

軌道最適化手法を用いた電気推進機による 地球－火星軌道間輸送システム解析

Analysis of Transportation System between the Earth – Mars Orbit using the Electric Propulsion by Orbit Optimization Method

○鳥羽 瑛仁・山極 芳樹(静岡大)・船木 一幸(宇宙航空研究開発機構)

○Akihito Toba・Yoshiki Yamagiwa(Shizuoka University)・Ikkoh Funaki (JAXA)

Abstract (概要)

In recent years, Mars is considered as a new target for robotic sample return mission and manned exploration. Only chemical propulsion was considered, but it has disadvantage that payload mass ratio is very small. In contrast, spacecraft system using electric propulsion can achieve a larger payload mass ratio. In the past, many transportation systems from Earth to Mars by orbit optimization method were studied. In this study, a spacecraft system for Mars missions by using electric propulsion and H-II launch vehicles was studied. As a result, trip time and transfer orbit become longer in the same acceleration value at Earth's orbit. The spacecraft system achieved the maximum payload mass of 2000kg for low mars orbit, and accomplished maximum 400kg for rover mass to examine Mars.

記号の説明

C : 等式拘束条件
 F : 推力
 F_θ : 半径方向推力
 F_r : 周方向推力
 f : 微分ベクトル
 G : 万有引力定数
 g : 重力加速度
 i : 節点番号
 I_{sp} : 比推力
 M : 太陽質量
 m : 宇宙機質量
 \dot{m} : 推進剤流量
 m_0 : 宇宙機初期質量
 m_{i0} : 惑星間航行時宇宙機初期質量
 m_p : 推進剤質量
 m_{pl} : ペイロード質量
 P : 電力量
 r : 半径
 t : 時間
 u : 制御ベクトル
 V_0 : 初期軌道速度
 V_f : 終端軌道速度
 x : 状態ベクトル

α : 比質量
 Δt : 節点間の時間幅
 ΔV : 必要速度増分
 ε : 構造係数
 η_c : 電力制御器変換効率
 η_r : 推進効率
 θ : 角度
 φ : 軌道傾斜角

1. はじめに

1.1 研究背景 近年, 新たなサンプルリターンミッションや有人探査の計画として火星探査が世界的に注目を集め, 探査ロードマップも作成されている¹⁾. これまでのミッションは小型探査機を投入するもので, ペイロード質量は主に探査機質量である 100~500kg 程度であった. しかしながら今後検討されているミッションでは, 以前のものと比較してペイロード質量の増加やミッション期間の増加が考えられる. 今までのミッションでは化学推進が用いられていたが, ペイロード質量比が小さいという欠点がある. そのため, 今後の深宇宙探査に用いる推進機として電気推進機が挙げられている. 電気推進は低出力という欠点があるが大きいペイロード質量比を達成できるため, 現在電気推進機を用いた航行システムが検討されている^{2,3)}.

航行システムの最適化を目指して, 地球－火星間の宇宙機軌道の最適化を用いた先行研究は数多く存在する^{4,5)}. そ

のなかで電気推進機のみを用いて検討された先行研究では、出力重量比が重要な要素となることが述べられている⁶⁾。すなわち加速度がシステム検討に関して重要な要素であることを表している。しかしながら、宇宙機の加速度に着目した先行研究は少なく、そのときの比推力とペイロード質量の関係に関しても調査が必要である。

1.2 研究目的 本研究では、電気推進機を用いた地球－火星軌道間輸送において、宇宙機の初期の加速度をある値としたときに、比推力及び電力の変化による航行期間とペイロード質量の関係について調査する。

2. 解析方法

2.1 解析モデル 本研究では、地球－火星軌道間輸送を3つの段階に分けて検討を行う。1つ目として、初期軌道である地球低軌道(LEO)から地球公転軌道への軌道遷移、2つ目として地球公転軌道から火星公転軌道への軌道遷移、3つ目として火星公転軌道から火星低軌道への軌道遷移の3段階に分けてシステム検討を行う。第一段階であるLEOから地球公転軌道への軌道遷移に関しては、地球の重力のみが影響する範囲内であると考えられる。この地球影響圏内では、地球を原点とした3次元空間を運動するものとする。第二段階である地球公転軌道から火星公転軌道への惑星間航行に関しては、太陽の重力のみが影響する範囲であると考えられる。この時、太陽を原点とした平面内を運動するものとする。第三段階である火星公転軌道から火星低軌道への軌道遷移に関しては、第一段階と同様に考えることができ、地球からの打ち上げと異なり軌道傾斜角をつける必要はないため、火星を原点とした2次元空間内を運動するものとする。地球影響圏内における軌道モデルの概略を図1に、惑星間航行における軌道モデルの概略を図2に、火星影響圏内における軌道モデルの概略を図3に示す。

宇宙機に関しては一つの質点と仮定し、太陽電池パドルを用いて発電を行うことで電気推進機を作動させるものとする。また、発電した電力は全て推進機に使われるものとする。

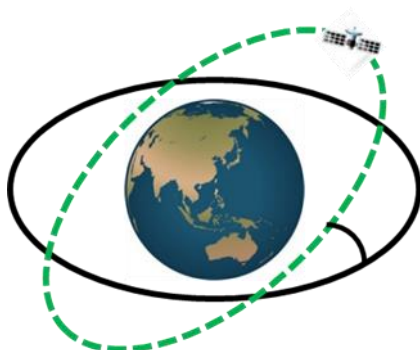


図1 地球影響圏内における軌道モデル

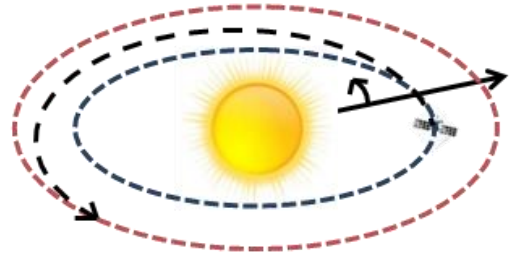


図2 惑星間航行における軌道モデル

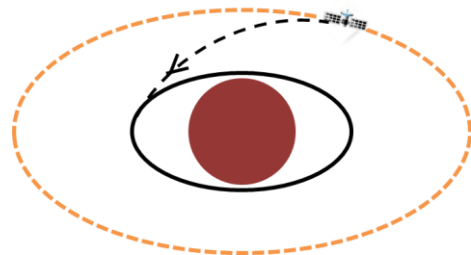


図3 火星影響圏内における軌道モデル

2.2 支配方程式 地球影響圏内及び火星影響圏内に関しては、軌道遷移に必要な速度増分を式(1)で表されるEdelbaumの式を用いて解析的に求める⁷⁾。求めた速度増分を用いて、それぞれの影響圏内での軌道遷移に必要な推進剤質量を式(2)より求める⁸⁾。惑星間航行を行う際の宇宙機の質量は、初期質量から地球影響圏内の軌道遷移に用いた推進剤質量を除いたものであるため、式(3)のように表すことができる。

$$\Delta V = \sqrt{V_0^2 + V_f^2 - 2V_0V_f \cos \frac{\pi}{2} \varphi} \quad (1)$$

$$m_p = m_0 \left[1 - e^{\left(\frac{-\Delta V}{g I_{sp}} \right)} \right] \quad (2)$$

$$m_{i0} = m_0 - m_p \quad (3)$$

惑星間航行に関しては、宇宙機と太陽の2体問題と仮定し、式(4)及び式(5)で表される半径方向と周方向の運動方程式を用いる⁹⁾。推進剤流量は式(6)、推力に関しては式(7)のように表される。これらの式を用いて数値計算を行うことにより、航行軌道の最適化を行う。ペイロード質量は初期質量から推進剤質量、電源システム、推進機システム及び推進剤タンクの質量を除いたものであり、式(8)のように表される。

$$m \left[\frac{d^2 r}{dt^2} - r \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 + \frac{GM}{r^2} \right] = F_r \quad (4)$$

$$m \left(r \frac{d^2 \theta}{dt^2} + 2 \frac{dr}{dt} \cdot \frac{d\theta}{dt} \right) = F_\theta \quad (5)$$

$$\dot{m} = \frac{2\eta_t P}{(g \cdot I_{sp})^2} \quad (6)$$

$$F = \sqrt{F_r^2 + F_\theta^2} = \frac{2\eta_t P}{g \cdot I_{sp}} \quad (7)$$

$$m_{pl} = m_0 - \frac{\alpha P}{\eta_c} - \frac{1}{1-\varepsilon} \dot{m} \Delta t \quad (8)$$

2.3 非線形計画法 本研究では惑星間航行に関して非線形計画法を用いて宇宙機の遷移軌道を最適化する。制御変数を推力方向とし、最適化変数を航行期間とすることで航行期間の最小化を行う。節点間の状態量は以下の式(9)及び式(10)で表される Fourth-degree Gauss-Lobatto quadrature rule という 4 次の補間式を適用する¹⁰⁾。同様に等式拘束条件として式(11)及び式(12)で表される Fourth-degree Gauss-Lobatto system constraints という 4 次の補間式を適用する。

$$x_1 = \frac{1}{50} \left\{ (7\sqrt{5}+9)x_i + 32x_2 + (-7\sqrt{5}+9)x_{i+1} + \Delta t_i \left[(\sqrt{5}+1)f_i + (\sqrt{5}-1)f_{i+1} \right] \right\} \quad (9)$$

$$x_3 = \frac{1}{50} \left\{ (-7\sqrt{5}+9)x_i + 32x_2 + (7\sqrt{5}+9)x_{i+1} + \Delta t_i \left[(-\sqrt{5}+1)f_i + (-\sqrt{5}-1)f_{i+1} \right] \right\} \quad (10)$$

$$C_1 = \frac{1}{120} \left\{ (60+32\sqrt{5})x_i - 64\sqrt{5}x_2 - (60-32\sqrt{5})x_{i+1} + \Delta t_i \left[(5+3\sqrt{5})f_i + 50f_1 + (5-3\sqrt{5})f_{i+1} \right] \right\} = 0 \quad (11)$$

$$C_3 = \frac{1}{120} \left\{ (60-32\sqrt{5})x_i + 64\sqrt{5}x_2 - (60+32\sqrt{5})x_{i+1} + \Delta t_i \left[(5-3\sqrt{5})f_i + 50f_1 + (5+3\sqrt{5})f_{i+1} \right] \right\} = 0 \quad (12)$$

制御変数である推力方向に関しては補間点で以下のような式を用いて補間する。

$$u_1 = (u_{i+1} - u_i) \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{5}} \right) + u_i \quad (13)$$

$$u_3 = (u_{i+1} - u_i) \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{5}} \right) + u_i \quad (14)$$

この補間法の概略を以下の図4に示す。

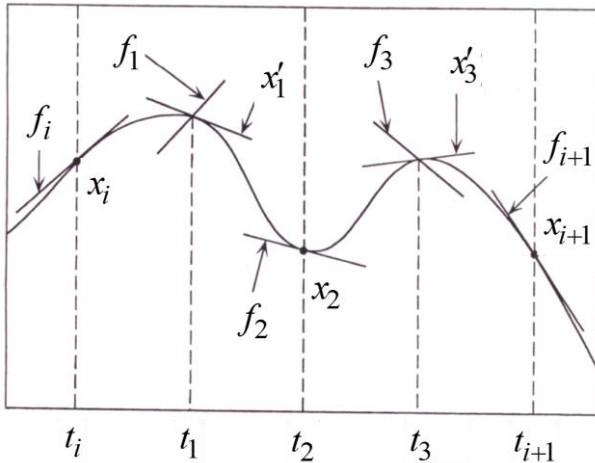


図4 4 次の補間式の概略

本研究では、Matlab の Optimization Toolbox 内の fmincon という関数の Interior-Point というアルゴリズムを用いて最適化問題の計算を行った。

2.4 航行システム及び解析条件 宇宙機は地上から JAXA の H-IIA ロケットの H2A202 型で打ち上げるものとする。打ち上げ軌道を高度 300km、軌道傾斜角 30.4° の LEO へ打ち上げるものとし、この時の打ち上げ能力は 10,000kg である。これが宇宙機の初期質量となる。LEO から地球公転軌道への軌道遷移時に必要な速度増分は式(1)より、7.726km/s となる。宇宙機の比推力が 1000, 1500, 2000, 2500, 3000 秒の 5 つの条件に対して計算を行う。このとき、式(2)より地球影響圏内での軌道遷移に必要な推進剤質量を求めることができ、宇宙機初期質量からこの推進剤質量を除くことで惑星間航行時を行う際の宇宙機の質量を求めることができる。本研究では、地球公転軌道から火星公転軌道への軌道遷移に対して最適化を行い、最適化変数を公転軌道間の航行日数とする。用いる電気推進機としては NASA のホールスラストである BPT-4000 を想定する¹¹⁾。宇宙機の初期条件として地球公転運動と同期していること、終端条件として火星の公転運動と同期していることとしている。ここで、地球公転軌道及び火星公転軌道は円運動をしていると仮定している。宇宙機が地球公転軌道から軌道遷移を始める際の初期の加速度を $3 \times 10^{-5}g$ とする、この値は地球公転軌道上における太陽の重力加速度のおよそ 1/20 の値である。惑星間航行を行う際の初期の推力は質量と加速度の積で求めることができる。また以下の式(7)より初期の発電量を求めることができる。それぞれの節点及び補間点において太陽からの距離が変化するため、その距離に応じた発電量及び推力となるような条件としている。火星公転軌道から火星低軌道への軌道遷移に関しては、目標高度を 125km とする¹²⁾。この軌道遷移に必要な速度増分は式(1)より 2.484km/s となる。火星低軌道から火星表面への探査機の投入に関しては、エアロシェルを用いた大気突入及び超音速パラシュートなどを用いた着陸を想定した¹³⁾。

以下の表1に宇宙機に関するパラメータを、表2に解析条件を示す。

表1 宇宙機パラメータ

太陽電池パドル比質量[kg/kW]	20
電力制御器変換効率[-]	0.80
推進剤タンク構造係数[-]	0.15
電気推進機比質量[kg/kW]	8
推進効率[-]	0.55

表2 解析条件

初期質量[kg]	10000				
初期加速度[m/s ²]	$3 \times 10^{-5}g$				
惑星間航行時 初期質量[kg]	4550	5915	6745	7298	7691
比推力[s]	1000	1500	2000	2500	3000
電力量[kW]	14.93	29.11	44.26	59.86	75.68

3. 解析結果

3.1 宇宙機軌道及び加速度 図5に比推力が1000秒から2000秒の場合での最適化後の軌道を、図6に比推力が2500秒、3000秒の場合での最適化後の軌道を示す。なお、内側の水色の円は地球の公転軌道を、外側の橙色の円は火星の公転軌道を示している。

図5及び図6より、どの比推力においても宇宙機軌道は1周以内に火星に到着していることがわかる。また、比推力が大きくなるほど火星に到着するまでの軌道が長くなっていることがわかる。これは、地球公転軌道出発後から火星公転軌道到着までの加速度の変化によるものであると考えられる。図7に、それぞれの比推力における地球公転軌道出発後から火星公転軌道到着までの加速度の変化を表したものを示す。

図7は横軸を計算時の分割点としている。今回の計算条件では惑星間航行の宇宙機軌道を160点で分割しているため、横軸の0の位置は地球公転軌道上を、160の位置は火星公転軌道上を表している。縦軸に関しては、加速度の値の比を表しており地球公転軌道上での加速度、すなわち $3 \times 10^{-5} \text{g} [\text{m/s}^2]$ を1としている。図7より、どの比推力でも地球公転軌道出発後加速度は上昇し、ある位置でピークを迎えて減少し、ある位置から再び上昇することがわかる。比推力に対する傾向としては、低比推力ほど加速度の絶対値が大きいことがわかる。また、上昇のピークに達するのが遅く減少のピークに達するのが早いということがわかる。上昇のピークの原因は、推進剤を消費することによる宇宙機質量の減少よりも軌道半径の増加による発電量の低下、すなわち推力の減少の影響の方が大きくなったためと考えられる。減少のピークに関しては、軌道速度の同期が影響していると考えられる。今回の計算結果では軌道半径をおおよそ同期させた後に軌道速度を同期させる結果となっている。そのため、軌道速度を同期させる段階で推力に関しては大きな変動がなく、推進剤の消費によって宇宙機質量が減少しているため加速度の減少にピークが存在すると考えられる。加速度の絶対値が低比推力であるほど大きい原因に関しては、低比推力であるほど宇宙機の質量に対する推進剤流量の割合が大きいためであると考えられる。この割合が大きいほど質量の減少率が大きいため、推力の減少による加速度低下の影響よりも質量の減少による加速度増加の影響が大きくなると考えられるため、低比推力であるほど加速度の絶対値は大きくなると考えられる。

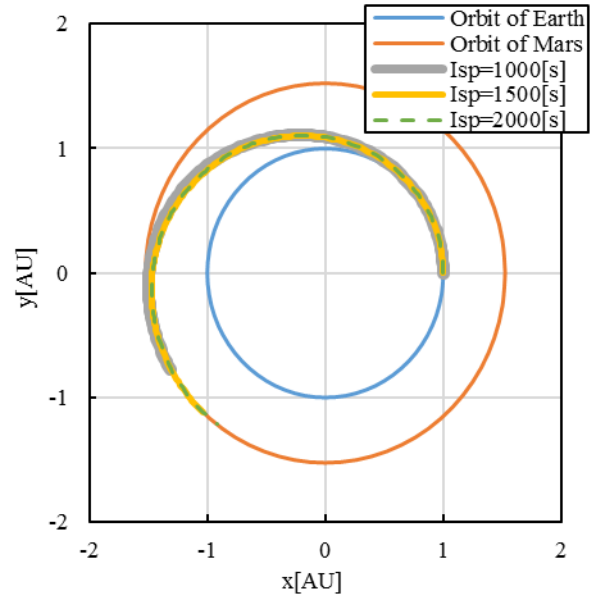


図5 比推力1000～2000秒での最適化後の軌道

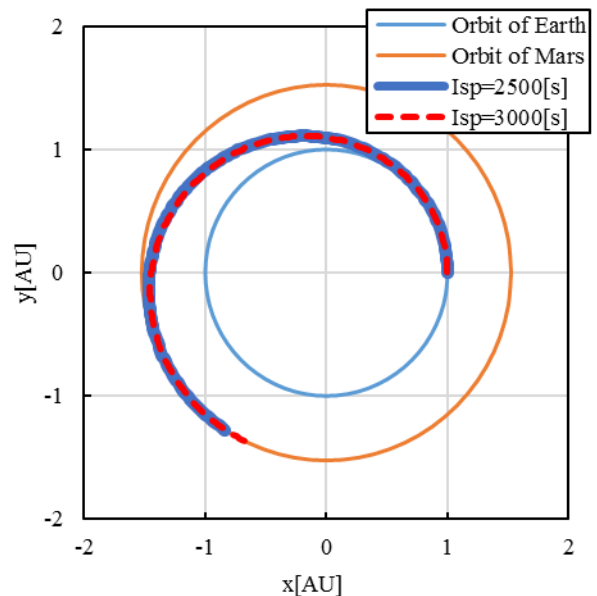


図6 比推力2500, 3000秒での最適化後の軌道

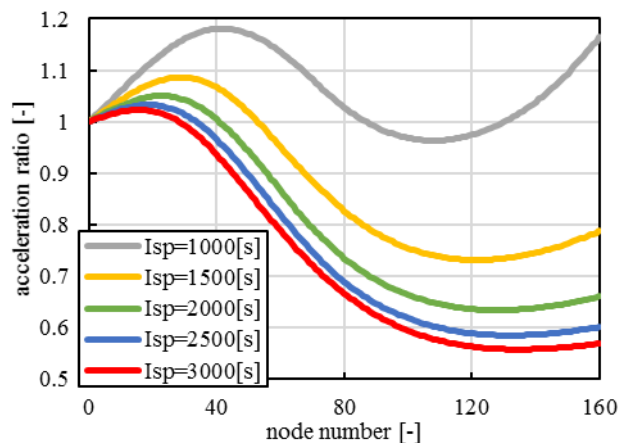


図7 惑星間航行時の加速度の変化

3.2 宇宙機質量内訳 次に、火星低軌道に到着した際の宇宙機の全質量とその時の火星低軌道へ投入可能なペイロード質量に関して考察を行う。図 8 に、比推力に対する火星低軌道到着時の宇宙機質量及び投入可能なペイロード質量の関係を示す。

図 8 より、比推力が増加するほど火星低軌道に到着した時の宇宙機質量が増加していることがわかる。また、この時のペイロード質量に関しても同様の傾向があることがわかる。比推力が 1000 秒のときのペイロード質量に注目すると、値が負となっていることがわかる。これは、火星低軌道到着時の宇宙機質量から電源システム及び推進剤タンクの質量を除いた際に負となることを表している。したがって、今回の計算条件では比推力 1000 秒の場合では輸送不可能であるということがわかる。また、最大でおよそ 2000kg 程度の質量を火星低軌道へ投入可能であることがわかる。この結果より、少なくとも初期質量の 80%以上が推進剤や推進剤タンク、電源システムに占められていることがわかる。図 9 では、宇宙機の質量の内訳について示し考察を行う。

図 9 は横軸に比推力を、縦軸に質量の内訳を示したものである。下から順に LEO から地球公転軌道への軌道遷移に用いた推進剤質量、地球公転軌道から火星公転軌道への軌道遷移に用いた推進剤質量、火星公転軌道から火星低軌道への軌道遷移に用いた推進剤質量、推進剤タンク質量、電源システム質量、ペイロード質量となっている。比推力が 1000 秒の場合でのペイロード質量は負となるため、図 9 では表記していない。比推力が増加するほど LEO から地球公転軌道及び公転軌道間の軌道遷移に用いる推進剤質量は減少していることがわかる。また、電源システム質量は高比推力であるほど増加していることがわかる。公転軌道間の軌道遷移に用いられた推進剤質量(青)と電源システム質量(灰色)に着目すると、比推力 1000 秒と 3000 秒では推進剤質量はおよそ 1000kg 減少しているが、電源システム質量は 2000kg 増加していることがわかる。すなわち高比推力であることによって宇宙機システムの質量が増加していることを表している。これは他の比推力同士で比較しても同様である。しかしながら、全体の結果としては高比推力であるほどペイロード質量は大きくなる結果であるため、今回の計算条件で最もペイロード質量の増加に影響を及ぼしているのは、質量の減少が大きい LEO から地球公転軌道への軌道遷移に用いられる推進剤質量(黄)であると考えられる。図 10 では、図 9 から黄色の部分を除いた宇宙機システムの内訳について示し、考察を行う。

図 10 は図 9 と同様に横軸を比推力、縦軸を宇宙機システムの質量内訳を示したものである。棒グラフの上を示した数字は要素の和を表している。和を見ると、比推力の増加とともに増加していることがわかる。したがって、惑星間航行及び火星影響圏内での軌道遷移に関わるシステム質量としては比推力の増加とともに増加することがわかる。今回ペイロード質量が比推力の増加とともに増加する結果となった原因は、地球影響圏内での軌道遷移に関わる推進剤

質量の影響であることがわかった。

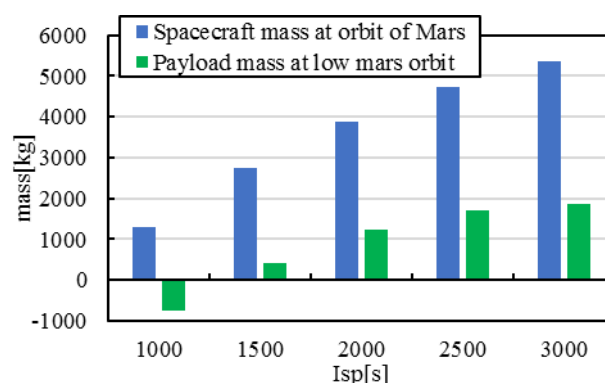


図 8 火星低軌道到着時の比推力に対する宇宙機質量(青)とペイロード質量(緑)の関係

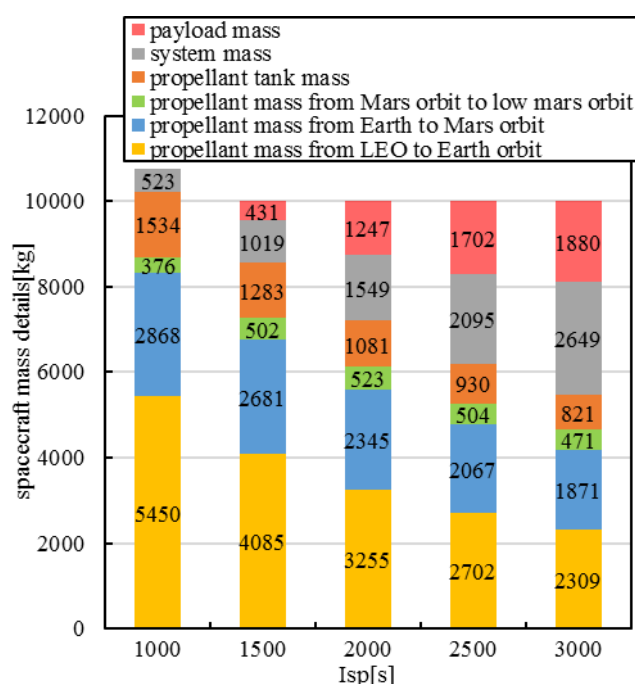


図 9 それぞれの比推力での宇宙機質量内訳

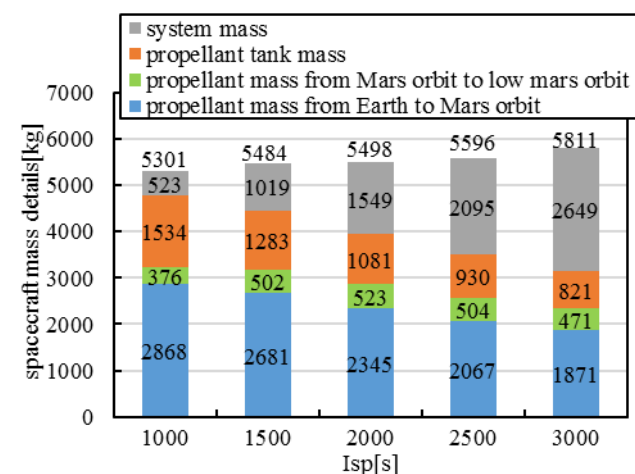


図 10 LEO から地球公転軌道への軌道遷移時の推進剤質量を除いた場合の宇宙機システム質量内訳

最後に、火星地表へ投入可能な探査機の質量に関する図 11 を以下に示し考察を行う。

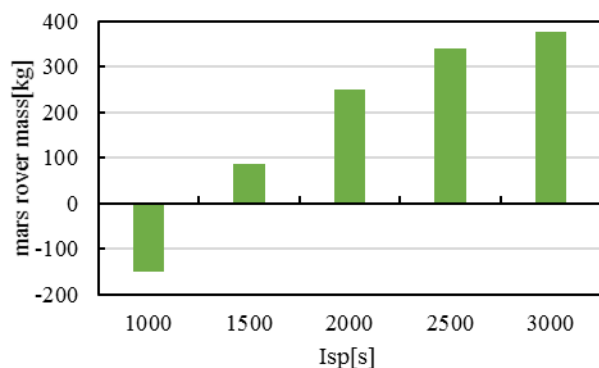


図 11 火星地表に投入可能な探査機質量

図 11 は横軸に比推力、縦軸に火星地表に投入可能な探査機質量を示したものである。比推力が 1000 秒の場合では前述のように火星低軌道上でペイロード質量が負となるため、地表に投入可能な探査機質量も負となる。比推力が増加するほど投入可能質量も増加し、最大でおよそ 400kg 程度投入可能であることがわかる。

4. お わ り に

本研究では電気推進機を用いた地球－火星軌道間輸送において、宇宙機の初期の加速度をある値としたときに、比推力及び電力の変化による航行期間とペイロード質量の関係について非線形計画法による軌道最適化手法を用いて検討を行った。

解析の結果、比推力及び電力の増加とともに惑星間航行時の宇宙機軌道は長くなり、航行期間も増加することがわかった。原因としては、低比推力であるほど地球公転軌道出発後の宇宙機の加速度が大きくなるためであると考えられる。また、ペイロード質量に関しては比推力及び電力の増加とともに増加し、比推力が 3000 秒の場合で火星低軌道へおよそ 2000kg、火星地表へおよそ 400kg のペイロード質量を達成することができるとわかった。今回の計算条件では最もペイロード質量の増加に影響を与えているのは地球低軌道から地球公転軌道への軌道遷移時の推進剤質量であることがわかった。

今後は、公転軌道間のみならず地球低軌道から火星低軌道までを最適化する必要があると考えられる。

参 考 文 献

- 1) ISECG, The Global Exploration Roadmap, NP-2013-06-945-HQ (2013)
- 2) Robert E. Lock, Zachary J. Bailey, Theresa D. Kowalkowski, Erik L. Nilsen, Richard L. Mattingly, Mars Sample Return Orbiter Concepts Using Solar Electric Propulsion for the Post-Mars2020 Decade, 2014 IEEE Aerospace Conference, 2014, pp.133-142.
- 3) David Y. Oh, Richard R. Hofer, Ira Katz, Jon A. Sims, Noah

Z. Warner, Thomas M. Randolph, Ronald T. Reeve, Robert C. Moeller, Benefit of Using Hall Thrusters for a Mars Sample Return Mission, The 31st IEPC, 2009, IEPC-2009-217

4) David Y. Oh, Damon Landau, A Simple Semi-Analytic Model for Optimum Specific Impulse Interplanetary Low Thrust Trajectories, The 32nd IEPC, 2011, IEPC-2011-010

5) Roger Myers, Christian Carpenter, High Power Solar Electric Propulsion for Human Space Exploration Architectures, The 32nd IEPC, 2011, IEPC-2011-261

6) John W. Dankanich, Bob Vondra, Andrew V. Ilin, Fast Transits to Mars Using Electric Propulsion, 46th AIAA/ASME/SAE/ASEE Joint Propulsion Conference & Exhibit, 2010, AIAA-2010-6771

7) Vladimir A. Chobotov, et.al., Orbital Mechanics Third Edition, AIAA Education Series, 2002

8) 栗木恭一, 荒川義博, 電気推進ロケット入門, 東京大学出版会, 2003

9) 木村逸郎, ロケット工学, 養賢堂, 1993

10) 河邊博康, 最適制御問題の直接解法と滑空機飛行への応用に関する研究, 1999 年九州大学博士論文, 1999

11) Richard R. Hofer, Thomas M. Randolph, David Y. Oh, John Steven Snyder, Kristi H. de Grys, "Evaluation of a 4.5 kW Commercial Hall Thruster System for NASA Science Missions", American Institute of Aeronautics and Astronautics 2006-4469, 2006

12) 尾川順子, 竹内央, 春木美鈴, 近藤義典, 松本秀一, 藤田和央, 火星着陸探査技術実証機の軌道計画・軌道決定および空力誘導, 第 15 回宇宙科学シンポジウム, 2015, P-200

13) 藤田和央, 佐藤毅彦, 火星着陸技術実証機のシステム設計とサイエンススコープ, 第 15 回宇宙科学シンポジウム, 2015, S4-011