 2003年9月.
- (17)歌島, “SSPS 軌道への輻射圧の影響と新運用軌道の提案,” システム解析・ソフトウェア研究開発センター GLA-02041, 2002年9月.
- (18)歌島, “オール電化推進系の静止衛星システム(1)---静止化軌道解析---,” 第50回宇宙科学技術連合講演会, 3G08, 2006年.

- (19)歌島, 広田, 田中, “太陽同期準回帰軌道の力学 第2版,” 中央追跡管制諸資料 TK-M15101, 1986年2月.
- (20)河野, “合成開口レーダ衛星干渉 SAR 測位のための自律精密軌道制御 検討状況概要”, GHA-07032, 2007年11月.
- (21)R.A.Cook, “The Long-Term Behavior of Near-Circular Orbits in a Zonal Gravity Field,” AAS 91-463.
- (22)M.Aorpimai, P.L.Palmer, “Analysis of Frozen Conditions and Optimal Frozen Orbit Insertion,” Journal of Guidance, Control, and Dynamics, Vol. 26, No. 5, 2003.
- (23)G.E.Cook, “Perturbations of Near-Circular Orbits by the Earth’s Gravitational Potential,” Planet and Space Science, Vol. 14, Jan. 1966, pp.433-444.
- (24)E.Cutting, G.H.Born, J.C.Frautnick, W.I.McLaughlin, R.A.Neilson, and J.A.Thielen, “Mission Design for Seasat-A, An Oceanographic Satellite,” AIAA Paper No.77-31, January 1977.
- (25)歌島, 広田, “ランドサット3号の平均軌道要素について,” 中央追跡管制所資料 TK-M95102, 1984年.
- (26)歌島, “略円軌道の高度の近似式,” 地球観測センター資料 HE-90032, 1990年.
- (27)歌島, 野田, “超低高度観測衛星の軌道保持---新凍結軌道の利用---,” ミッションデザイン支援グループ資料 BDC-06014, 2006年11月.
- (28)歌島, 野田, “新凍結軌道による超低高度衛星の軌道保持”, 第51回宇宙科学技術連合講演会, 1112, 2007年.
- (29)歌島, “横風、TDI、SARのためのヨーステアリング,” ミッションデザイン支援グループ資料 BDC-07016, 2007年12月.
- (30)JASMINE 検討グループ, “JASMINE 検討報告書,” 2008年3月.
- (31)歌島, “高高度略円極軌道への太陽潮汐力の影響(B改訂),” 情報技術開発共同センター資料 GSB-04007B, 2004年7月.
- (32)歌島, “HCPO(半径15万~20万km)への月潮汐力の影響,” ミッションデザイン支援グループ資料 BDC-06003, 2006年5月.
- (33)歌島, “ラグランジュ点近傍の軌道力学,” 宇宙開発事業団技術報告 NASDA-TMR-960033, 1997年3月.
- (34)歌島, “太陽-地球系 L2 点周りのリサージュ基準軌道の設計,” 宇宙航空研究開発機構研究開発報告 JAXA-RR-04-021, 2005年2月.
- (35)歌島, “太陽-地球系 L2 点周りのハロー基準軌道の設計,” 宇宙航空研究開発機構研究開発報告 JAXA-RR-05-008, 2005年11月.
- (36)歌島, “太陽 - 地球系 L4, L5 点近傍軌道の摂動解析,” 宇宙開発事業団技術報告 NASDA-TMR-980010, 1999年3月.
- (37)日本機械学会編, “機械工学便覧 応用システム編 「11 宇宙機器・システム」,” 日本機械学会, 2007年, pp.59-63.
- (38)歌島, “1AU 軌道のドリフトと投入コスト,” 先端ミッション研究センター資料 GAA-99005, 1999年.
- (39)歌島, 川口, “作用圏境界軌道の共鳴安定性,” 日本航空宇宙学会論文集, Vol.50, No.580, pp.210-214, 2002年.
- (40)歌島, “作用圏境界を飛行する軌道の力学的性質と小衛星探査への応用,” 宇宙開発事業団技術報告 NASDA-TMR-010007, 2001年5月.



- (41)寺沢寛一編, “自然科学者のための数学概論(応用編),” 岩波書店, 1960 年.
- (42)歌島, “光学観測のための小惑星周回略円軌道の検討,” 日本航空宇宙学会誌 第45巻, 第518号, 1997 年.
- (43)M.Utashima, “Spacecraft Orbits Around Asteroids for Global Mapping,” Journal of Spacecraft and Rockets, Vol. 34, No. 2, 1997.
- (44)歌島, “H- A によるユリシーズ型太陽極軌道への軌道設計,” 宇宙開発事業団技術報告 NASDA-TMR-010011, 2001 年.
- (45)J.A.Sims, J.M.Longuski, and A.J.Staugler, “V LEVERAGING FOR INTERPLANETARY MISSIONS: MULTIPLE-REVOLUTION ORBIT TECHNIQUES”, AAS 95-306.
- (46)歌島, “電気推進系によるユリシーズ型太陽極軌道への軌道設計,” 宇宙開発事業団技術報告 NASDA-TMR-010021, 2002 年.
- (47)Jun'ichiro Kawaguchi, “Solar Electric Propulsion Leverage: Electric Delta-VEGA(EDVEGA) Scheme and its Application”, AAS/AIAA Space Flight Mechanics Meeting, AAS 01-213, Santa Barbara, California, 11-15 February 2001.
- (48)Jun'ichiro Kawaguchi, “Solar Electric Propulsion and Earth Gravity Assist to Solar Polar Trajectory,” The 1st Out-of-Ecliptic Plane Workshop, July 2000.
- (49)歌島, “E V-EGAと木星 SWINGBY を利用した太陽極軌道への軌道計画(地球 SWINGBY 後も電気推進系による加速を行なう場合)と解を得るまでの苦戦の経過”, 宇宙開発事業団 技術研究本部 システム解析・ソフトウェア研究開発センター資料 GLA-01034, 2001 年 12 月 10 日.
- (50)三菱スペース・ソフトウェア株式会社, “SLATS 自律軌道制御アルゴリズムの高精度化の検討, Appendix.5” JAXA 委託業務(JX-PSPC-285626)の成果報告書, 2009 年 9 月.
- (51)戸田謙一, 岩田隆敬, 中村信一, 柿沼真博, 熊谷進, “陸域観測技術衛星 (ALOS) の GPS 受信機と高精度位置決定: 軌道上評価結果,” 第 50 回宇宙科学技術連合講演会 1D06, 2006 年 11 月.
- (52)J.A.Marshall, F.G.Lemoine, etc., “Precision Orbit Determination and Gravity Field Improvement Derived from TDRSS,” IAF-95-A.1.05, 1995.
- (53)歌島, “太陽-地球系 L1,L2 点軌道の軌道決定の概要,” JAXA 技術資料 GSB-04032, 2004 年 10 月.
- (54)W.G.メルボーン, “バイキングの追跡と軌道計算,” 日経サイエンス, 1976 年 8 月号.
- (55)J.F.Jordan, “Deep Space Navigation Systems and Operations,” ESA International Symposium on Spacecraft Flight Dynamics, May, 1981.
- (56)T.Martín-Mur, P.Antreasian, etc., "USE OF VERY LONG BASELINE ARRAY INTERFEROMETRIC DATA FOR SPACECRAFT NAVIGATION," ISTS 2006-d-50.
- (57)James S. Border, "A GLOBAL APPROACH TO DELTA DIFFERENTIAL ONE-WAY RANGE," ISTS 2006-d-49.
- (58)歌島, “最終 V 発生におけるロケットと衛星の比較,” JAXA 技術資料 GSB-04048, 2004 年 12 月.
- (59)歌島, “ヒドラジン・スラスタによる軌道保持における制御周期と大気密度の関係,” SLATS プリプロジェクトチーム資料 SLA-080040, 2008 年 12 月.
- (60)歌島, “高離心率の軌道の寿命計算法,” 中央追跡管制所資料 TK-M95101, 1984 年.
- (61)広田正夫, “長円軌道の近地点変化式精度調査,” 中央追跡管制所資料 QAX-070060, 1995 年.

(62)<http://www.heavens-above.com>

(63)歌島, “ポテンシャル係数を考慮したフォボスのホバリング V解析,” JAXA 技術資料 NCX-000052, 1994 年.

(64)歌島, “耐熱シールドを使わない再突入の可能性,” JAXA 技術資料 GAA-97011, 1997 年 9 月.

(65)歌島, “バルーン付き小型衛星の再突入,” JAXA 技術資料 GAA-97014, 1997 年 12 月.

(66)歌島, “衛星群による光干渉計に適した軌道,” JAXA 技術資料 GAA-97006, 1997 年.

(67)K.Lau, S.Lichten, L.Young, B.Haines, “An Innovative Deep Space Application of GPS Technology for Formation Flying Spacecraft,” AIAA Guidance, Navigation and Control Conference, AIAA 96-3819, July 1996.

(68)歌島, “Solar Sail を利用した軌道設計とその実現性の調査,” JAXA 技術資料 GAA-00012, 2000 年 10 月.

(69)JPL’s Advanced Projects Design Team, etc., “A Solar Polar Sail Mission,” 1998.