

# 宇宙航空研究開発機構研究開発報告

## JAXA Research and Development Report

---

### スカラー保存則の直交格子有限体積近似における 衝撃波面の形成機構について

Formation of shock surfaces over Cartesian grids in numerical computation of  
scalar conservation laws over two-dimensional space

相曽 秀昭  
Hideaki AISO

2018年2月

宇宙航空研究開発機構

Japan Aerospace Exploration Agency

# スカラー保存則の直交格子有限体積近似における衝撃波面の形成機構について<sup>\*</sup>

相曽秀昭<sup>\*1</sup>

## Formation of shock surfaces over Cartesian grids in numerical computation of scalar conservation laws over two-dimensional space.

by

Hideaki AISO<sup>\*1</sup>

### ABSTRACT

We are concerned with numerical computation of shocks whose surfaces are oblique to any axis of grid for computation, where the grid is a structured orthogonal grid. It is known that the shape of shock surface captured in computation is affected by the computational grid. The shock surface often looks jagged but not smooth even if the shock surface should be planar or smooth from theory. The phenomenon is purely numerical and the machinery of phenomenon is not yet clear. While the setting of problem is rather simple, several different mathematical factors are included and complicatedly related even in the case of compressible Euler equations for ideal gases. Therefore we analyze a simplified problem, scalar conservation laws over the two dimensional space. From the simplified analysis we still discover some essential machinery to form jagged shock surfaces in numerical computation. Finally we obtain a theorem that describes the reason of jaggedness of shock surfaces. It may suggest a method to decrease the inconvenient effect from the grid.

**Keywords:** Capturing shock surface, Scalar Conservation Law, Multiple space dimension, Difference Approximation

### 概要

空間次元が 2 以上の保存則の解が形成する衝撃波の直交格子による数値計算において、衝撃波面がいずれの格子軸に対しても斜交する場合には格子の方向性の影響で衝撃波に『ギザつき』が生じることが良く知られる。これはまさに数値的な不都合現象であるが、その解析は殆ど行われていない。実際、圧縮性 Euler 方程式の場合には複数の要素が入り込み解析は容易ではない。本稿では、スカラー保存則に単純化した問題で解析を行う。解析の結果、『ギザつき』の生成機構については定理の形で明確な記述を得、その不都合の軽減についても考察する。また、この結果は空間 1 次元で最適化された差分スキームが多次元では最適とは言えないことも示唆している。

**キーワード：** 衝撃波面の捕獲、スカラー保存則、空間多次元、差分近似

---

doi: 10.20637/JAXA-RR-17-005/0001

<sup>\*</sup> 平成 29 年 11 月 9 日受付 (Received November 9, 2017)

<sup>\*1</sup> 航空技術部門 数値解析技術研究ユニット  
(Numerical Simulation Research Unit, Aeronautical Technology Directorate)

## 1. はじめに

圧縮性 Euler 方程式が含まれる双曲型保存則の数値計算において主要な問題の一つとして衝撃波の捕獲があげられる。衝撃波では解は滑らかさを失い弱解の定義を通じ保存則の原理に立ち返って解釈される。数値計算においてもそれに倣い、保存則の衝撃波の捕獲のためには有限体積法に基づいた保存型の差分近似を用いるのが通例である。

保存型差分近似による衝撃波捕獲における当初からの課題は数値解での鈍化と振動の抑制であった。空間 1 次元のスカラ問題（従属変数が 1 次元、つまりスカラ保存則）では Harten[3, 4] により提唱された TVD<sup>1</sup> の概念を利用し、衝撃波捕獲で振動がなくかつ鈍化の小さい差分スキームが開発された。この手法は圧縮性 Euler 方程式等の系や空間多次元の場合にも形式的<sup>2</sup>ではあるが拡張が行われ相当程度の成功を見ている。実際、空間 1 次元の数値計算であれば、数値解での静止衝撃波の内点<sup>3</sup>が高々 1 つである差分スキームは容易に構成できるようになった。

しかし、空間多次元の問題となると格子が衝撃波面に適合しない場合には捕獲された衝撃波面の形状が格子の影響を受け階段状になったりする不都合が発生する。これは広く認識されているにもかかわらず、その発生機構については「格子が現象に適合しない場合に発生する可能性がある」という程度以上の考察が行われているとは言い難い状況である。本稿では、このような不都合が発生する機構について、空間次元を 2 とするスカラ保存則の数値計算を観察・解析することにより、数値解での衝撃波や衝撃波面の生成機構を解析する。

以下、第 2 節では静止衝撃波を近似する時間定常数値解の性質について 1 次元空間の保存則（スカラ及び系）について見直し、空間が 2 次元となった場合

の衝撃波面の数値的な捕獲についての問題点を確認する。第 3 節では、本稿で扱う空間 2 次元のスカラ保存則の静止解とその差分近似を提示し、第 4 節では具体的な計算の実行に関する設定を考える。第 5 節では、数値計算の結果から数値解での衝撃波面の挙動について観察し、階段状の衝撃波を形成する数値的な機構についての定理を述べ数学的な証明を与える。

## 2. 数値計算における衝撃波面

有限体積法で保存型差分スキームを用いた衝撃波の数値解において、厳密解の衝撃波の位置がどのように反映するかについて簡単にまとめておく。

空間 1 次元のスカラ保存則の初期値問題

$$\begin{cases} u_t + f(u)_x = 0, -\infty < x < \infty, 0 < t < \infty \\ u(x, 0) = u_0(x), -\infty < x < \infty \end{cases} \quad (1)$$

(ただし、流束関数  $f$  は厳密凸、つまり  $f'' > 0$  とする) において、

$$f(u_L) = f(u_R), u_L > u_R \quad (2)$$

を満たす  $u_L, u_R$  をとり、十分大きい実数  $C$  について

$$\begin{aligned} x \leq -C \text{ ならば } u_0(x) &= u_L, \\ x \geq C \text{ ならば } u_0(x) &= u_R \end{aligned} \quad (3)$$

を満たすような初期値をとれば十分な時間を経ると定常な (時刻  $t$  に依存しない) 静止衝撃波解

$$u_{s.s.}(x) = \begin{cases} u_L, x < S \\ u_R, x > S. \end{cases} \quad (4)$$

となる。(  $S$  は衝撃波の位置) つまり、ある実数

$$t \geq T \text{ ならば } u(x, t) = u_{s.s.}(x) \quad (5)$$

数値計算においても、十分大きな区間  $x_{\min} < x < x_{\max}$  を計算領域として適切な区間分割

$$x_{\min} = x_0 = x_1 < x_2 < \cdots < x_m = x_{\max}$$

により  $m$  個の有限体積

$$I_i = (x_{i-1}, x_i), 1 \leq i \leq m$$

を与え、保存型差分スキームで保存性に適合する境界条件と共に数値計算を行い十分な時間進行の後に定常な  $\{u_i\}_{1 \leq i \leq m}$  (各  $u_i$  は  $I_i$  での数値解の値) が得られれば、その数値解から

$$u_{\Delta, s.s.}(x) = u_i, x \in I_i \quad (6)$$

<sup>1</sup>TVD は “Total Variation Diminishing” で「全変動減少」であるが、実際には全変動が増加しないことを要求するため。当初は TVNI (Total Variation Non-Increasing, 訳せば「全変動非増加」) なる用語が用いられた。数学的な定義は TVD、TVNI とともに同じである。この条件は厳密解の全変動が時間進行と共に増加しないという性質の反映なので、この条件を厳密に満たせるのは一般にはスカラ保存則又は線形保存則の場合に限られる。また数学的には全変動 (Total Variation) が有界であることが、差分の刻みが 0 に近づくときの近似解の収束の証明に用いられるので TVB (Total Variation Bounded, 訳せば「全変動有界」) という条件設定もある。

<sup>2</sup>非線形双曲型保存系の場合、一般には厳密解の全変動が有界であることが証明できないので、その差分スキームでも理論的保証が不十分なのが現状である。

<sup>3</sup>衝撃波の両側の状態 (従属変数の値) をとる格子点 (または有限体積) の間であって、数値解の値が両側の状態の間で遷移している格子点 (または有限体積) のこと。物理的には衝撃波を境に状態は非連続的に変化するのであるから当該の状態は物理的には意味がない。

で定めた近似解  $u_{\Delta, \text{s.s.}}(x)$  について

$$\int_{x_{\min}}^{x_{\max}} u_{\text{s.s.}}(x) dx = \int_{x_{\min}}^{x_{\max}} u_{\Delta, \text{s.s.}}(x) dx \quad (7)$$

が成り立つ。(7) は

$$u_L(S - x_{\min}) + u_R(x_{\max} - S) = \sum_{1 \leq i \leq m} u_i(x_i - x_{i-1}) \quad (8)$$

とも書けるので、厳密解の衝撃波の位置を数値解から与えることが可能である。

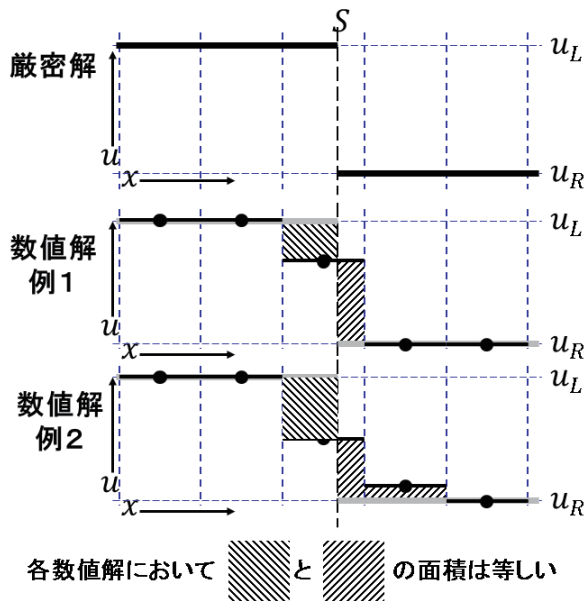


図 1: (8) を満たす数値解の例

空間 1 次元であっても圧縮性 Euler 方程式のような保存則の系となると、全ての保存量 ( $\rho, \rho u, e$ , ただし、 $\rho, u, e$  はそれぞれ密度、速度、全エネルギー) について、(7) または (8) のような式が成立するとは言えなくなってくる。実際、内点が高々一つであるスキーム (例えば Godunov スキーム) を用いても、静止衝撃波の数値解の内点での各保存量が衝撃波両側の当該保存量を同一の割合で内分する値にはならない (内点の状態を決定する別の条件<sup>4</sup>がある) ため、数値解から厳密解の衝撃波の位置  $S$  を (7) または (8) の原理で与えようとすると、注目する保存量により与えられる衝撃波の位置が微妙に異なることとなる<sup>5</sup>。しかしながら、内点が高々 1 点であるようなスキームの場合には衝撃波の位置がどの有限体積に属する (またはどの有限体積境界に一致する) かの情報は得られる。(内点が

<sup>4</sup> これは離散衝撃波プロファイル (discrete shock profile) として論じられる問題である。一般には離散衝撃波プロファイルの与える内点での数値解の値 (ベクトル) は衝撃波両側の値 (ベクトル) を適当な比で内分したものにはならない。

<sup>5</sup> また、圧縮性 Euler 方程式の静止衝撃波では保存量  $\rho u$  からは衝撃波の位置を決定できない。

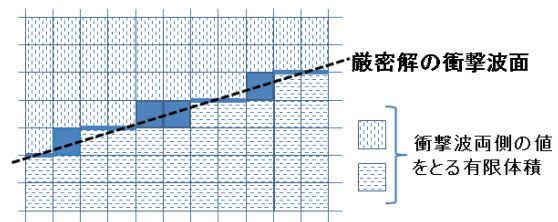
2 点以上になるようなスキームの場合、衝撃波の位置は内点となる有限体積のどれかということになる。)

ところが、空間 2 次元となると新たな問題が生じる。空間 1 次元では衝撃波の位置は厳密解では点であり、数値解からはその点もしくはその点を含む有限体積の情報を得られる。しかし空間 2 次元の問題では衝撃波 (衝撃波面) は 1 次元の曲線であり、数値解から衝撃波面が含まれる領域を与えるのはスカラー問題でスプリース振動のないスキームを用いて時間定常数値解を得た場合であってもそれほど自明ではない。

例えば、直交格子を用いて得た衝撃波の数値解で (厳密解の) 衝撃波面がどちらの格子軸に対しても斜交している場合を考え、衝撃波両側の状態をそれぞれ  $u_L, u_R$  であるとする。このとき、

- (1) 有限体積の境界で、その境界で隣接する両側の有限体積の状態がそれぞれ  $u_L, u_R$  であるもの全て
- (2) 状態が  $u_L$  と  $u_R$  の間にある値となっている有限体積 (境界も含む) の全て

をとり (図 2) それらの和を「数値的な衝撃波面」と考えると、厳密解の衝撃波面が数値的な衝撃波面に含まれるとは限らない。



塗りつぶしと太実線の部分が数値的衝撃波面

図 2: 数値的な衝撃波面の例

別の言い方をすると、数値解で  $u_L, u_R$  をとる 2 つの有限体積が隣接していてもそれら有限体積の境界が厳密解の衝撃波面とは一致しない、または、厳密解の衝撃波面が通過する有限体積での数値解の値が  $u_L, u_R$  の中間的な状態を取るとは限らない、ということになる。この数値的な衝撃波面の挙動は数値解において衝撃波面が一見階段のようになることと深く関連している。実際、衝撃波周辺での  $u$  の数値解の様子が 3 次元グラフで図 3 のようになっている場合、衝撃波面が階段状に見えることになる。

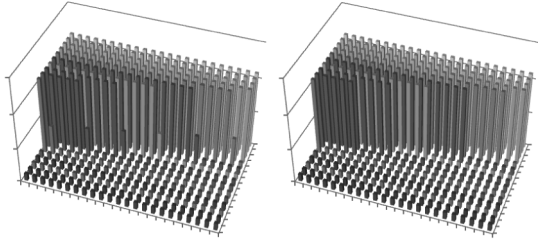


図 3: 衝撃波面が階段状に見える数値解の例（空間 2 次元問題の数値解を 3 次元グラフで表現）

有限体積近似の意味から考えれば、各有限体積での数値解の値は当該有限体積での厳密解の平均値となるのが理想であると考えられる。図 4 がこの数値解の様子を表している。

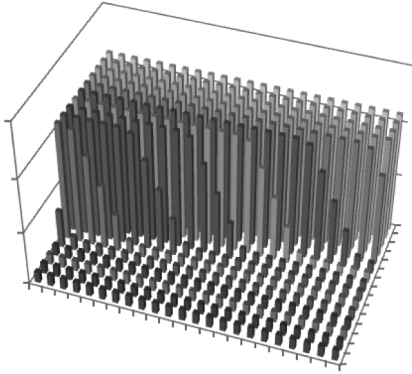


図 4: 各有限体積で厳密解の平均値をとる数値解

このような数値解であれば衝撃波面が階段状に見える現象はかなり緩和される。しかしながら、衝撃波捕獲を鈍化させずにそのような数値解を与えるスキームは未だ得られず、数値解が鈍化するかそうでなければ、図 2、図 3 のようになるのが現状である。

空間次元が 1 から 2 に増えると、衝撃波面が単なる位置で表されるだけの点（0 次元）から 1 次元である曲線（もしくは片端のある半曲線、両端のある曲線分）となることにより、数値解が衝撃波面に関して与える情報が複雑になるために新たな問題を生じると考えることもできる。

### 3. 2 次元空間でのスカラー保存則の静止衝撃波解と数値計算

まず 2 次元空間上のスカラー保存則の静止衝撃波解で衝撃波面が  $x, y$  両軸に斜交するものを設定する。

スカラー関数

$$u = u(x, y, t), -\infty < x, y < \infty, 0 \leq t < \infty$$

を未知関数とする空間 2 次元の保存則

$$u_t + \left(\frac{p}{2}u^2\right)_x + \left(\frac{q}{2}u^2\right)_y = 0, \quad (9)$$

を考える。ここで  $p, q$  は  $p > q > 0$  なる互いに素な整数である<sup>6</sup>。  $u_L + u_R = 0, u_L > u_R$  かつ  $C$  を実定数とすれば、

$$u(x, y, t) = \begin{cases} u_L, & px + qy < C \\ u_R, & px + qy > C \end{cases} \quad (10)$$

は (9) の静止衝撃波解となる。衝撃波面は

$$px + qy = C \quad (11)$$

なる直線である。

次に有限体積法による保存型差分近似を与える。

空間格子は一辺 1 の正方形の有限体積

$$D_{i,j} = \left\{ (x, y) \mid \left(i - \frac{1}{2}\right) \Delta x < x < \left(i + \frac{1}{2}\right) \Delta x, \right. \\ \left. \left(j - \frac{1}{2}\right) \Delta y < y < \left(j + \frac{1}{2}\right) \Delta y \right\} \quad (12)$$

で空間を分割する直交格子とする。（ $\Delta x = \Delta y = 1$ ）時間増分  $\Delta t$  は一定として  $t = n\Delta t$ （時間進行  $n$  段目）の各  $D_{i,j}$  での  $u$  の計算値を  $u_{i,j}^n$  と記す。

$t = n\Delta t$  から  $t = (n+1)\Delta t$  への時間発展は陽的保存型差分近似を用いる。一般的な空間 2 次元の保存則

$$u_t + f(u)_x + g(u)_y = 0 \quad (13)$$

では、流束関数  $f, g$  に対応する数値流束  $\bar{f}, \bar{g}$  を適当に選べば陽的差分スキーム

$$u_{i,j}^{n+1} = u_{i,j}^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left\{ \bar{f}(u_{i,j}^n, u_{i+1,j}^n) - \bar{f}(u_{i-1,j}^n, u_{i,j}^n) \right\} - \frac{\Delta t}{\Delta y} \left\{ \bar{g}(u_{i,j}^n, u_{i,j+1}^n) - \bar{g}(u_{i,j-1}^n, u_{i,j}^n) \right\} \quad (14)$$

を得るが、問題 (9) では

$$\begin{cases} f(u) = ph(u) \\ g(u) = qh(u), \end{cases} \quad h(u) = \frac{1}{2}u^2 \quad (15)$$

であるので、まず空間 1 次元スカラー保存則

$$u_t + h(u)_x = 0, h(u) = \frac{1}{2}u^2 \quad (16)$$

の差分スキーム

$$u_i^{n+1} = u_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left\{ \bar{h}(u_i^n, u_{i+1}^n) - \bar{h}(u_{i-1}^n, u_i^n) \right\} \quad (17)$$

<sup>6</sup> $p, q$  の符号を限定したのは初期値が  $u_L > u_R$  を満たす場合に衝撃波解を形成するためである。また互いに素な整数としたのは、後の部分の数値計算において循環境界条件を利用して有限の領域で数値計算を行いやすくするための仮定である。



を定め、その数値流束  $\bar{h}(u_-, u_+)$  から

$$\begin{cases} \bar{f}(u_-, u_+) = p\bar{h}(u_-, u_+) \\ \bar{g}(u_-, u_+) = q\bar{h}(u_-, u_+) \end{cases} \quad (18)$$

により  $\bar{f}, \bar{g}$  を定める。

陽的差分では安定性確保のために  $\Delta t$  は何らかの CFL 条件の制約を受ける。ここでは、

$$\frac{\Delta t}{\Delta x}|f'| + \frac{\Delta t}{\Delta y}|g'| < 1 \quad (19)$$

を課す。

数値流束  $\bar{h}$  は

$$\bar{h}(u_-, u_+) = \frac{1}{2} \{h(u_-) + h(u_+)\} - \frac{1}{2}a(u_-, u_+)(u_+ - u_-) \quad (20)$$

のように数値粘性係数  $a(u_-, u_+)$  で定義される。 $a(u_-, u_+)$  は  $u_-, u_+$  の連続関数と仮定する。この仮定により  $\bar{h}$  も連続関数となる。

本稿では、

$$a(u_-, u_+) = \begin{cases} \left| \frac{h(u_+) - h(u_-)}{u_+ - u_-} \right|, & u_- \neq u_+ \\ |h'(u_-)|, & u_- = u_+ \end{cases} \quad (21)$$

として得られる Murmann-Roe スキーム [6, 7, 8]、および

$$a(u_-, u_+) = \begin{cases} \max_{(s-u_-)(s-u_+) \leq 0} \left| \frac{h(u_-) + h(u_+) - 2h(s)}{u_+ - u_-} \right|, & u_- \neq u_+ \\ |h'(u_-)|, & u_- = u_+ \end{cases} \quad (22)$$

として得られる Godunov スキーム [2] の場合を考えることにする。

Godunov と Murmann-Roe の数値流束に違いが生じるのは  $u_-, u_+$  の作る Riemann 問題の厳密解が音速点 (特性速度が 0 となる  $u$  の値) を含む膨張波となる、 $h'(u_-) < 0 < h'(u_+)$  の場合のみであり、それ以外の場合ではこの 2 つは同じものになる [5]。そのため、本稿の議論の範囲では Godunov、Murmann-Roe どちらでも同じことになる。

#### 4. 数値計算の実施

スカラー保存則 (9) の静止衝撃波解 (10) の数値解を計算し、衝撃波 (面) の捕獲の様子を観察する。

格子については簡単のため前節で述べたように  $\Delta x, \Delta y = 1$  とし、時間増分  $\Delta t$  については安定性のために CFL 条件の制約が課される。また、差分のスキームについては、数値流束が (20) (21) で定められる Murmann-Roe スキームを用いる。

ただし、前節の最後でも述べている通り、膨張波を生じる部分以外では (20) (22) で数値流束を定める Godunov スキームも Murmann-Roe スキームと同一であるので、ここでの数値実験ではどちらの差分スキームでも同一の結果をもたらすことに注意しておく。

数値計算の実行では計算領域の有限化が必須だが、ここでは次のようにする。

(1) 計算領域は

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} &= x_{\min} \leq x \leq x_{\max} = M_x + \frac{1}{2}, \\ \frac{1}{2} &= y_{\min} \leq y \leq y_{\max} = p + \frac{1}{2} \end{aligned} \quad (23)$$

の形の長方形領域とする。 $M_x$  は正整数である。 $x$  軸方向の  $M_x$  は十分大きくとり、 $y$  軸方向には  $p$  個の有限体積をとっている。領域内の各有限体積は  $D_{i,j}$ ,  $1 \leq i \leq M_x, 1 \leq j \leq p$  と番号付けしておく。

(2)  $x$  軸方向の両端の境界  $x = x_{\min}$  及び  $x = x_{\max}$  では、 $u = u_L$  または  $u = u_R$  による流入流出条件を課す。

(3)  $y$  軸方向の両端  $y = y_{\min}$  及び  $y = y_{\max}$  では基本的には循環境界条件とする。ただし、衝撃波面に適合させるため両端を同一視する際に  $x$  軸方向のシフトを組み入れる。即ち、境界  $y = y_{\max}$  上の点  $(x, y_{\max})$  と境界  $y = y_{\min}$  上の点  $(x+q, y_{\min})$  を同一視する。同一視する相手の点が存在しない部分、即ち

$$x_{\min} < x < x_{\min} + q, y = y_{\min}$$

と

$$x_{\max} - q < x < x_{\max}, y = y_{\max}$$

では (2) と同様に  $u = u_L$  または  $u = u_R$  による流入流出条件とする。(図 5)

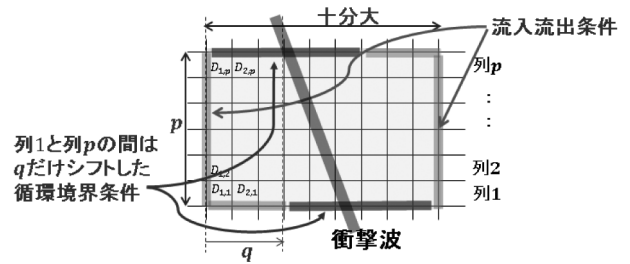


図 5: 数値計算での境界条件

上のように計算領域を設定し、循環条件以外の境界条件を設定した境界近傍の有限体積 (実際には当該境

界に接する有限体積だけでよい) では離散的時間進行に伴う数値解の値の変化が生じないように衝撃波の位置(または初期値)を設定すれば、領域を限らずに無限領域で行うのと同等の数値計算であるとしてよい。

数値計算のための初期値  $\{u_{i,j}^0\}$  は、厳密解である静止衝撃波解 (10) から各有限体積  $D_{i,j}$  について次のように定める。

- (I1)  $D_{i,j}$  の内部の全ての点が  $px + qy < C$  を満たせば、 $u_{i,j}^0 = u_L$  とする。
- (I2)  $D_{i,j}$  の内部の全ての点が  $px + qy > C$  を満たせば、 $u_{i,j}^0 = u_R$  とする。
- (I3) 上の2つ以外の場合は、 $D_{i,j}$  内で  $px + qy < C$  を満たす部分の面積と  $px + qy > C$  を満たす部分の面積の比により、 $u_L$  と  $u_R$  の加重平均をとって、その値を  $u_{i,j}^0$  とする。

初期値を定める際に用いる静止衝撃波解 (10) は時間定常な厳密解であるが、上で定めた数値解の初期値は一般には時間定常ではない。数値的には十分な回数の離散的時間発展を経て時間定常な数値解となる<sup>7</sup> のでその定常数値解の衝撃波捕獲の様子を観察議論する。

離散時間発展の繰返しで数値解が数値解の定常状態に収束することの理論的な証明は与えられない<sup>8</sup> が、スカラー保存則における衝撃波捕獲では数値的に生じる内点での数値解(衝撃波両側の値  $u_L, u_R$  ではない値で厳密解には存在しないが数値計算では出現する値)に対する自由度の制約<sup>9</sup> がないことから、経験的には自然な仮定としても問題はないと思われる。

## 5. 静止衝撃波の数値解の挙動

静止衝撃波と格子の位置関係を徐々に変化させていくときの数値解の変化を観察する。本稿の興味は数値解における衝撃波面の捕獲であるから、衝撃波面の位置の変化に応じての数値的衝撃波面(図2)の様相の変化、特に内点となる有限体積の位置・分布とその移動に注目して観察する。いくつかの  $p, q$  の値での結果を例示する。ここで白と灰色は衝撃波の両側のそれぞれの値をとっている有限体積であり、斜線が内点を取る有限体積を表す。静止衝撃波が徐々に右上に移動する( $C$  が徐々に増加する)ときの数値解の様相の変化を左から右に並べている。

<sup>7</sup> 実際の数値計算では丸め誤差程度の変化のみの状態になれば定常状態と解釈する。

<sup>8</sup> 特定の差分近似については縮小写像の方法で証明が可能

<sup>9</sup> Euler 方程式の様な系の場合には、変数が複数個であっても中間状態の自由度は変数の個数分はない為に状況が異なってくる。

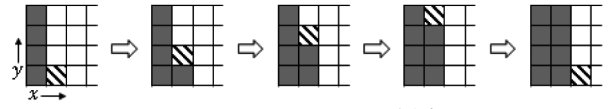


図 6:  $p = 4, q = 1$  の場合

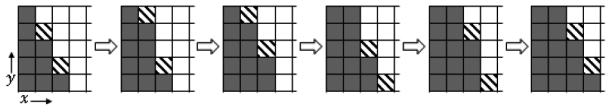


図 7:  $p = 5, q = 2$  の場合

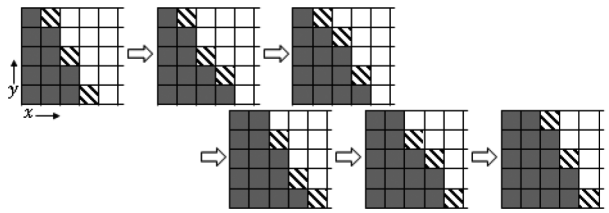


図 8:  $p = 5, q = 3$  の場合

示された図はいずれも衝撃波が右に有限体積  $q$  個分移動する際のパターンの変化を表しており、それぞれの場合の数値解での衝撃波進行パターンの1周期分と言えるものである。その他の  $p, q$  の値の場合も観察することで、数値解における衝撃波面の捕獲について次の主張を得る。

主張 1. 内点をとる有限体積は互いに隣接しない。ここで2つの有限体積が隣接するとは、1つの有限体積境界の両側にあることをいう。

主張 2. 内点をとる有限体積は、 $x, y$  のどちらの軸の方向で見ても、衝撃波両側それぞれの値をとる有限体積に挟まれている。ただし、 $y$ - 軸方向の場合は、シフト付循環境界条件を考慮し、 $D_{i,p}$  と  $D_{i+q,1}$  が隣接すると解釈する。

主張 3. 静止衝撃波が徐々に移動するに従い、内点をとる有限体積は順次  $y$ - 軸方向に移動する。ただし、端の  $D_{i,p}$  から移動する先はシフト付の循環境界条件により  $D_{i+q,1}$  となる。

主張 4. 各  $i$  について、内点をとる有限体積は  $D_{i,1}$  から  $D_{i,p}$  までの  $p$  個の有限体積のうち高々1個である。また計算領域全体では高々  $q$  個である。

これらの主張をまとめると、主張 1,2 については下の定理 1 として記述し、主張 3,4 はその定理の系として理解するのが適当であると考えられる<sup>10</sup>。また、

<sup>10</sup> 主張 1,2 をまとめる定理は直交格子に斜交する衝撃波面を有する静止衝撃波の数値解として一般的なものだが、主張 3,4 においては  $p > q$  なる仮定が必要なことに注意する。

定理の記述において Godunov スキーム、Murmman-Roe スキームは 1 次元の静止衝撃波の数値解における内点の個数が高々 1 個である TVD スキームという形に一般化される。

**定理 1.** 空間 2 次元のスカラー保存則初期値問題 (9) の静止衝撃波解

$$u = \begin{cases} u_L, & px + qr < C \\ u_R, & px + qr > C \end{cases} \quad (24)$$

(ただし、 $u_L + u_R = 0, u_L > u_R$ ) の数値解を (12) の定める  $D_{i,j}$  を有限体積とする保存型差分近似で求める。まず、空間 1 次元スカラー保存則 (16) のスキーム (17) は数値粘性係数  $a(u_-, u_+)$  がいわゆる TVD 条件

$$\left| \frac{h(u_+) - h(u_-)}{u_+ - u_-} \right| \leq a(u_-, u_+) \leq \frac{1}{\Delta t} \quad (25)$$

( $u_- = u_+$  の場合、最左辺は  $|h'(u_+)|$  と解釈する。) を満たし、衝撃波両側の値が  $u_L, u_R$  である静止衝撃波の時間定常数値解を有し、その数値解では衝撃波の内点となる有限体積が高々 1 個であるとする。次に、この空間 1 次元のスキーム (17) から (14), (18) により空間 2 次元のスキームを定め、初期値は前節の (I1), (I2), (I3) の手順で与え、静止衝撃波解 (24) を近似する時間定常数値解が得られたとする。

その時間定常数値解について、次が成立する。

- (1) 内点となる有限体積が共通の有限体積境界を挟んで隣接することはない。
- (2) 内点となる有限体積は、 $x, y$  のどちらの軸方向で見ても衝撃波両側のそれぞれの値  $u_L, u_R$  をとる有限体積により挟まれる。

定理の証明を述べる。いくつかの補題を示しながら進めるが、まず、2 次元の数値解の内点の値について次を確認する。

**補題 2.** 2 次元の時間定常数値解の各有限体積での値は、全て区間  $[u_R, u_L]$  に属している。

証明：各有限体積での初期値が  $[u_R, u_L]$  に属していること、およびスキームの TVD 性から明らかである。(補題 2 の証明終)

定理の証明における議論は、1 次元の静止衝撃波の時間定常数値解で内点になる有限体積が高々 1 個であることの条件の考察が主要な部分を占める。

**補題 3.** 1 次元問題の静止衝撃波の (17) による時間定常数値解において、内点が存在すればその内点での数値解の値  $v$  は  $u_R$  と  $u_L$  の間にある。

証明：背理法による。内点は存在しても 1 個なのでそれを  $I_j$  とし、時間定常解を  $\{u_i\}_{i \text{ は整数}}$  とすれば、

$$u_{j-1} = u_L, u_j = v, u_{j+1} = u_R$$

である。 $v > u_L$  と仮定する。

まず

$$u_R < u_L < v, h(u_R) = h(u_L) < h(v) \quad (26)$$

は容易に観察される。次に、数値流束  $\bar{h}(u_j, u_{j+1})$  を変形した

$$\begin{aligned} \bar{h}(u_j, u_{j+1}) &= \bar{h}(v, u_R) \\ &= \frac{1}{2} \{h(v) + h(u_R)\} - \frac{1}{2} a(v, u_R)(u_R - v) \\ &= h(v) \\ &\quad + \frac{1}{2} \left\{ \frac{h(u_R) - h(v)}{u_R - v} - a(v, u_R) \right\} (u_R - v) \end{aligned} \quad (27)$$

において、(26) より

$$\frac{h(u_R) - h(v)}{u_R - v} > 0$$

であり、TVD 条件 (25) により

$$a(v, u_R) > \left| \frac{h(u_R) - h(v)}{u_R - v} \right| > \frac{h(u_R) - h(v)}{u_R - v}$$

でもあるので、

$$\frac{h(u_R) - h(v)}{u_R - v} - a(v, u_R) < 0$$

となる。また  $v > u_R$  なる仮定なので

$$\frac{1}{2} \left\{ \frac{h(u_R) - h(v)}{u_R - v} - a(v, u_R) \right\} (u_R - v) > 0.$$

これを (27) (26) と合わせ

$$\bar{h}(u_j, u_{j+1}) > h(v) > h(u_L) = h(u_R) \quad (28)$$

を得る。ところが、 $\{u_i\}$  は時間定常なので  $\{u_i\}$  から得られる全ての数値流束は等しくなければならない。実際、衝撃波から十分遠い所では数値解は  $u_L$  または  $u_R$  なる同一の値が並び、そこでの数値流束は  $h(u_L)$  または  $h(u_R)$  (この 2 つは等しい) であるから、全ての数値流束が

$$h(u_L) = h(u_R)$$

に等しくなければならない。(28) はこれに矛盾する。よって  $v \leq u_L$ 。

同様に、 $v < u_R$  としても数値流束  $\bar{h}(u_{j-1}, u_j)$  について矛盾を導くことができるので、

$$u_R \leq v \leq u_L$$

を得る。(補題 3 の証明終)



## 補題 4.

$$\bar{h}(u_L, v) = \bar{h}(v, u_R) = h(u_L) = h(u_R), u_R \leq v \leq u_L \quad (29)$$

証明：内点が存在するとき内点での数値解の値を  $v$  とする。任意の静止衝撃波の位置で内点は高々 1 個であるとする。内点での数値解の値  $v$  は任意の衝撃波位置に対応するために区間  $[u_R, u_L]$  の全ての値をとり得る。 $[u_R, u_L]$  に属するどの値であっても、内点が 1 つのみの時間定常解であるから内点の両側の数値流束  $\bar{h}(u_L, v), \bar{h}(v, u_R)$  は  $h(u_L) = h(u_R)$  に等しくなければならない。(補題 4 の証明終)

## 補題 5.

$$\bar{h}(v, w) < h(u_L) = h(u_R), v, w \in (u_R, u_L) \quad (30)$$

証明：背理法による。 $h(v, w) = h(u_L) = h(u_R)$  となる  $v, w \in (u_R, u_L)$  があつたと仮定する。

補題 4 より

$$h(u_L) = \bar{h}(u_R, v) = \bar{h}(v, w) = \bar{h}(w, u_R) = h(u_R)$$

となるが、これは静止衝撃波を近似する定常数値解に内点が 2 つあり、それぞれの内点での数値解が  $v, w$  となっていることを示す。即ち矛盾である。(補題 5 の証明終)

## 補題 6.

$$\bar{h}(v, w) \leq h(u_L) = h(u_R), v, w \in [u_R, u_L] \quad (31)$$

ただし、等号が成立するならば  $v = u_L$  または  $w = u_R$  である。

証明：補題 4 と補題 5 から容易に導かれる。(補題 6 の証明終)

次に 2 次元問題の静止衝撃波の定常数値解  $\{u_{i,j}\}$  を考える。

- 各  $j$  について、 $i$  が十分大ならば  $u_{i,j} = u_R$ 、 $i$  が十分小ならば  $u_{i,j} = u_L$
- 各  $i$  について、 $j$  が十分大ならば  $u_{i,j} = u_R$ 、 $j$  が十分小ならば  $u_{i,j} = u_L$

であるから、有限体積  $D_{i,j}$  の中に内点になるものがあれば、それらから

$$u_R < u_{\alpha,\beta} < u_L, u_{\alpha+1,\beta} = u_{\alpha,\beta+1} = u_R$$

となる  $D_{\alpha,\beta}$  がとれる。

数値解が定常なので有限体積  $D_{\alpha,\beta}$  での数値流束の収支は均衡し

$$\begin{aligned} 0 &= [\bar{f}(u_{\alpha,\beta}, u_{\alpha+1,\beta}) - \bar{f}(u_{\alpha-1,\beta}, u_{\alpha,\beta}) \\ &\quad + \bar{g}(u_{\alpha,\beta}, u_{\alpha,\beta+1}) - \bar{g}(u_{\alpha,\beta-1}, u_{\alpha,\beta})] \\ &= p\{\bar{h}(u_{\alpha,\beta}, u_{\alpha+1,\beta}) - \bar{h}(u_{\alpha-1,\beta}, u_{\alpha,\beta})\} \\ &\quad + q\{\bar{h}(u_{\alpha,\beta}, u_{\alpha,\beta+1}) - \bar{h}(u_{\alpha,\beta-1}, u_{\alpha,\beta})\} \end{aligned}$$

となり、補題 4 を適用して

$$p\{h(u_R) - \bar{h}(u_{\alpha-1,\beta}, u_{\alpha,\beta})\} + q\{h(u_R) - \bar{h}(u_{\alpha,\beta-1}, u_{\alpha,\beta})\} = 0 \quad (32)$$

を得る。これが成立するためには補題 6 から

$$\bar{h}(u_{\alpha-1,\beta}, u_{\alpha,\beta}) = \bar{h}(u_{\alpha,\beta-1}, u_{\alpha,\beta}) = h(u_R) = h(u_L)$$

でなければならない。

この議論を帰納的に適用すると、全ての  $x$ - 軸方向の流束  $\bar{f}(u_{i,j}, u_{i+1,j})$  は  $f(u_L) = f(u_R)$  に等しく、同様に全ての  $y$ - 軸方向の流束  $\bar{f}(u_{i,j}, u_{i,j+1})$  は  $g(u_L) = g(u_R)$  に等しい。

もしも内点となる有限体積が隣接すれば、それらの有限体積間の境界における数値流束は補題 5 により  $f(u_L) = f(u_R)$  または  $g(u_L) = g(u_R)$  より小となり矛盾が生じる。よって内点となる有限体積の隣接は起こらない。また、 $u_R < u_{\alpha,\beta} < u_L$  ならば

$$\begin{aligned} u_{\alpha+1,\beta} &= u_{\alpha,\beta+1} = u_R \\ u_{\alpha-1,\beta} &= u_{\alpha,\beta-1} = u_L \end{aligned} \quad (33)$$

が上記の議論の帰結として得られる。(定理 1 の証明終)

なお、この定理では  $h(u) = \frac{1}{2}u^2$  としているが、一般化して

(1)  $h(u)$  は  $u$  の厳密凸関数

(2)  $u_L, u_R$  は  $h(u_L) = h(u_R), h'(u_L) > h'(u_R)$

としても成立する。また、2 次元の数値解を求める際の初期値は所定の方法 (I1)(I2)(I3) によって与えなくても、適当な初期値から計算を開始して数値解が静止衝撃波解を近似する時間定常数値解 (即ち、 $x$  または  $y$  が十分に小さいところの有限体積では数値解の値が  $u_L$ 、逆に  $x$  または  $y$  が十分に大きいところの有限体積での数値解の値が  $u_R$ ) に達した場合には補題 2 の証明を与えることが可能であり、ここでも定理の条件を緩めることが可能である。

## 6. まとめ

1 次元の静止衝撃波を 1 個の内点で数値的に捕獲する差分スキームを 2 次元に拡張した場合、定理 1 は図

2 の中央部にあるような内点たる有限体積の隣接を否定する。当然、図 4 のような内点の存在を許容せず、代わりに図 3 のような数値解を与えることとなる。これが、数値解での衝撃波面の捕獲が階段状になる原因である。ただし、衝撃波面が  $x, y$  各軸と 45 度の角度をなす場合、即ち (9) で  $p = q = 1$  (この  $p, q$  の値の組合せは (9) の但し書きで除外されているが) となるような場合には、衝撃波面が階段状になることはない。

また、1 次元の静止衝撃波の数値計算で既に鈍化が生じて衝撃波の捕獲に 2 個以上の内点を必要とするような差分スキームであれば、2 次元の静止衝撃波の数値計算でこのような現象は顕著には起こらないといえる。

このような現象を避けるために、粘性を付加するという修正法が従来から知られているが、かなりの粘性を付加しないと効果が現れない場合もある。定理によれば、数値解の鈍化による衝撃波面の階段状化低減機構の本質は、粘性というよりも 1 次元の静止衝撃波を近似する際の内点の個数の増加であり、粘性を付加しても効果がないのは内点の個数が 1 個のままで増加しない場合である。実際、1 次元の静止衝撃波の数値解の内点の個数が通常 2 個である Engquist-Osher[1] のスキームを用いると、鋸歯状化が目立ちにくくなることが確かめられる。

一方で本考察は 1 次元計算での計算法の利点が 2 次元以上の計算においては欠点となる例を示したものとしても興味深い。格子と現象 (厳密解) の間の方向性のずれの問題など、2 以上の次元に特有の問題の考察への端緒でもありと考えられる。本考察をより一般化し圧縮性 Euler 方程式などの系の場合に拡張して証明を与えることには相当の困難が予想される。しかし、1 次元の静止衝撃波の数値解の内点の個数を増やすことで 2 次元以上の静止衝撃波の数値解の鋸歯状化を抑制するという方法は実際の計算において適用可能であると考えられる。

## 参考文献

- [1] B. Engquist and S. Osher. Stable and entropy satisfying approximations for transonic flow calculations. *Math. Comp.*, Vol. 34, pp. 45–75, 1980.
- [2] S. K. Godunov. Finite difference method for numerical computation of discontinuous solutions of the equations of fluid dynamics (in Russian). *Mat. Sb. (N.S.)*, Vol. 47, pp. 251–306, 1959.

- [3] A. Harten. High resolution schemes for hyperbolic conservation laws. *J. Comput. Phys.*, Vol. 49, pp. 357–393, 1983.
- [4] A. Harten. On a class of high resolution total-variation-stable finite-difference schemes. *SIAM J. Numer. Anal.*, Vol. 21, No. 1, pp. 1–23, 1984.
- [5] B. van Leer. On the relation between the upwind-differencing schemes of Godunov, Engquist-Osher and Roe. *SIAM J. Sci. Statist. Comput.*, Vol. 15, No. 1, pp. 1–20, March 1984.
- [6] E. M. Murmann. Analysis of embedded shock waves calculated by relaxation methods. *AIAA J.*, Vol. 12, pp. 626–633, 1974.
- [7] P. L. Roe. Approximate Riemann solvers, parameter vectors and difference schemes. *J. Comput. Phys.*, Vol. 43, pp. 357–372, 1981.
- [8] P. L. Roe. The use of Riemann Problem in finite difference schemes. In *Lecture Notes in Physics*, 141, Vol. 141, pp. 354–559. Springer-Verlag, New York, 1981.

宇宙航空研究開発機構研究開発報告 JAXA-RR-17-005  
JAXA Research and Development Report

スカラー保存則の直交格子有限体積近似における衝撃波面の形成機構について  
Formation of shock surfaces over Cartesian grids in numerical computation of  
scalar conservation laws over two-dimensional space.

---

|   |   |   |            |   |   |          |
|---|---|---|------------|---|---|----------|
| 発 | 行 | 国立研究開発法人 宇宙航空研究開発機構 (JAXA)<br>〒182-8522 東京都調布市深大寺東町7-44-1<br>URL: <a href="http://www.jaxa.jp/">http://www.jaxa.jp/</a> |            |   |   |          |
| 発 | 行 | 日   | 平成30年2月22日 |   |   |          |
| 電 | 子 | 出   | 版          | 制 | 作 | 松枝印刷株式会社 |

※本書の一部または全部を無断複写・転載・電子媒体等加工することを禁じます。  
Unauthorized copying, replication and storage digital media of the contents of this publication, text and images are strictly prohibited. All Rights Reserved.

---

