

宇宙航空研究開発機構研究開発報告

JAXA Research and Development Report

模型変形計測データを反映した CFD表面格子修正法の開発

保江 かな子, 口石 茂, 橋本 敦, 村上 桂一,
加藤 裕之, 中北 和之, 渡辺 重哉, 菱田 学

2013年3月

宇宙航空研究開発機構

Japan Aerospace Exploration Agency

模型変形計測データを反映した CFD 表面格子修正法の開発*

保江 かな子^{*1} 口石 茂^{*1} 橋本 敦^{*2} 村上 桂一^{*2}
加藤 裕之^{*3} 中北 和之^{*3} 渡辺 重哉^{*1} 菱田 学^{*4}

Modification of CFD Surface Mesh Based on Model Deformation Measurement*

Kanako YASUE^{*1}, Shigeru KUCHI-ISHI^{*1}, Atsushi HASHIMOTO^{*2}, Keiichi MURAKAMI^{*2}
Hiroyuki KATO^{*3}, Kazuyuki NAKAKITA^{*3}, Shigeya WATANABE^{*1} and Manabu HISHIDA^{*4}

Abstract

Modification approach of a computational fluid dynamics (CFD) surface mesh are examined using measurement data of wind tunnel model deformation. Model deformation measurements (MDM) were successfully made at Japan aerospace exploration agency (JAXA) using stereo photogrammetry with markers. The model's deformation was then approximated using a deformation law which is identified by a few parameters with markers attached on the wind tunnel model. In this paper, the approach is used to rearrange the CFD surface mesh of a CFD model to conform its configuration with that of the wind tunnel test model. We duplicate the deformed configuration of the wind tunnel model using three deformation laws and examine the resulting CFD models. A high-fidelity RANS simulation of the DLR-F6 FX2B wind tunnel model is then performed considering the static deformation of the model and the effect of model deformation on the aerodynamic characteristics are also explored by performing the CFD simulation for the deformed configuration as well as the original (non-deformed) configuration.

Keywords: static aeroelasticity, wind-tunnel model deformation, transonic flow simulation.

概 要

風洞試験で計測した模型変形データを用いて、Computational Fluid Dynamics (CFD) 表面格子を修正する方法を検討する。JAXA ではマーカーを使ったステレオ写真法により風試模型の模型変形量を計測しており、計測したマーカー座標値を使うことで主翼の変形則を同定し、変形後の形状を定義することができる。本報告では、計測したマーカー座標値を使って変形後の形状を同定し、CFD の表面格子が通風時の風試模型形状と一致するように修正する方法を検討する。ここでは三種類の変形手法を検討する。そして、実際に模型の変形量を計測した DLR-F6FX2B モデルに対して本手法を適用し、変形モデルの検証をおこなう。また、変形前後の形状に対して Reynolds-averaged Navier-Stokes (RANS) 解析を実施することで、変形を考慮していない場合と考慮した場合とで空力特性にどの程度影響を及ぼすかを検討する。

* 平成 24 年 11 月 26 日受付 (Received 26 November, 2012)

*1 研究開発本部 流体グループ
(Fluid Dynamics Group, Aerospace Research and Development and Directorate)

*2 研究開発本部 数値解析グループ
(Numerical Analysis Group, Aerospace Research and Development and Directorate)

*3 研究開発本部 風洞技術開発センター
(Wind Tunnel Technology Center, Aerospace Research and Development and Directorate)

*4 (株) 菱友システムズ
(Ryoyu Systems Co. Ltd.)

1 緒言

実機と風洞試験との間には、レイノルズ数効果や壁/支持装置の影響、空力弾性による模型変形効果など、様々な違いが存在する¹⁾。これらの違いの中でも模型変形効果は実機空力特性を正確に予測するための重要な課題の一つであり、レイノルズ数効果や壁・支持干渉などと同様、風洞試験で得られたデータに対して何らかの補正が必要である。近年では、National Transonic Facility (NTF)²⁾や European Transonic Wind-tunnel (ETW)³⁾のような極低温加圧型風洞の開発により、気流温度を変化させることで q/E 一定のまま(q : 動圧, E : ヤング率)レイノルズ数を変化させることで模型変形の影響を考慮することが可能となったが、実機と同程度の高いレイノルズ数を実現するためにはやはり気流圧力を上げる必要があるため、このような最新の風洞であっても模型変形の影響は少なからず補正する必要がある。

通常、風試模型は剛体であり変形しないと仮定している。しかし、模型変形が生じることで、通風時の風試模型形状が設計した 1G 形状と異なってしまうため、得られる空力特性に違いが生じてしまう。また、模型が変形することで、PSP (Pressure Sensitive Paint) 計測の精度が低下してしまうといった問題もある⁴⁾。風洞試験で表面圧力分布を取得する PSP 計測を実施する際、感圧塗料を塗布した模型表面に光を照射し、通風前と通風後に撮影した画像の発光強度の比から表面圧力分布を算出する。その際、2 枚の画像の模型位置を合わせるために、マーカーを使った位置合わせを実施するが、模型変形が生じると模型の位置が動いてしまい正確に表面圧力分布の値を算出できない部分が生じ、PSP の誤差要因の一つとなってしまう。その他にも、実機の設計開発段階で広く使われるようになっている CFD (Computational Fluid Dynamics) では模型を剛体と仮定しているため、CFD 解析結果と風試結果との比較において模型変形の影響により両者の形状に差異が生じてしまい、結果比較や CFD コードの妥当性検証が厳密ではなくなるといった問題もある。

これまでに、模型変形効果を把握することを目的として、変形量の計測や予測に関する多くの技術が開発されてきた。風洞試験においては、風試模型の模型変形量を知ることを目的として、ステレオ写真法⁵⁾やモアレ干渉法⁶⁾など、様々な模型変形計測法が開発されてきた。また、PSP 計測画像の模型変形効果を補正するためにもこれらの技術が適応されている⁴⁾。一方、模型変形量を予測するために、FEM と CFD を用いた風試模型の静的空力弾性解析が行われており、模型の変形量予測だけでなく模型変形が空力特性に及ぼす影響も検証されている^{7,8,9)}。しかし、風試模型が平衡形状に達するまでに何度か連成解析を実施する必要があるため、複雑形状の静的空力弾性解析を実施するには高い計算負荷がかかる。さらに、風試模型には、圧力配管用の溝などが存在することにより、内部構造が複雑となり、それを模擬するためにはさらなる計算負荷の増大に繋がる。また、簡単のために内部構造を無視した中実形状での流体構造連成解析が行われているが、その妥当性を検証するには、風試で取得した模型変形変位計測データや空力特性と十分に比較検討する必要があると考えられる。そこで我々は、模型変形計測データを使って CFD 表面格子あるいは CAD データを変形形状に合わせて修正できれば、流体構造連成解析をすることなく短時間で変形が空力特性へ及ぼす影響を検証できると考えた。また、これにより風試模型を忠実に再現した形状での CFD 解析が可能となるため、風試データと CFD 解析結果との比較においてもより詳細な検証が可能となる。

そこで本報告では風試模型の変形計測結果を CFD 表面格子へ反映する方法について検討する。本研究では、PSP 画像の模型変形効果を補正するために Le Sant により開発された多項式近似による簡易モデル⁴⁾(以下、簡易多項式モデルと呼ぶ)を用いて、変形計測データを元にした CFD 表面格子の変形を試みる。この方法では主翼の垂直方向(z 方向)変位のみを考慮しているため、本報告では前後方向(x 方向)および横方向(y 方向)変位にも対応できるよう、簡易多項式モデルの改良を行い、 x , y 方向の変位を考慮する必要があるかどうかの検証も併せて行う。最後に、本手法で修正した変形後の CFD 表面格子形状に対して Reynold Averaged Navier-Stokes (RANS) 解析を実施し、初期形状の RANS 解析結果と比較することで、変形が空力特性へ及ぼす影響を検証する。

2 表面格子修正法

風洞試験では、通風時に模型だけでなく支持装置のたわみも生じる。そのため、本手法では、始めに胴体

に取り付けられたマーカーの変位量計測結果から支持装置のたわみによる模型位置の移動・回転を算出し、その後、翼上面に取り付けられたマーカーの変位量計測データを使って空力荷重による翼の変形を算出する。Fig. 1 および Fig.2 にそれぞれ模型移動補正および模型変形補正の流れを示す。

本報告では翼の変形を求める際に、Le Sant によって開発された方法（簡易多項式モデル）⁴⁾ を適用する。この方法は、通風前後のマーカーの位置を計測することでマーカーの変位量を算出し、PSP 画像の模型変形効果の補正を行うために開発されたものであり、本研究ではその方法を CFD 表面格子の変形に適用する。ここでは主翼の変形をはりのたわみおよびねじりと仮定し、多項式で近似する。そして計測データを使って多項式の係数を同定することで、主翼の変形形状を定義し、CFD 表面格子を修正する。しかし、簡易多項式モデルは z 方向変位のみを考慮している手法であるため、このモデルを改良して x, y, z 全方向の変位を考慮した手法の開発も行う。

2.1 座標系の定義

移動・回転パラメータおよび変形パラメータを算出するにあたり、複数の座標系を導入するため、まず始めに座標系の定義を示す。迎角 0 度の模型初期取り付け位置での模型先端を原点とする座標系を模型座標系と呼ぶこととし、 $x = (x, y, z)$ で表わす。また、通風時の支持装置のたわみによる模型の移動・回転を考慮する必要があるため、Fig. 3 のように通風時に支持装置がたわみ移動・回転した後の座標系を移動後模型座標系と呼び $x' = (x', y', z')$ で表わす。このとき移動模型座標系の原点は移動後の模型先端とし、機軸方向を x' としている。また、主翼の変形を考慮するために、翼根付近を原点とした主軸方向の座標系を $\xi = (\xi, \eta, \zeta)$ と定義し、これを変形主軸座標と呼ぶ。なお、変形主軸座標は設定に任意性があるため、変形主軸の設定も検討が必要である。検討した結果については後述する。

2.2 模型の移動・回転パラメータ算出方法

支持装置のたわみによる模型の移動および回転を算出する方法を以下に示す。本手法では、胴体を剛体と仮定し、胴体マーカーを用いて模型の移動・回転パラメータを算出する。初期胴体マーカーを移動・回転させた時の位置と通風時に変形計測した胴体マーカー位置とを比較することで、通風時のたわみによる移動・回転量を算出することが出来る。ここでは、模型座標系上でのマーカー位置の移動・回転を考える。無風時

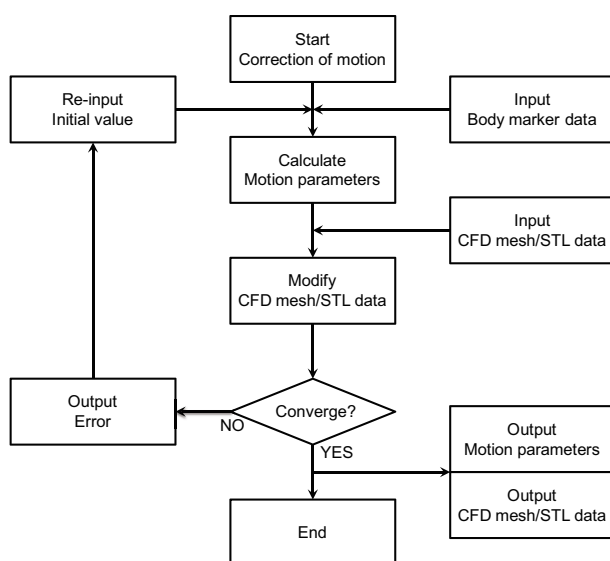


Fig. 1: Flowchart for correction of wind tunnel model motion.

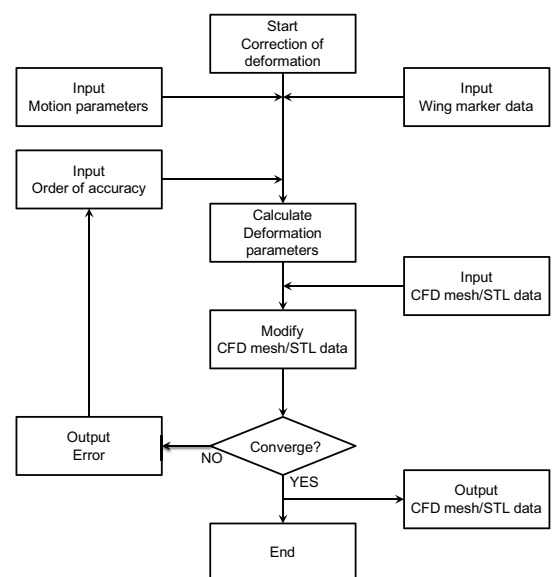


Fig. 2: Flowchart for correction of wind tunnel model deformation.

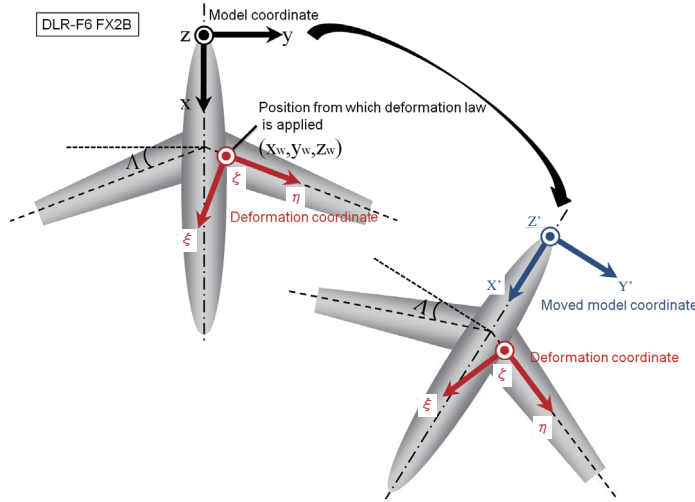


Fig. 3: Coordinates of model for calculating motion parameters and deformation parameters.

の胴体マーカー初期位置 $x_0 = (x_0, y_0, z_0)$ を原点周りに ZYX 系 Euler 角 (ϕ, θ, ψ) で回転移動し, $\Delta x = (\Delta x, \Delta y, \Delta z)$ 平行移動した時の模型座標系における移動後の胴体マーカー位置は次式で表される.

$$\mathbf{x} = \mathbf{T}^m(\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}_{rot}) + \Delta \mathbf{x} \quad (1)$$

ここで回転行列 \mathbf{T}^m は,

$$\mathbf{T}^m = \begin{bmatrix} \cos \theta \cos \psi & \cos \theta \sin \psi & -\sin \theta \\ \sin \phi \sin \theta \cos \psi - \cos \phi \sin \psi & \sin \phi \sin \theta \sin \psi + \cos \phi \cos \psi & \sin \phi \cos \theta \\ \cos \phi \sin \theta \cos \psi + \sin \phi \sin \psi & \cos \phi \sin \theta \sin \psi - \sin \phi \cos \psi & \cos \phi \cos \theta \end{bmatrix} \quad (2)$$

\mathbf{x}_{rot} は回転中心である. ここでは座標原点を回転中心とした. また, (ϕ, θ, ψ) はそれぞれロール角, ピッチ角, ヨー角に対応している.

本手法では最小二乗法により平行移動量 $\Delta \mathbf{x}$ および回転角 (ϕ, θ, ψ) を算出することを考え, 次式で表される残差二乗和 $S(p)$ を最小にするパラメータ $p = (\Delta x, \Delta y, \Delta z, \phi, \theta, \psi)$ を Newton 反復法により求める.

$$S(p) = \sum_{i=1}^n \omega_i F_i^2 \quad (3)$$

n はマーカー点数, ω_i は重みを表す. 測定値の誤差の分散から重み ω_i を算出することで, 測定誤差を考慮することが出来る. フィッティング関数 F_i は次式で定義する.

$$F_i = \sqrt{(x_i^e - x)^2 + (y_i^e - y)^2 + (z_i^e - z)^2} = \sqrt{f_i} \quad (4)$$

ここで $\mathbf{x}_i^e = (x_i^e, y_i^e, z_i^e)$ は通風時に計測されたマーカー座標値である. 式 (3) を最小にするパラメータ p を求めるためには, 次式を解けばよい.

$$\frac{\partial S}{\partial p} = 0 \quad (5)$$

Newton 反復法では,

$$\sum_{k=1}^n \frac{\partial^2 S}{\partial p_j \partial p_k} \Delta p_k = -\frac{\partial S}{\partial p_j} \quad (6)$$

を Δp について解くことにより, 次の近似値

$$\mathbf{p}^{n+1} = \mathbf{p}^n + \Delta \mathbf{p} \quad (7)$$

が得られる．ここで，

$$\frac{\partial S}{\partial p_j} = 2 \sum_{i=1}^n F_i \omega_i \frac{\partial F_i}{\partial p_j} \quad (8)$$

$$\frac{\partial^2 S}{\partial p_j \partial p_k} = 2 \sum_{i=1}^n \left[\frac{\partial F_i}{\partial p_j} \omega_i \frac{\partial F_i}{\partial p_k} + F_i \omega_i \frac{\partial^2 F_i}{\partial p_j \partial p_k} \right] \quad (9)$$

$$\frac{\partial F_i}{\partial p_j} = \frac{1}{2} (f)^{-1/2} \frac{\partial f_i}{\partial p_j} \quad (10)$$

$$\frac{\partial^2 F_i}{\partial p_j \partial p_k} = -\frac{1}{4} (f)^{-3/2} \frac{\partial f_i}{\partial p_j} \frac{\partial f_i}{\partial p_k} + \frac{1}{2} (f)^{-1/2} \frac{\partial^2 f_i}{\partial p_j \partial p_k} \quad (11)$$

$$\frac{\partial f_i}{\partial p_j} = -2(x_i^e - x) \frac{\partial x}{\partial p_j} - 2(y_i^e - y) \frac{\partial y}{\partial p_j} - 2(z_i^e - z) \frac{\partial z}{\partial p_j} \quad (12)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f_i}{\partial p_j \partial p_k} = & 2 \frac{\partial x}{\partial p_j} \frac{\partial x}{\partial p_k} + 2 \frac{\partial y}{\partial p_j} \frac{\partial y}{\partial p_k} + 2 \frac{\partial z}{\partial p_j} \frac{\partial z}{\partial p_k} \\ & - 2(x_i^e - x) \frac{\partial^2 x}{\partial p_j \partial p_k} - 2(y_i^e - y) \frac{\partial^2 y}{\partial p_j \partial p_k} - 2(z_i^e - z) \frac{\partial^2 z}{\partial p_j \partial p_k} \end{aligned} \quad (13)$$

である．なお， (x, y, z) の一次導関数，二次導関数については，付録 A に示した．

2.3 模型の変形パラメータ算出方法

次に，空力荷重による主翼の変形形状を算出する方法を以下に示す．まず模型座標系 $x = (x, y, z)$ から変形主軸座標系 $\xi = (\xi, \eta, \zeta)$ への座標変換を考える．このときの変換式は以下のように表される．

$$\xi = \mathbf{T}^t (\mathbf{x} - \mathbf{x}_w) \quad (14)$$

$\mathbf{x}_w = (x_w, y_w, z_w)$ は変形則適用開始位置である．また回転行列 \mathbf{T}^t は

$$\mathbf{T}^t = \begin{bmatrix} \cos \Theta \cos \Lambda & \cos \Theta \sin \Lambda & -\sin \Theta \\ \sin \Gamma \sin \Theta \cos \Lambda - \cos \Gamma \sin \Lambda & \sin \Gamma \sin \Theta \sin \Lambda + \cos \Gamma \cos \Lambda & \sin \Gamma \cos \Theta \\ \cos \Gamma \sin \Theta \cos \Lambda + \sin \Gamma \sin \Lambda & \cos \Gamma \sin \Theta \sin \Lambda - \sin \Gamma \cos \Lambda & \cos \Gamma \cos \Theta \end{bmatrix} \quad (15)$$

であり， $(\Gamma, \Theta, \Lambda)$ はそれぞれ翼の上半角，取付角，後退角である．

また，通風時に計測されたマーカ座標値には支持装置のたわみによる変位が含まれているため，前節で求めた移動・回転パラメータを用いて支持装置のたわみによる変位分を考慮して変形主軸座標系へ変換する必要がある．そこでまず模型座標系 $x = (x, y, z)$ から移動後模型座標 $x' = (x', y', z')$ へ座標変換し，さらに移動後模型座標系から変形主軸座標系 $\xi = (\xi, \eta, \zeta)$ へ座標変換する．模型座標系から移動後模型座標系への変換式は，

$$\mathbf{x}' = \mathbf{T}_v^m (\mathbf{x} - \Delta \mathbf{x}) \quad (16)$$

で表される．ここで \mathbf{T}_v^m は変換行列 \mathbf{T}^m の逆行列（転置行列）である．

2.3.1 z 方向の変位のみ考慮する簡易多項式モデル

簡易多項式モデルでは，まず始めに模型に適した変形モデルを考えなければならない．ここでは片持ちりのたわみとねじりを変形モデルとして適用し，変形主軸座標 $\xi = (\xi, \eta, \zeta)$ における ζ 方向変位を多

項式で近似する．本報告では，曲げを二次，捻りを一次を基本とした Z21 モデルおよび，曲げを 4 次，捻りを 4 次で近似した Z44 モデルの 2 種類を検討するが，ここでは曲げを 4 次，捻りを 4 次で近似した Z44 モデルの場合を例に説明する．

変形モデルを適用した際の変形主軸座標系における変形後の模型の位置 (ξ_d, η_d, ζ_d) は以下のように表される．

$$\begin{aligned}\xi_d &= \xi \\ \eta_d &= \eta \\ \zeta_d &= \zeta + \eta^2 o2 + \eta^3 o3 + \eta^4 o4 \\ &\quad + \xi \eta t1 + \xi \eta^2 t2 + \xi \eta^3 t3 + \xi \eta^4 t4\end{aligned}\tag{17}$$

ここで $o2-o4, t1-t4$ は変形パラメータであり，次式で表される残差二乗和が最小となるパラメータ $p = (t1, o2, t2, o3, t3, o4, t4)$ を求めることで，主翼の変形を再現する．なお，Z21 モデルの場合には， $p = (t1, o2)$ となる．

$$S(p) = \sum_{i=1}^n \omega_i F_i^2\tag{18}$$

n はマーカー点数， ω_i は重みを表す．またフィッティング関数 F_i は次式で定義する．

$$F_i = \zeta_{a,i}^e - \zeta_d\tag{19}$$

ここで $\zeta_{a,i}^e$ は変形主軸座標系に変換された通風時のマーカー位置である．移動・回転パラメータの算出方法と同様に最小二乗法を適用して変形パラメータを同定する．Newton 法を適用する際必要となる， F_i の一次導関数および二次導関数を以下に示す．

$$\begin{aligned}\frac{\partial F_i}{\partial p_1} &= \frac{\partial F_i}{\partial (t1)} = -\xi \eta, & \frac{\partial F_i}{\partial p_2} &= \frac{\partial F_i}{\partial (o2)} = -\eta^2, & \frac{\partial F_i}{\partial p_3} &= \frac{\partial F_i}{\partial (t2)} = -\xi \eta^2, & \frac{\partial F_i}{\partial p_4} &= \frac{\partial F_i}{\partial (o3)} = -\eta^3 \\ \frac{\partial F_i}{\partial p_5} &= \frac{\partial F_i}{\partial (t3)} = -\xi \eta^3, & \frac{\partial F_i}{\partial p_6} &= \frac{\partial F_i}{\partial (o4)} = -\eta^4, & \frac{\partial F_i}{\partial p_7} &= \frac{\partial F_i}{\partial (t4)} = -\xi \eta^4 \\ \frac{\partial^2 F_i}{\partial p_j \partial p_k} &= 0 \quad (j, k = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7)\end{aligned}\tag{20}$$

2.3.2 x, y, z 方向の全変位を考慮する改良モデル

ここでは簡易多項式モデルを改良し， x, y, z 方向全ての変位を考慮することを考える．簡易多項式モデルを PSP 画像の模型変形補正に適用した際，結果に大きく影響を及ぼすパラメータは曲げ二次のパラメータ $o2$ ，捻り一次のパラメータ $t1$ および変形開始位置 y_w と報告されている⁴⁾．そこで，ここでは曲げを二次，捻りを一次と仮定する． z 方向変位は上述した簡易多項式モデルを適用する．一方 x, y 方向変位に関しては， x 方向あるいは y 方向の変位を考慮していない場合の近似式と x あるいは y 方向の変位を考慮した場合の近似式との差 $\delta x, \delta y$ をとることで以下のような変形モデルを適用する．

$$\begin{aligned}\xi_d &= \xi + \delta x = \xi + \frac{\zeta_d - \zeta}{\eta} dt1 \\ \eta_d &= \eta + \delta y = \eta + \sqrt{\zeta_d - \zeta} do2 \\ \zeta_d &= \zeta + \eta^2 o2 + \xi \eta t1\end{aligned}\tag{21}$$

ここでは $p = (t1, o2, dt1, do2)$ が変形パラメータであり，残差二乗和を最小にするような各パラメータを求めることで，変形形状を近似する．

$$S(\mathbf{p}) = \sum_{i=1}^n \omega_i F_i^2 \quad (22)$$

また、フィッティング関数 F_i は次式で定義する.

$$F_i = \sqrt{(x_{a,i}^e - \xi_d)^2 + (y_{a,i}^e - \eta_d)^2 + (z_{a,i}^e - \zeta_d)^2} = \sqrt{f_i} \quad (23)$$

なお、Newton 反復法を適用する際に必要となる (ξ_d, η_d, ζ_d) の一次導関数、二次導関数については、付録 B に示した.

2.4 CFD 表面格子修正方法

模型の変形パラメータが求まれば、変形主軸座標系における変形後の位置は式 (17) あるいは式 (21) で定義できるため、CFD 表面格子についても同様に各格子点にこれらの式を当てはめることで表面格子を変形させることが出来る. CFD の表面格子修正の際にも、まず CFD 格子を模型座標系から変形主軸座標系へ変換し、変形主軸座標系において式 (17) あるいは式 (21) を適用し、変形後の格子点座標を求める. その後、変形主軸座標系から模型座標系へ逆変換し、変形を反映した CFD 格子を作成する. なお、ここでは主翼のみの変形を考慮しているため、主翼の表面格子点のみ変形させている.

3 結果および考察

3.1 模型変形計測を反映した表面格子修正

本報告では、標準模型である DLR-F6 模型¹⁰⁾ を用いて本手法を検証する. マーカーを用いたステレオ写真法により計測された模型の変形量¹¹⁾ を元に、上述した手法にて表面格子修正を行う. 胴体および翼上面に設置されたマーカー位置を Fig. 4 に示す. ステレオ写真法は、2 台の高解像度 CCD カメラを用いて模型に貼り付けられたマーカーの三次元位置情報を計測することで、模型の変形量を算出する方法である. 解析対象とした主流条件を Table 1 に示す. 前述した通り、結果に大きく影響を及ぼすパラメータは曲げ二次のパラメータ α_2 、捻り一次のパラメータ β_1 および変形開始位置 y_w と報告されている. そこで、ここでは曲げを二次、捻りを一次を基本とし、簡易多項式モデルを用いた Z21 モデルおよび簡易多項式モデルを改良して x, y, z 方向全変位を考慮した XYZ モデルを使って検証する. また、確認のために簡易多項式モデルを用いて曲げを 4 次、捻りを 4 次で近似したもの (Z44 モデル) についても併せて検討する. また、本計算では、式 (3), (18) および (22) の重みは $\omega_i = 1$ としている.

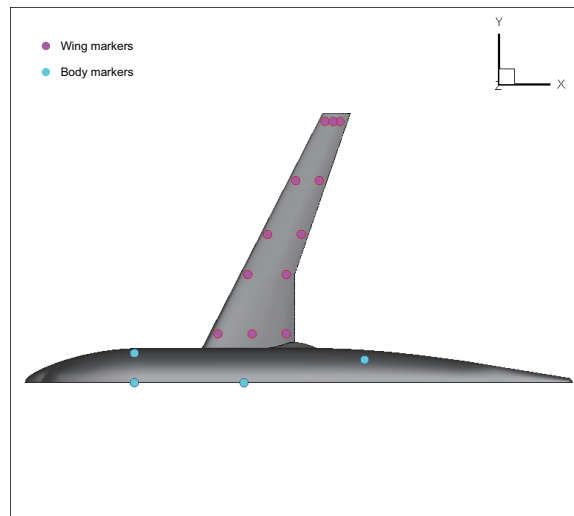


Fig. 4: Schematic illustration of marker positions.

Table 1: Freestream conditions.

Case	Mach Number	Chord Reynolds number	Angle of attack [Deg]	Total pressure [kPa]	Total temperature [K]
1	0.75	1.5×10^6	-3	100	322
2	0.75	1.5×10^6	-2	100	322
3	0.75	1.5×10^6	-1	100	322
4	0.75	1.5×10^6	0	100	322
5	0.75	1.5×10^6	1	100	322

3.1.1 変形主軸設定方法の検討

それぞれの変形モデルの比較を行う前に、変形主軸を設定する際に考慮すべきパラメータである変形モデル適用開始位置 (x_w, y_w, z_w) が結果におよぼす影響を Z21 モデルで検証する。また、検証には Case 5 の主流条件を用いた。ここでは、翼根前縁位置 (Position-1)、最も翼根側に近いマーカーの前縁マーカー位置 (Position-2) および後縁キंक位置前縁 (Position-3) の 3 つの位置で検討した。また、 η 軸は翼前縁の後退角と平行になるよう設定した。

それぞれの変形モデル適用開始位置で本手法を適用した際のマーカーのたわみ量およびねじり量を Fig. 5 および 6 に示す。たわみ量を見ると、後縁キंक位置前縁を変形主軸原点とした場合には、計測データから大きく離れてしまう。また、ねじり量を見ると、翼根前縁位置に主軸原点を設定した場合には過小評価、後縁キंक位置前縁に設定した場合には過大評価している。次に、得られた結果の誤差を Table 2 に示す。ここでは、次式で表されるように、本手法により推算された変形後のマーカー位置 x_m と計測により取得したマーカー位置 x_m^{exp} との距離の L2 ノルムを誤差と定義した。

$$\epsilon = \|x_m - x_m^{exp}\|_2 \equiv \sqrt{(x_m - x_m^{exp})^2 + (y_m - y_m^{exp})^2 + (z_m - z_m^{exp})^2} \quad (24)$$

Table 2 より、最翼根側にある前縁マーカーを変形主軸原点とした場合が、最も誤差が少ないことがわかる。これらの結果に基づいて、以降の計算については変形モデル開始位置を最も翼根にある前縁側のマーカー位置と設定する。今後、さまざまな模型形状に適用することを考えた場合、変形モデル開始位置も変形パラメータとして、他のパラメータと同様に推算する必要があると考えられる。

3.1.2 変形モデルの影響

次に、各変形モデルの妥当性検証を行う。Z21 モデル、XYZ モデル、Z44 モデルの 3 つのモデルを適用して得られた表面格子を初期形状の表面格子と共に Fig. 7 に示す。ここでは見やすさのために変位量を 10 倍に表示している。どのモデルにおいても定性的に妥当な変形形状を示している。変形形状を定量的に評価するために、表面格子修正法により得られたたわみ量およびねじり量のスパン方向分布を、マーカーの計測

Table 2: Error between marker position estimated by deformation models and that measured in wind tunnel test.

	変形モデル適用開始位置	誤差 ϵ (無次元距離)
Position-1	翼根前縁位置	7.245×10^{-4}
Position-2	最翼根側の前縁マーカー位置	6.615×10^{-4}
Position-3	キंक前縁位置	1.130×10^{-3}

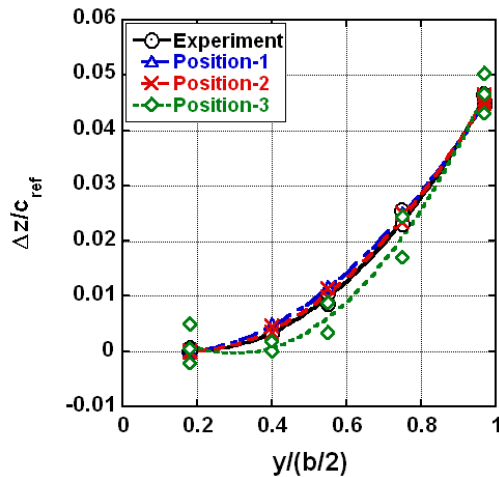


Fig. 5: Obtained wing deflection in deformation coordinates.

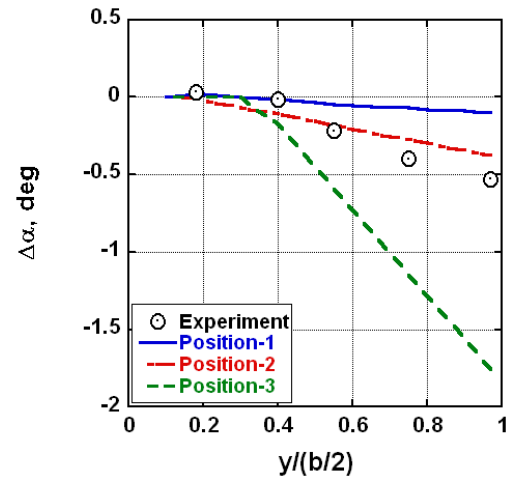


Fig. 6: Obtained wing twist change in deformation coordinates.

結果と共に Fig. 8 および Fig.9 に示す. たわみ量に関しては, どのモデルも計測データを良く再現している. 一方, ねじり量を見ると, Z21 モデルと XYZ モデルの間に翼端で最大で 0.07deg の差が生じている. また, Z44 モデルを見ると, 全てのケースに関して, 計測データを最も良く再現しているが, Case-1 や Case-3 の翼端部分を見ると, 計測データを忠実に再現しようとするためにオーバーシュートしてしまっている部分がある. Z44 モデルは高次にねじり量の分布を再現できるが, 計測誤差などが入った場合にも忠実に再現してしまうため, Z44 モデルを適用する際には, 計測誤差を考慮する必要があると考えられる.

Table 3 に本手法により得られたマーカー変位量と計測により得られたマーカー変位量との誤差を示す. ここでは, 本手法で得られたマーカーの位置 (ねじり量) と計測したマーカー位置 (ねじり量) との差の L2 ノルムを誤差とした. Z21 モデルと XYZ モデルを比較すると, たわみ量の誤差, ねじり量の誤差共に XYZ モデルの方が小さく, x, y, z 全方向の変位を考慮することで, より計測値に近づき, 変形形状をよく再現できることがわかる. Z44 モデルを見ると, たわみ量に関しては Z21 モデルと同程度だが, ねじり量の誤差は最も小さくなっている. しかし, 高次の多項式近似であるが故に計測点位置での誤差が小さくなるように近似されていると考えられるため, 前述したとおり, Z44 モデルを適用する際には誤差を考慮した手法を適用する必要がある.

Table 3: Error between marker position estimated by deformation models and that measured in wind tunnel test.

Case	たわみ量の誤差 ε $\times 10^{-4}$ (無次元距離)			ねじり量の誤差 $\times 10^{-2}$ [deg]		
	Z21-model	XYZ-model	Z44-model	Z21-model	XYZ-model	Z44-model
1	5.00	3.64	4.89	7.70	4.50	3.20
2	4.72	3.93	4.59	9.80	8.00	3.30
3	4.50	3.90	4.28	12.3	1.15	3.00
4	4.54	3.94	4.41	7.70	6.20	3.00
5	6.62	4.84	6.47	9.20	6.70	4.10

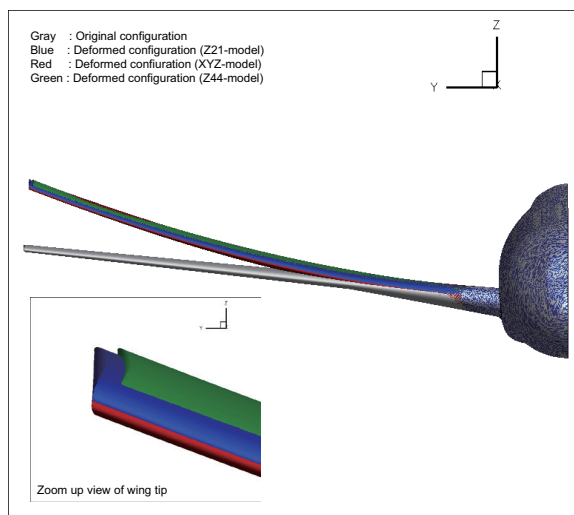


Fig. 7: Obtained wing twist change in deformation coordinates.

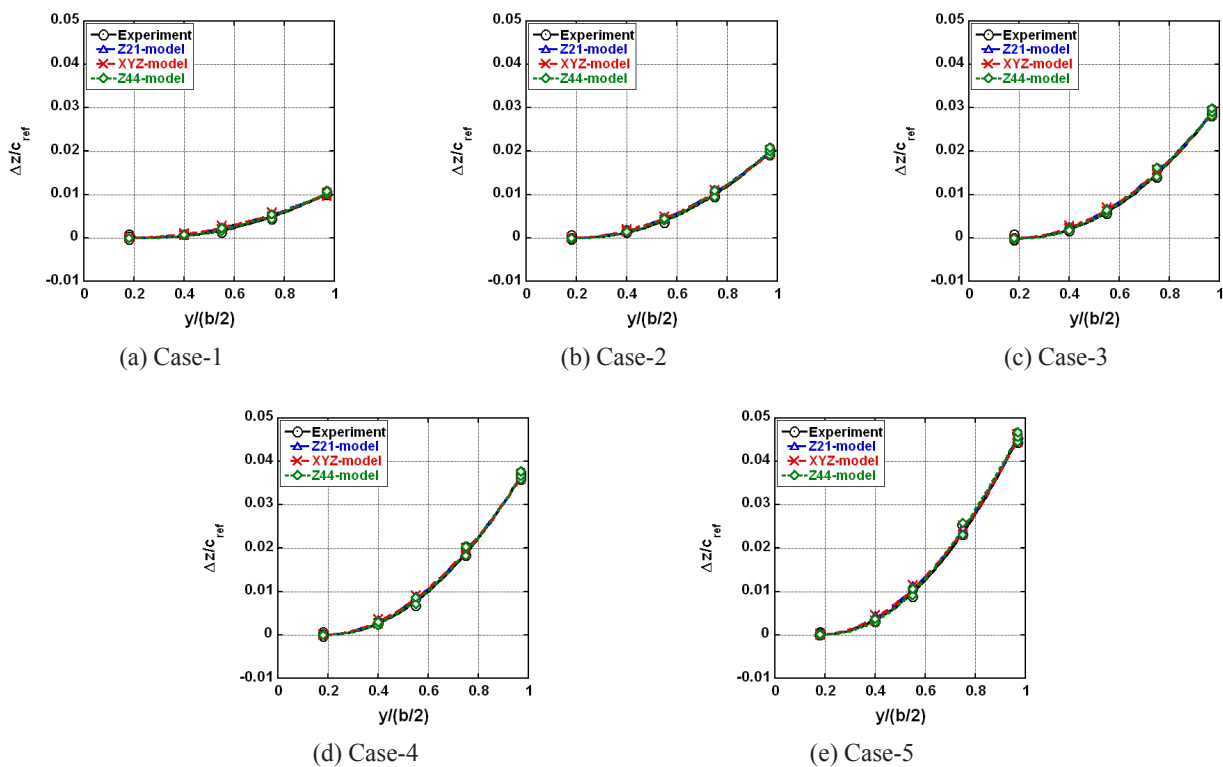


Fig. 8: Obtained wing bending in deformation coordinates.

3.2 模型変形計測を反映した CFD 解析

ここでは、前節で算出した変形後の表面格子を用いて、DLR-F6 模型の RANS 解析を実施する。初期形状および 3 種類の変形モデルを適用した形状それぞれに対して、RANS 解析を行い、実験結果と比較することで、変形による流れ場への影響を検証する。計算には、JAXA で開発された高速 CFD ソルバーである FaSTAR¹²⁾ を用いた。離散化には、セル中心有限体積法を用い、対流流束の計算には HLLW、乱流モデルは

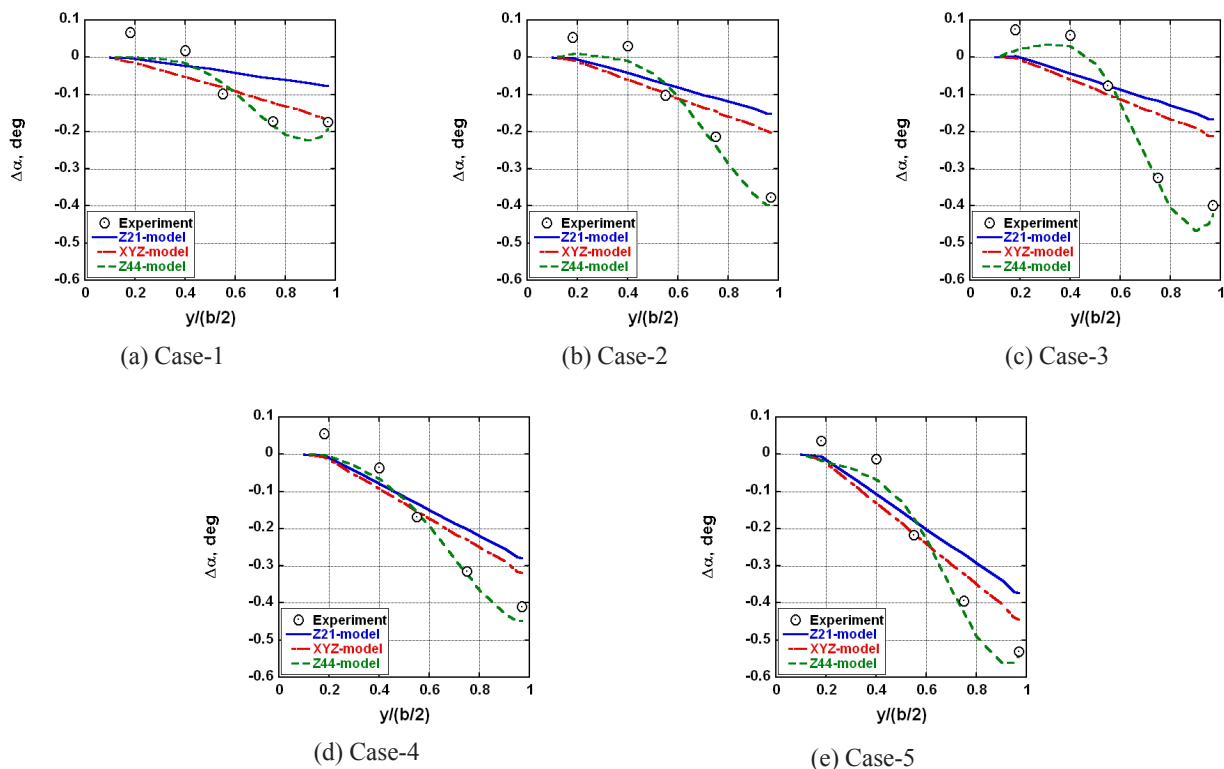


Fig. 9: Obtained wing twist change in deformation coordinates.

Spalart-Allmaras 一方程式モデル，時間発展には LU-SGS 陰解法を適用した．

ここで，変形計測を実施した試験ではラフネスなしの自然遷移で計測されたものであるが，本計算では全面乱流を仮定しているため，CFD 結果との比較検証のために，別の試験で取得した同条件でラフネスありの場合の力および圧力計測結果と比較することとした．ラフネスがある場合とない場合とで，揚力係数の値が変わり，模型の変形量も異なると考えられるが，本報告で用いた迎角 1 度以下の条件下では，ラフネスの有無に関わらず空力係数結果が概ね一致していたため，ラフネスの有無による変形量の差はないものとした．

計算格子は初期形状に対しては JAXA で開発された自動格子生成ソルバー HexaGrid¹³⁾ を用いて作成した．また，変形後の形状の計算格子を初期形状の格子のトポロジーと一致させるために，Surface Influence 法を適用して初期形状の空間格子点を表面格子の変位量を基に修正することで，変形後の形状に対する空間格子を作成した^{14, 15, 16)}．

Fig. 10 に初期形状の表面格子および模型近傍の対称面の格子を示す．六面体セル，ピラミッドセル，プリズムセル，四面体セルの 4 種類のセル形状から成り，セル数は約 850 万，接点数は 732 万点である．また模型表面のセル数は約 22 万である．

まず始めに Table 1 の Case 5 の条件で得られた初期形状に対する模型表面圧力係数分布を Fig. 11 に，また各スパン断面における初期形状および変形形状の圧力係数分布を実験結果と共に Fig.12 に示す．内翼側 $\eta = 0.150$ および $\eta = 0.331$ に関しては，変形が小さいため初期形状に対する分布と変形を考慮した場合の分布とで大きな差はなく，実験値とも概ね良い一致を示している．一方， $\eta = 0.514$ に関しては，計算の方が実験と比べて衝撃波位置が多少後退しているが，変形を考慮することによって衝撃波位置は前方に移動し，実験結果に近づいていることがわかる．また外翼側の $\eta = 0.638$ および $\eta = 0.847$ でも，計算で得られた衝撃波位置が実験よりも後退しているが，変形を考慮することで，大幅に衝撃波位置が前進している．さらに変形を考慮していない初期形状での計算結果では，サクションピークが実験より高くなっているが，変形を考慮することで実験値に近づいていることがわかる．翼端に近づくにつれ衝撃波位置の前方への移動量が大きくなっているが，これは Fig. 9 にあるように，模型変形の影響により翼端に近づくにつれてねじり量が増加

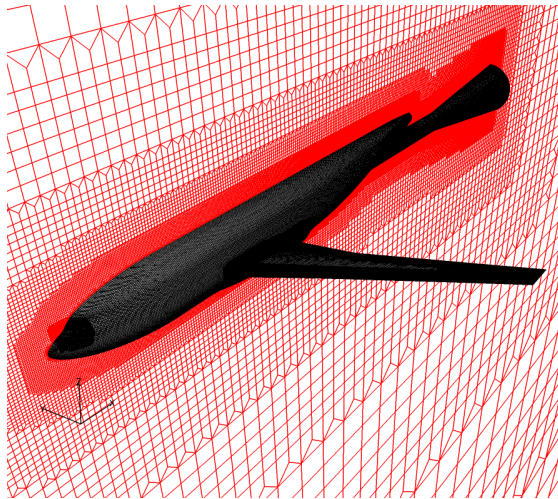


Fig. 10: Computational mesh for RANS simulation over DLR-F6 FX2B wind tunnel model.

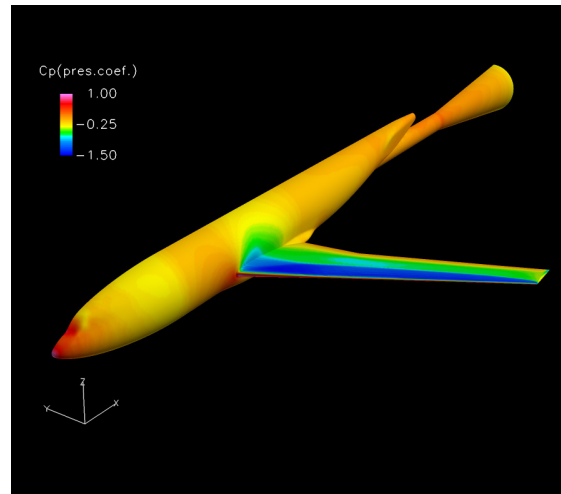


Fig. 11: Obtained pressure coefficient distributions of Case 5 for original (non-deformed) configuration.

し翼の局所迎角が減少するためと考えられる。一方、 $\eta = 0.847$ 断面では、変形モデルの違いにより各モデルで衝撃波位置が多少異なっており Z44 モデルが最も実験に近づいているが、ねじり量を過大評価したことによる影響である可能性も考えられる。

次に計算により得られた空力係数を Table 4 および Fig. 13 に、Drag polar カークを Fig.14 に示す。実験値と計算値を比較すると、CL および CD は実験値よりも大きく、CM に関しては実験値よりも小さく見積もられている。変形を考慮した場合でも、計算結果と実験値との間に差が残るが、これは壁や支持装置の影響、遷移位置の影響によるものと考えられる。変形を考慮していない場合に比べて変形を考慮した場合には、CL は Z21 モデルで 0.0135, XYZ モデルで 0.0173, Z44 モデルで 0.0163 減少した。これは、Fig. 9 に示したように変形によりねじり下げが生じ、局所的な有効迎角が減少したためと考えられる。この CL の変化は CL- α カークの傾きから算出すると迎角 0.1 度程度の減少に相当する。CD は Z21 モデルで 8cnts, XYZ モデルで 11cnts, Z44 モデルで 10cnts 減少した (1cnt=0.0001)。これら CD の減少は、Table 4 に示すように、圧力抵抗の減少によるものである。一方、CM は Z21 モデルで 0.0034, XYZ モデルで 0.0044, Z44 モデルで 0.0057 増加した。また、Fig.14 を見ると、変形を考慮しても、polar カークの形状は変化せず、カーク上に沿って変化していることがわかる。

次に各スパン断面の局所揚力係数と局所コード長の積で表されるスパン方向の局所揚力係数分布を Fig.15 に示す。ここでも変形によるねじり下げの影響で実験値に近づいていることが分かる。また変形の大きい翼端だけでなく、変形量の小さな翼根付近でも揚力の減少が見られるが、これは、翼根付近でも衝撃波位置が多少前方に移動しているためと考えられる。衝撃波位置が前方に移動した理由としては、翼根付近でもねじり下げが生じていることと、外翼側に引きずられて翼根付近でも移動したことが考えられるが、現状ではその切り分けは困難である。

4 結言

模型変形による空力特性への影響を簡単に検証するために、風試模型の変形計測データを反映した CFD 表面格子修正法の検討を行った。通風時の風試模型と同形状の CFD 表面格子を作成するために、Z21 モデル、XYZ モデル、Z44 モデルの 3 種類の多項式モデルを用いたところ、たわみ量に関しては、低次多項式近似であっても x , y , z 全方向の変位を考慮した XYZ モデルを適用することで、誤差を大幅に低減することができ、より正確に形状を再現できた。一方、ねじり量においては、高次多項式近似を用いた Z44 モデルが実験デー

Table 4: Obtained aerodynamic coefficient of Case 5.

	CL	CD	CD_{pres}	CD_{fric}	CM
実験値	0.5545	0.0320	—	—	-0.1111
初期形状	0.5902	0.0356	0.0217	0.0139	-0.1261
Z21	0.5767	0.0348	0.0208	0.0140	-0.1227
XYZ	0.5726	0.0346	0.0206	0.0140	-0.1204
Z44	0.5739	0.0347	0.0207	0.0140	-0.1218

タを最も良く再現できており、このことからねじりについては4次まで考慮する必要があると考えられる。しかし高次多項式を使って分布を近似しているため計測誤差がある場合でも忠実に再現している可能性があり、Z44モデルの有用性を示すためにはさらなる検証が必要である。

次に、修正した変形形状に対してRANS解析を実施し、変形が空力特性へ及ぼす影響を調べた。変形を考慮することにより、衝撃波位置や空力特性に関して変形を考慮しないCFD解析結果よりも風試結果に近づく結果が得られた。このことから、本手法を適用することで、風洞試験により忠実なCFD解析を実施することが可能となった。一方で、3種類の変形モデルの影響を検討したところ、横方向の変位を考慮することによる空力特性での大きな改善は見られなかった。また高次多項式近似モデルを用いた場合には他のモデルよりも実験に近づく結果が得られたことから、ねじり量は高次多項式で近似する必要があると考えられる。しかし高次多項式を用いることでねじり量を過大評価している部分があり、それにより空力特性も過大に変化した可能性も考えられるため、今後は、計測誤差を考慮した検討を進める。

謝辞

簡易多項式モデルを適用するにあたり、JAXA 研究開発本部 風洞技術開発センター栗田充氏に有益な情報を頂きました。ここに感謝の意を表します。

参考文献

- 1) Bushnell D. M., “Scaling: Wind tunnel to flight,” *Annu. Rev. Fluid Mech.*, 38(2006), 111-128.
- 2) “National Transonic Facility,” <http://www.aeronautics.nasa.gov/atp/facilities/ntf/index.html>.
- 3) “European Transonic Windtunnel,” <http://www.etw.de/index.html>.
- 4) Le Sant Y., “A Model Deformation Method Applied to PSP Measurement,” *Proceedings of 20th International Congress on Instrumentation in Aerospace Simulation Facilities*, (2003).
- 5) Burner A. W., Goad W. K., Massey E. A., Goad L. R., Goodliff S. L., and Bissett O. W., “Wing deformation measurements of the DLR-F6 transport configuration in National Transonic Facility,” AIAA paper 2008-6921, (2008).

- 6) Pallek D., Bütetisch K. A., Quest J., and Strudthoff W., “Model deformation measurement in ETW using the Moiré technique,” *Proceedings of 20th International Congress on Instrumentation in Aerospace Simulation Facilities*, (2003).
- 7) Yasue K. and Sawada K., “Static Aeroelasticity Analysis of Wind Tunnel Model Using Discontinuous Galerkin CFD Solver,” AIAA Paper 2009-604, (2009).
- 8) Yasue K. and Sawada K., “Effect of Model Deformation on Aerodynamic Coefficients for AGARD-B Wind Tunnel Model,” *Transactions of the Japan Society for Aeronautical and Space Sciences*, (2011).
- 9) Keye S. and Rudnik R., “Aero-elastic Simulation of DLR’ s F6 Transport Aircraft Configuration and Comparison to Experimental Data,” AIAA Paper 2009-580, (2009).
- 10) “3rd AIAA Drag Prediction Workshop,” <http://aaac.larc.nasa.gov/tsab/cfdlarc/aiaa-dpw/Workshop3/>
- 11) 加藤, 中北, 栗田, 中島, 山谷, “風洞試験におけるマーカーを用いた写真測量法による模型変形量計測,” 第48回飛行機シンポジウム, (2009).
- 12) Hashimoto A., Murakami K. and Aoyama T., “JAXA Digital/Analog Hybrid Wind Tunnel: Development of Digital Wind Tunnel,” *Proceedings of the 2nd Workshop on Integration of EFD and CFD*, JAXA-SP-09-003 (2003).
- 13) Hashimoto A., Murakami K., Aoyama T. and Lahur P., “Lift and Drag Prediction Using Automatic Hexahedra Grid Generation Method,” AIAA Paper 2009-1365, (2009).
- 14) Morton S. A., Melville R. B. and Visbal M. R., “Accuracy and Coupling Issues of Aeroelastic Navier-Stokes Solutions on Deforming Meshes,” *Journal of Aircraft*, 35(1998), 798-805.
- 15) C. B. Allen, “Parallel Universal Approach to Mesh Motion and Application to Rotors in Forward Flight,” *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, 69(2007), 2126-2149.
- 16) 菱田, 橋本, 保江, 村上, “高速CFD空間格子変形法の検討,” 第43回流体力学講演会 / 航空宇宙数値シミュレーション技術シンポジウム 2011., (2011).

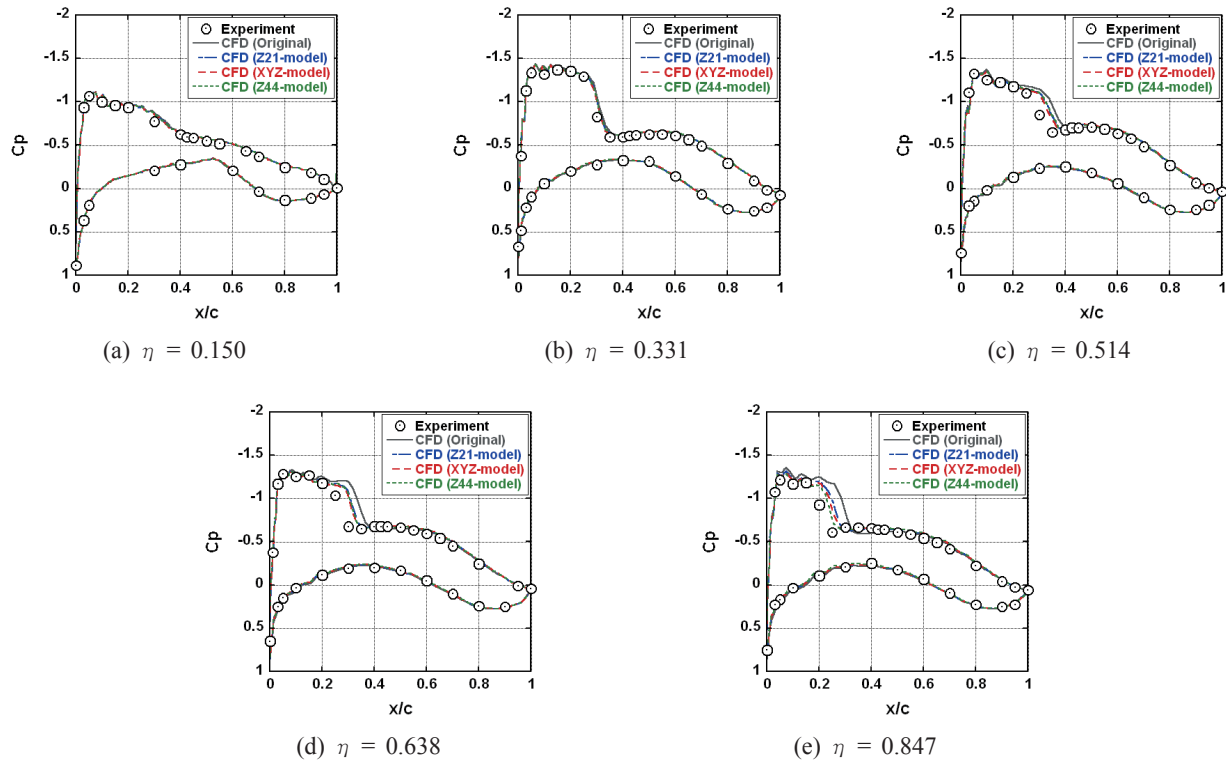


Fig. 12: Obtained pressure coefficient (C_p) profiles of Case 5.

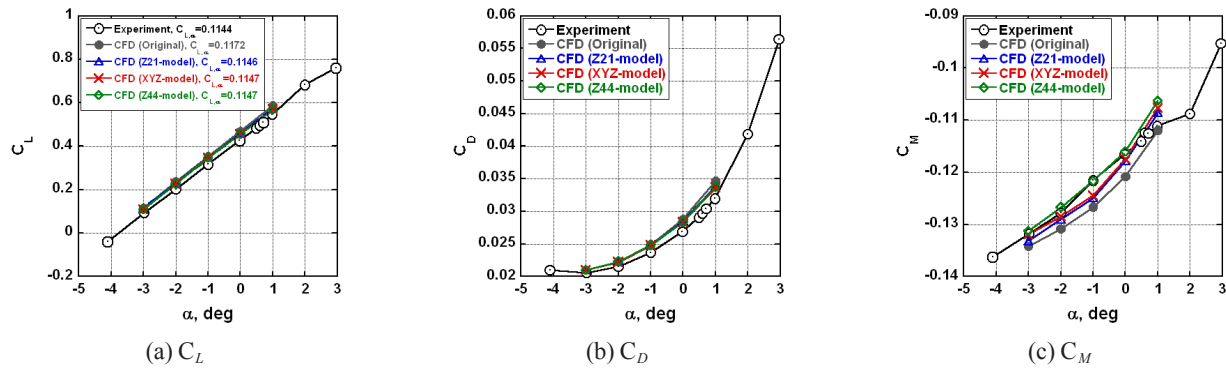


Fig. 13: Obtained aerodynamic coefficients.

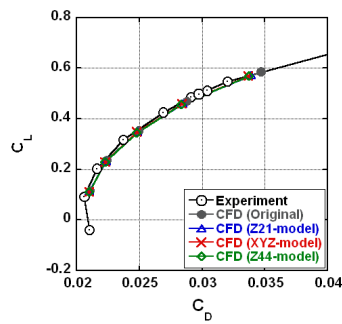


Fig. 14: Obtained drag polar curve.

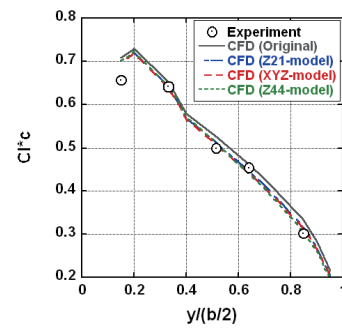


Fig. 15: Spanwise loading profiles of Case 5.

付録 A.

x の一次導関数および二次導関数を以下に示す.

$$\frac{\partial x}{\partial p_j} = (x_0 - x_{rot}) \frac{\partial T_{11}^m}{\partial p_j} + (y_0 - y_{rot}) \frac{\partial T_{12}^m}{\partial p_j} + (z_0 - z_{rot}) \frac{\partial T_{13}^m}{\partial p_j} + \frac{\partial \Delta x}{\partial p_j} \quad (25)$$

$$\frac{\partial y}{\partial p_j} = (x_0 - x_{rot}) \frac{\partial T_{21}^m}{\partial p_j} + (y_0 - y_{rot}) \frac{\partial T_{22}^m}{\partial p_j} + (z_0 - z_{rot}) \frac{\partial T_{23}^m}{\partial p_j} + \frac{\partial \Delta y}{\partial p_j} \quad (26)$$

$$\frac{\partial z}{\partial p_j} = (x_0 - x_{rot}) \frac{\partial T_{31}^m}{\partial p_j} + (y_0 - y_{rot}) \frac{\partial T_{32}^m}{\partial p_j} + (z_0 - z_{rot}) \frac{\partial T_{33}^m}{\partial p_j} + \frac{\partial \Delta z}{\partial p_j} \quad (27)$$

$$\frac{\partial^2 x}{\partial p_j \partial p_k} = (x_0 - x_{rot}) \frac{\partial^2 T_{11}^m}{\partial p_j \partial p_k} + (y_0 - y_{rot}) \frac{\partial^2 T_{12}^m}{\partial p_j \partial p_k} + (z_0 - z_{rot}) \frac{\partial^2 T_{13}^m}{\partial p_j \partial p_k} \quad (28)$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial p_j \partial p_k} = (x_0 - x_{rot}) \frac{\partial^2 T_{21}^m}{\partial p_j \partial p_k} + (y_0 - y_{rot}) \frac{\partial^2 T_{22}^m}{\partial p_j \partial p_k} + (z_0 - z_{rot}) \frac{\partial^2 T_{23}^m}{\partial p_j \partial p_k} \quad (29)$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial p_j \partial p_k} = (x_0 - x_{rot}) \frac{\partial^2 T_{31}^m}{\partial p_j \partial p_k} + (y_0 - y_{rot}) \frac{\partial^2 T_{32}^m}{\partial p_j \partial p_k} + (z_0 - z_{rot}) \frac{\partial^2 T_{33}^m}{\partial p_j \partial p_k} \quad (30)$$

変換行列 \mathbf{T}^m の一次導関数および二次導関数を以下に示す.

$$\frac{\partial \mathbf{T}^m}{\partial p_j} = \begin{bmatrix} \partial T_{11}^m / \partial p_j & \partial T_{12}^m / \partial p_j & \partial T_{13}^m / \partial p_j \\ \partial T_{21}^m / \partial p_j & \partial T_{22}^m / \partial p_j & \partial T_{23}^m / \partial p_j \\ \partial T_{31}^m / \partial p_j & \partial T_{32}^m / \partial p_j & \partial T_{33}^m / \partial p_j \end{bmatrix} \quad (31)$$

$$\frac{\partial \mathbf{T}^m}{\partial p_j} = 0 \quad (j = 1, 2, 3) \quad (32)$$

$$\frac{\partial \mathbf{T}^m}{\partial p_4} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \cos \phi \sin \theta \cos \psi + \sin \phi \sin \psi & \cos \phi \sin \theta \sin \psi - \sin \phi \cos \psi & \cos \phi \cos \theta \\ -\sin \phi \sin \theta \cos \psi + \cos \phi \sin \psi & -\sin \phi \sin \theta \sin \psi - \cos \phi \cos \psi & -\sin \phi \cos \theta \end{bmatrix} \quad (33)$$

$$\frac{\partial \mathbf{T}^m}{\partial p_5} = \begin{bmatrix} -\sin \theta \cos \psi & -\sin \theta \sin \psi & -\cos \theta \\ \sin \phi \cos \theta \cos \psi & \sin \phi \cos \theta \sin \psi & -\sin \phi \sin \theta \\ \cos \phi \cos \theta \cos \psi & \cos \phi \cos \theta \sin \psi & -\cos \phi \sin \theta \end{bmatrix} \quad (34)$$

$$\frac{\partial \mathbf{T}^m}{\partial p_6} = \begin{bmatrix} -\cos \theta \sin \psi & \cos \theta \cos \psi & 0 \\ -\sin \phi \sin \theta \sin \psi + \cos \phi \cos \psi & \sin \phi \sin \theta \cos \psi - \cos \phi \sin \psi & 0 \\ -\cos \phi \sin \theta \sin \psi + \sin \phi \cos \psi & \cos \phi \sin \theta \cos \psi - \sin \phi \sin \psi & 0 \end{bmatrix} \quad (35)$$

$$\frac{\partial^2 \mathbf{T}^m}{\partial p_j \partial p_k} = \begin{bmatrix} \partial T_{11}^m / \partial p_j \partial p_k & \partial T_{12}^m / \partial p_j \partial p_k & \partial T_{13}^m / \partial p_j \partial p_k \\ \partial T_{21}^m / \partial p_j \partial p_k & \partial T_{22}^m / \partial p_j \partial p_k & \partial T_{23}^m / \partial p_j \partial p_k \\ \partial T_{31}^m / \partial p_j \partial p_k & \partial T_{32}^m / \partial p_j \partial p_k & \partial T_{33}^m / \partial p_j \partial p_k \end{bmatrix} \quad (36)$$

$$\frac{\partial^2 \mathbf{T}^m}{\partial p_j \partial p_k} = 0 \quad (j = 1, 2, 3 \text{ or } k = 1, 2, 3) \quad (37)$$

$$\frac{\partial^2 \mathbf{T}^m}{\partial p_4 \partial p_4} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -\sin \phi \sin \theta \cos \psi + \cos \phi \sin \psi & -\sin \phi \sin \theta \sin \psi - \cos \phi \cos \psi & -\sin \phi \cos \theta \\ -\cos \phi \sin \theta \cos \psi - \sin \phi \sin \psi & -\cos \phi \sin \theta \sin \psi + \sin \phi \cos \psi & -\cos \phi \cos \theta \end{bmatrix} \quad (38)$$

$$\frac{\partial^2 \mathbf{T}^m}{\partial p_4 \partial p_5} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \cos \phi \cos \theta \cos \psi & \cos \phi \cos \theta \sin \psi & -\cos \phi \sin \theta \\ -\sin \phi \cos \theta \cos \psi & -\sin \phi \cos \theta \sin \psi & \sin \phi \sin \theta \end{bmatrix} \quad (39)$$

$$\frac{\partial^2 \mathbf{T}^m}{\partial p_4 \partial p_6} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -\cos \phi \sin \theta \sin \psi - \sin \phi \cos \psi & \cos \phi \sin \theta \cos \psi + \sin \phi \sin \psi & 0 \\ \sin \phi \sin \theta \sin \psi + \cos \phi \cos \psi & -\sin \phi \sin \theta \cos \psi - \cos \phi \sin \psi & 0 \end{bmatrix} \quad (40)$$

$$\frac{\partial^2 \mathbf{T}^m}{\partial p_5 \partial p_4} = \frac{\partial^2 \mathbf{T}^m}{\partial p_4 \partial p_5} \quad (41)$$

$$\frac{\partial^2 \mathbf{T}^m}{\partial p_5 \partial p_5} = \begin{bmatrix} -\cos \theta \cos \psi & -\cos \theta \sin \psi & \sin \theta \\ -\sin \phi \sin \theta \cos \psi & -\sin \phi \sin \theta \sin \psi & \sin \phi \cos \theta \\ -\cos \phi \sin \theta \cos \psi & -\cos \phi \sin \theta \sin \psi & -\cos \phi \cos \theta \end{bmatrix} \quad (42)$$

$$\frac{\partial^2 \mathbf{T}^m}{\partial p_5 \partial p_6} = \begin{bmatrix} \sin \theta \sin \psi & -\sin \theta \cos \psi & 0 \\ -\sin \phi \cos \theta \sin \psi & \sin \phi \cos \theta \cos \psi & 0 \\ -\cos \phi \cos \theta \sin \psi & \cos \phi \cos \theta \cos \psi & 0 \end{bmatrix} \quad (43)$$

$$\frac{\partial^2 \mathbf{T}^m}{\partial p_6 \partial p_4} = \frac{\partial^2 \mathbf{T}^m}{\partial p_4 \partial p_6} \quad (44)$$

$$\frac{\partial^2 \mathbf{T}^m}{\partial p_6 \partial p_5} = \frac{\partial^2 \mathbf{T}^m}{\partial p_5 \partial p_6} \quad (45)$$

$$\frac{\partial^2 \mathbf{T}^m}{\partial p_6 \partial p_6} = \begin{bmatrix} -\cos \theta \cos \psi & -\cos \theta \sin \psi & 0 \\ -\sin \phi \sin \theta \cos \psi - \cos \phi \sin \psi & -\sin \phi \sin \theta \sin \psi - \cos \phi \cos \psi & 0 \\ -\cos \phi \sin \theta \cos \psi - \sin \phi \sin \psi & -\cos \phi \sin \theta \sin \psi - \sin \phi \cos \psi & 0 \end{bmatrix} \quad (46)$$

付録 B.

ξ_d の一次導関数および二次導関数は以下のようになる.

$$\frac{\partial \xi_d}{\partial p_1} = \xi dt1, \frac{\partial \xi_d}{\partial p_2} = \eta dt1, \frac{\partial \xi_d}{\partial p_3} = \xi t1 + \eta o2, \frac{\partial \xi_d}{\partial p_4} = 0 \quad (47)$$

$$\frac{\partial \eta_d}{\partial p_1} = \frac{1}{2} \xi \eta (\xi \eta t1 + \eta^2 o2)^{-1/2} do2, \frac{\partial \eta_d}{\partial p_2} = \frac{1}{2} \eta^2 (\xi \eta t1 + \eta^2 o2)^{-1/2} do2, \\ \frac{\partial \eta_d}{\partial p_3} = 0, \frac{\partial \eta_d}{\partial p_4} = (\xi \eta t1 + \eta^2 o2)^{1/2} \quad (48)$$

$$\frac{\partial \zeta_d}{\partial p_1} = \xi \eta, \frac{\partial \zeta_d}{\partial p_2} = \eta^2, \frac{\partial \zeta_d}{\partial p_3} = 0, \frac{\partial \zeta_d}{\partial p_4} = 0 \quad (49)$$

$$\frac{\partial^2 \xi_d}{\partial p_1 \partial p_3} = \xi, \frac{\partial^2 \xi_d}{\partial p_2 \partial p_3} = \eta, \frac{\partial^2 \xi_d}{\partial p_3 \partial p_1} = \xi, \frac{\partial^2 \xi_d}{\partial p_3 \partial p_2} = \eta, \\ \frac{\partial^2 \xi_d}{\partial p_j \partial p_k} = 0, \quad (i, j = \text{上式以外}) \quad (50)$$

$$\frac{\partial^2 \eta_d}{\partial p_1 \partial p_1} = -\frac{1}{4} \xi^2 \eta^2 (\xi \eta t1 + \eta^2 o2)^{-3/2} do2, \frac{\partial^2 \eta_d}{\partial p_1 \partial p_2} = -\frac{1}{4} \xi \eta^3 (\xi \eta t1 + \eta^2 o2)^{-3/2} do2,$$

$$\frac{\partial^2 \eta_d}{\partial p_1 \partial p_3} = 0, \frac{\partial^2 \eta_d}{\partial p_1 \partial p_4} = \frac{1}{2} \xi \eta (\xi \eta t1 + \eta^2 o2)^{-1/2},$$

$$\frac{\partial^2 \eta_d}{\partial p_2 \partial p_1} = -\frac{1}{4} \xi \eta^3 (\xi \eta t1 + \eta^2 o2)^{-3/2} do2, \frac{\partial^2 \eta_d}{\partial p_2 \partial p_2} = -\frac{1}{4} \eta^4 (\xi \eta t1 + \eta^2 o2)^{-3/2} do2,$$

$$\frac{\partial^2 \eta_d}{\partial p_2 \partial p_3} = 0, \frac{\partial^2 \eta_d}{\partial p_2 \partial p_4} = \frac{1}{2} \eta^2 (\xi \eta t1 + \eta^2 o2)^{-1/2},$$

$$\frac{\partial^2 \eta_d}{\partial p_3 \partial p_k} = 0, \quad (k = 1, 2, 3, 4) \frac{\partial^2 \eta_d}{\partial p_4 \partial p_1} = \frac{1}{2} \xi \eta (\xi \eta t1 + \eta^2 o2)^{-1/2},$$

$$\frac{\partial^2 \eta_d}{\partial p_4 \partial p_2} = \frac{1}{2} \eta^2 (\xi \eta t1 + \eta^2 o2)^{-1/2}, \frac{\partial^2 \eta_d}{\partial p_4 \partial p_3} = 0,$$

$$\frac{\partial^2 \eta_d}{\partial p_4 \partial p_4} = 0 \quad (51)$$

$$\frac{\partial^2 \zeta_d}{\partial p_j \partial p_k} = 0 \quad (j, k = 1, 2, 3, 4) \quad (52)$$

