

ISSN 0389-4010
UDC 533. 6. 001. 3:
533. 6. 013. 2:

航空宇宙技術研究所報告

TECHNICAL REPORT OF NATIONAL AEROSPACE LABORATORY

TR-781

振動揚力面計算のダブルット・ポイント法
その1. 亜音速流

上 田 哲 彦

1983年10月

航空宇宙技術研究所
NATIONAL AEROSPACE LABORATORY

振動揚力面計算のダブルット・ポイント法*

その 1 . 亜音速流

上 田 哲 彦**

Doublet Point Method for Calculations on Oscillatory Lifting Surfaces

Part 1. Subsonic Flow

Tetsuhiko UEDA

ABSTRACT

A simple method for calculating the unsteady aerodynamic loadings on harmonically oscillating thin wings in subsonic flow has been developed. The method is based on a concept of concentrated lift forces. The wing is divided into the element surfaces on which lift distributions are represented by single concentrated lift forces. Since the procedure does not include any quadratures, it can easily be applied to calculate the unsteady aerodynamic loadings on complex planform wings even when they have partial span control surfaces. Numerical calculations are carried out for various wing geometries and are compared with other analyses and experiments.

記 号 表

AR	; 翼のアスペクト比	R	; (7) 式で定義する変数
B, B_R, B_I	; (9), (10) 式で定義する関数	r	; 無次元翼幅方向距離
b	; 翼根の翼半弦長	S	; 全翼面積
C_L, C_l	; 複素揚力係数	u	; 一様流速
C_M, C_m	; 複素モーメント係数	w	; 無次元吹上げ速度
D	; (12) 式で定義するマトリックス	\boldsymbol{w}	; 吹上げベクトル
h	; 翼の垂直方向変位の無次元振幅	X	; (8) 式で定義する変数
K	; 核関数	x_0	; (4) 式で定義する変数
k	; 無次元振動数	y_0	; (5) 式で定義する変数
M	; 一様流のマッハ数	α	; 翼の迎角
N_x	; 翼弦方向要素数	β	; $\sqrt{1 - M^2}$
N_y	; 半翼幅の翼幅方向要素数	γ	; オイラ定数
Δp	; 無次元圧力差	Δi	; 要素表面面積
\boldsymbol{p}	; 圧力ベクトル	δ	; フラップ角
Q	; 拘束マトリックス	Φ	; モードマトリックス
		ϕ	; 複素係数の位相角
		A	; 1/4 翼弦長での後退角
		λ	; 翼のテーパ比
		σ, σ_i	; 要素表面の半幅

* 昭和58年 8 月25日受付

** 機体第 1 部

ρ_∞	；一様流密度
添 字	
I	；虚数部
i	； i 番目の要素表面
L, l	；揚力
M, m	；モーメント
R	；実数部

1. はじめに

振動する翼面上の揚力分布を算定することは、空力弾性屋にとっての重要な問題の一つに数えられる¹⁾。1940 年に、クスナ²⁾が亜音速流れにある有限薄翼についての積分方程式を定式化として以来、これまで、この非定常揚力分布を計算する方法は、数多く提案されてきている。これらの方法を大別してみると、モード関数法³⁻⁵⁾（しばしば核関数法と称されるものであるが、筆者はこの名の方が実を表す⁶⁻⁸⁾と考える）と、離散要素法⁶⁻⁸⁾の二つに分けることができる。

Watkins 等は³⁾、1959 年にモード関数法を使い、実用的な計算法を確立した。この方法を更に発展させ、Rowe 等⁵⁾は、舵面の付いた翼についても振動空気を旨く計算できるようにした。しかし、舵面があると吹上げ速度分布に不連続面が生じることや、翼面形が複雑なものになったりすることで、この方法では、対応する仮定モード関数を必要とし、それらの幾何形状により発生する特異性を何如に処理するかが問題となり、場合によって非常に使い難い方法となる。

一方、第 2 の方法である離散要素法の代表的なものとして、ダブレット格子法⁷⁾を挙げることができる。この方法は、もともと定常流に対して確立された渦格子法⁹⁾を、非定常流へ圧力核関数の形で発展させたものと言うことができる。複雑な翼形状についても簡単に応用できるため、この方法は現在広く使われている¹⁰⁾。しかし、これを使うと、尤もらしい結果が得られるものの、加速度ダブレットを使う基礎式が定常流れに対しても成立するにもかかわらず、定常部分（無次元振動数に無関係な部分）の計算は渦格子法に頼らなければならないという不整合性を含んでいる。この不整合性は、加速度ポテンシャル

のダブレットを使う場合に、翼幅方向積分に関して現れる、特異積分の正当な評価が難しかったため採られた措置である。

ダブレットは、渦という物理的概念と密接に結びつくものであるが、ヘルムホルツ方程式のグリーン関数の導関数として純粹に数学的に導かれる。クスナの積分方程式の核関数は、速度ポテンシャルと同じ微分方程式を満たす加速度ポテンシャルのダブレットから導かれたものであり、それは、圧力差（すなわち揚力となる成分）にしか関与しない。一方、翼から出る流れ方向に軸をもつ後流渦は、圧力差を生じることに関しては何の寄与分も持たないが、吹上げ速度は誘起する。そのため、馬蹄渦の 2 本の後流渦の間に誘起される吹上げ速度は、加速度ポテンシャルで扱うときには、核関係の r^{-2} の特異性の中に組み込まれることになる¹¹⁾。ここで r は後に、(6) 式で定義する翼幅方向変数である。これが特異積分をマンガラの積分¹²⁾として計算しなければならない理由である。流れを支配する微分方程式は、流れが、定常あるいは非圧縮の仮定では、ラプラスの方程式となるため、加速度ポテンシャルの線状ダブレットを、直接、渦糸に結びつけることができる。非圧縮流については、Jordan⁸⁾が、要素の 1/4 弦長位置にある大きさ一定のダブレット線を使って、特異積分を精度良く計算している。

さて、ここに示す方法¹³⁾は、ダブレット線とか、渦の概念に頼らずに、離散系におけるマンガラの積分の意味を使って、この核関数の中の特異積分を、圧縮かつ非定常流について、適切に評価するものである。この方法には、前述した定常流に対する整合性があり、また、ダブレット格子法よりずっと簡単な形となる。方法は、翼を小さな要素表面に分割して、それぞれの要素表面に作用する揚力を、一つの集中力で代表させる。この集中力は、数学的には、加速度ポテンシャルの点ダブレットに対応する。手順の中で、数値積分を必要とすることがないので、計算に要する時間が比較的少なくて済む。何よりも、方法自体が簡単であるといえる。

ここで、パネル法と呼ばれる手法について、少し述べておく。クスナの積分方程式の代わりに、Morino と Kuo¹⁴⁾は、速度ポテンシャルのグリーン

関数を使った非定常流についてのより一般的な積分方程式を使用した計算法を提案し、その後、Dust等¹⁵⁾が、より高精度の近似法に発展させている。このパネル法は、翼厚の効果や翼胴干渉問題にも適用できるが、翼面上の圧力分布の循環部分を問題とする限り、クスナの方程式を用いることが、依然として本質的であるといえる。

また、筆者は、この方法を開発した後で、同様の発想がHoubolt¹⁶⁾によって独自に提案されていることを知った。しかし、彼のアイデアは、ここで完成させた様な三次元流れの問題については、数値計算を含む最終結果まで到達していない。特に本研究の鍵となったのは、圧力核関数の解析的評価¹⁷⁾にあると言えよう。

2. ダブルレット・ポイント法

振動揚力面上の圧力分布の複素振幅と、吹上げ速度の複素振幅は、亜音速流れに於て次の様に積分方程式で結びつけられる。^{1,2)}

$$w(x, y) = \frac{1}{8\pi} \iint_{Ra} \Delta p(\xi, \eta) K(x_0, y_0) d\xi d\eta \quad (1)$$

揚力面は、 $z = 0$ の面上にあるものと仮定する。記号 Ra は翼の占る領域を表わす。(1)式に現われる変数は、すべて無次元量として扱う。長さの変数は、翼根半弦長 b で無次元化し、擾乱速度は、一様流速で無次元化したものとする。圧力係数 Δp は、

$$\Delta p = - \frac{p'_+ - p'_-}{1/2 \rho_\infty u^2} \quad (2)$$

で定義し、ここで p'_+ と p'_- は、それぞれ翼の上下面の擾乱圧力である。(2)式右辺の分母は、一様流の動圧である。(1)式の核関数 $K(x_0, y_0)$ は次の様に書くことができる。

$$K(x_0, y_0) = e^{-ikx_0} \left[\frac{Me^{ikX}}{R\sqrt{X^2 + r^2}} + B(k, r, X) \right] \quad (3)$$

(3)式では次の定義量を用いた。

$$x_0 = x - \xi \quad (4)$$

$$y_0 = y - \eta \quad (5)$$

$$r = |y_0| \quad (6)$$

$$R = \sqrt{x_0^2 + \beta^2 r^2} \quad (7)$$

$$X = (x_0 - MR)/\beta^2 \quad (8)$$

核関数の中にある関数、 $B(k, r, X)$ は複素数値をもつ積分関数である。

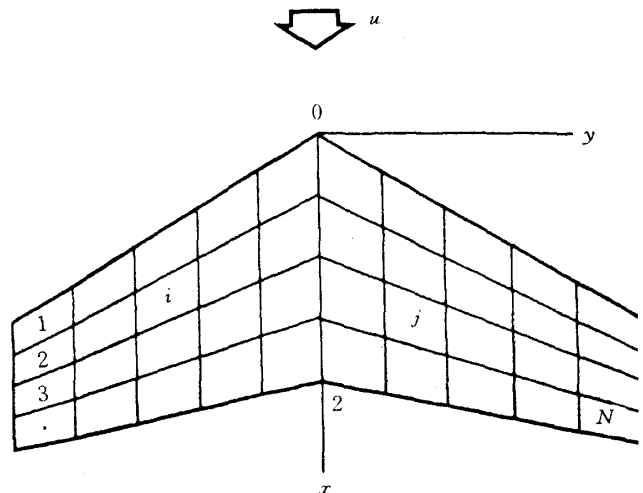
$$B(k, r, X) = \int_{-\infty}^X \frac{e^{iRv}}{(v^2 + r^2)^{3/2}} dv \quad (9)$$

この関数は次の様な二つの実関数に分けられる。

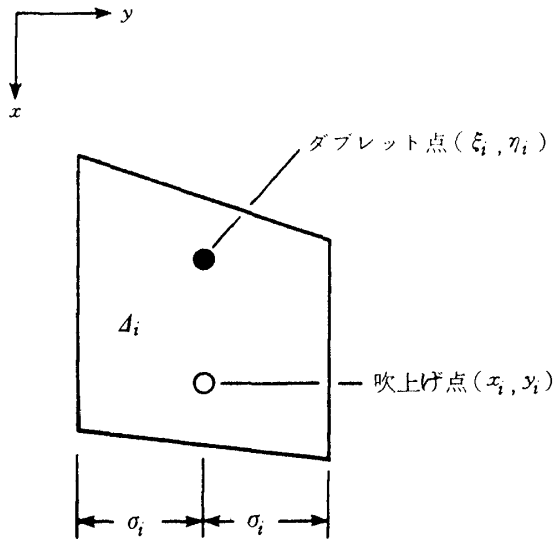
$$B(k, r, X) = B_R(k, r, X) + i B_I(k, r, X) \quad (10)$$

これらの関数値は、文献(17)にある級数によって簡単に計算することができる。核関数 $K(x_0, y_0)$ は、点 (ξ, η) に置かれた加速度ポテンシャルの点ダブルレットが誘起する法線方向速度成分の場を表すものであるから、この点 (ξ, η) をダブルレット点と呼ぶ。また、吹上げ速度を代表させる点 (x, y) を、吹上げ点と呼ぶ。ダブルレット格子法に倣って、翼面を、要素表面と呼ぶ部分平板に分割する。各要素表面では、その二つの側辺が流れに沿うようにする。各要素に1から N までの番号をつけて区別する(第1図)。今、第2図に示す様な、 i 番目の要素表面を考えよう。

台形状の要素表面の面積を A_i とし、幅を $2\sigma_i$ とする。三次元圧縮流に対して厳密な証明がある訳ではないが、ダブルレット格子法が旨く行くことに倣い、 $1/4 \sim 3/4$ 翼弦則⁹⁾をこれに用いる。すなわち、要素表面上の揚力分布は、要素中央四半分位置の点



第1図 要素表面分割

第2図 第*i*番目の要素表面

(ξ_i, η_i) に集約させる。このことは、そこに強さ、 $\Delta p(\xi_i, \eta_i) \cdot \Delta_i$ の加速度ダブレットを置くことに等価となる。従って、点 (ξ_i, η_i) はダブレット点である。同様に、幅方向中央 3/4 翼弦点 (x_i, y_i) を、要素表面上の吹上げ分布の代表する点と見なす。これらの仮定をすることにより、積分方程式 (1) の線形代数方程式への離散化が可能となる。(1) 式に代って、*i* 番目の要素表面の吹上げ、 w_i は、離散化された形で次式により計算することができる。

$$w_i = \frac{1}{8\pi} \sum_{j=1}^N \Delta p(\xi_j, \eta_j) \Delta_j \cdot K(x_i - \xi_j, y_i - \eta_j),$$

$$(i = 1 \dots N) \quad (11)$$

もし、

$$D = [d_{ij}] = \frac{\Delta_j}{8\pi} K(x_i - \xi_j, y_i - \eta_j) \quad (12)$$

$$\mathbf{p} = \{p_j\} = \{\Delta p(\xi_j, \eta_j)\} \quad (13)$$

$$\mathbf{w} = \{w_i\} = \{w(x_i, y_i)\} \quad (14)$$

とおけば、次の代数方程式を得る。

$$\mathbf{w} = D\mathbf{p} \quad (15)$$

吹上げベクトル、 \mathbf{w} は、既知の振動モード形 $h(x, y)$ から計算されるものである。

$$w_i = \frac{\partial}{\partial x} h(x_i, y_i) + ikh(x_i, y_i) \quad (16)$$

以上が離散化の概要である。ここで、クッタの条件

と、核関数の特異性の処理について述べる必要がある。翼後縁におけるクッタの条件については、ダブレット格子法や渦格子法でみられるように、 $1/4 \sim 3/4$ 翼弦則を使うことによって、圧力分布に対しては、直接クッタの条件を課す必要はない。しかし、核関数の特異性に関しては、その離散化において注意が必要である。(1) 式の積分は、 $X > 0$ で、 $r \rightarrow 0$ とすると、 $B_R(k, r, X)$ に含まれる r^{-2} の特異性により無限大となるため、通常の積分の意味では無意味となる。従って、もし積分が、この特異領域を含む場合には、マンガラの積分¹²⁾の意味で積分値を計算しなければならない。(11) 式の離散系の中にこれを取り入れるため、まず、 $r < \sigma$ かつ $X > 0$ において、関数 B_R の翼幅方向積分を考えてみる。これは、吹上げ点がダブレット点の後方に位置する場合である。マンガラによる定義を導入する。

$$\oint_{-\sigma}^{\sigma} B_R(k, r, X) dy_0$$

$$= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[\int_{-\sigma}^{-\epsilon} B_R(k, r, X) dy_0 + \int_{\epsilon}^{\sigma} B_R(k, r, X) dy_0 - \frac{4}{\epsilon} \right]$$

$$(X > 0) \quad (17)$$

ここで、

$$\int_{-\infty}^{-\epsilon} + \int_{\epsilon}^{\infty} \frac{2}{r^2} dy_0 = \frac{4}{\epsilon} \quad (18)$$

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{-\epsilon}^{\epsilon} \left[B_R(k, r, X) - \frac{2}{r^2} \right] dy_0 = 0$$

$$(X > 0) \quad (19)$$

の関係式を使うと、(17) 式は次式となる。

$$\oint_{-\sigma}^{\sigma} B_R(k, r, X) dy_0$$

$$= \int_{-\sigma}^{\sigma} \left[B_R(k, r, X) - \frac{2}{r^2} \right] dy_0 - \frac{4}{\sigma}$$

$$(X > 0) \quad (20)$$

(20) 式の右辺にある積分はもはや無限大とはならず、通常の積分の意味で有限値をもつ。正の引数 X の場合の関数 B_R は、被積分関数が偶関数であることと、 $X = 0$ のとき既存の関数で表わされる¹¹⁾ことを考慮すると第2種変形ベッセル関数を介して、負の引数を持つ場合と結びつけられる。

$$B_R(k, r, X) = -B_R(k, r, -X) + 2(k/r) K_1(kr), \quad (X > 0) \quad (21)$$

(20) 式に (21) 式を代入し、ベッセル関数に級数展開を用いて項別積分すると

$$\begin{aligned} \int_{-\sigma}^{\sigma} B_R(k, r, X) dy_0 &= - \int_{-\sigma}^{\sigma} B_R(k, r, -X) dy_0 \\ &= -\frac{4}{\sigma} + 4k \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(k\sigma/2)^{2n+1}}{n!(n+1)!(2n+1)} \\ &\quad \left[\ln \frac{k\sigma}{2} + r - \sum_{m=1}^n \frac{1}{m} - \frac{4n+3}{2(2n+1)(n+1)} \right], \quad (X > 0) \quad (22) \end{aligned}$$

となる。したがって、もし、 $k\sigma \ll 1$ であれば、積分は次式により近似することができる。

$$\begin{aligned} \int_{-\sigma}^{\sigma} B_R(k, r, X) dy_0 &\approx \int_{-\sigma}^{\sigma} \left[-B_R(k, r, -X) \right. \\ &\quad \left. - \frac{2}{\sigma^2} + k^2 \left(\ln \frac{k\sigma}{2} + r - \frac{3}{2} \right) \right] dy_0 \quad (23) \end{aligned}$$

(23) 式より、マンガラの積分の効果を離散系の中に組み入れるためには、もし吹上げ点がダブルレット点 (ξ_j, η_i) の後流で、 $2\sigma_j$ の幅の中にあるとき

$$\begin{aligned} B_R(k, r, X) &\rightarrow -B_R(k, 0, -X) - \frac{2}{\sigma_j^2} \\ &\quad + k^2 \left(\ln \frac{k\sigma_j}{2} + r - \frac{3}{2} \right) \quad (24) \end{aligned}$$

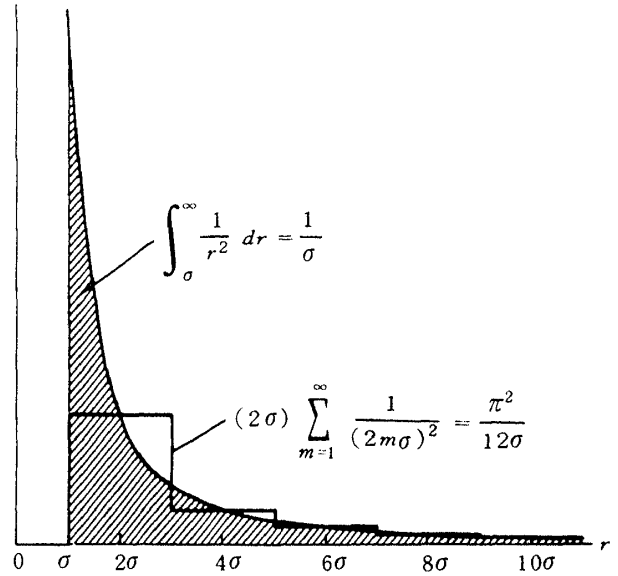
で置換えれば良いことが判る。(24) 式右辺の第2項は、渦格子法の馬蹄渦の効果に対応する。しかし、離散系において、この儘ではその効果が過大に評価されてしまうので、更に修正が必要となる。この項は、次の量を相殺するための項であると見なすことができる。

$$2 \int_{\sigma}^{\infty} \frac{2}{r^2} dr = \frac{4}{\sigma} \quad (25)$$

一方、離散系においては、(25) 式左辺の積分は、次式で評価することになる (第3図参照)

$$2(2\sigma) \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2}{(2m\sigma)^2} = \frac{\pi^2}{12} \frac{4}{\sigma} \quad (26)$$

以上のことから、吹上げ点が、ダブルレット点の後流



第3図 離散系における積分値

になる場合には

$$\begin{aligned} B_R(k, r, X) &\rightarrow -B_R(k, 0, -X) - \frac{\pi^2}{6\sigma_j^2} \\ &\quad + k^2 \left(\ln \frac{k\sigma_j}{2} + r - \frac{3}{2} \right) \quad (r < \sigma_j, X > 0) \quad (27) \end{aligned}$$

で評価してやれば良いことが結論づけられる。(27) 式右辺の最終項も同様の修正を要すると考えられるが、この項については、 $k\sigma$ が小さくなるにつれて、差も小さくなるため、 $k\sigma$ の小さい時にはこの儘で十分である。

3. 自由度の縮少

マトリックス方程式、(15) 式を解く前に、自由度を縮少しておくのが効率良い。たとえば、圧力分布ベクトル \mathbf{p} の対称性等からある拘束を課することができる場合には、より少ない自由度で系を表すことができる。

$$\mathbf{p} = \mathbf{Q}\tilde{\mathbf{p}} \quad (28)$$

よって、(28) 式の拘束のもとで、(15) 式は

$$\tilde{\mathbf{p}} = [\mathbf{Q}^T \mathbf{D} \mathbf{Q}]^{-1} \mathbf{Q}^T \mathbf{w} \quad (29)$$

と解くことができる。さらにもし、離散系 \mathbf{w} にモード法

$$\mathbf{w} = \Phi \tilde{\mathbf{w}} \quad (30)$$

を適用するなら、圧力分布は次式となる。

$$\tilde{p} = [Q^T D Q]^{-1} Q^T \phi \tilde{w} \quad (31)$$

4. 計算結果

(15) 式あるいは (31) 式を解くことにより、ダブルレット点の集中力をその要素面積で除した値として、圧力差が直接求まる。次の定義式は本方法にとって本質的なものではないが、ここで複素揚力係数とモーメント係数を便宜的に定義する。

$$C_l(y_j) = \sum_i^{N_x} \Delta p_i \Delta_i / \sum_i^{N_x} \Delta_i \quad (32)$$

(総和は、 $y = y_i$ で翼弦方向に行う)

$$C_m(y_j) = \sum_i^{N_x} \Delta p_i \Delta_i (x_m - x_i) / \sum_i^{N_x} \Delta_i \quad (33)$$

(総和は、 $y = y_i$ で翼弦方向に行う)

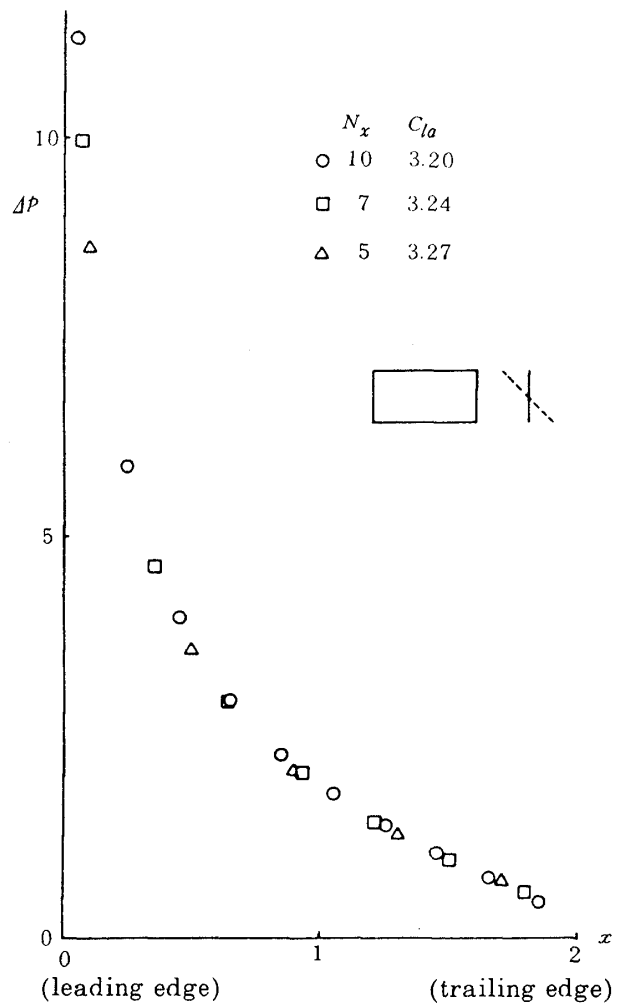
$$C_L = \sum_j^{N_y} \{C_l(y_j) \sum_i^{N_x} \Delta_i\} / (S/2) \quad (34)$$

$$C_M = \sum_j^{N_y} \{C_m(y_j) \sum_i^{N_x} \Delta_i\} / (S/2) \quad (35)$$

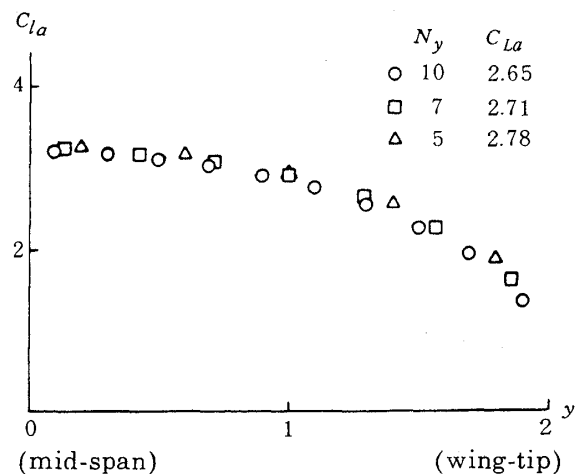
ここで、 S は翼全体の面積で、 x_m はモーメント軸である。

無次元振動数を零にすると、流れは定常流になる。定常流れにあるアスペクト比 2 の矩形翼について、圧力分布と揚力傾斜を、第 4 図に示した様に種々の要素数について計算した。第 4 a 図は、3 種の異なる翼弦方向要素数 N_x について、 $y = 0.2$ の位置で翼弦方向の要素数は 5 に固定している。この図から、少ない要素数でも十分精度良い結果が得られることが判る。翼弦方向の要素数を一定にして、翼幅方向の要素数を変化させた時の解の収束の度を第 4 b 図に示す。要素数が少ないと、翼端部においてやや高めの局所揚力傾斜を示すが、要素数による依存性は少ないといえる。この傾向は、流れが非定常の場合にも同様となる。

第 5 図は、同じ矩形翼が、翼弦中心を軸にピッチング振動している時の、翼幅方向要素数についての依存性を示している。この図ではまた、Laschka⁴⁾ のモード関数法の計算結果との比較を行っている。



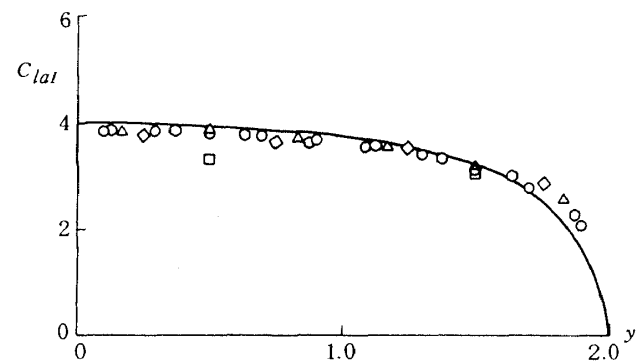
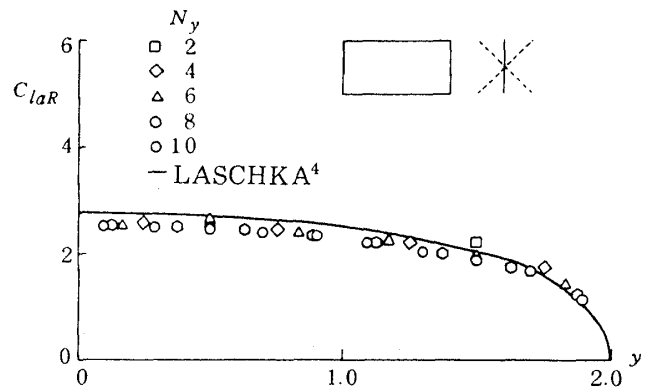
第 4 a 図 翼弦方向要素数 N_x に対する依存性
($AR = 2, k = 0, M = 0, N_y = 5,$
 $y = 0.2, A = 0^\circ, \lambda = 1$)



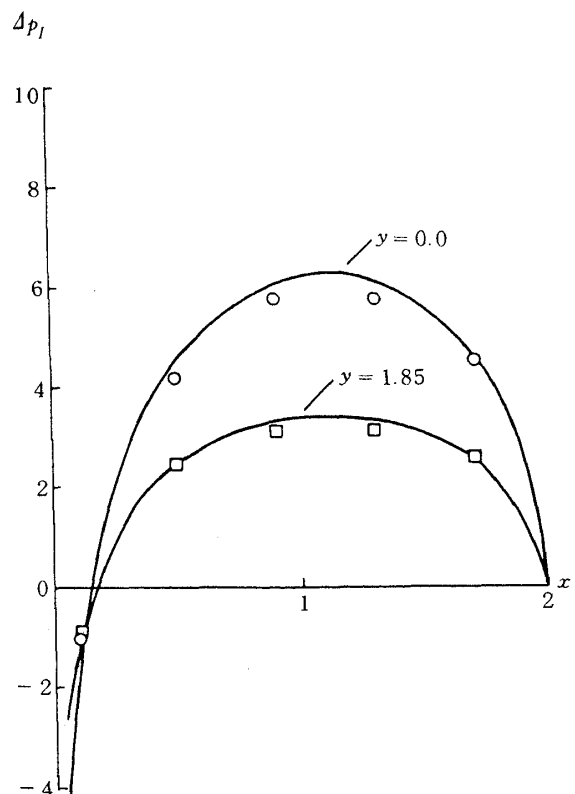
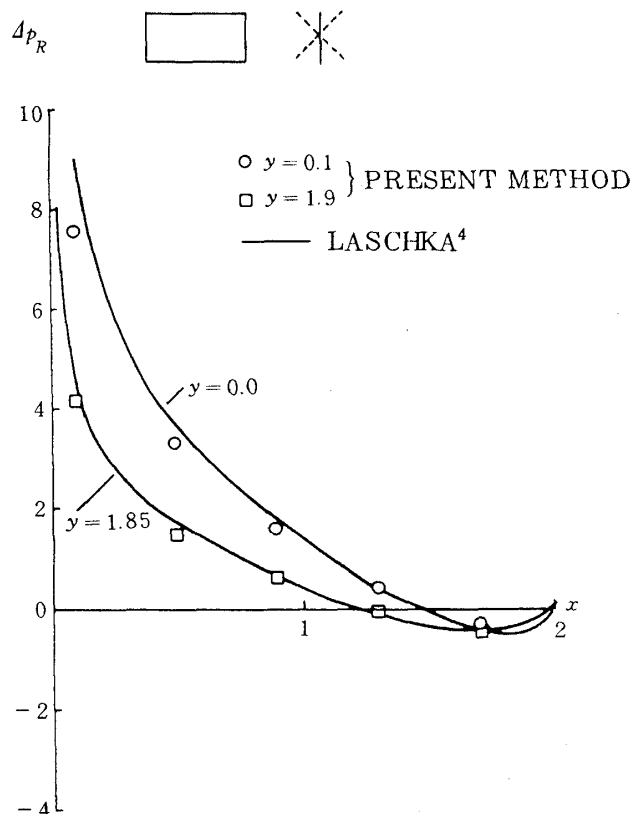
第 4 b 図 翼幅方向要素数 N_y に対する依存性
($AR = 2, k = 0, M = 0, N_x = 5,$
 $A = 0^\circ, \lambda = 1$)

翼幅方向要素数が, 4 で十分収束した解を与えている。もし結果を, 全体の揚力係数で比較するなら, 翼幅方向要素数 2 で, $C_L = 2.4 + 3.2i$ であり, 10 要素の場合の, $C_L = 2.1 + 3.4i$ に対して既に良い結果を与えている。翼幅方向 10, 翼弦方向 5 の要素数について, 翼弦方向圧力分布をモード関数法と比較して第 6 図に示す。本方法による圧力分布の実部と虚部は, 共に, 翼端部でモード関数法に較べて, やや大きな値を示している。この傾向は, 第 5 図においても見られたものである。この非圧縮流でピッチング運動をしている翼について, 全体の揚力およびモーメント係数を, 無次元振動数に対し Lanrence と Gerber¹⁸⁾ の結果と第 7 図に比較した。両者の一致は良好である。

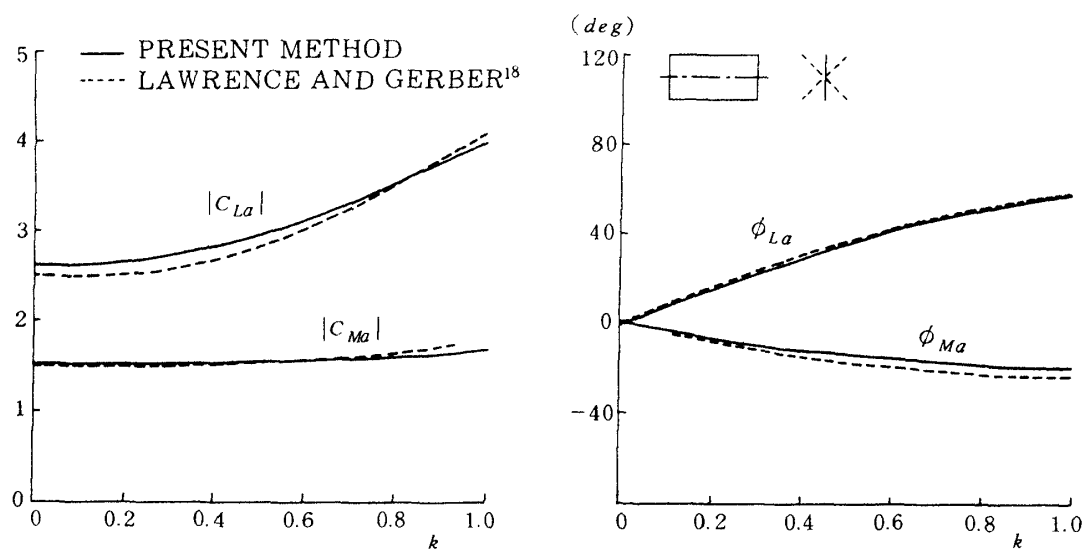
文献(4)にある二つの異なる翼平面形について計算してみた結果を, Laschka の結果と比較して, 第 8, 9 図に示す。第 8 図に示す翼は, 45° の後退角を持ち, 単位振幅で上下並進運動をしている。局所モーメント係数は, 局所翼弦中心の点についてとった。この場合は, 圧縮性も考慮し, $M = 0.8$ についての計算も行った。結果の比較は, 非圧縮流, 圧縮



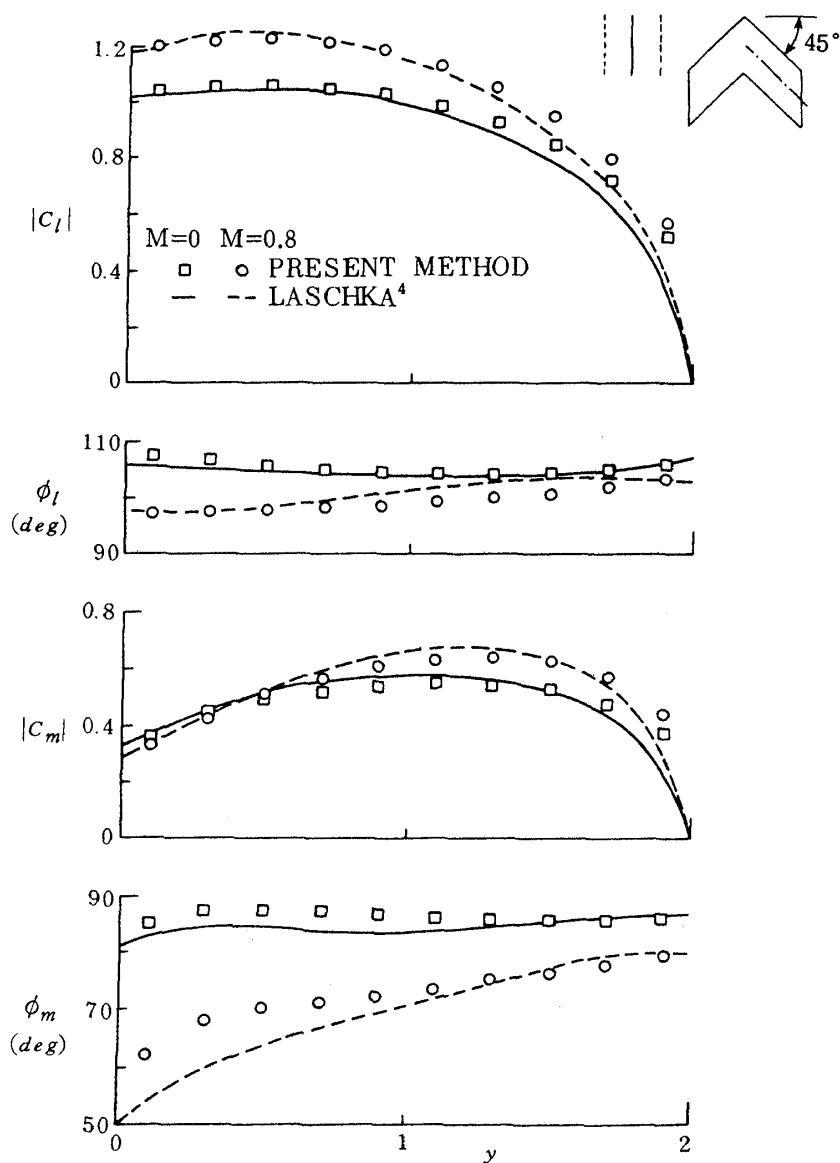
第 5 図 非定常の場合の翼幅方向要素数に対する依存性 ($AR = 2, k = 1, M = 0, N_x = 5, A = 0^\circ, \lambda = 1$)



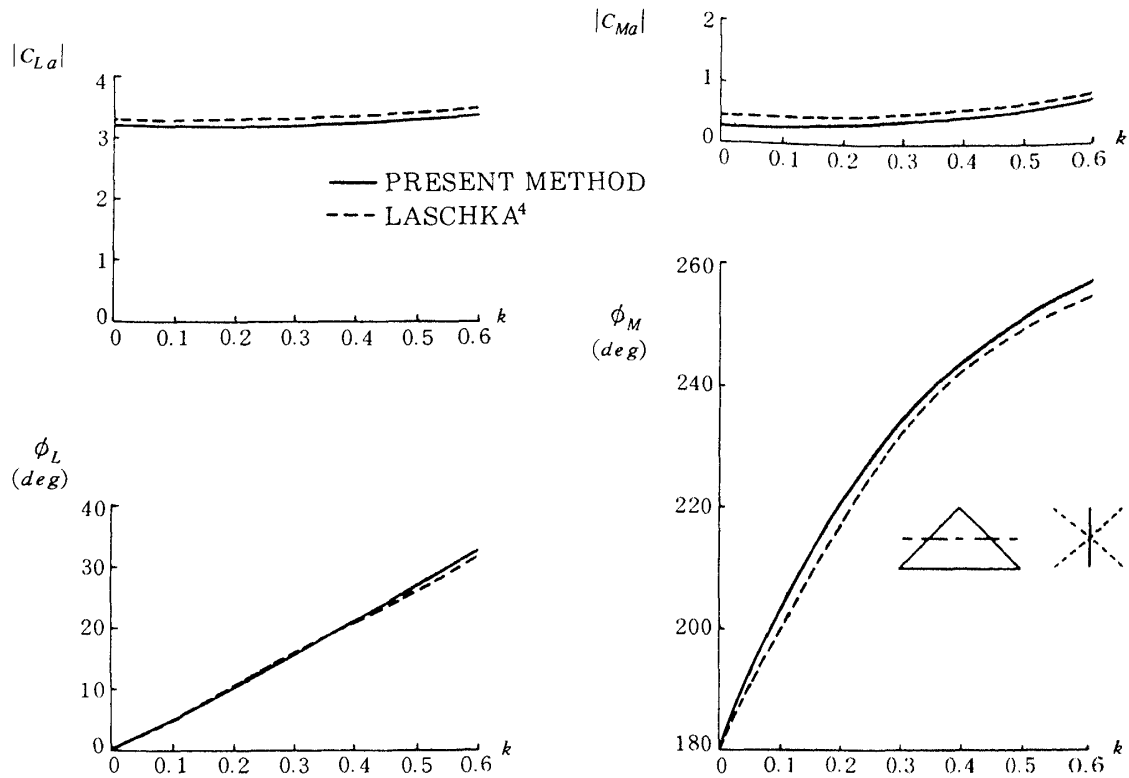
第 6 図 矩形翼の圧力分布 ($AR = 2, k = 1, M = 0, N_x = 5, N_y = 10, A = 0^\circ, \lambda = 1$)



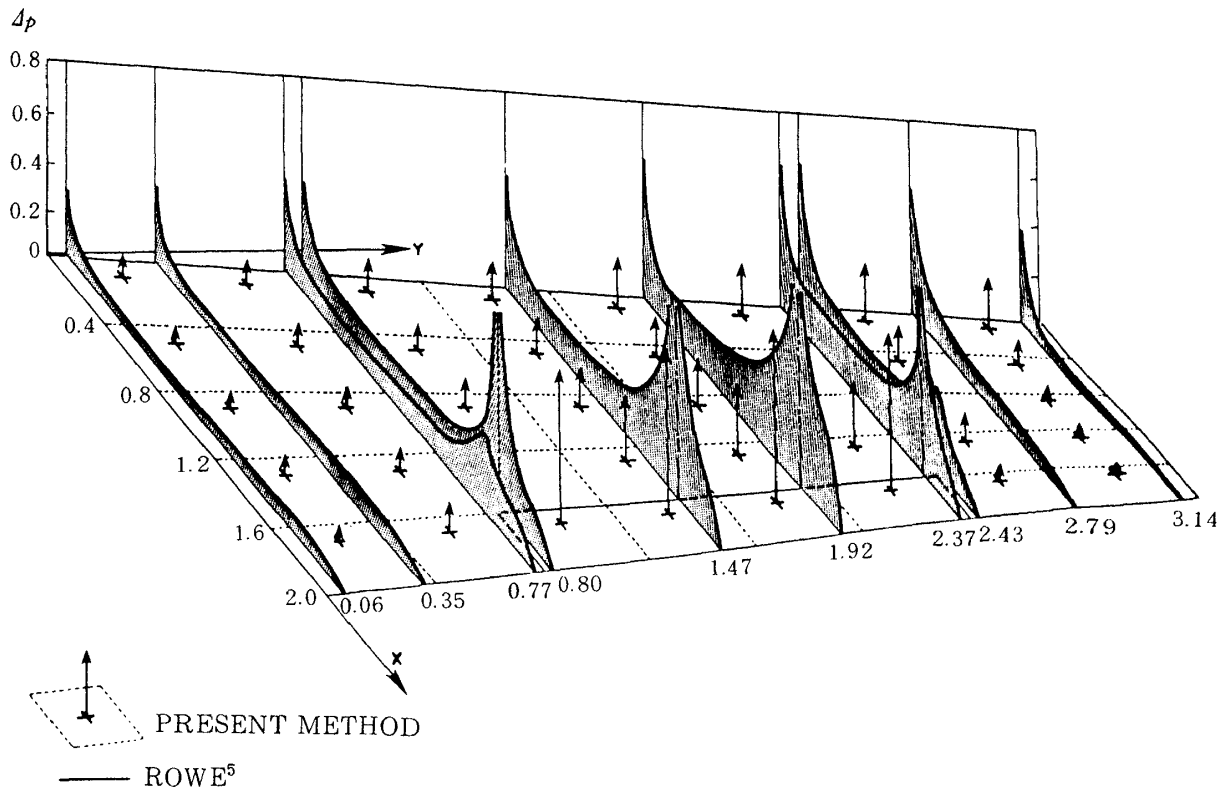
第 7 図 無次元振動数に対する揚力とモーメント係数 ($AR=2, M=0, N_x=5, N_y=10, A=0^\circ, \lambda=1$)



第 8 図 後退翼の局所揚力およびモーメント係数 ($AR=2, k=0.4, N_x=5, N_y=10, A=45^\circ, \lambda=1$)



第9図 三角翼の揚力およびモーメント係数 ($AR = 4$, $M = 0$,
 $N_x = N_y = 7$, $A = 36.9^\circ$, $\lambda = 0$)

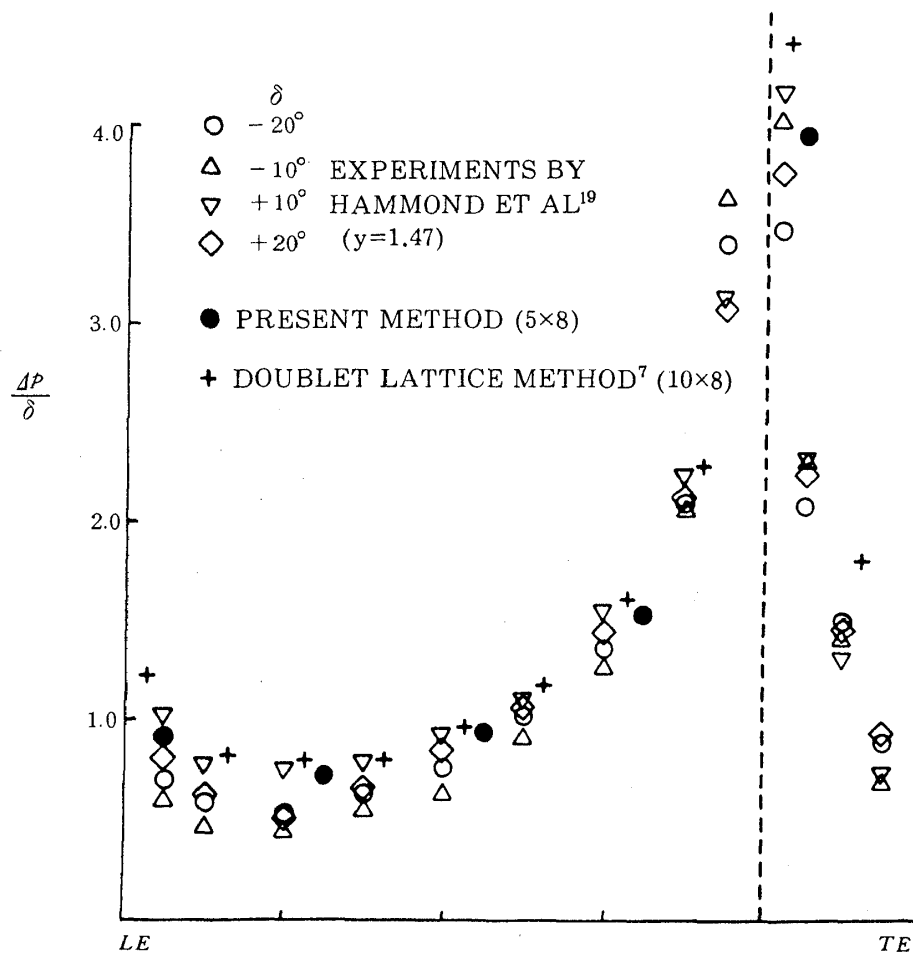


第10図 フラップ角をとった翼面上の圧力分布 ($AR = 4$, $k = 0$, $M = 0.6$,
 $N_x = 5$, $N_y = 8$, $A = 35^\circ$, $\lambda = 0.6$, $\alpha = 0^\circ$, $\delta = 10^\circ$)

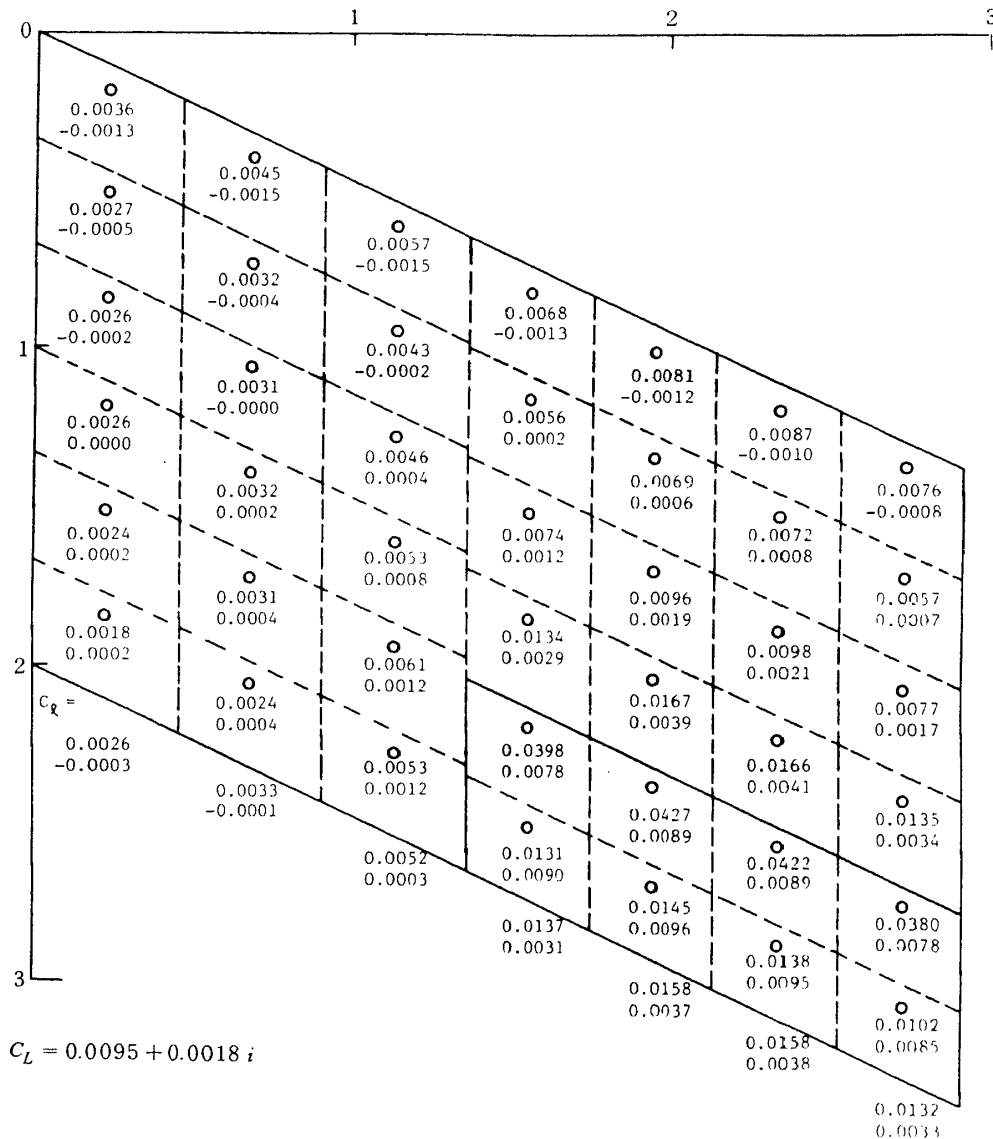
流の両者共に良好であるが、モーメントの位相角が翼根部で僅かな差を示している。第 9 図には、翼根で翼弦中心を貫く軸まわりに、ピッチング運動しているアスペクト比 4 の三角翼についての結果を示した。横軸は無次元振動数である。全体の揚力およびモーメント係数は、共に、Laschka の結果と良い一致を示している。この計算では、49 個の要素平面を用いた。1 個の無次元振動数についての計算時間は、IBM3033 で、平均 8.5 秒であった。計算時間は翼平面形状にはほぼ無関係であり、このことは複雑な形状を持つ翼について計算する時、非常に有利な点となる。

更に、翼幅方向に部分的な舵面を持つ、二つの翼について計算を行った。定常流れで、フラップ角ととった翼についての結果を第 10 図に示す。本方法の結果は比較的粗い要素にもかかわらず、Rowe の結果と比較して良い一致を示している。同じ翼につ

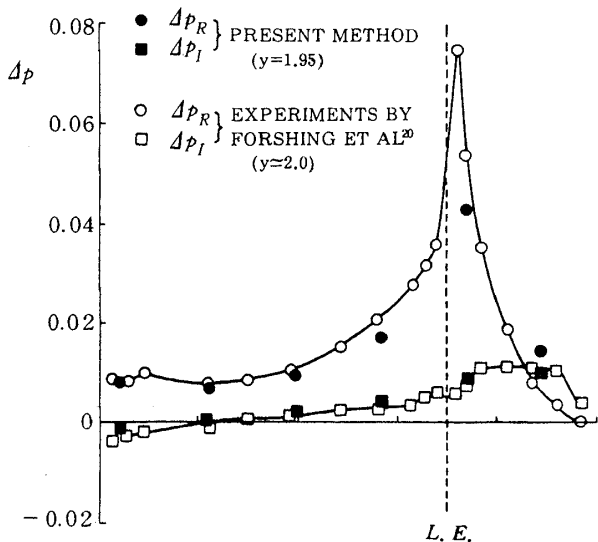
いて、第 11 図に、 $y = 1.4$ での実験結果¹⁹⁾と比較する。実験の方は、厳密に言うとは、44% 半翼幅位置 ($y = 1.47$) で計測されているものである。翼弦方向 10 要素、翼幅方向 8 要素を用いた、ダブルレット格子法による計算結果も載せてある。この両者の計算法で計算されたフラップ上の圧力は、実験値に較べるとやや高目となっている。外翼フラップが 0.66 度の振幅で振れている翼について、本方法で計算した非定常圧力分布を、第 12 図に示す。フラップは、8 個の等しい要素に分割した。要素の中に書き込まれている数字は、ダブルレット点における圧力の、上が同位相、下が 90°ずれた成分を示している。第 13 図には、翼端から 3 番目の流れ方向例 ($y = 1.95$) の値と、Forsching 等の実験結果を比較した。文献 (20) には計測点の位置が明確にされていないものの、両者の一致は、本方法の簡便さを考えると、非常に有望なものであると言える。この場



第 11 図 フラップ角をとった翼の実験値との比較 ($N_x = 5, N_y = 8, y = 1.4$)



第12図 振動するフラップを持つ翼の非定常圧力分布 ($AR = 2.94$, $k = 0.372$, $M = 0$, $\alpha = 25^\circ$, $\lambda = 1$, $\delta = 0.66^\circ$)



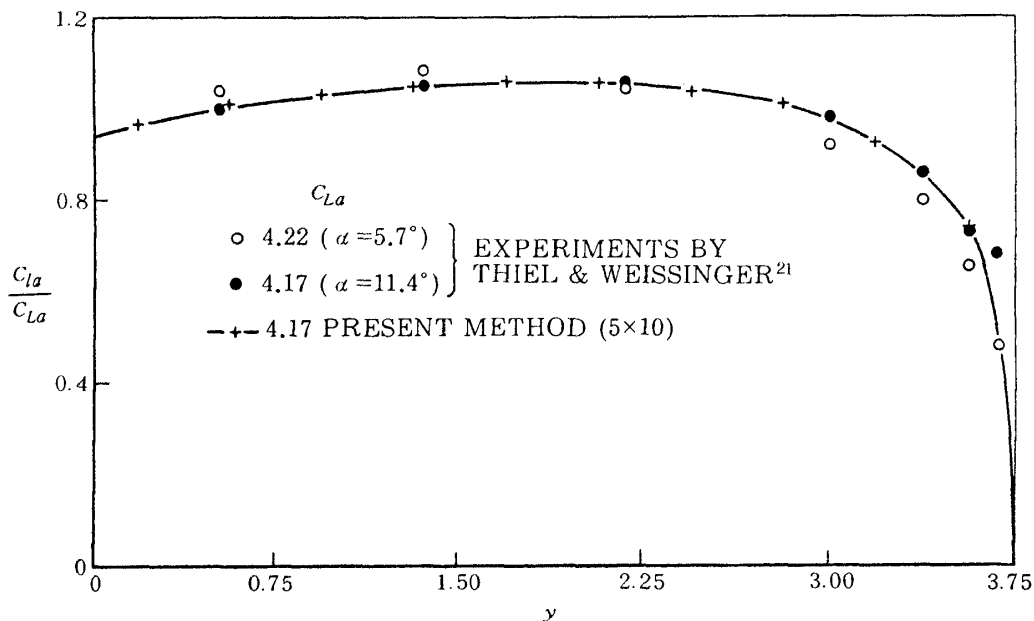
第13図 振動するフラップを持つ翼の実験値との比較

合, 計算時間は, 定常流 ($k = 0$) の場合を含めて, 12.6 秒であった。

最後に, 揚力面理論の精度検討のための標準翼⁹⁾として提案されている直線テーパ翼についての結果を掲げる。流れは, 非圧縮定常流れである。全体の係数で正規化した局所揚力傾斜の翼幅方向分布を, 第14図に示し, Theil と Weissinger²¹⁾によって得られた実験値の一致は良好で, 特に, 11.4 度の迎角の場合の実験値と良く一致する。

5. 結 論

有限薄翼に作用する亜音速非定常空気力を計算するための, ダブルット・ポイント法を提案した。数



第 14 図 標準翼の局所揚力傾斜 ($AR = 5, k = 0, M = 0, N_x = 5, N_y = 10, A = 0^\circ, \lambda = 0.5$)

値計算結果は、計算プログラムが容易であることと相俟って、本方法が効率良いものであることを示している。集中揚力の概念に基づいているため、本方法により得られる結果は、直ちに、可撓翼の空力弾性解析に簡単に利用できる。たとえば、フラッタ、フラッタ能動制御、や突風荷重軽減問題等に、構造解析の有限要素法と合せて用いることが期待される。

尚、本方法を用いた計算プログラムは、「亜音速ダブルレットポイント法による振動揚力面の計算プログラム (DPM-SB)」として、超音速の場合²²⁾と同様に、当研究所、計算センタ登録汎用プログラムとして登録されている。

謝 辞

本研究の一部は、筆者が米国プリンストン大学に滞在中なされたもので、その機会を与えてくれた、E. H. Dowell 教授 (現在、デューク大学工学部長) に感謝の意を表する。

参 考 文 献

1) Dowell, E.H. et al.; *A Modern Course in Aeroelasticity*, Sijthoff and Noordhoff, Alphen aan den Rijn, The Netherlands,

1978.

- 2) Küssner, H.G.; *General Airfoil Theory*, NACA TM 979, 1941 (also see *Luftfahrtforschung*, Bd. 17, Lfg. 11/12, 1940, pp. 370 ~ 378).
- 3) Watkins, C.E., Woolston, D.S., and Cunningham, H.J.; *A Systematic Kernel Function Procedure for Determining Aerodynamic Forces on Oscillating or Steady Finite Wings at Subsonic Speeds*, NASA TR R-48, 1959.
- 4) Laschka, B.; *Zur Theorie der harmonisch schwingenden tragenden Fläche bei Unterschallanströmung*, *Zeitschrift für Flugwissenschaften*, Heft 7, 1963, pp. 265 ~ 292.
- 5) Rowe, W.S., Redman, M.C., Ehlers, F.E., and Sebastian, J.D.; *Prediction of Unsteady Aerodynamic Loadings Caused by Leading Edge and Trailing Edge Control Surface Motion in Subsonic Compressible Flow - Analysis and Results*, NASA CR-2543, 1975.
- 6) Landahl, M.T. and Stark, J.E.; *Numerical Lifting-Surface Theory - Problems and*

- Progress, AIAA Journal, Vol. 6, Nov. 1968, pp. 2049 ~ 2060.
- 7) Albano, E. and Rodden, W.P.; A Doublet-Lattice Method for Calculating Lift Distributions on Oscillating Surfaces in Subsonic Flows, AIAA Journal, Vol. 7, Feb. 1969, pp. 279 ~ 285.
- 8) Jordan, P.F.; Reliable Lifting Surface Solutions for Unsteady Flow, Journal of Aircraft, Vol. 15, Sept. 1978, pp. 626 ~ 633.
- 9) Vortex-Lattice Utilization, NASA SP-405, 1976.
- 10) Ashley, H. and Rodden, W.P.; Wing-Body Aerodynamic Interaction, Annual Review of Fluid Mechanics, Vol. 4, 1972, pp. 431 ~ 472.
- 11) 上田哲彦; 亜音速非定常揚力面理論に現われる核関数の漸近展開, 航空宇宙技術研究所報告 TR664, 1981 年 2 月.
- 12) Mangler, K.W.; Improper Integrals in Theoretical Aerodynamics, RAE Rept. Aero. 2424, 1951.
- 13) Ueda, T. and Dowell, E.H.; A New Solution method for Lifting Surfaces in Subsonic Flow, AIAA Journal, Vol. 20, March 1982, pp. 348 ~ 355.
- 14) Morino, L. and Kuo, C.-C.; Subsonic Potential Aerodynamics for Complex Configuration: A General Theory, AIAA Journal, Vol. 12, Feb. 1974, pp. 191 ~ 197.
- 15) Dusto, A.R., Epton, M.A., and Johnson, F.T.; Advanced Panel Type Influence Coefficient Methods Applied to Unsteady Three Dimensional Potential Flows, AIAA Paper 78-229, 1978.
- 16) Houbolt, J.C.; Some New Concepts in Oscillatory Lifting Surface Theory, AFFDL-TR-69-2, 1969.
- 17) Ueda, T.; Expansion Series of Integral Functions Occurring in Unsteady Aerodynamics, Journal of Aircraft, Vol. 19, April 1982, pp. 345 ~ 347.
- 18) Lawrence, H.R. and Gerber, E.H.; The Aerodynamic Forces on Low Aspect Ratio Wings Oscillating in an Incompressible Flow, Journal of Aeronautical Sciences, Vol. 19, Nov. 1952, pp. 769 ~ 781 (errata issued, Vol. 20, April 1953, p. 296).
- 19) Hammond, A.D. and Keffer, B.M.; The Effect at High Subsonic Speeds of a Flap-Type Aileron on the Chordwise Pressure Distribution Near Midsemispan of a Tapered 35° Sweptback Wing of Aspect Ratio 4 Having NACA 65A006 Airfoil Section, NACA RM L53C23, 1953.
- 20) Försching, H., Triebstein, H., and Wagener, J.; Pressure Measurements on an Harmonically Oscillating Swept Wing with Two Control Surfaces in Incompressible Flow, Symposium on Unsteady Aerodynamics for Aeroelastic Analyses of Interfering Surfaces, AGARD-CP-80-71, Pt. II, 1971, pp. 15-2 ~ 15-12.
- 21) Theil, A. and Weissinger, J.; Pressure-Distribution Measurements on a Straight and on a 35° Swept-Back Tapered Wing, NACA TM 1126, 1947 (translated from Deutsche Versuchsanstalt für Luftfahrt, Institut für Aerodynamik, Deutsche Luftfahrtforschung, Untersuchungen und Mitteilungen, No. 1293, Sept. 29, 1944).
- 22) Ueda, T. and Dowell, E.H.; Doublet Point Method for Supersonic Unsteady Lifting Surfaces, to appear in the AIAA Journal.

航空宇宙技術研究所報告781号

昭和58年10月発行

発行所 航空宇宙技術研究所
東京都調布市深大寺町1880
電話武蔵野三鷹(0422)47-5911(大代表)〒182

印刷所 株式会社三興印刷
東京都新宿区信濃町12三河ビル
