

宇宙航空研究開発機構研究開発報告

JAXA Research and Development Report

太陽－地球系L2点周りのハロー基準軌道の設計

歌島 昌由

2005年11月

宇宙航空研究開発機構
Japan Aerospace Exploration Agency

宇宙航空研究開発機構研究開発報告
JAXA Research and Development Report

太陽-地球系L2点周りのハロー基準軌道の設計

Design of Reference Halo Trajectories
around L2 Point in the Sun-Earth System

歌島 昌由

Masayoshi UTASHIMA

システムエンジニアリング推進室
ミッションデザイン支援グループ
Mission Design Support Group
Systems Engineering Office

2005年11月
November 2005

宇宙航空研究開発機構
Japan Aerospace Exploration Agency

目 次

1. 序論.....	4
2. 力学モデルと数値積分誤差.....	6
2.1 積分座標系と表示座標系	6
2.2 数値積分誤差.....	7
3. ハロー初期軌道の作成	8
3.1 ハロー初期軌道の作成法	8
3.2 A_y , A_z の関係と投入制御量	13
4. SQP 法によるハロー基準軌道の設計	14
4.1 定式化 1	14
4.2 月潮汐力も考慮した場合の定式化 1 の解.....	15
4.3 gap を改善するための定式化 1a とその結果	16
4.4 色々な A_z のハロー基準軌道の設計.....	20
5. 最小二乗最小ノルム解による gap の改善.....	38
5.1 最小二乗最小ノルム解について	38
5.2 gap 低減ソフト GDP の作成	39
5.3 GDP による gap 低減	39
6. 結論.....	44
7. 参考文献	44

太陽-地球系 L2 点周りのハロー基準軌道の設計*

歌 島 昌 由^{*1}

Design of Reference Halo Trajectories around L2 Point in the Sun-Earth System

Masayoshi UTASHIMA^{*1}

ABSTRACT

Lagrange Point Missions in the world

The launch of NASA's International Sun-Earth Explorer-3 (ISEE-3) in 1978 has opened a new world of space missions which utilize the Lagrange points. ISEE-3 was injected into a halo orbit around the L1 point in the Sun-Earth system. The L1 point in the Sun-Earth system has been utilized primarily for observing the Sun, and the Solar Heliospheric Observatory (SOHO) which was a joint ESA-NASA mission and launched in 1995 has been observing the Sun from a halo orbit around the L1 point.

For the L2 point in the Sun-Earth system, NASA's Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP) which was launched in 2001 is the first mission. Since the L2 point in the Sun-Earth system is an adequate position for astronomical observation, several astronomical satellites such as Herschel (ESA, planned to be launched in 2007), Planck (ESA, planned to be launched with Herschel), JWST (NASA, planned to be launched in 2011), and GAIA (ESA, planned to be launched in 2011) are planned to be launched to the L2 point.

Future Plan of Japan

Several astronomical satellites to be located at the L2 point in the Sun-Earth system are being studied in Japan. They are such as the Space Infrared Telescope for Cosmology and Astrophysics (SPICA) and the Japan Astrometry Satellite Mission for Infrared Exploration (JASMINE), and the Japanese Terrestrial Planet Finder (JTPF). JASMINE is a survey-observation mission, and a Lissajous orbit may be appropriate for it. SPICA and JTPF are point-observation missions, and halo orbits might be suitable for them.

In the JAXA Vision – JAXA 2025 – announced in March of 2005, the following statement is included ; “JAXA envisions the use in the future of the Lagrange point of the Sun-Earth system as a new locale of human activities reaching further out into the solar system. JAXA's naming of this vision is the Deep Space Harbor concept, which can also be referred to as the Gateway to Space concept.”

Method of Lagrange Orbit Maintenance

Since orbits around the L2 point in the Sun-Earth system are unstable ones with a divergence time constant of about 23 days, accurate orbital maintenance maneuvers at a few month intervals are necessary. If an attitude subsystem does not cause large disturbances, however, the orbits can be maintained with a yearly ΔV of about 1 m/s

* 平成 17 年 11 月 17 日受付 (received 17 November, 2005)

^{*1} システムズエンジニアリング推進室 ミッションデザイン支援グループ (Mission Design Support Group, Systems Engineering Office)

based on orbit determination errors and maneuver errors. In order to perform orbital maintenance, a reference trajectory with zero ΔV is designed in advance under a precise model of perturbations. Orbital maintenance maneuvers are then performed at intervals of a few months such that the reference orbit is followed.

Method of Design of Reference Orbits in United States and Europe

In the United States and Europe, a zero ΔV reference trajectory is designed by numerically obtaining a solution with the matching conditions of positions and velocities between half-period orbits from an initial trajectory derived by a third- or higher-order analytical solution of the circular restricted three-body problem. This method was first applied to SOHO.

Method of Design of Reference Halo Orbits in This Report

The method above has a problem in that higher-order analytical solutions are required. This report presents a new method in which the Sequential Quadratic Programming (SQP) method is applied and the higher-order analytical solutions are not necessary. We used an elliptical restricted four-body problem, which means the elliptical restricted three-body problem plus lunar tidal force. Other perturbations include the solar radiation pressure and planetary tidal forces. Since the solar radiation pressure causes an almost constant acceleration and the planetary tidal forces are small, however, the new method presented in this report could be applied to a real solar system model.

This report is the halo orbit version of the “Design of Reference Lissajous Trajectories around L2 Point in the Sun-Earth System” published in February of 2005.

Keywords: Halo Orbit, Reference Trajectory, Lagrange Point, L2 Point, Sequential Quadratic Programming Method, Astronomical Satellite, Lunar Tidal Force, Least Squares Least Norm Solution, Reduced Newton Method

要 約

世界のラグランジュ点ミッションについて

1978年8月打上げのNASAのISEE-3 (International Sun-Earth Explorer-3)により、ラグランジュ点を利用する新しいミッションの世界が開かれた。ISEE-3は太陽-地球系L1点のハロー軌道に投入された。太陽-地球系L1点は主に太陽観測に利用され、1995年12月に打ち上げられたESA/NASA共同ミッションのSOHO (Solar Heliospheric Observatory)が現在もハロー軌道から太陽観測を続けている。

太陽-地球系のL2点においては、2001年6月に打ち上げられたNASAのWMAP (Wilkinson Microwave Anisotropy Probe)が最初のミッションである。太陽-地球系のL2点は、その位置の特性から天文衛星に適した場所であり、今後もHerschel (ESA, 2007年打上げ予定), Planck (ESA, Herschelと相乗り打上げ), JWST (NASA, 2011年打上げ予定), GAIA (ESA, 2011年打上げ予定)などの天文衛星の打上げが計画されている。

日本の将来計画

日本においても、太陽-地球系L2点から観測する幾つかの天文衛星の検討が行なわれている。赤外線天文衛星SPICA (Space Infrared Telescope for Cosmology and Astrophysics), 高精度位置天文観測衛星JASMINE (Japan Astrometry Satellite Mission for INfrared Exploration), 太陽系外地球型惑星探査衛星JTPF (Japanese Terrestrial Planet Finder)などである。JASMINEはサーベイ観測型ミッションであり、サイズの小さいリサージュ軌道が適しているが、SPICA, JTPFなどはポイント観測型ミッションであり、どちらかと言うとサイズの大きいハロー軌道が適している。

2005 年 3 月に発表された JAXA 長期ビジョン - JAXA 2025 - には、『月や地球重力圏界(ラグランジュ点)を太陽系に広げる人類活動のための新しい場として活用する「深宇宙港構想」の実現をめざす。』という記述が盛り込まれている。

ラグランジュ点軌道の保持の方法

太陽-地球系 L1、L2 点周りの軌道は、発散時定数が約 23 日の不安定軌道であるため、少なくとも数ヶ月間隔の精密な軌道保持制御が必須である。しかしながら、姿勢制御系などからの大きな外乱がなければ、年間 1m/s 程度の ΔV で軌道保持できる。これを実現するため、正確な摂動モデルの下で ΔV ゼロの基準軌道を前もって設計しておき、それに追従する様に数ヶ月間隔で保持制御が行なわれている。

欧米での基準軌道の設計法

欧米では円制限三体問題の 3 次以上の解析解を求め、それを初期軌道として、各半周軌道の位置・速度の matching 条件を満たす解を数値的に求める事で、 ΔV ゼロの基準軌道を設計している。この方式は SOHO に対して初めて適用された。

本報告のハロー基準軌道の設計法

上記の欧米の方法は高次解析解を必要とする難点があるため、本報告では、非線型計画問題の解法の一つである逐次 2 次計画法 (SQP 法; Sequential Quadratic Programming)を使い、高次解析解を求める事なく、 ΔV ゼロのハロー基準軌道を設計する方法を示す。摂動としては、地球公転軌道の離心率の影響と月潮汐力を考慮した。この他の摂動として、太陽輻射圧と惑星潮汐力があるが、輻射圧はほぼ一定の加速度であり惑星潮汐力は小さいので、本報告の手法は実際の太陽系モデルにも適用できると考えられる。

なお、本報告は、2005 年 2 月に発行された『太陽-地球系 L2 点周りのリサージュ基準軌道の設計』のハロー軌道版である。

和文キーワード: ハロー軌道、基準軌道、ラグランジュ点、L2 点、逐次 2 次計画法、天文観測衛星、月潮汐力、最小二乗最小ノルム解、減速ニュートン法

1. 序論

1978年8月打上げのNASAのISEE-3 (International Sun-Earth Explorer-3)により、ラグランジュ点を利用する新しいミッションの世界が開かれた。ISEE-3は太陽-地球系L1点のハロー軌道に投入された。太陽-地球系L1点は主に太陽観測に利用され、1995年12月に打ち上げられたESA/NASA共同ミッションのSOHO (Solar Heliospheric Observatory)が現在もハロー軌道から太陽観測を続けている。

太陽-地球系のL2点においては、2001年6月に打ち上げられたNASAのWMAP (Wilkinson Microwave Anisotropy Probe)が最初のミッションである。太陽-地球系のL2点は、その位置の特性から天文観測に適した場所であり、今後もHerschel (ESA, 2007年打上げ予定), Planck (ESA, Herschelと相乗り打上げ), JWST (NASA, 2011年打上げ予定), GAIA (ESA, 2011年打上げ予定)などの天文衛星の打上げが計画されている。

日本においても、太陽-地球系L2点から観測する幾つかの天文衛星の検討が行なわれている。赤外線天文衛星SPICA¹⁾ (Space Infrared Telescope for Cosmology and Astrophysics), 高精度位置天文観測衛星JASMINE²⁾ (Japan Astrometry Satellite Mission for INfrared Exploration), 太陽系外地球型惑星探査衛星JTPF³⁾ (Japanese Terrestrial Planet Finder)などである。

2005年3月に発表されたJAXA長期ビジョン-JAXA 2025-には、『月や地球重力圏界(ラグランジュ点)を太陽系に広がる人類活動のための新しい場として活用する「深宇宙港構想」の実現をめざす。』という記述も盛り込まれている。

L1, L2点ミッションでは、大きく分けてハロー軌道とリサージュ軌道のどちらを採用するかを考える必要がある。L1, L2点は不安定平衡点であり、ハロー軌道とリサージュ軌道は共にこれらの点を回る軌道である⁴⁾。図1-1に黄道面内に投影したtrajectoryを、図1-2に黄道面に垂直な面に投影したtrajectoryを、模式的に示す。ハロー軌道やリサージュ軌道のL1, L2点周りの周期は約半年である。

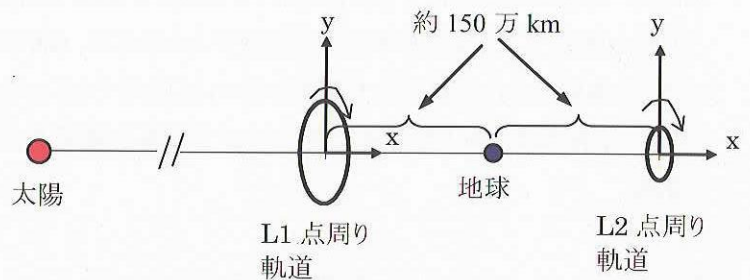


図1-1 L1, L2点周りのハロー軌道とリサージュ軌道
(黄道面内への投影)

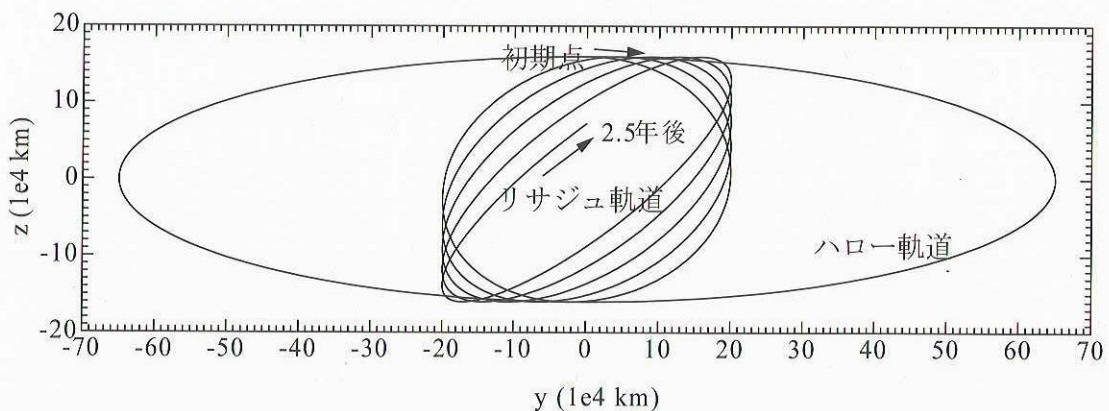


図1-2 L1, L2点周りのハロー軌道とリサージュ軌道(黄道面に垂直な面内)

図 1-1、1-2 の y 方向半径 A_y を単にサイズという事が多いが、サイズが約 65 万 km より小さいと、 xy 面内運動と z 方向運動の周期が異なり、リサージュ軌道となり、それより大きいと xy 面内運動と z 方向運動の周期を一致させる事ができ、ハロー軌道が実現できる⁴⁾。

ハロー軌道とリサージュ軌道の長所・短所などを比較すると、表 1-1 のようになる。本報告ではハロー軌道を対象とする。リサージュ基準軌道の設計については、文献 5)を参照。

表 1-1 ハロー軌道とリサージュ軌道の比較

	長所	短所	備考
ハロー軌道	投入 $\Delta V^{*1)}$ が小さい。	宇宙機位置の変動範囲が広い。 高利得アンテナを固定にできず駆動しなければならない可能性がある。	Hubble 宇宙望遠鏡のようなポインティング観測ミッションに適する。
リサージュ軌道	宇宙機位置の変動範囲が狭い。 高利得アンテナを宇宙機に固定できる可能性がある。	投入 $\Delta V^{*1)}$ が大きい、月 swingby を使えば小さくできる。	WMAP や JASMINE のようなサーベイ観測ミッションに適する。

*1) L1, L2 点付近に到着した時に必要な ΔV 。

太陽-地球系 L1, L2 点周りの軌道は、発散時定数が約 23 日の不安定軌道であるため、数ヶ月間隔の精密な軌道保持制御が必須であるが、軌道決定誤差や軌道制御誤差があっても、姿勢系からの大きな外乱がなければ、年間 1m/s 程度の ΔV で軌道保持できる⁶⁾。これらの軌道保持は、正確な摂動モデルの下で ΔV ゼロで構築できる基準軌道を初めに作成しておき、それを実現する様に数ヶ月間隔で保持制御を行なう事で実現される^{7, 8, 9)}。欧米では制限三体問題の高次(3 次以上)の解析解を求め(月・惑星の影響も考慮している場合あり)、それを初期軌道として、各半周軌道の位置・速度の matching 条件を満たす解を数値的に求める事で、 ΔV ゼロの基準軌道を作成している。高次の解析解を得る際は、Lindstedt-Poincare 法が用いられている¹⁰⁾。上記の方式は SOHO に対して初めて適用され、1998 年に姿勢異常が発生するまでの約 2 年間では年間 1.7m/s の ΔV で保持されている¹¹⁾。因みに ISEE-3 では、上記の方式はまだ採用されてなく、年間 10m/s 程度の保持制御量を必要とした¹²⁾。

上記の欧米の方法は高次解析解を必要とする難点があるため、本報告では、文献 5)と同様に、非線型計画法の解法の一つである SQP (Sequential Quadratic Programming)法¹³⁾を使い、高次解析解を求める事なく、 ΔV ゼロのハロー基準軌道を設計する事を考える。摂動としては、地球公転軌道の離心率の影響と月潮汐力を考慮する。この他の摂動として、太陽輻射圧と惑星潮汐力があるが、輻射圧はほぼ一定の加速度を生じるのみであり惑星潮汐力も小さいので、本報告では無視する。本報告の手法によりハロー基準軌道の設計が可能となれば、実際の太陽系モデルに適用できると考えられる。

2. 力学モデルと数値積分誤差

本章では、2.1 節で、宇宙機軌道を数値積分する時に使用する座標系、積分された trajectory を表示する座標系などを述べ、2.2 節で、使用する数値積分法(Runke-Kutta-Fehlberg 法、以下 RKF 法と呼ぶ)¹⁴⁾の誤差について述べる。

2.1 積分座標系と表示座標系

本報告では、地球、太陽、月が存在する空間における宇宙機の運動を数値的に扱い、地球の公転軌道の離心率も考慮できる事とする。つまり、力学モデルとして楕円制限 4 体問題を使用する。太陽輻射圧は無視する。地球軌道と月軌道は、簡単のために、時間の 2 次までの多項式で近似した平均ケプラー軌道要素¹⁵⁾を使用する。

運動方程式の数値積分に使用する積分座標系と宇宙機の trajectory 表示等に用いる表示座標系を図 2-1 に示す。図 2-1 の x_I - y_I - z_I 系(地球中心黄道面座標系)が積分座標系であり、 x_I 軸が春分点方向である。L2 点中心の x - y - z 系(L2 点中心回転系)が表示座標系である。

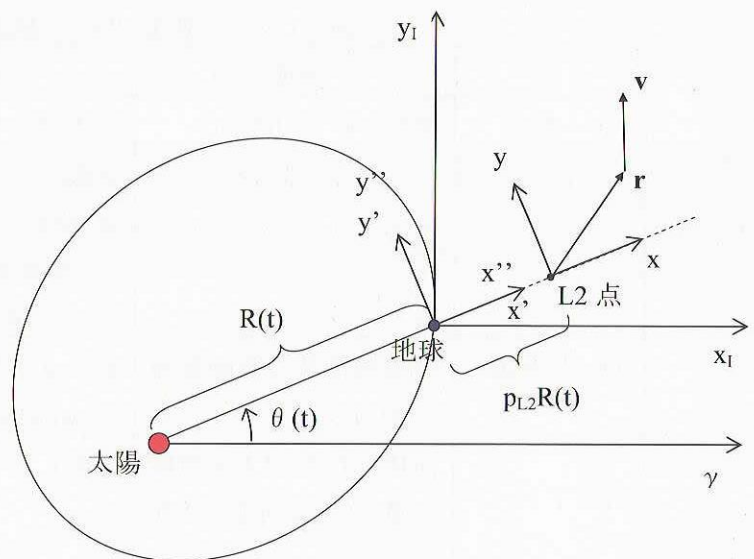


図 2-1 L2 点中心回転系と地球中心黄道面座標系

L2 点中心回転座標系と地球中心黄道面座標系の間の座標変換

地球公転軌道の離心率も考慮すると、L2 点中心回転座標系は単純な回転座標系ではなく、太陽-地球ライン方向への並進運動も伴うため、ここに簡単に説明する。第二天体(地球)の軌道が離心率を持つ場合の制限三体問題は楕円制限三体問題と呼ばれ、文献 16)に詳細な記述がある。その中心部分を文献 17)に解説している。結論は、第一天体(太陽)から見た第二天体(地球)の瞬時の半径 r で無次元化した座標系で考えれば、円軌道の場合の各ラグランジュ点の位置がそのまま使えるという事である。

以下に記す 3 つの変換により、L2 点中心回転系(x - y - z 系)から地球中心黄道面座標系(x_I - y_I - z_I 系)に変換する。

[変換 1](x - y - z 系から x' - y' - z' 系)

x' - y' - z' 系は地球中心の回転系である。

L2 点は、太陽に対して、 $(1 + p_{L2})R$ の半径方向速度を持つ(注 1 参照)。 p_{L2} は 5 次方程式を解いて得られる定数である⁴⁾。従って、次式で変換される。

$$\mathbf{r}' = \mathbf{r} + \begin{pmatrix} p_{L2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \mathbf{R} \quad (2-1)$$

$$\mathbf{v}' = \mathbf{v} + \begin{pmatrix} p_{L2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \dot{\mathbf{R}} \quad (2-2)$$

(注 1)楕円制限三体問題の議論より、太陽-L2 点距離は、常に太陽-地球間距離の $1+p_{L2}$ 倍である。従って、L2 点の半径方向速度は地球のその $1+p_{L2}$ 倍となる。

[変換 2](x'-y'-z'系から x''-y''-z''系)

x''-y''-z''系は回転系 x'-y'-z'系の時刻 t における回転を止めた地球中心慣性系である。次式で変換される。

$$\mathbf{r}'' = \mathbf{r}' \quad (2-3)$$

$$\mathbf{v}'' = \mathbf{v}' + \dot{\boldsymbol{\theta}} \times \mathbf{r}' \quad (2-4)$$

θ の定義は図 2-1 を参照。

$$\dot{\boldsymbol{\theta}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta} \end{pmatrix}$$

[変換 3](x''-y''-z''系から x_I-y_I-z_I系)

これは慣性系同士の変換であり、次式で変換される。

$$\mathbf{r}_I = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{r}'' \quad (2-5)$$

$$\mathbf{v}_I = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{v}'' \quad (2-6)$$

地球中心黄道面座標系(x_I-y_I-z_I系)から L2 点中心回転系(x-y-z系)への変換は、逆に、変換 3、変換 2、変換 1 の順に行なえば良い。

2.2 数値積分誤差

ここで、使用した数値積分法(RKF 法)の積分誤差について記す。これは、4 次と 5 次の Runge-Kutta 法による数値積分の差から積分誤差を評価し、指定した局所許容誤差(ERRLOC)に収まる積分刻みを自動的に計算して積分を継続する方法である。初期時刻を 2004 年 3 月 23 日 0 時 UT とし、位置・速度の初期条件を L2 点中心回転系にて($x_0 = -8.5$ 万 km, $y_0 = 0$, $z_0 = 16$ 万 km, $u_0 = 0$, $v_0 = 90.95$ m/s, $w_0 = 0$) として、地球軌道の離心率と月潮汐力

表 2-1 RKF 法の積分誤差の評価(位置誤差)

N	x(m)	y(m)	z(m)
6	0.626879109165475E+08	-0.179995845953043E+06	-0.174650977451860E+09
7	0.626879280258718E+08	-0.179974263432812E+06	-0.174650980187644E+09
8	0.626879344809237E+08	-0.179973961083819E+06	-0.174650980686180E+09
9	0.626879350880849E+08	-0.179973957233844E+06	-0.174650980730082E+09
10	0.626879351431110E+08	-0.179973951912447E+06	-0.174650980734630E+09
11	0.626879351416399E+08	-0.179973949820935E+06	-0.174650980734778E+09
12	0.626879351354649E+08	-0.179973948714911E+06	-0.174650980734527E+09
13	0.626879351468682E+08	-0.179973950903842E+06	-0.174650980734917E+09
14	0.626879351435490E+08	-0.179973951445119E+06	-0.174650980734874E+09
15	0.626879351345613E+08	-0.179973947073978E+06	-0.174650980734510E+09
N=10 での積分誤差の絶対値			
	5mm	5mm	0.5mm
N=10 での積分誤差の相対値(最大の大きさの z に対して)			
	3e-11	3e-11	3e-12

表 2-2 RKF 法の積分誤差の評価(速度誤差)

N	u(m/s)	v(m/s)	w(m/s)
6	0.668854754410491E+01	-0.105472093866035E+03	-0.544204305565368E+01
7	0.668855881642391E+01	-0.105472098943742E+03	-0.544204348743420E+01
8	0.668856235700935E+01	-0.105472100836286E+03	-0.544204371968737E+01
9	0.668856269200997E+01	-0.105472100998639E+03	-0.544204374300464E+01
10	0.668856272368967E+01	-0.105472101015008E+03	-0.544204374486728E+01
11	0.668856272341587E+01	-0.105472101014959E+03	-0.544204374471388E+01
12	0.668856272039631E+01	-0.105472101013248E+03	-0.544204374451779E+01
13	0.668856272623877E+01	-0.105472101015740E+03	-0.544204374510785E+01
14	0.668856272414799E+01	-0.105472101015667E+03	-0.544204374480818E+01
15	0.668856272007669E+01	-0.105472101013112E+03	-0.544204374436808E+01
N=10 での積分誤差の絶対値			
	5e-6mm/s	5e-6mm/s	5e-7mm/s
N=10 での積分誤差の相対値(最大の大きさの v に対して)			
	5e-11	5e-11	5e-12

も考慮した 90 日間の数値積分にて積分誤差を評価した。u は速度の x 成分、v は速度の y 成分、w は速度の z 成分である。90 日は L2 点周回軌道の周期の約半分である。表 2-1 と表 2-2 に、局所許容誤差を $1e-6$ から $1e-15$ ままで変えて、90 日間積分した後の位置・速度を掲げる。表中の N は局所許容誤差の指数の絶対値である。

これらの表より、局所許容誤差 $1e-10$ で最高精度となり、位置・速度ともに 10 桁の精度がある事が判る。絶対誤差は、位置が約 5mm、速度が約 5e-6mm/s である。よって、局所許容誤差は $1e-10$ を使用する。

3. ハロー初期軌道の作成

本報告では、SQP 法を用いてハロー基準軌道を設計するが、そのためには適当な初期軌道が必要である。欧米の手法では、制限三体問題の高次解析解を使用するが、ここではその線型解までの使用に留める。初期軌道は、半周(約 90 日)単位の軌道をミッション期間に亘り繋ぎ合わせて作成する。半周単位の軌道は、L2 点中心回転系の xz 平面上の点から再び xz 平面に戻るまでとし、その作成には簡単な線型解を使用する。半周単位の軌道の接続点においては、一般に位置と速度は不連続になっており、SQP 法にて位置・速度の gap が無い基準軌道を求める。

3.1 節において、初めにハロー初期軌道の作成法を述べ、次に $A_z = 13$ 万 km のハロー軌道を例にして、摂動源を変えた場合の幾つかの初期軌道を示す。 A_z はハロー軌道の z 方向の半径である。3.2 節では、その初期軌道作成法を利用して、 A_y と A_z の関係を示すと共に、ミッション軌道に投入する時点に必要な軌道制御量と A_y との関係を他の文献から紹介する。

3.1 ハロー初期軌道の作成法

初期軌道は、図 3-1 の xz 面上から出発して xz 面に戻るまでの半周軌道をたくさん接続して作成する。その接続点において、位置と速度は必ずしも連続している必要は無い。リサージュ軌道の場合は、通過 x 値を固定した初期軌道を使用した⁵⁾。その場合、位置は接続点において連続になっているが、速度は不連続であった。

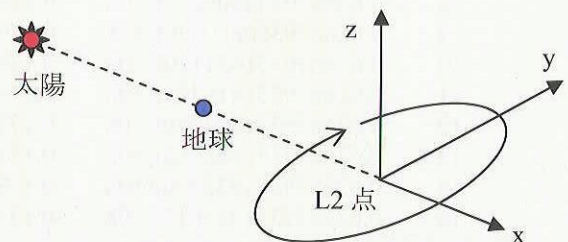


図 3-1 L2 点中心回転座標系(太陽-地球系)

ハロー軌道の場合は、位置、速度共に不連続な初期軌道を使用する。文献 4) の 24～26 頁に、円制限三体問題の場合のハロー軌道の計算法を記している。基本的には、これと同じ方法を使用する。以下に、その方法(基本アルゴリズム)を記す。

基本アルゴリズム(微分修正法による半周ハロー軌道の計算)⁴⁾

(1) 3 つの未知パラメータ

- ・半周の飛行期間 T (xz 平面を出発してから、 xz 平面に到達するまでの期間)
- ・初期 x 値
- ・初期 v 値 (速度ベクトルの y 成分)

他に、以下の初期条件を使用する。

$$y_0 = 0, z_0 = \text{指定値}, u_0 = 0, w_0 = 0$$

(2) 3 つの終端条件 (飛行期間 T 後に xz 平面に垂直に入る)

- ・ $y(T) = 0$
- ・ $u(T) = 0$
- ・ $w(T) = 0$

3 つの未知パラメータに線型解から得られる初期値を与えて、微分修正法(ニュートン法)で解く。微分計算には前進差分の数値微分を使う。非線型性が大きくなると、単純なニュートン法では発散する事が考えられるので、減速係数を指定できる簡易版の減速ニュートン法¹⁴⁾を適用する。

上記の基本アルゴリズムを使うハロー初期軌道の作成法を以下に記す。

ハロー初期軌道の作成法

上記の基本アルゴリズムを使い、以下の方法で作成する。簡単のため、第 1 半周は $x < 0$ から始まるとする。

- (a) 各半周の計算は、基本アルゴリズムを使う。
- (b) 第 1、3、... 半周(奇数番目の半周回)の z_0 は全て同じ値とし、ユーザーが指定する。
- (c) 第 2、4、... 半周(偶数番目の半周回)の z_0 は、直前半周軌道の終端値を使用する。

この作成法では、 xz 面において、位置・速度は一般に不連続になる。但し、円制限三体問題近似では、その不連続性は微小と考えられる。

$A_z = 13$ 万 km のハロー初期軌道の計算

上記のハロー初期軌道作成法を、 $A_z = 13$ 万 km のハロー軌道に適用してみる。その際、(1)円制限三体問題近似、(2)楕円制限三体問題近似(地球軌道の離心率も考慮)、(3)楕円制限四体問題近似(地球軌道の離心率と月潮汐力を考慮)の 3 つの近似を使用する。

(1) 円制限三体問題の場合

初めに、円制限三体問題の場合に対して、5 年間のハロー初期軌道を作成する。減速係数は 1.0 (純粋なニュートン法) で収束した。各半周軌道の計算は、8～9 回の iteration で収束した。各接続点における位置と速度の gap

の最大値は、それぞれ $4\text{e-}5\text{ km}$ と $4\text{e-}3\text{ mm/s}$ 以下であった。図 3-2、図 3-3、図 3-4 に、得られた軌道の xy 平面図、yz 平面図、xz 平面図を示す。

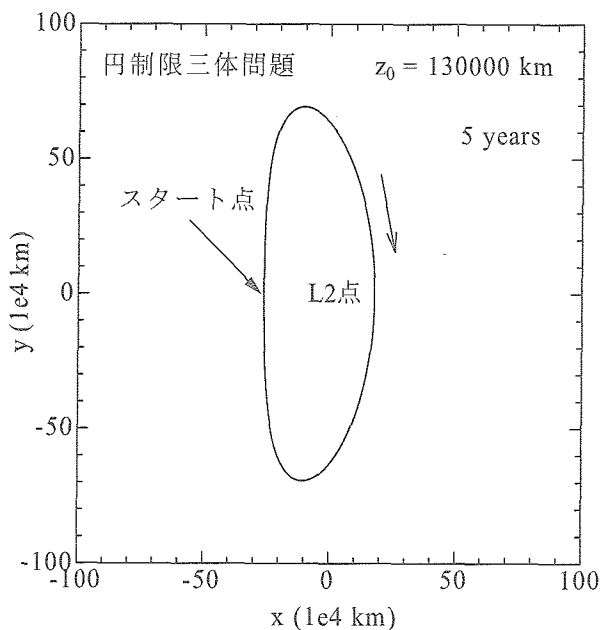


図 3-2 円制限三体問題での xy 平面図

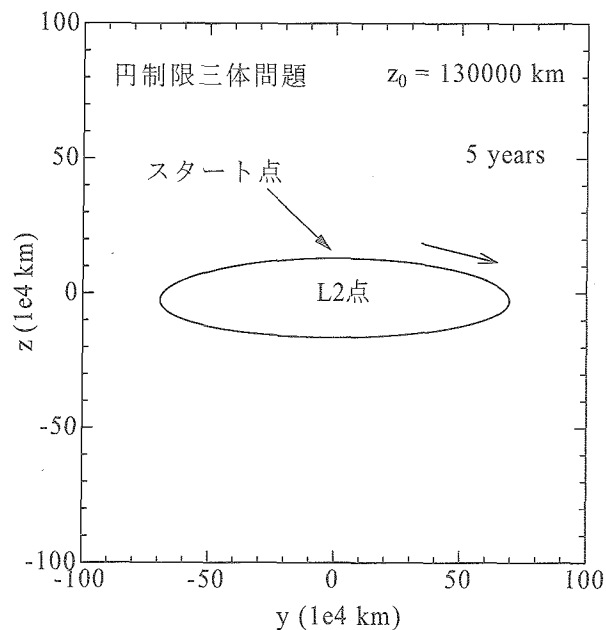


図 3-3 円制限三体問題での yz 平面図

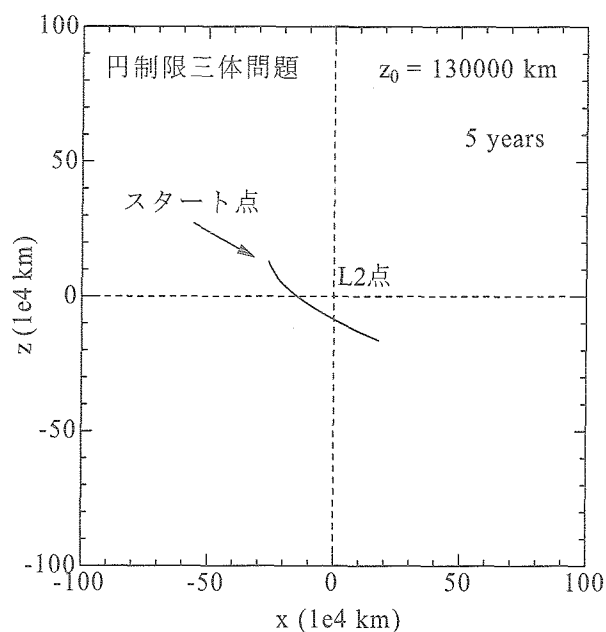


図 3-4 円制限三体問題での xz 平面図

(2) 楕円制限三体問題(地球軌道の離心率も考慮)の場合

次に、地球公転軌道の離心率も考慮した場合の初期軌道を作成する。初期時刻における地球の位置(季節)の影響を見るため、2006年1月1日0時UT、2006年3月23日0時UT、2006年6月23日0時UTの3つの初期時刻に対して、ハロー初期軌道を5年間計算した。各半周軌道は、34~36回のiterationで収束した。なお、減

速係数は、1.0 では発散したため、0.5 を使用した。3 つの初期時刻の軌道に対する位置と速度の最大 gap を表 3-1 に示す。

表 3-1 楕円制限三体問題の初期軌道の位置・速度の最大 gap

初期時刻(UT)	位置 gap の最大値(km)	速度 gap の最大値(m/s)
2006 年 1 月 1 日 0 時	9310	15.95
2006 年 3 月 23 日 0 時	14680	16.24
2006 年 6 月 23 日 0 時	10452	15.69

初期時刻が春分・秋分の頃の時、位置・速度の gap が大きい。図 3-5、図 3-6 に、2006 年 3 月 23 日 0 時 UT が初期時刻の場合のハロー初期軌道の xy 平面図と yz 平面図を示す。

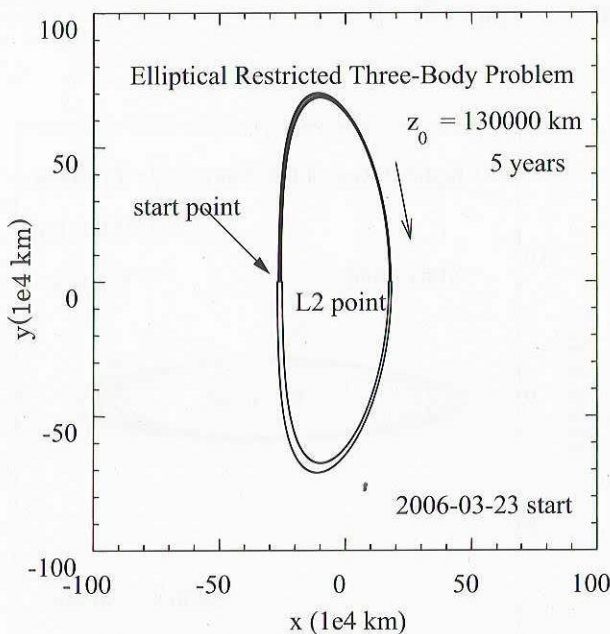


図 3-5 楕円制限三体問題での xy 平面図

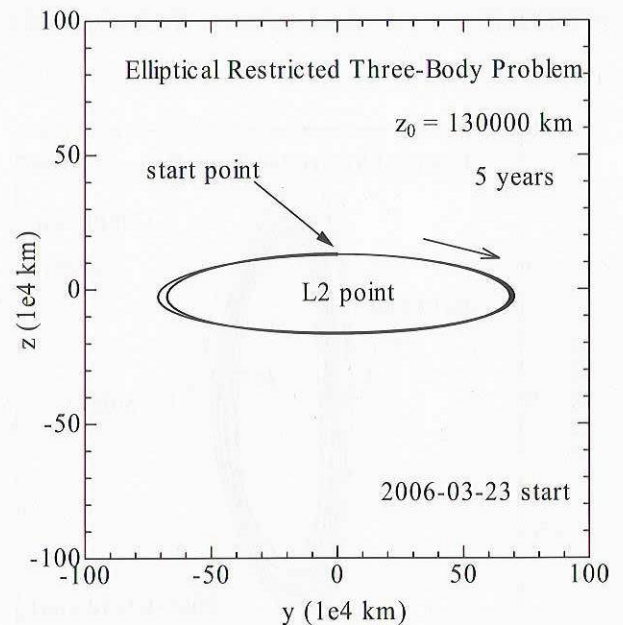


図 3-6 楕円制限三体問題での yz 平面図

(3)楕円制限四体問題(地球軌道の離心率+月潮汐力を考慮)の場合

次に、地球公転軌道の離心率と月潮汐力を考慮した時の初期軌道を作成する。前節の検討で、初期時刻が春分・秋分の頃に位置・速度の gap が大きかったので、その付近で月の位置が異なる3つの初期時刻に対して検討した。それらの初期時刻は、2006 年 3 月 23 日 0 時 UT、同年 3 月 15

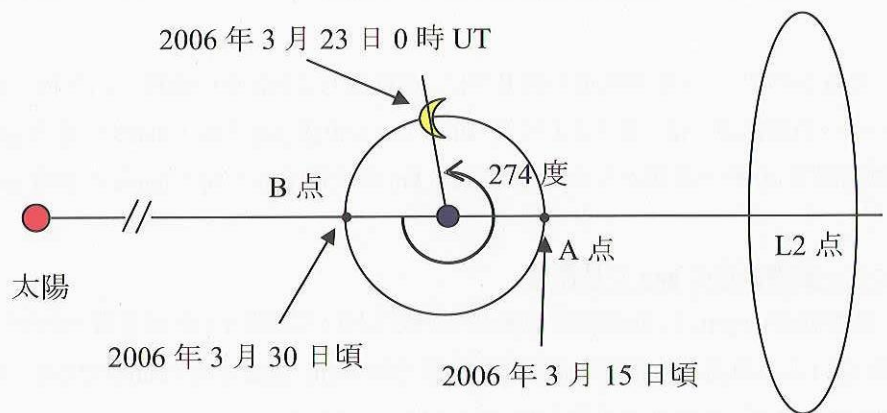


図 3-7 初期時刻における月の位置

日 0 時 UT、同年 3 月 30 日 0 時 UT である。これらの 3 つの初期時刻における月の位置を図 3-7 に示す。
各半周軌道は、34～37 回の iteration で収束した。減速係数は 0.5 を使用した。3 つの初期時刻の軌道に対する位置と速度の最大 gap を表 3-2 に示す。

表 3-2 楕円制限四体問題の初期軌道の位置・速度の最大 gap		
初期時刻(UT)	位置 gap の最大値(km)	速度 gap の最大値(m/s)
2006 年 3 月 15 日 0 時	87870	87.88
2006 年 3 月 23 日 0 時	104490	95.80
2006 年 3 月 30 日 0 時	103790	104.35

3 月 23 日と 3 月 30 日の場合は、同じ程度の gap である。以下に 3 月 30 日 0 時 UT が初期時刻の場合のハロー一初期軌道を図 3-8、図 3-9 に示す。月を無視した場合と比べると、gap は約 7 倍になっている。

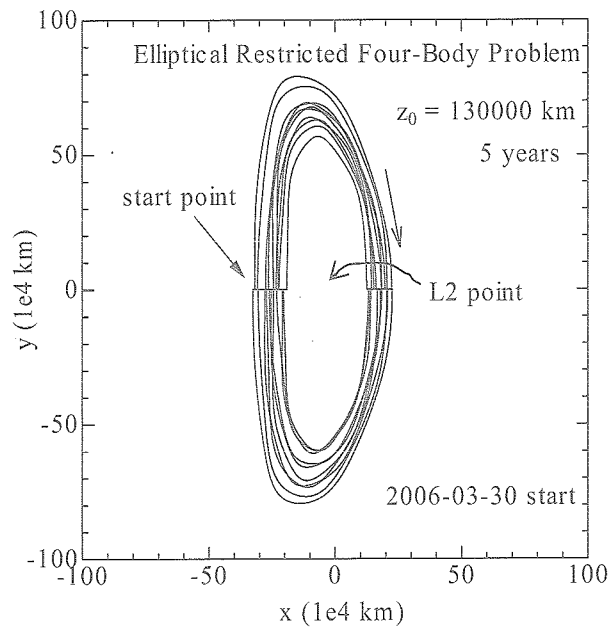


図 3-8 楕円制限四体問題での xy 平面図

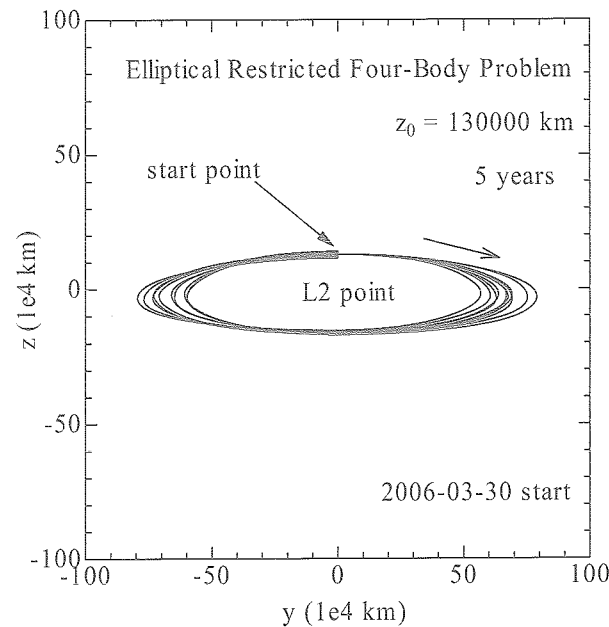


図 3-9 楕円制限四体問題での yz 平面図

文献 5)のリサージュ基準軌道の設計では、SQP 法による収束の過程で、10 桁の速度 gap の改善がなされている。ハロー初期軌道では、表 3-2 より、約 10 万 km の位置 gap と約 100m/s の速度 gap があるが、もし SQP 法による収束過程で 10 桁の改善がなされれば、1e-5 km の位置 gap と 1e-5 mm/s の速度 gap となる。

ハロー基準軌道の gap の目標値

基準軌道の gap は、軌道決定誤差との比較において考察するのが妥当であろう。文献 18)より、現状の太陽・地球系 L1, L2 点軌道の軌道決定誤差は、位置で約 1km、速度で約 1mm/s である。上記の SQP 法による 10 桁の改善がなされれば、軌道決定誤差より 5 桁小さい gap となる。

一方、数値積分においては、積分誤差が避けられない。本報告で使用した RKF 法では、2.2 節で述べた様に、ハロー軌道の半周の軌道計算において、位置で約 1e-5 km、速度で約 1e-5 mm/s の積分誤差となる。これらも軌道決定誤差より 5 桁小さい値である。

以上の事より、ハロー基準軌道の gap の目標値として、軌道決定誤差より 5 桁小さい値を設定する。

3.2 A_y , A_z の関係と投入制御量

ハロー軌道の設計自由度は A_z だけであり、 A_z を指定すればハロー軌道が決まる。但し、trajectory を yz 平面で眺めた時に、時計回りに回転するものと反時計回りに回転するものが存在する。本報告では、時計回りに回転する場合を扱う。反時計回りの場合も初期条件が異なるだけで同様である。

A_z は、宇宙機が地球の影に入らないためと、地上局からのコマンドを受信する際の太陽雑音の影響を軽減するための 2 つの制約を考慮して決められる。地球の影に入らないためには、 A_z は 1.3 万 km 以上であれば良い。コマンド受信時の太陽雑音の影響は、地上局の送信パワーにも依存する。ここに参考情報として、 A_y と A_z の関係を記す。円制限三体問題の場合は、求めた初期軌道の gap が既に軌道決定誤差より 3 桁程度小さく、初期軌道をそのまま基準軌道と見なしても良い程度のものである。そこで、円制限三体問題近似において、色々な A_z に対するハロー初期軌道を設計してみた。その結果を表 3-3 と図 3-10 に示す。図 3-10 の青線が表 3-3 の点を結んだものである。

文献 19) に、太陽-地球系 L1 点ハロー軌道における A_y と A_z の関係式が載っている。その式は、

$$A_y^2 = k_1 A_z^2 + k_2 \tag{3-1}$$

の形をしており、ここでも同じ形の式に最小二乗法でフィッティングして、係数 k_1 , k_2 を求めた。そして、L2 点ハロー軌道に対して、次式を得た。

$$A_y \text{ (万 km)} = \sqrt{1.364 A_z \text{ (万 km)}^2 + 4573} \tag{3-2}$$

図 3-10 内の赤線が(3-2)式を描いたものである。

ハロー軌道を考える上で、投入 ΔV (L1, L2 点付近に到達し、ミッション軌道に投入する時に必要となる速度増分) の大きさも重要な要素である。表 1-1 には、ハロー軌道の投入 ΔV は小さいと記したが、図 3-11 に L1, L2 点周軌道の A_y に対する ΔV の大きさを、文献 20) から引用して示す。L1, L2 点そのものに相対静止するには約 280m/s の ΔV が必要である。 A_y を大きくすると、ほぼ直線的に ΔV が減少し、 $A_y \simeq 78$ 万 km で ΔV はゼロとなっている。

表 3-3 L2 点ハロー軌道の A_y と A_z の関係 (円制限三体問題)

A_z (万 km)	L2 点ハロー軌道の A_y (万 km)
43	84.4
40	82.2
35	78.9
30	76.0
25	73.6
20	71.5
15	69.9
10	68.7
5	68.0

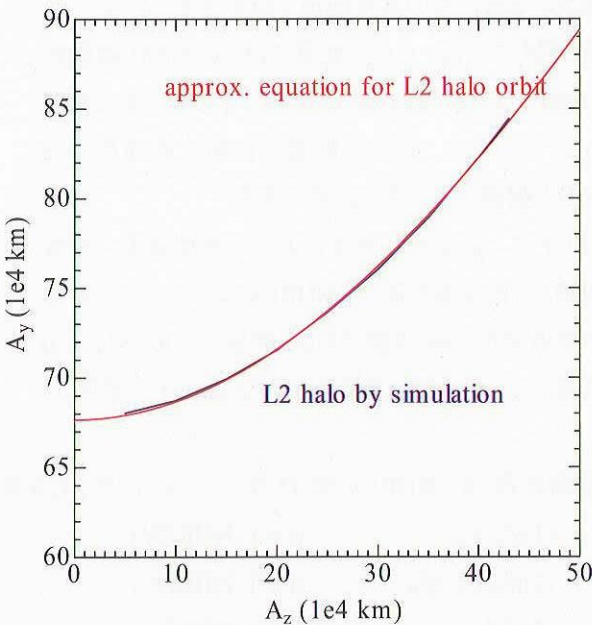


図 3-10 L2 点ハロー軌道の A_y と A_z の関係 (円制限三体問題)

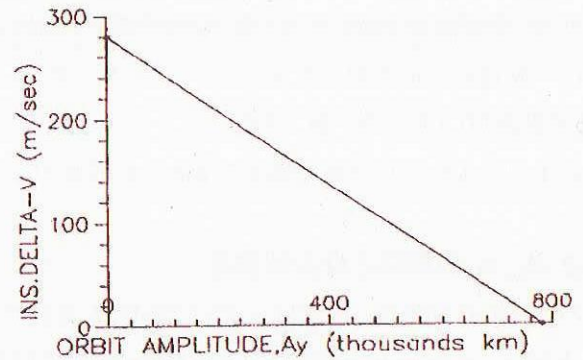


図 3-11 L1, L2 点周回軌道に投入するための ΔV 量 (文献 20 より)

4. SQP 法によるハロー基準軌道の設計

第 3 章では、円制限三体問題の線型解を用いて、ハロー初期軌道の作成を行なった。地球公転軌道の離心率と月潮汐力を考慮すると、この初期軌道は約 10 万 km の位置 gap と約 100m/s の速度 gap を持つ。本章では、これらの gap を、逐次 2 次計画法(Sequential Quadratic Programming Method; SQP 法)で小さくする事を考える。

4.1 定式化 1

文献 5)で述べたリサージュ基準軌道の設計法と同様に、L2 点中心回転座標系における xz 面で分割される半周単位の軌道群をマッチングして、位置・速度の gap のない基準軌道を設計する。リサージュ軌道と異なるのは、ハロー軌道では、 z 方向の運動が xy 面内の運動と平均的に同期する必要がある事である。そのため、各半周軌道の初期位置速度の z 成分も制御変数とする必要がある。

以下に、非線型計画法における制御変数、等号制約、目的関数を記す。NHREV は、ミッション期間の半周単位の周回数である。簡単のため、 $x_0^1 < 0$ に限定し、NHREV は偶数とする。図 4-1 を参照。

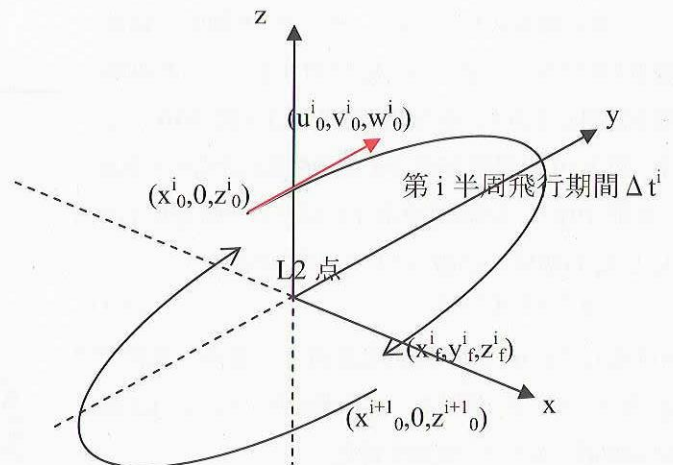


図 4-1 ハロー基準軌道設計の基本量

[制御変数] $6 \times \text{NHREV}$ 個 (5 年ミッションの時、120 個)

- | | |
|---------------------------|---------------------------|
| (1) x_0^i, z_0^i | ($i = 1, \text{NHREV}$) |
| (2) u_0^i, v_0^i, w_0^i | ($i = 1, \text{NHREV}$) |
| (3) Δt^i | ($i = 1, \text{NHREV}$) |

[等号制約] $6 \times \text{NHREV} - 5$ 個 (5 年ミッションの時、115 個)

$$(1) x_f^i = x^{i+1}_0, z_f^i = z^{i+1}_0 \quad (i = 1, \text{NHREV} - 1)$$

$$(2) y_f^i = 0 \quad (i = 1, \text{NHREV})$$

$$(3) u_f^i = u^{i+1}_0, v_f^i = v^{i+1}_0, w_f^i = w^{i+1}_0 \quad (i = 1, \text{NHREV} - 1)$$

[目的関数]

この問題には、5 個の自由度がある。以下の目的関数を最小化するために、この自由度を使う。

$$\frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\text{NHREV}-1} (z^{2k+1}_0 - z^1_0)^2 \Rightarrow \min \quad (4-1)$$

ハロー軌道では z 方向運動に最も関心があり、 xz 面通過時の z 値の変動が小さいほど良いハロー軌道と考えられるので、上式の様に xz 面通過時の z 値のバラツキの 2 乗和を最小にする。2 乗和を使うのは収束性を良くするためである⁵⁾。

以下、この定式化を『ハロー軌道の定式化 1』と呼ぶ。制御変数の正規化には、以下の定数を使用した。

位置の正規化定数 : 1 万 km

速度の正規化定数 : 1 m/s

半周飛行期間の正規化定数: 1 日

4.2 月潮汐力も考慮した場合の定式化 1 の解

3.1 節の初期軌道の作成において、位置・速度の最大 gap が大きかった初期時刻 2006 年 3 月 30 日 0 時 UT の場合を使って、定式化 1 による解を検討した。この初期軌道の位置・速度の最大 gap は、約 10 万 km と 100m/s であった。

3.1 節で作成した初期軌道を入力して、定式化 1 のソフトを実行した。設定した iteration 上限値の 200 回の

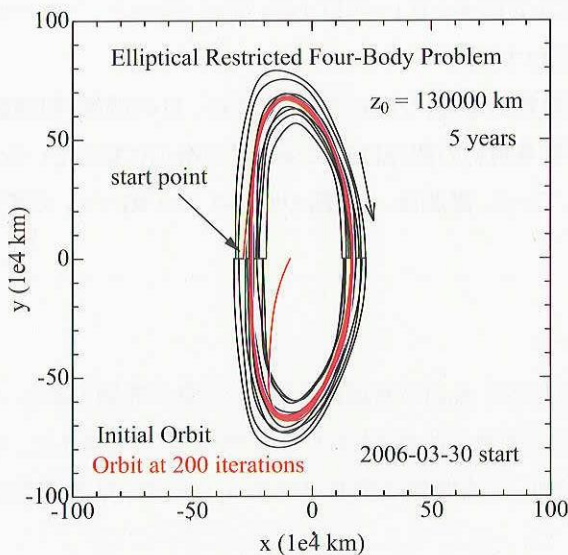


図 4-2 xy 平面図(初期軌道と 200 回 iteration 後)

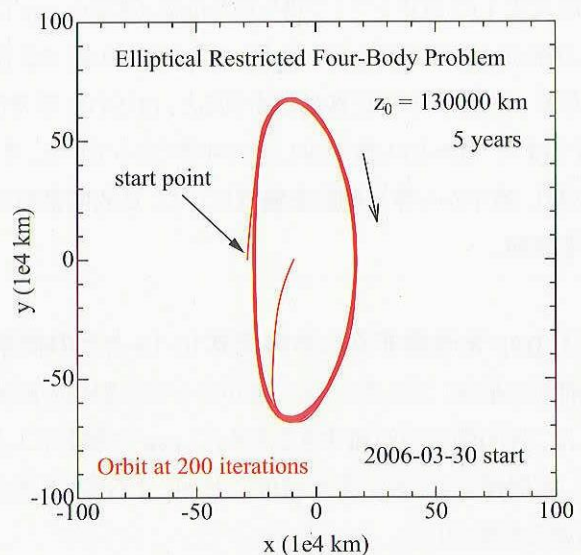


図 4-3 xy 平面図(200 回 iteration 後)

iteration 後に、INDEX=2 で終了した。ペナルティ関数の減少量は十分小さいが、Kuhn-Tucker 条件を満足していない場合に INDEX=2 が出力される¹³⁾。この時の位置・速度の最大 gap は、69.2m と 3.19e-2mm/s であった。軌道決定誤差の 1~2 桁下である。iteration=200 での trajectory の xy 平面図を図 4-2、図 4-3 に示す。図 4-2 には初期軌道も黒線で描いている。最後の 1/4 周は大きくずれているが、ミッション期間よりも 1 年余分に基準軌道を作成しておけば問題ない。

図 4-4 と図 4-5 に、iteration=200 における trajectory の yz 平面図を示す。

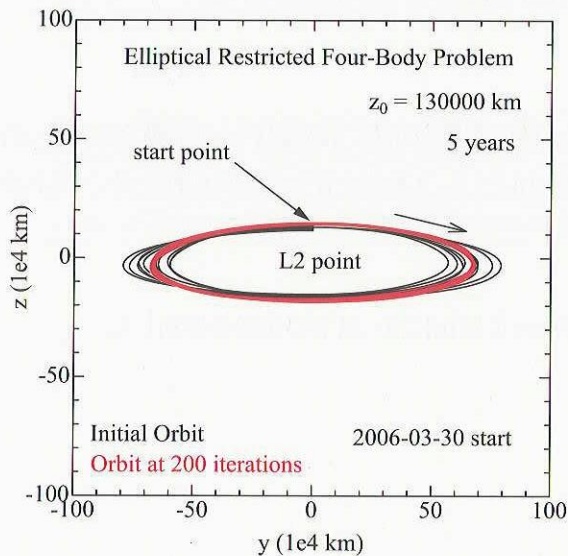


図 4-4 yz 平面図(初期軌道と 200 回 iteration 後)

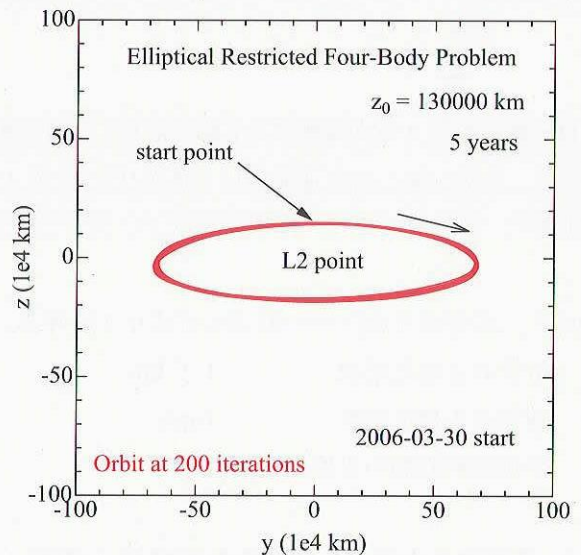


図 4-5 yz 平面図(200 回 iteration 後)

gap が大きく収束が不十分なので、iteration=200 における制御変数を初期値として、再び定式化 1 のソフトを実行した。前回と同様に iteration=200 で INDEX=2 を出力して止まった。この時の位置・速度の最大 gap は、14.2km と 7.09mm/s であった。軌道決定誤差より 1 桁大きく、悪化している。

定式化 1 の SQP ソフトで得られた位置・速度の gap は、軌道決定誤差より 1~2 桁小さいだけであった。これでは基準軌道としては不十分と考えられるので、次節で改善策を検討する。

なお、本節の解の改良過程を見ると、はじめに等号制約の誤差が急速に小さくなり、その後、目的関数(初期軌道では 0 である)の値が少しずつ小さくなっている。その際、等号制約の誤差は逆に少しずつ増加に転じている。つまり、途中から等号制約を犠牲にして、目的関数値を減らしている。詳細は、4.3 節の図 4-7 の $\Delta \text{REV}=1$ のグラフを参照。

4.3 gap を改善するための定式化 1a とその結果

前節の最後に記したように、途中から等号制約の誤差(位置速度の gap)が増加に転じている事が問題である。これは、目的関数が複雑すぎるために、gap を犠牲にしないと目的関数が改善されないからではないかと考えた。更に、本問題では、gap を高精度にゼロにする事が最も重要であり、目的関数は重要ではない。そこで、目的関数の簡素化を検討した。

ハロー軌道であるためには、z 方向の運動が毎周回ほぼ同じであれば良い。そこで、 z_0^1 との差の 2 乗和を取る周

回数を減らしてみる事にした。 ΔREV というパラメータを導入して、以下の目的関数を使用する。

[簡素化した目的関数]

z_j を、xz 面を $-y$ から $+y$ の向きに通過する時の j 番目の z 値とする。これは制御変数である。次式で新しい目的関数を定義する。

目的関数 = $\sum_{j=1}^{(\Delta \text{REV})} (z_{1+j \times \Delta \text{REV}} - z_1)^2$ $\Delta \text{REV}: 1, 2, 3, \dots$ の正の整数

この目的関数では、 ΔREV によって、 $(z_{1+j \times \Delta \text{REV}} - z_1)^2$ の項数が表 4-1 のように変わる。計算期間が 5 年間の場合は、 $\Delta \text{REV}=4$ までは複数個の 2 乗項が存在するが、 $\Delta \text{REV}=5$ 以降は 1 項のみとなる。

ΔREV に 1 を入れると、今までと同じ目的関数となる。2 を入れると、2 周回毎に z_1 との差の 2 乗和を計算し、3 を入れると 3 周回毎に計算する。5 年間の計算では 10 周までであるから、 $\Delta \text{REV}=9$ まで考えられる。 $\Delta \text{REV}=9$ は、最後の周回の z と z_1 の差の 2 乗を最小にする事になる。 $\Delta \text{REV} \neq 1$ の目的関数で求めた trajectory の yz 平面図が、 $\Delta \text{REV} = 1$ の yz 平面図と殆ど同じであれば問題ない。この簡素化した目的関数を使用する定式化を、定式化 1a と呼ぶ事にする。

表 4-1 新しい目的関数の項数
(5 年間計算の場合)

ΔREV	$(z_{1+j \times \Delta \text{REV}} - z_1)^2$ の項数
1	9
2	4
3	3
4	2
5	1
6	1
7	1
8	1
9	1

4.2 節で用いたものと同じ初期軌道を使用し、 ΔREV を 1～9 まで変えた時の定式化 1a のソフトの結果を表 4-2 に示す。INDEX は SQP ソフトの終了コードであり、0 は最適解と判定された事を示す。GAP/ODerr には、軌道決定誤差を 1km, 1mm/s と仮定し、位置と速度の gap の内で決定誤差との比の大きい方を記した。 ΔREV が 5 以降は全て INDEX=0 であり、GAP/ODerr も $1e-5$ 以下である事が判る。図 4-6 に ΔREV に対して GAP/ODerr のグラフを示す。

表 4-2 ΔREV による解の変化

ΔREV	INDEX	最大位置 gap(m)	最大速度 gap(m/s)	GAP/ODerr	CPU 時間(分)
1	2	69.2	3.19e-5	6.92e-2	436.04
2	5	18.0	8.28e-6	1.80e-2	244.55
3	5	2.56	1.15e-6	2.56e-3	290.94
4	5	5.58	2.62e-6	5.58e-3	184.79
5	0	0.00485	2.59e-9	4.85e-6	64.18
6	0	0.00947	4.65e-9	9.47e-6	153.06
7	0	0.00517	2.73e-9	5.17e-6	30.48
8	0	0.00890	4.63e-9	8.90e-6	28.32
9	0	0.00539	2.82e-9	5.39e-6	24.10

(補足) CPU 時間: Pentium4 の 3GHz マシンによる値

INDEX=0: Kuhn-Tucker 条件が満足され、ペナルティ関数の減少量が十分小さい時に出力される。最適解を意味する。

INDEX=2: 上限回数まで iteration した後、ペナルティ関数の減少量は十分小さいが、Kuhn-Tucker 条件を満足していない場合。

INDEX=5: 1 次元サーチでペナルティ関数が十分減少しなくなった場合。

ΔREV が 5 を超えて $(z_{1+j \times \Delta \text{REV}} - z_1)^2$ の個数が 1 になれば、どの ΔREV でも大きな違いはないが、 $\Delta \text{REV}=9$ つまり、最初と最後の z 値を一致させるのが最も良い事が判る。目的関数に使われている z 値は制御変数であり、何らかの複雑な計算をしなければ値が判らないものではない。目的関数もこれらの制御変数の差の 2 乗和に過ぎず、極めてシンプルなものに思える。にも拘らず、 $(z_{1+j \times \Delta \text{REV}} - z_1)^2$ の項数が 1 つ減る毎に収束性がどんどん改善されるのには驚いた。

図 4-7 に、 $\Delta \text{REV}=1, 3, 5, 7, 9$ に対して、iteration 毎の目的関数と等号制約関数の絶対値最大成分の変化を描いた。

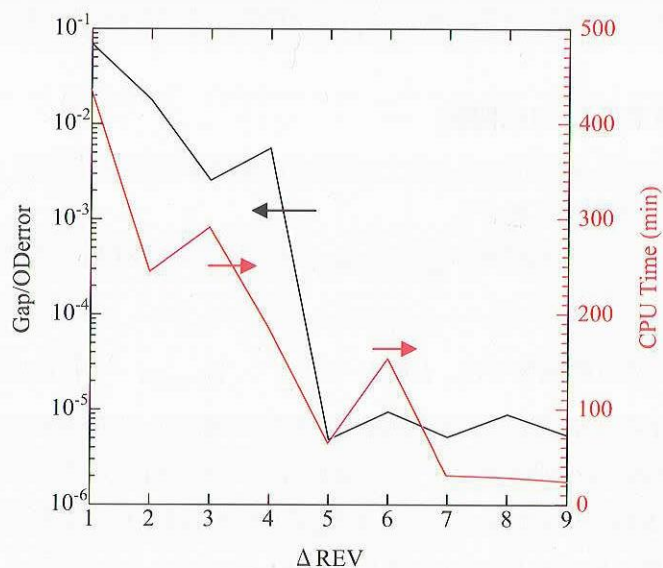


図 4-6 ΔREV に対する GAP/ODerr の変化

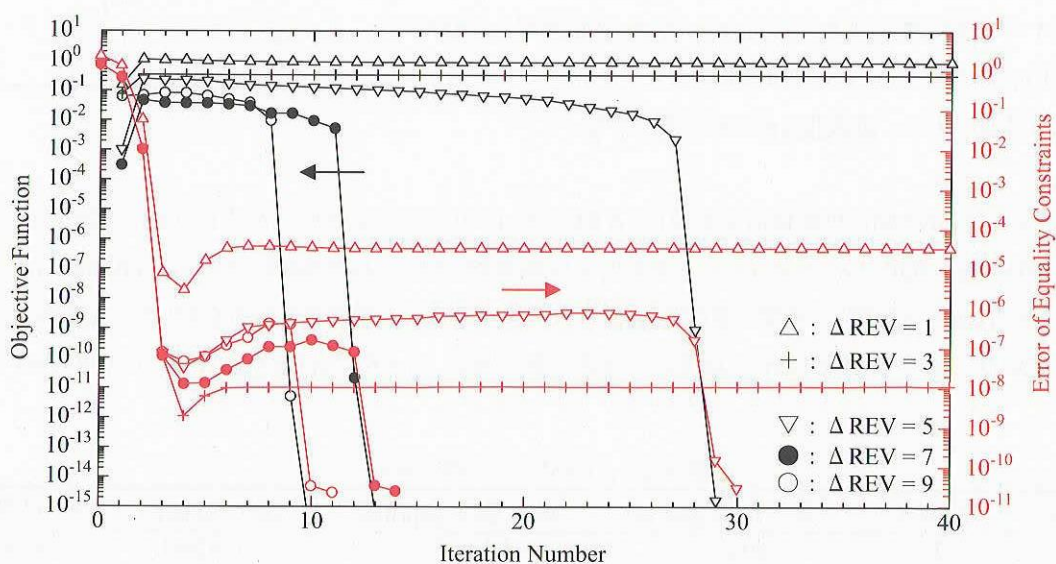


図 4-7 iteration 毎の目的関数と等号制約関数の絶対値最大成分の変化

$\Delta \text{REV}=9$ の場合の収束解を図 4-8～図 4-10 に示す。目的関数の簡素化は、収束解に悪い影響を与えていないと判断できる。

以上の検討より、ハロー基準軌道の設計には、定式化 1a の方法を $\Delta \text{REV}=(2 \times \text{計算期間}-1)$ (5 年間計算の場合、9) で適用するのが良いと言える。本節では、 $A_z=13$ 万 km のハロー軌道のみ扱ったが、次節で 50 万 km 程度までの色々な A_z のハロー基準軌道の設計を行ない、本節の定式化 1a ($\Delta \text{REV}=(2 \times \text{計算期間}-1)$) が適用できるかを検討する。

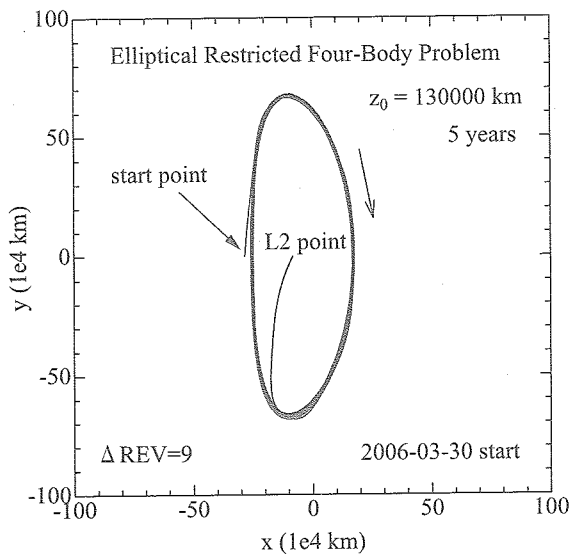


図 4-8 収束解の xy 平面図($\Delta \text{REV}=9$)

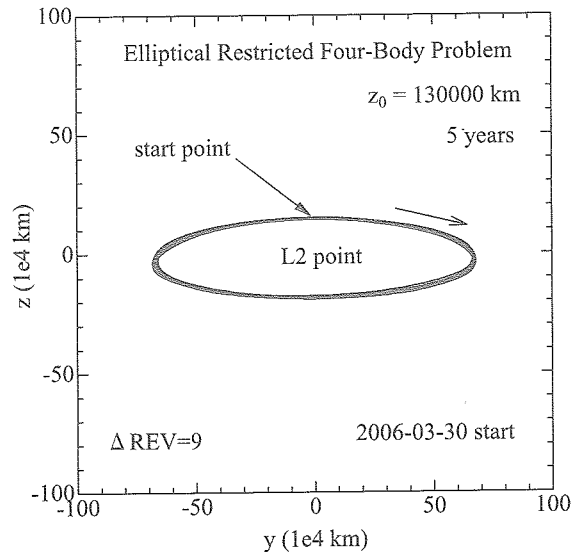


図 4-9 収束解の yz 平面図($\Delta \text{REV}=9$)

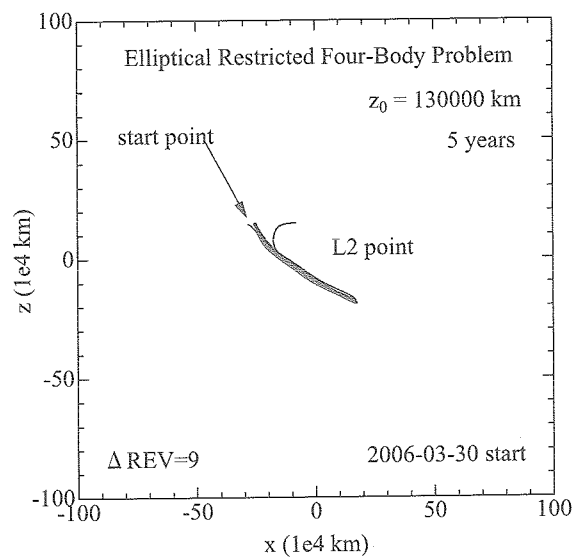


図 4-10 収束解の xz 平面図($\Delta \text{REV}=9$)

4.4 色々な A_z のハロー基準軌道の設計

本節では、 A_z が 10 万 km～50 万 km の太陽-地球系 L2 点ハロー基準軌道を、前節の定式化 1a を使って設計する。 A_y は約 65 万 km～90 万 km に亘る。その他の設計条件を以下に記す。

初期時刻: 2006 年 3 月 30 日 0 時 UT (地球公転軌道の離心率と月潮汐力を考慮した時に、初期軌道の位置・速度 gap が大きい時期)
摂動源: 地球公転軌道の離心率と月潮汐力
計算期間: 6 年と 11 年 (最後の跳び出しを考慮して、5 年ミッションと 10 年ミッションに対応)
設計法: 定式化 1a ($\Delta \text{REV} = 2 \times \text{計算期間} - 1$)

SQP 法で得られた基準軌道は、主に位置・速度の最大 gap で評価する。その際、軌道決定誤差との比を用いる。軌道決定誤差は、位置誤差 1km、速度誤差 1mm/s とする¹⁸⁾。使用した数値積分法の 90 日間(ハロー軌道の半周)の積分誤差が、位置で約 1cm、速度で約 $1\text{e-}5$ mm/s であり、上記の軌道決定誤差より 5 桁小さい。従って、得られた基準軌道の位置・速度の最大 gap が軌道決定誤差より 5 桁小さければ、全く問題ないと考えられる。

計算期間 6 年の場合

5 年ミッションの場合を想定し、最後の約 3 ヶ月の跳び出し部を捨てるために、6 年間の基準軌道設計を行なう。この場合の制御変数の数は 144 個である。

(1) $A_z=10$ 万 km の場合

初期軌道は、減速係数 0.5 で求める事ができた。

SQP 法による基準軌道の設計計算では、iteration=11 において INDEX=5 で終了した。制御変数の修正量が非常に小さくなると、このコードが出力される。最適性条件は満足されていない。最後の制御変数を再び SQP 法ソフトに入力して処理を継続すると、4 回の iteration で最適性条件を満足した解に収束したが、INDEX=5 で終了した時の解の方が、位置・速度の最大 gap が 1 桁小さいので、そちらを採用する。

CPU 時間、位置・速度の最大 gap を表 4-3 に示す。使った CPU は、Pentium 4 の 3GHz である。

表 4-3 CPU 時間、位置・速度の最大 gap ($A_z=10$ 万 km)

CPU 時間(分)	最大位置 gap (km)	最大速度 gap (mm/s)	備考
35.15	1.47e-3	7.51e-4	軌道決定誤差より 3 桁小さい

図 4-11 に各 iteration 時の目的関数値と等号制約関数値を示す。図 4-12 に xy 平面図を、図 4-13 に yz 平面図を示す。

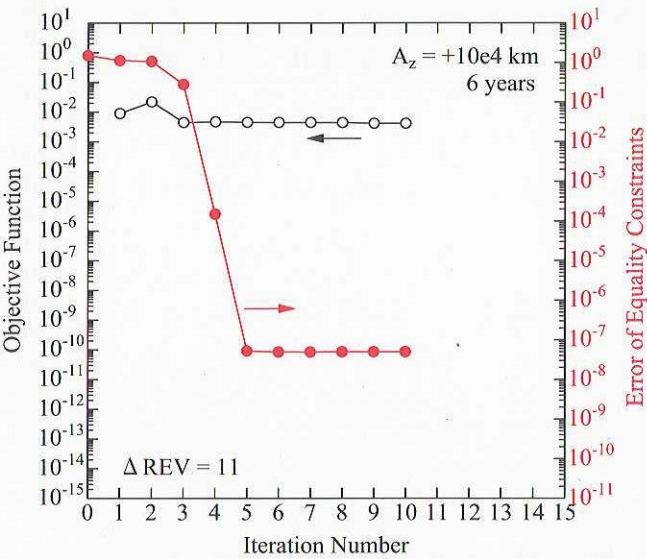


図 4-11 収束の過程($A_z=10$ 万 km)

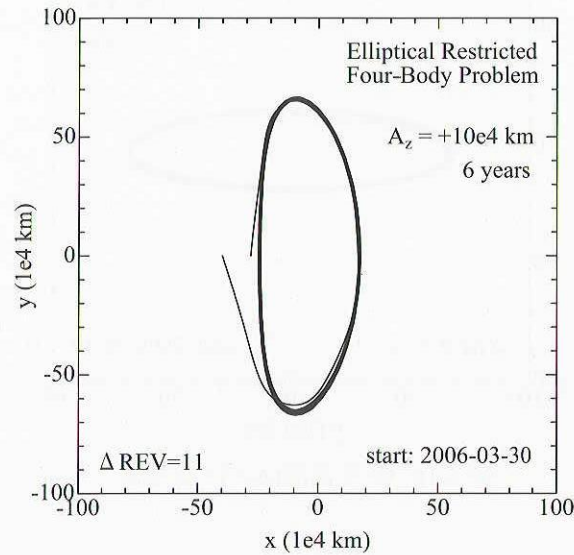


図 4-12 xy 平面図($A_z=10$ 万 km)

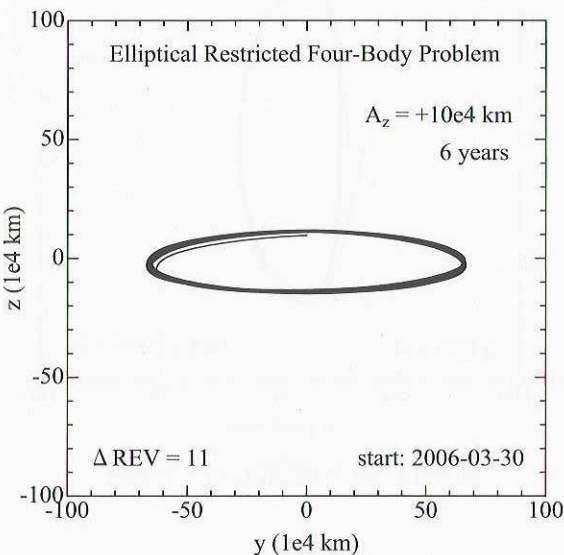


図 4-13 yz 平面図($A_z=10$ 万 km)

(2) $A_z=13$ 万 km の場合

初期軌道は、減速係数 0.5 で求める事ができた。
SQP 法による基準軌道の設計計算は、51 回の iteration 後に INDEX=0 の最適解に収束した。
CPU 時間、位置・速度の最大 gap を表 4-4 に示す。

表 4-4 CPU 時間、位置・速度の最大 gap ($A_z=13$ 万 km)			
CPU 時間(分)	最大位置 gap (km)	最大速度 gap (mm/s)	備考
156.95	2.64e-3	1.41e-3	軌道決定誤差より 3 桁小さい

図 4-14 に各 iteration 時の目的関数値と等号制約関数値を示す。INDEX=0 の解にしては、gap が大きい。
図 4-15 に xy 平面図を、図 4-16 に yz 平面図を示す。

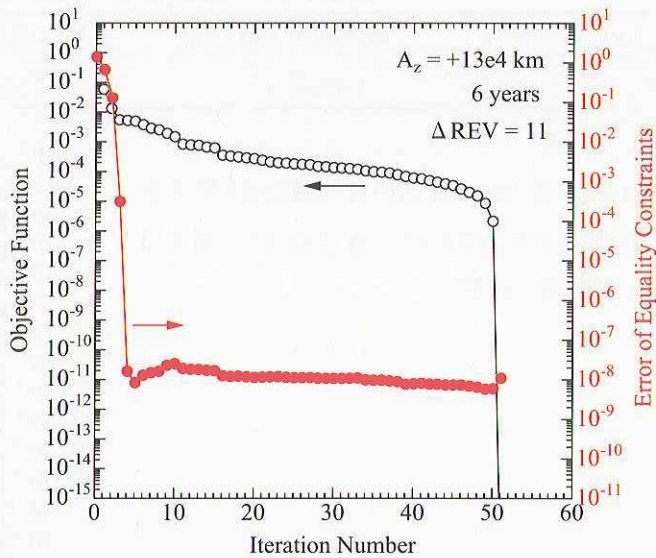


図 4-14 収束の過程($A_z=13$ 万 km)

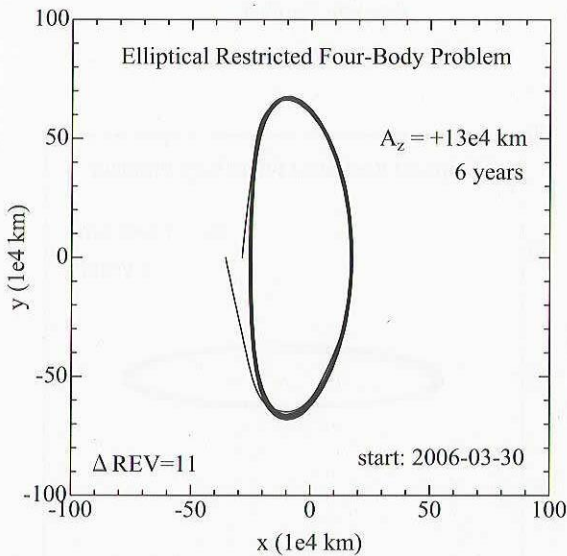


図 4-15 xy 平面図($A_z=13$ 万 km)

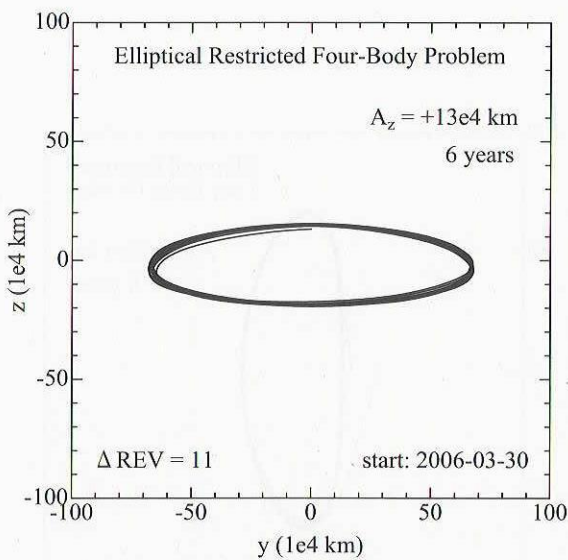


図 4-16 yz 平面図($A_z=13$ 万 km)

(3) $A_z=20$ 万 km の場合

初期軌道は、減速係数 0.5 で求める事ができた。

SQP 法による基準軌道の設計計算は、10 回の iteration 後に INDEX=0 の最適解に収束した。

CPU 時間、位置・速度の最大 gap を表 4-5 に示す。

表 4-5 CPU 時間、位置・速度の最大 gap ($A_z=20$ 万 km)

CPU 時間(分)	最大位置 gap (km)	最大速度 gap (mm/s)	備考
31.92	6.90e-6	3.63e-6	軌道決定誤差より 5 桁小さい

図 4-17 に各 iteration 時の目的関数値と等号制約関数値を示す。等号制約の誤差は、2 段階の低下により、数値積分誤差レベルにまで落ちている。

図 4-18 に xy 平面図を、図 4-19 に yz 平面図を示す。

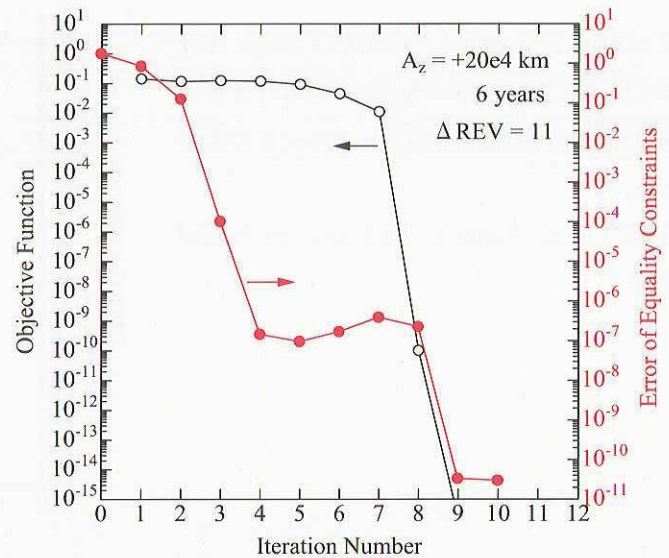


図 4-17 収束の過程($A_z=20$ 万 km)

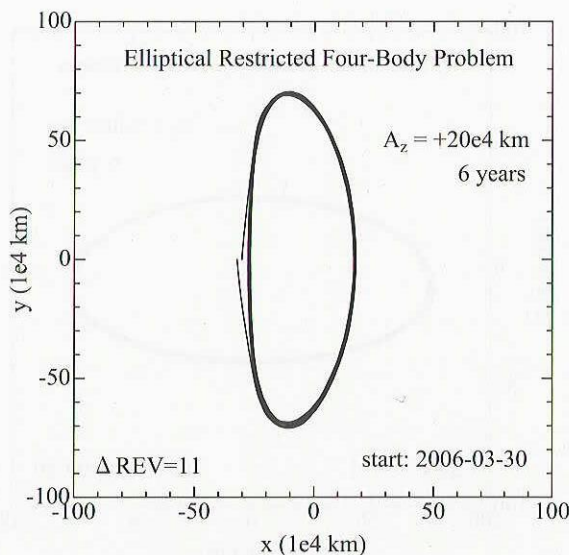


図 4-18 xy 平面図($A_z=20$ 万 km)

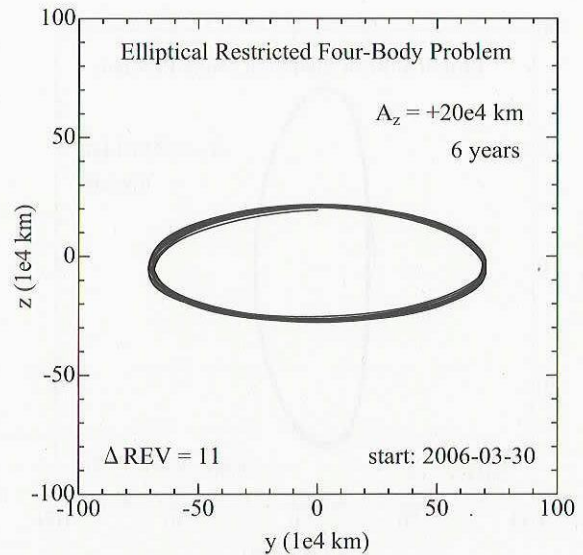


図 4-19 yz 平面図($A_z=20$ 万 km)

(4) $A_z=30$ 万 km の場合

初期軌道は、減速係数 0.5 で求める事ができた。

SQP 法による基準軌道の設計計算は、10 回の iteration 後に INDEX=0 の最適解に収束した。

CPU 時間、位置・速度の最大 gap を表 4-6 に示す。

表 4-6 CPU 時間、位置・速度の最大 gap ($A_z=30$ 万 km)

CPU 時間(分)	最大位置 gap (km)	最大速度 gap (mm/s)	備考
32.50	4.61e-6	2.46e-6	軌道決定誤差より 5 桁小さい

図 4-20 に各 iteration 時の目的関数値と等号制約関数値を示す。等号制約の誤差は、2 段階の低下により、数値積分誤差レベルにまで落ちている。

図 4-21 に xy 平面図を、図 4-22 に yz 平面図を示す。

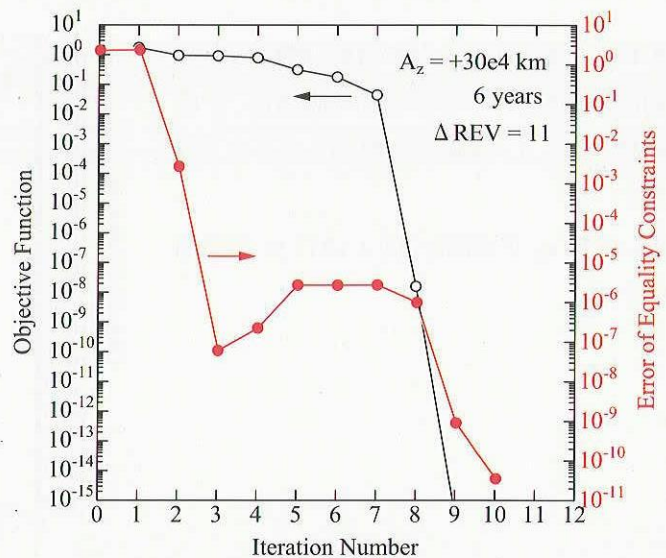


図 4-20 収束の過程($A_z=30$ 万 km)

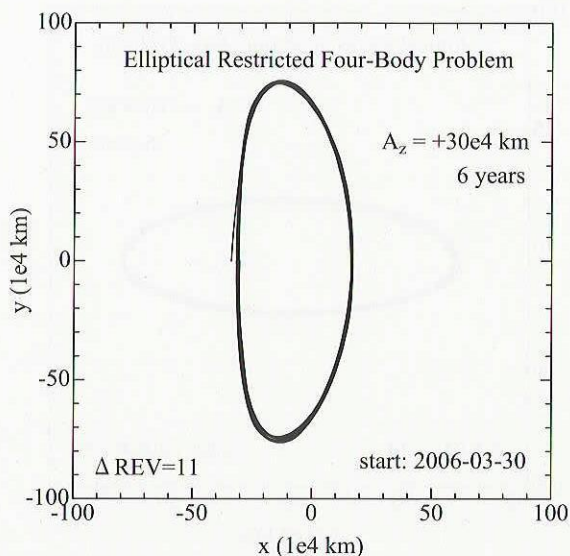


図 4-21 xy 平面図($A_z=30$ 万 km)

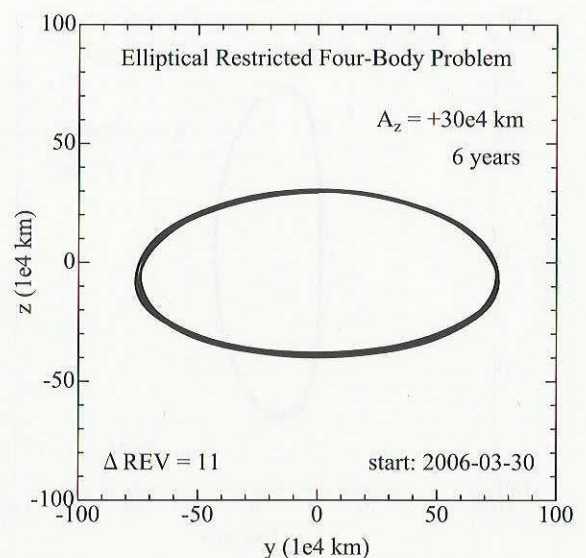


図 4-22 yz 平面図($A_z=30$ 万 km)

(5) $A_z=40$ 万 km の場合

初期軌道の作成において、減速係数 0.5 では 16 個目の半周軌道作成時に発散した。減速係数を 0.25 にすることで、求める事ができた。

SQP 法による基準軌道の設計計算は、18 回の iteration 後に INDEX=0 の最適解に収束した。

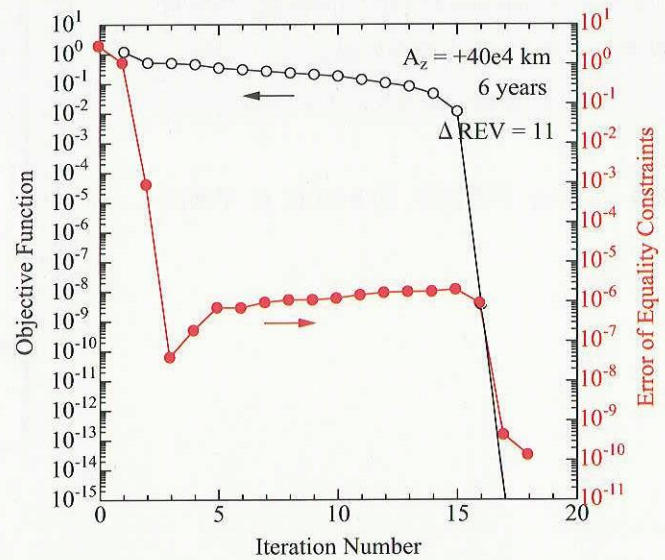
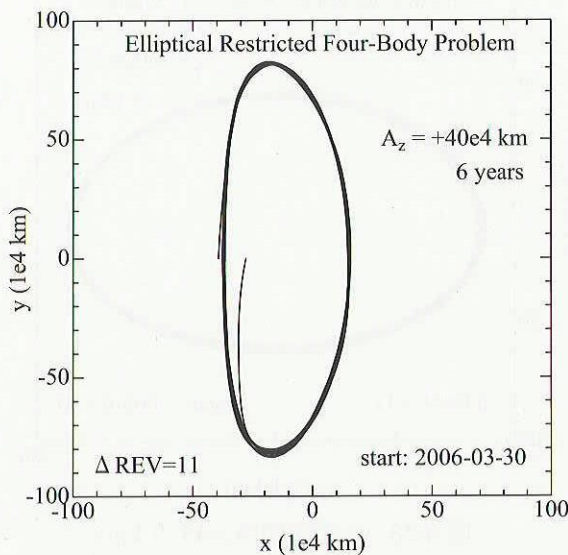
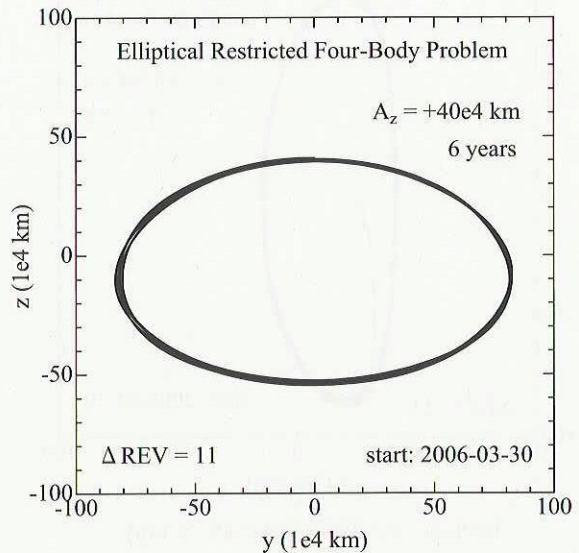
CPU 時間、位置・速度の最大 gap を表 4-7 に示す。

表 4-7 CPU 時間、位置・速度の最大 gap ($A_z=40$ 万 km)

CPU 時間(分)	最大位置 gap (km)	最大速度 gap (mm/s)	備考
58.76	8.40e-6	4.25e-6	軌道決定誤差より 5 桁小さい

図 4-23 に各 iteration 時の目的関数値と等号制約関数値を示す。等号制約の誤差は、2 段階の低下により、数値積分誤差レベルにまで落ちている。

図 4-24 に xy 平面図を、図 4-25 に yz 平面図を示す。

図 4-23 収束の過程($A_z=40$ 万 km)図 4-24 xy 平面図($A_z=40$ 万 km)図 4-25 yz 平面図($A_z=40$ 万 km)

(6) $A_z=45$ 万 km の場合

初期軌道の作成において、減速係数 0.25 を使用した。

SQP 法による基準軌道の設計計算は、53 回の iteration 後に INDEX=0 の最適解に収束した。

CPU 時間、位置・速度の最大 gap を表 4-8 に示す。

表 4-8 CPU 時間、位置・速度の最大 gap ($A_z=45$ 万 km)

CPU 時間(分)	最大位置 gap (km)	最大速度 gap (mm/s)	備考
174.22	6.51e-6	3.44e-6	軌道決定誤差より 5 桁小さい

図 4-26 に各 iteration 時の目的関数値と等号制約関数値を示す。等号制約の誤差は、2 段階の低下により、数値積分誤差レベルにまで落ちている。

図 4-27 に xy 平面図を、図 4-28 に yz 平面図を示す。

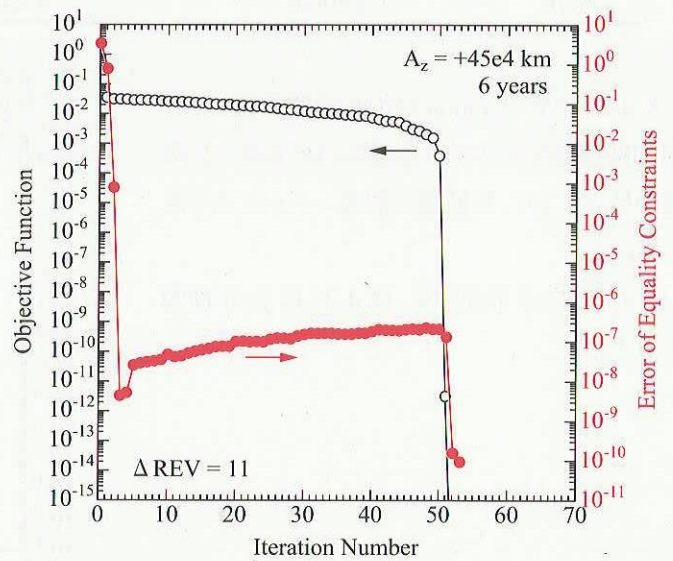


図 4-26 収束の過程($A_z=45$ 万 km)

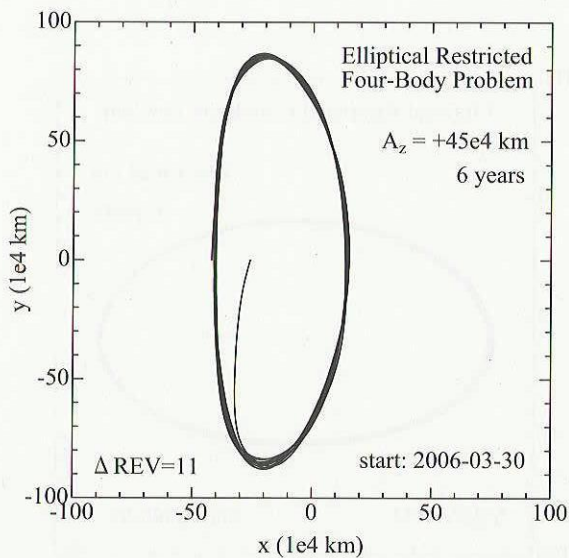


図 4-27 xy 平面図($A_z=45$ 万 km)

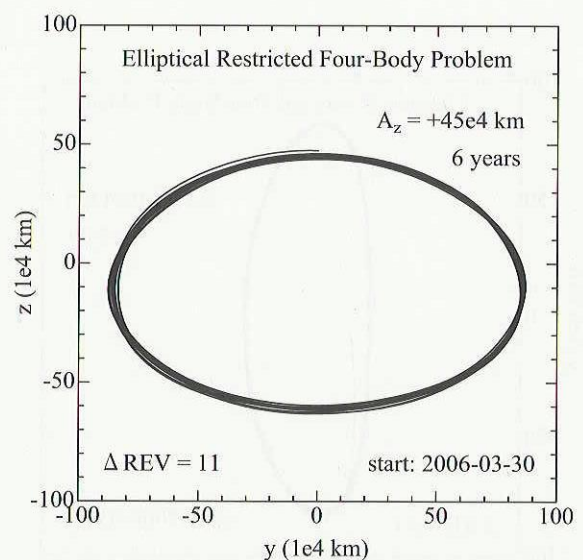


図 4-28 yz 平面図($A_z=45$ 万 km)

(7) $A_z=47$ 万 km の場合

初期軌道の作成において、減速係数 0.25 を使用した。

SQP 法による基準軌道の設計計算は、iteration の上限回数(300 回)後に INDEX=2 で止まった。INDEX=2 は、iteration 回数の上限値に達した時、以下の(b)だけが成立している場合に出力される。

- (a) Kuhn-Tucker 条件
- (b)ペナルティ関数の減少量が十分小さい。

CPU 時間、位置・速度の最大 gap を表 4-9 に示す。

表 4-9 CPU 時間、位置・速度の最大 gap ($A_z=47$ 万 km)			
CPU 時間(分)	最大位置 gap (km)	最大速度 gap (mm/s)	備考
1002.17	$2.85e-3$	$1.42e-3$	軌道決定誤差より 3 桁小さい

CPU 時間は 300 回の iteration に要した時間であるが、等号制約関数値は、iteration=3 の時に最小になっているため(図 4-29 を参照)、その時の値を表 4-9 に記した。

図 4-29 に各 iteration 時の目的関数値と等号制約関数値を示す。

図 4-30 に xy 平面図を、図 4-31 に yz 平面図を示す。iteration=3 の時の trajectory である。

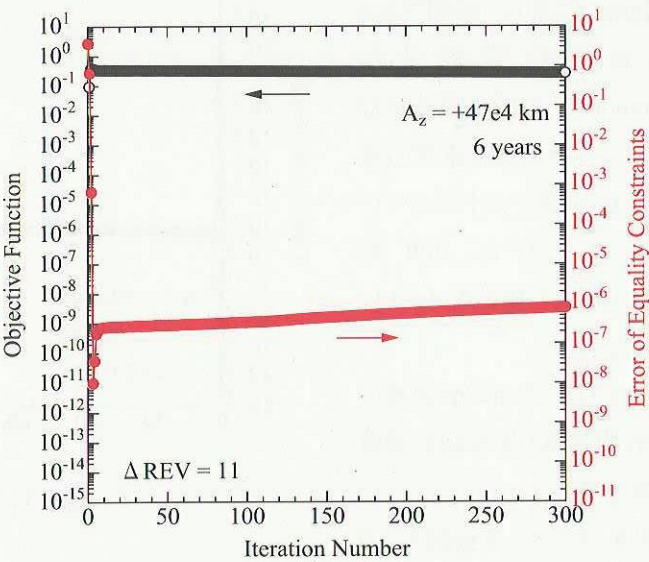


図 4-29 収束の過程($A_z=47$ 万 km)

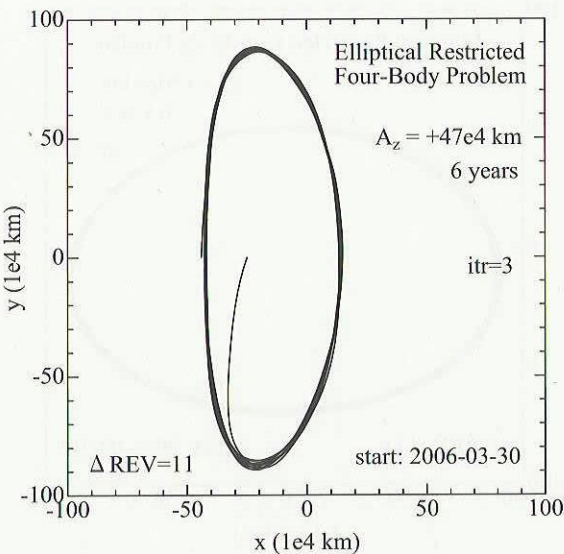


図 4-30 xy 平面図($A_z=47$ 万 km)

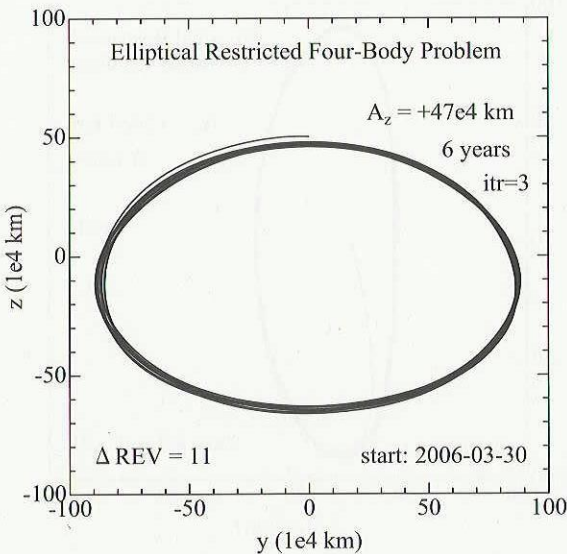


図 4-31 yz 平面図($A_z=47$ 万 km)

(8) $A_z=50$ 万 km の場合

初期軌道の作成において、減速係数 0.25 を使用した。

SQP 法による基準軌道の設計計算は、iteration の上限回数(200 回)後に INDEX=2 で止まった。

CPU 時間、位置・速度の最大 gap を表 4-10 に示す。

表 4-10 CPU 時間、位置・速度の最大 gap ($A_z=50$ 万 km)			
CPU 時間(分)	最大位置 gap (km)	最大速度 gap (mm/s)	備考
679.10	1.87e-2	9.09e-3	軌道決定誤差より 2 桁小さい

CPU 時間は 200 回の iteration に要した時間である。等号制約関数値は iteration=3 の時に最小になっているが、位置速度の最大 gap は約半分になっているだけなので、200 回 iteration 後の値を表 4-10 に記した。

図 4-32 に各 iteration 時の目的関数値と等号制約関数値を示す。

図 4-33 に xy 平面図を、図 4-34 に yz 平面図を示す。

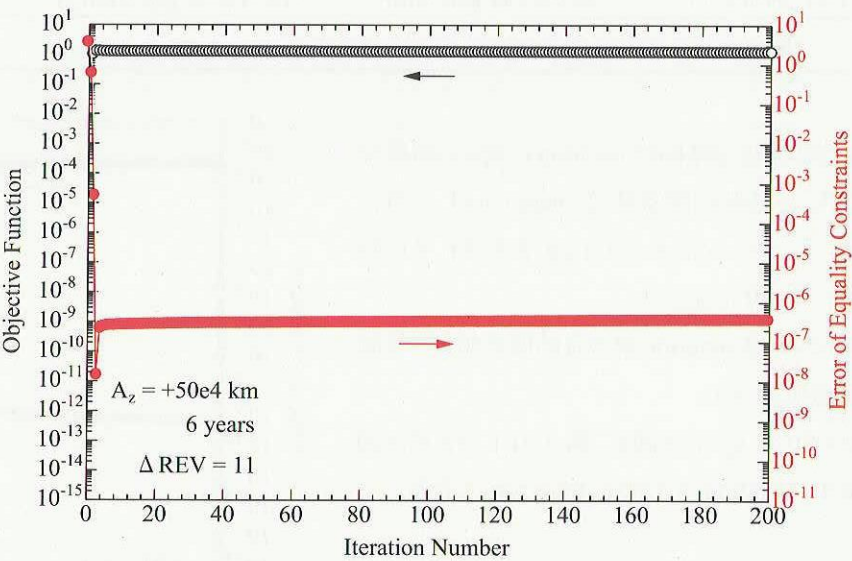


図 4-32 収束の過程($A_z=50$ 万 km)

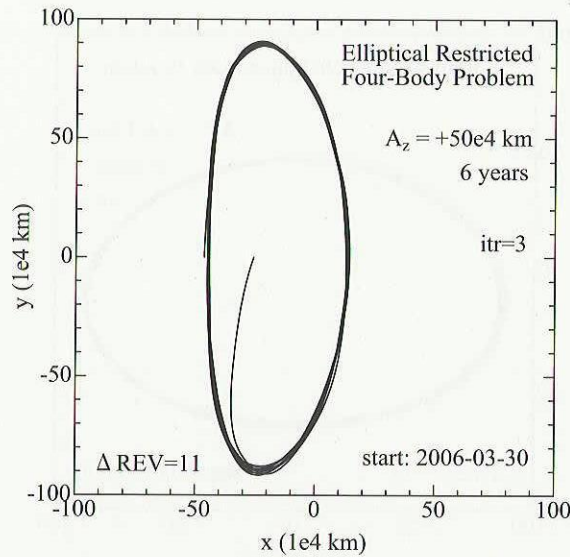


図 4-33 xy 平面図($A_z=50$ 万 km)

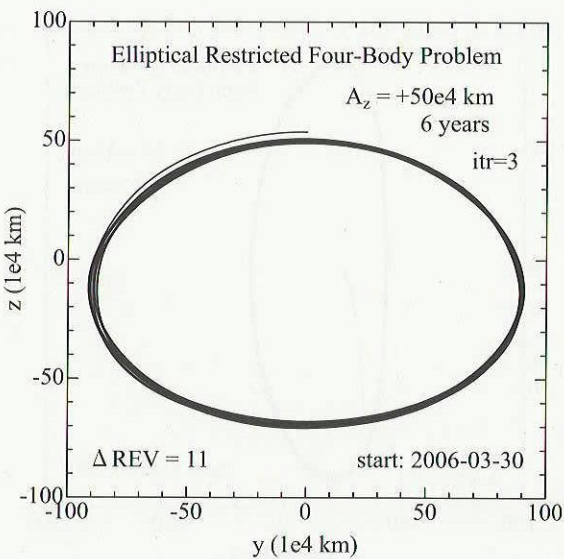


図 4-34 yz 平面図($A_z=50$ 万 km)

(9)計算期間 6 年間の場合のまとめ

表 4-11 に、計算期間 6 年間の場合の色々な A_z のハロー基準軌道の設計結果を記す。

表 4-11 色々な A_z のハロー基準軌道の設計結果(計算期間 6 年間)

A_z (万 km)	INDEX	CPU 時間(分)	最大位置 gap(km)	最大速度 gap(mm/s)	GAP/ODerr	A_y (万 km)
10	5	35.15	1.47e-3	7.51e-4	1.47e-3	約 65
13	0	156.95	2.64e-3	1.41e-3	2.64e-3	約 67
20	0	31.92	6.90e-6	3.63e-6	6.90e-6	約 70
30	0	32.50	4.61e-6	2.46e-6	4.61e-6	約 75
40	0	58.76	8.40e-6	4.25e-6	8.40e-6	約 82
45	0	174.22	6.51e-6	3.44e-6	6.51e-6	約 85
47	2	1002.17	2.85e-3	1.42e-3	2.85e-3	約 88
50	2	679.10	1.87e-2	9.09e-3	1.87e-2	約 90

図 4-35 に、GAP/ODerr と CPU 時間のグラフを描いた。

以上の検討から以下の事が判る。

- (a) A_z が 20 万 km ～ 45 万 km で高精度の基準軌道が設計された。
- (b) A_z が 10 万 km 付近においては、GAP/ODerr が $1e-3$ 程度まで大きくなっているが、基準軌道として使えるであろう。
- (c) A_z が約 50 万 km 以上では、更に gap の改善が必要と思われる。
- (d)INDEX=0 の最適解が得られた場合は、いずれも iteration 回数が 100 を超えていない。よって、iteration 回数の上限値を 100 として SQP 法ソフトを実行し、終了時の INDEX 値が 0 でない場合は、そこまでの iteration において gap が最も小さい所の制御変数を解とすれば良い。

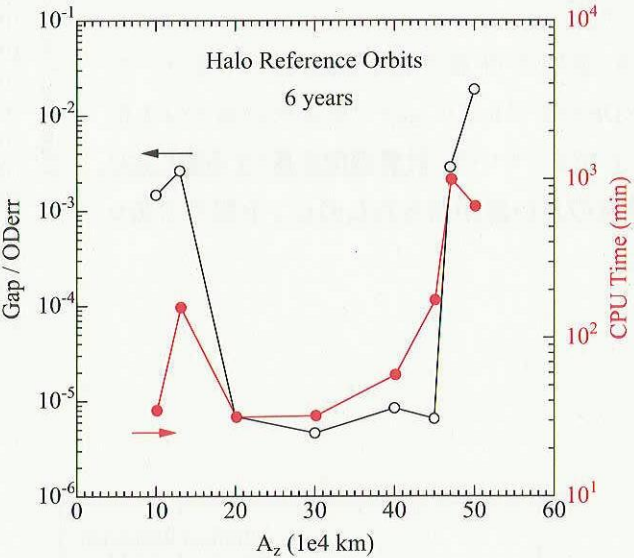


図 4-35 GAP/ODerr と CPU 時間

計算期間 11 年の場合

次に、10 年ミッションの場合を想定し、最後の約 3 ヶ月の跳び出し部を捨てるために、11 年間の基準軌道設計を行なう。11 年間の計算の場合、制御変数の数は 264 個になる。

(1) $A_z=10$ 万 km の場合

初期軌道は、減速係数 0.5 で求める事ができた。

SQP 法による基準軌道の設計計算は、20 回の iteration 後に INDEX=0 の最適解に収束した。

CPU 時間、位置・速度の最大 gap を表 4-12 に示す。

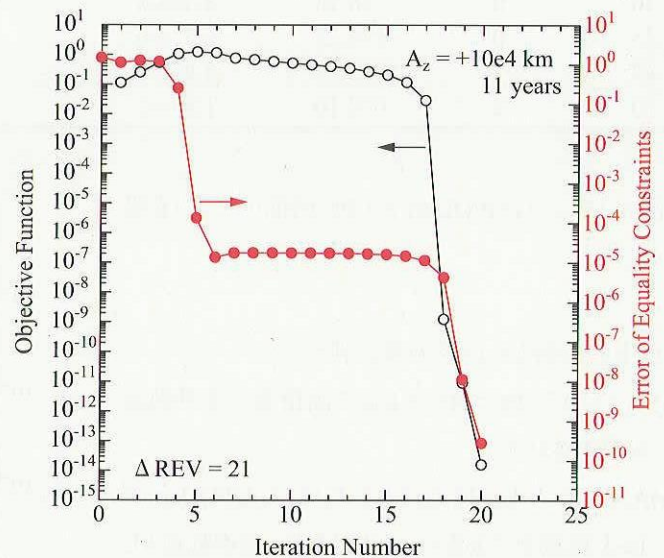
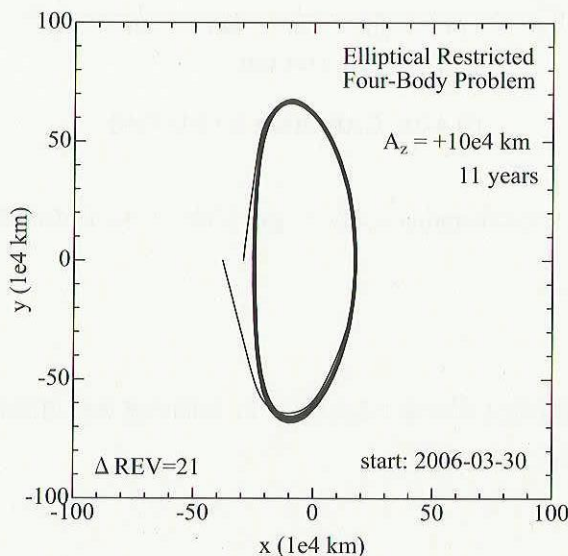
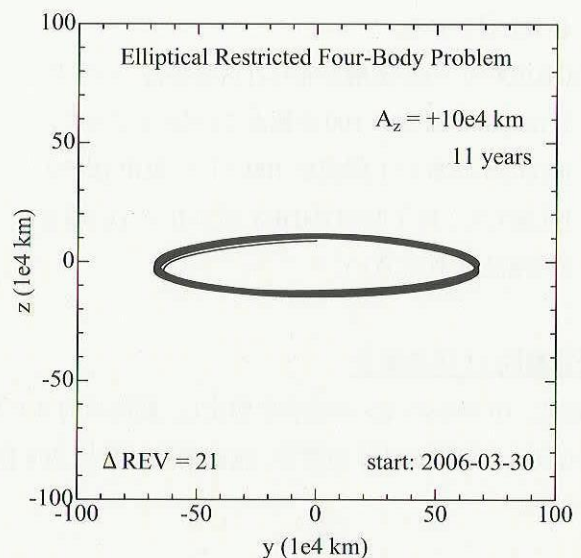
表 4-12 CPU 時間、位置・速度の最大 gap ($A_z=10$ 万 km)

CPU 時間(分)	最大位置 gap (km)	最大速度 gap (mm/s)	備考
209.78	8.65e-6	1.46e-5	軌道決定誤差より 5 桁小さい

図 4-36 に各 iteration 時の目的関数値と等号制約関数値を示す。

図 4-37 に xy 平面図を、図 4-38 に yz 平面図を示す。

6 年間の計算では、iteration 回数 11 で INDEX=5 で止まり、gap は軌道決定誤差の 3 桁下に留まっていた。計算期間を長くする事により、精度の良い解が得られたのは、予想外であった。

図 4-36 収束の過程($A_z=10$ 万 km)図 4-37 xy 平面図($A_z=10$ 万 km)図 4-37 yz 平面図($A_z=10$ 万 km)

(2) $A_z=13$ 万 km の場合

初期軌道は、減速係数 0.5 で求める事ができた。

SQP 法による基準軌道の設計計算は、18 回の iteration 後に INDEX=0 の最適解に収束した。

CPU 時間、位置・速度の最大 gap を表 4-13 に示す。

表 4-13 CPU 時間、位置・速度の最大 gap ($A_z=13$ 万 km)			
CPU 時間(分)	最大位置 gap (km)	最大速度 gap (mm/s)	備考
188.89	8.44e-6	1.26e-5	軌道決定誤差より 5 桁小さい

図 4-38 に各 iteration 時の目的関数値と等号制約関数値を示す。

図 4-39 に xy 平面図を、図 4-40 に yz 平面図を示す。

6 年間の設計の時よりも 2 桁小さい gap の解に収束している。

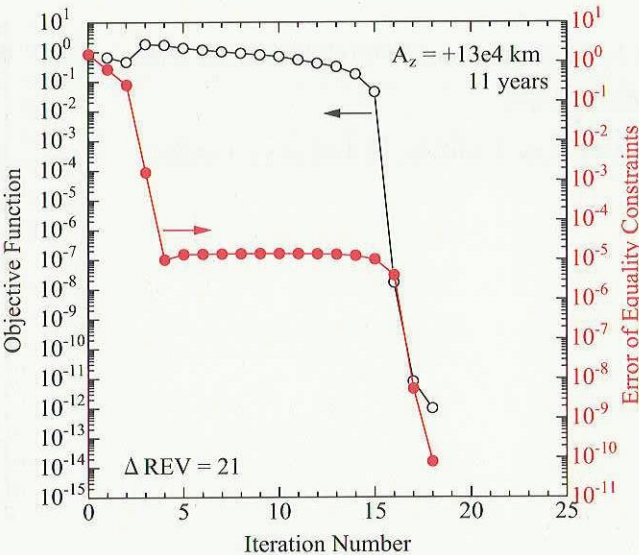


図 4-38 収束の過程($A_z=13$ 万 km)

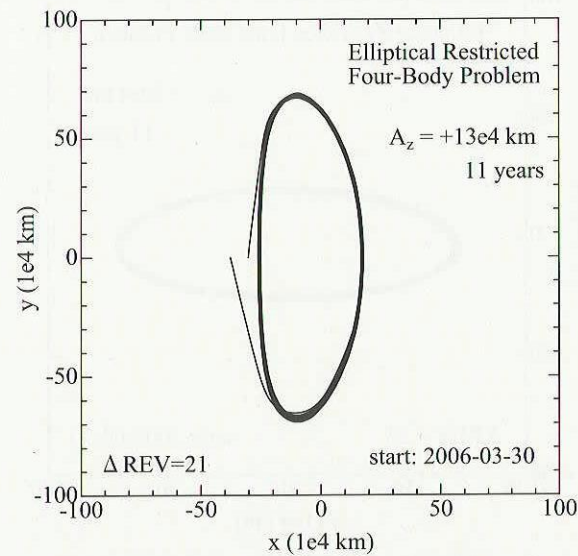


図 4-39 xy 平面図($A_z=13$ 万 km)

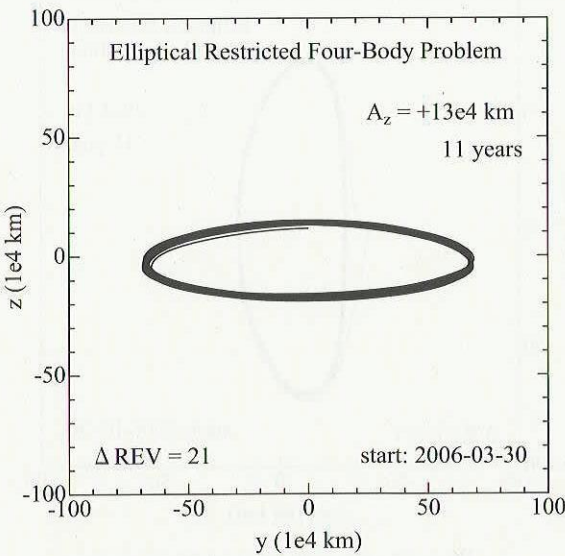


図 4-40 yz 平面図($A_z=13$ 万 km)

(3) $A_z=20$ 万 km の場合

初期軌道は、減速係数 0.5 で求める事ができた。

SQP 法による基準軌道の設計計算は、36 回の iteration 後に INDEX=0 の最適解に収束した。

CPU 時間、位置・速度の最大 gap を表 4-14 に示す。

表 4-14 CPU 時間、位置・速度の最大 gap ($A_z=20$ 万 km)

CPU 時間(分)	最大位置 gap (km)	最大速度 gap (mm/s)	備考
375.31	1.67e-5	8.54e-6	軌道決定誤差より 5 桁小さい

図 4-41 に各 iteration 時の目的関数値と等号制約関数値を示す。

図 4-42 に xy 平面図を、図 4-43 に yz 平面図を示す。

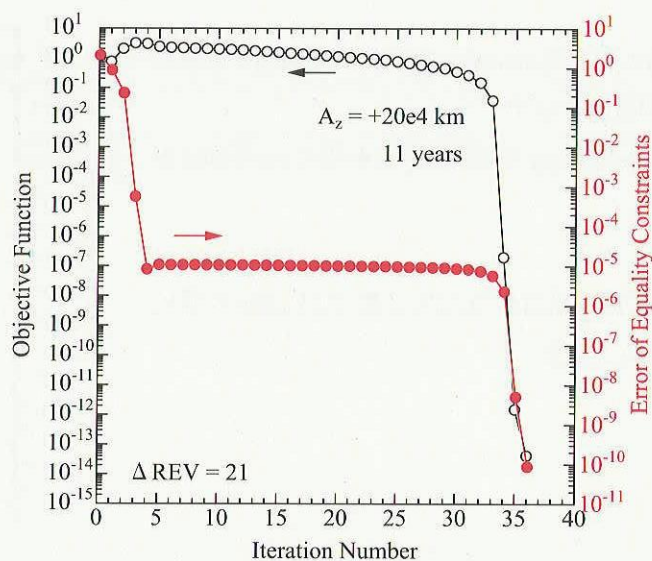


図 4-41 収束の過程($A_z=20$ 万 km)

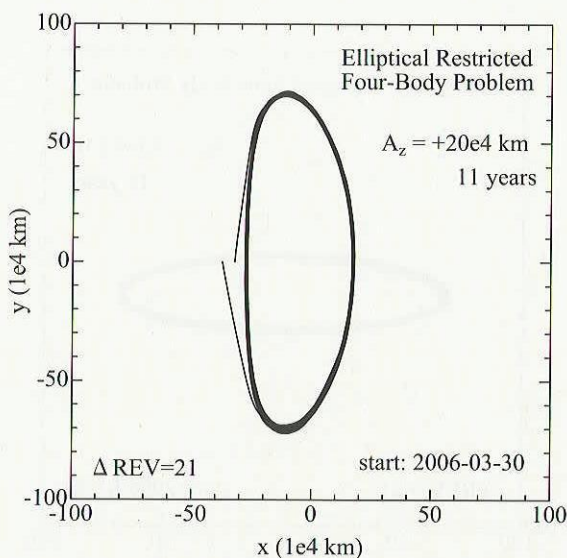


図 4-42 xy 平面図($A_z=20$ 万 km)

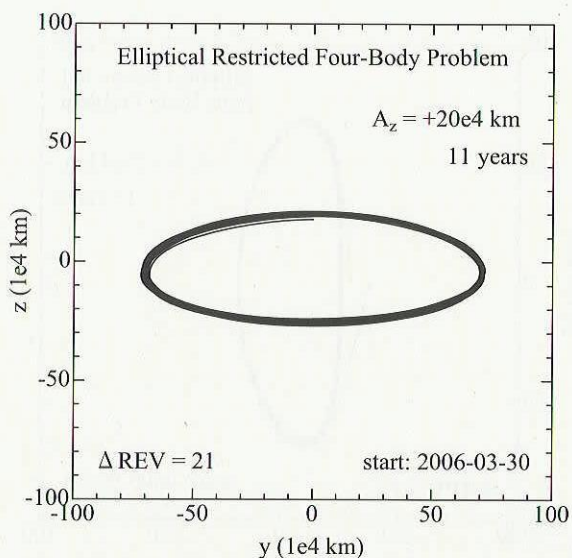


図 4-43 yz 平面図($A_z=20$ 万 km)

(4) $A_z=30$ 万 km の場合

初期軌道は、減速係数 0.5 で求める事ができた。

SQP 法による基準軌道の設計計算は、157 回の iteration 後に INDEX=5 を出力して止まった。等号制約関数の誤差は iteration=5 の後で最小だったので、その時の軌道を選択した。

CPU 時間、位置・速度の最大 gap を表 4-15 に示す。

表 4-15 CPU 時間、位置・速度の最大 gap ($A_z=30$ 万 km)			
CPU 時間(分)	最大位置 gap (km)	最大速度 gap (mm/s)	備考
1652.07	7.57e-4	3.91e-4	軌道決定誤差より 3 桁小さい

図 4-44 に各 iteration 時の目的関数値と等号制約関数値を示す。

図 4-45 に xy 平面図を、図 4-46 に yz 平面図を示す。

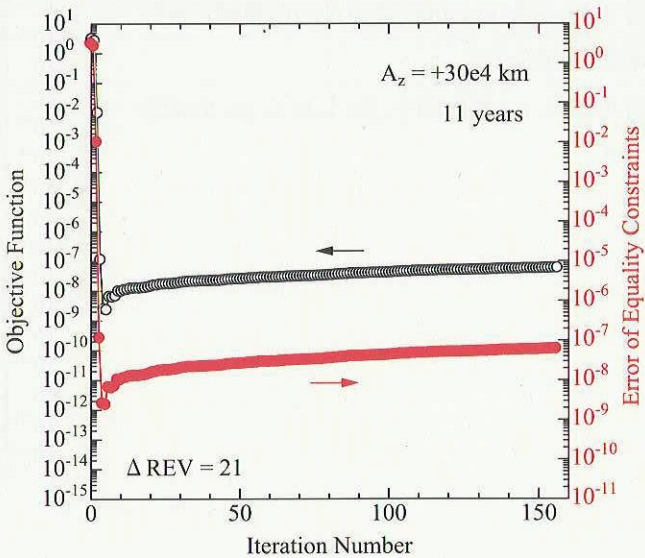


図 4-44 収束の過程($A_z=30$ 万 km)

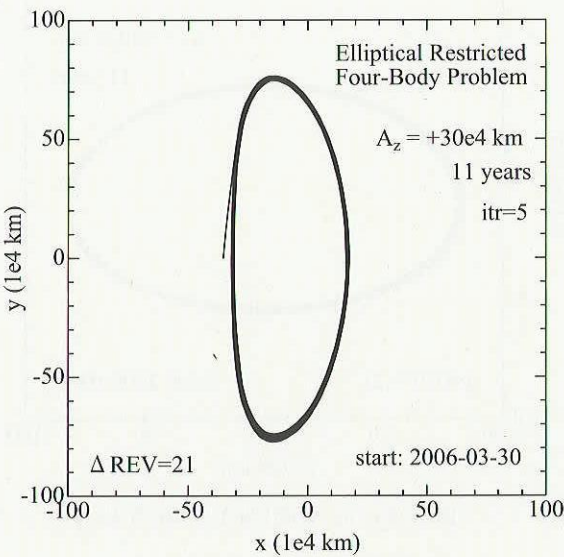


図 4-45 xy 平面図($A_z=30$ 万 km)

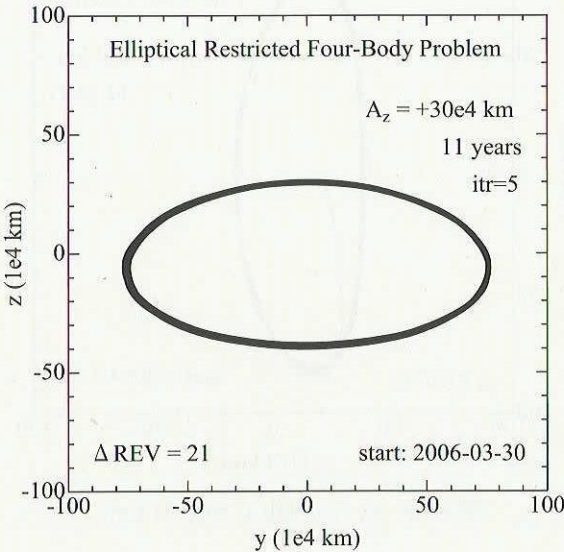


図 4-46 yz 平面図($A_z=30$ 万 km)

(5) $A_z=40$ 万 km の場合

初期軌道は、減速係数 0.25 で求めた。

SQP 法による基準軌道の設計計算は、81 回の iteration 後に INDEX=0 の最適解に収束した。

CPU 時間、位置・速度の最大 gap を表 4-16 に示す。

表 4-16 CPU 時間、位置・速度の最大 gap ($A_z=40$ 万 km)

CPU 時間(分)	最大位置 gap (km)	最大速度 gap (mm/s)	備考
872.90	1.11e-5	5.57e-6	軌道決定誤差より 5 桁小さい

図 4-47 に各 iteration 時の目的関数値と等号制約関数値を示す。

図 4-48 に xy 平面図を、図 4-49 に yz 平面図を示す。

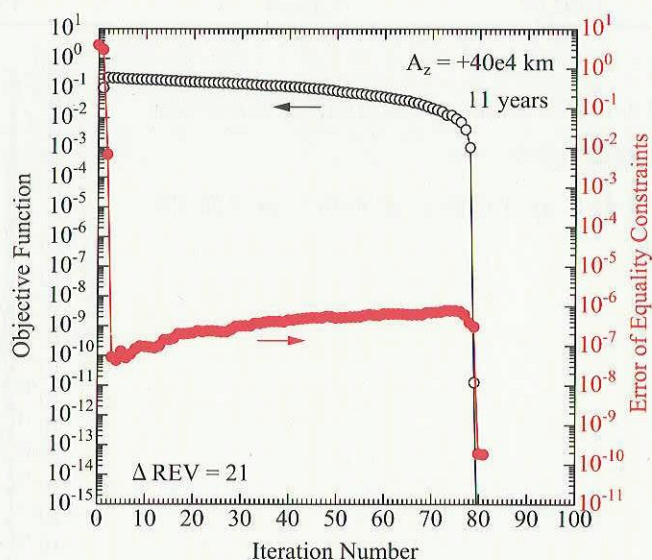


図 4-47 収束の過程($A_z=40$ 万 km)

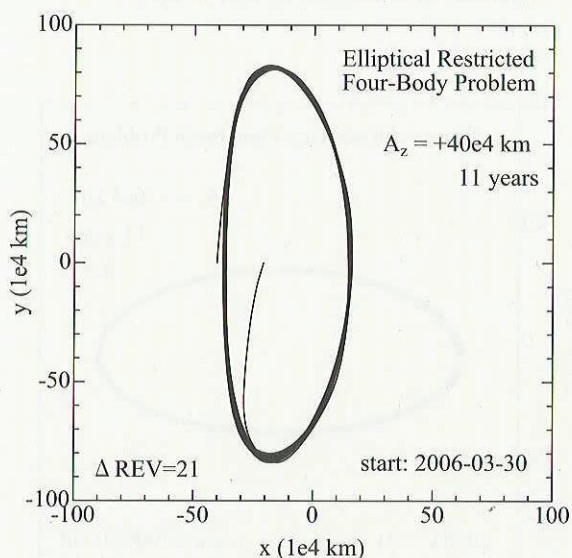


図 4-48 xy 平面図($A_z=40$ 万 km)

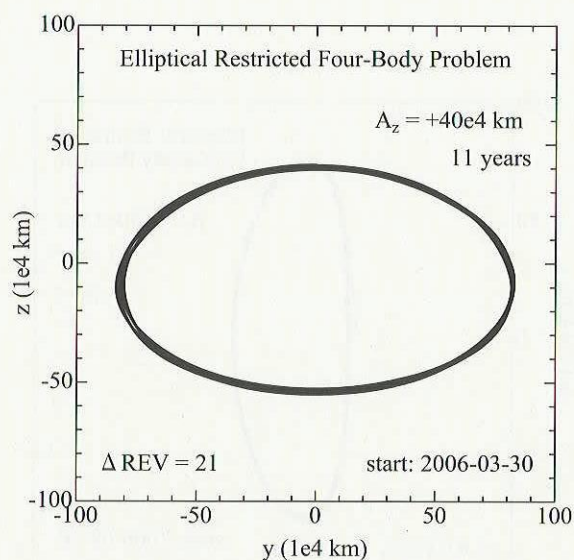


図 4-49 yz 平面図($A_z=40$ 万 km)

(6) $A_z=45$ 万 km の場合

初期軌道は、減速係数 0.25 で求めた。

SQP 法による基準軌道の設計計算は、5 回の iteration 後に INDEX=5 を出力して止まった。

CPU 時間、位置・速度の最大 gap を表 4-17 に示す。

表 4-17 CPU 時間、位置・速度の最大 gap ($A_z=45$ 万 km)			
CPU 時間(分)	最大位置 gap (km)	最大速度 gap (mm/s)	備考
71.15	6.04e-5	3.08e-5	軌道決定誤差より 4 桁小さい

図 4-50 に各 iteration 時の目的関数値と等号制約関数値を示す。

図 4-51 に xy 平面図を、図 4-52 に yz 平面図を示す。

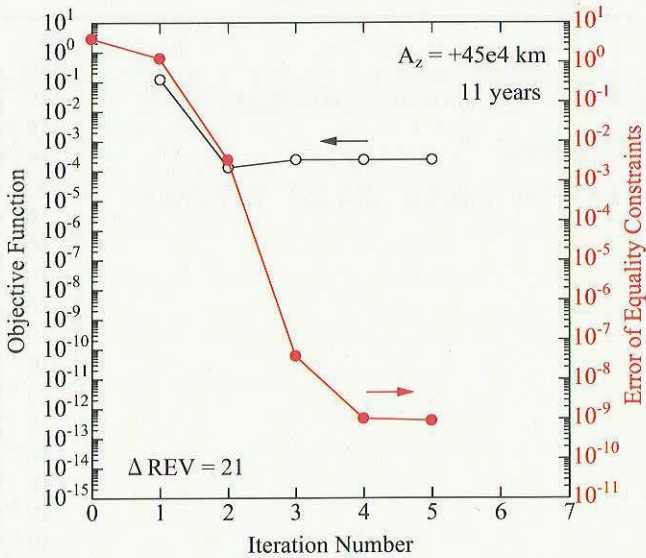


図 4-50 収束の過程($A_z=45$ 万 km)

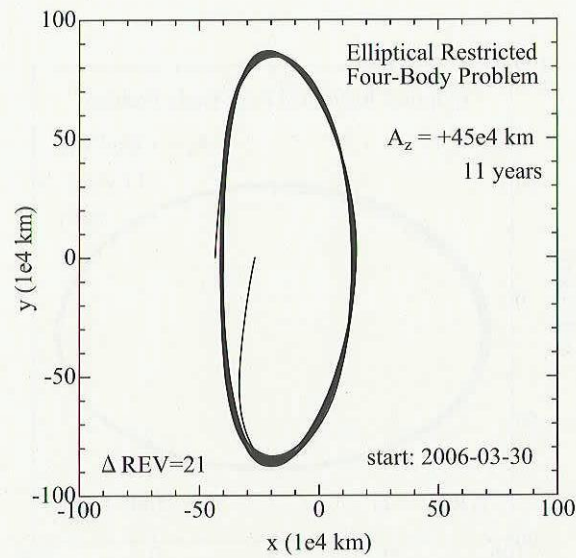


図 4-51 xy 平面図($A_z=45$ 万 km)

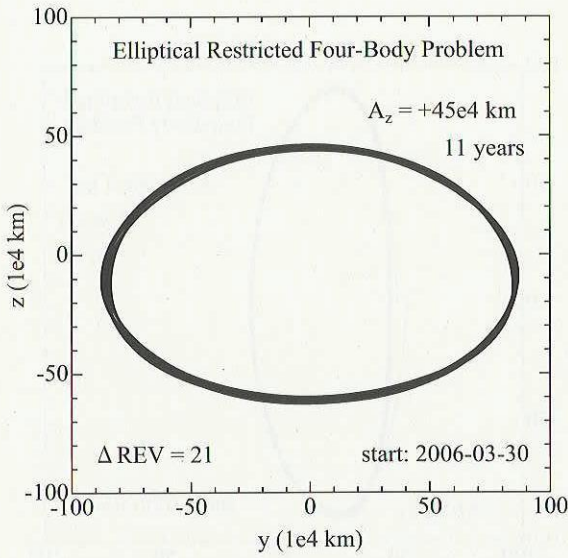


図 4-52 yz 平面図($A_z=45$ 万 km)

(7) $A_z=50$ 万 km の場合

初期軌道は、減速係数 0.25 で求めた。

SQP 法による基準軌道の設計計算は、上限とした 100 回の iteration 後に INDEX=2 を出力して止まった。
iteration=3 後の gap が最も小さいので、その時の軌道を採用した。

CPU 時間、位置・速度の最大 gap を表 4-18 に示す。

表 4-18 CPU 時間、位置・速度の最大 gap ($A_z=50$ 万 km)			
CPU 時間(分)	最大位置 gap (km)	最大速度 gap (mm/s)	備考
1135.66	2.64e-3	1.38e-3	軌道決定誤差より 3 桁小さい

図 4-53 に各 iteration 時の目的関数値と等号制約関数値を示す。

図 4-54 に xy 平面図を、図 4-55 に yz 平面図を示す。

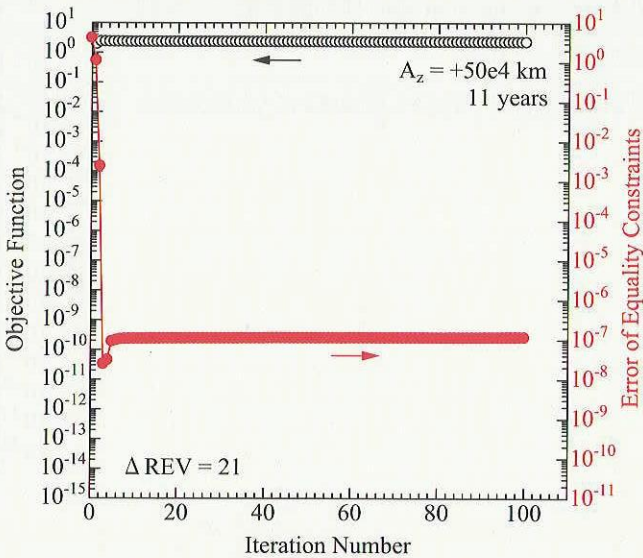


図 4-53 収束の過程($A_z=50$ 万 km)

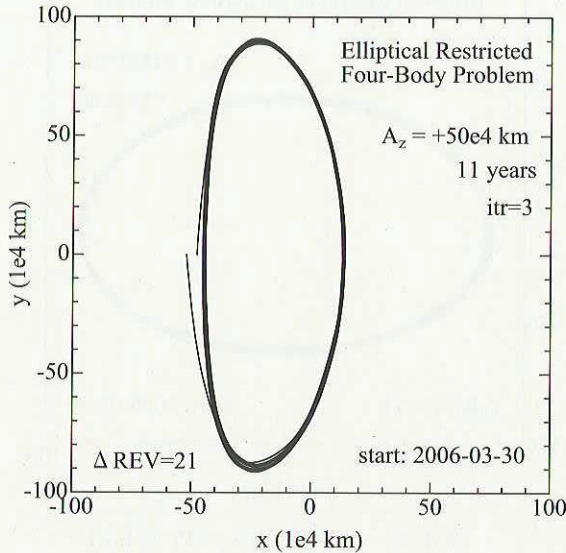


図 4-54 xy 平面図($A_z=50$ 万 km)

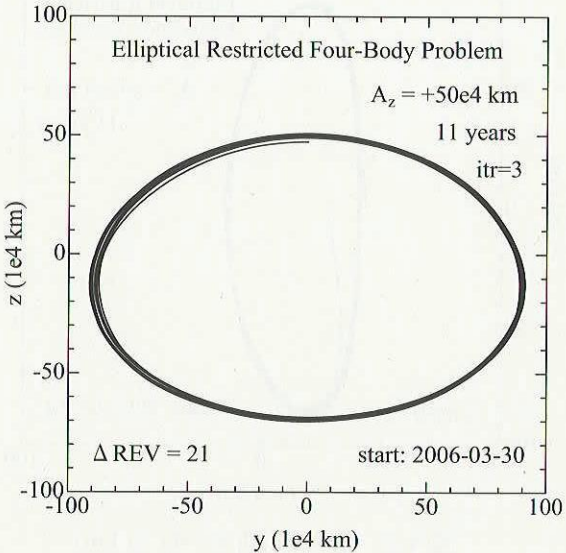


図 4-55 yz 平面図($A_z=50$ 万 km)

(8)計算期間 11 年間の場合のまとめ

表 4-19 に、計算期間 11 年間の場合の色々な A_z のハロー基準軌道の設計結果を記す。

表 4-19 色々な A_z のハロー基準軌道の設計結果(計算期間 11 年間)

A_z (万 km)	INDEX	CPU 時間(分)	最大位置 gap(km)	最大速度 gap(mm/s)	GAP/ODerr	A_y (万 km)
10	0	209.78	8.65e-6	1.46e-5	1.46e-5	約 65
13	0	188.89	8.44e-6	1.26e-5	1.26e-5	約 67
20	0	375.31	1.67e-5	8.54e-6	1.67e-5	約 70
30	5	1652.07	7.57e-4	3.91e-4	7.57e-4	約 75
40	0	872.90	1.11e-5	5.57e-6	1.11e-5	約 82
45	5	71.15	6.04e-5	3.08e-5	6.04e-5	約 85
50	2	1135.66	2.64e-3	1.38e-3	2.64e-3	約 90

図 4-56 に、GAP/ODerr と CPU 時間のグラフを描いた。比較のために、計算期間 6 年間の場合も破線で表示した。

以上の検討から以下の事が判る。

- (a) A_z が 10 万 km~20 万 km と 40 万 km 付近で高精度の基準軌道が設計された。
- (b) A_z が 30 万 km 付近と 45 万 km~50 万 km では GAP/ODerr が $1e-3$ 位まで大きくなっているが、基準軌道として使えるであろう。

- (c) INDEX=0 の最適解が得られた場合は、いずれも iteration 回数が 100 を超えていない(81 回が最大)。よって、計算期間 6 年間の場合と同様に、iteration 回数の上限値を 100 として SQP 法ソフトを実行し、終了時の INDEX 値が 0 でない場合は、そこまでの iteration において gap が最も小さい所の制御変数を解とすれば良い。

に、iteration 回数の上限値を 100 として SQP 法ソフトを実行し、終了時の INDEX 値が 0 でない場合は、そこまでの iteration において gap が最も小さい所の制御変数を解とすれば良い。

- (d) 一般に、計算期間が長くなると、収束性は悪くなる(gap が大きくなる)と考えられるが、 A_z が 10 万 km~13 万 km の場合の様に、計算期間が長くても収束性は良い事もある。

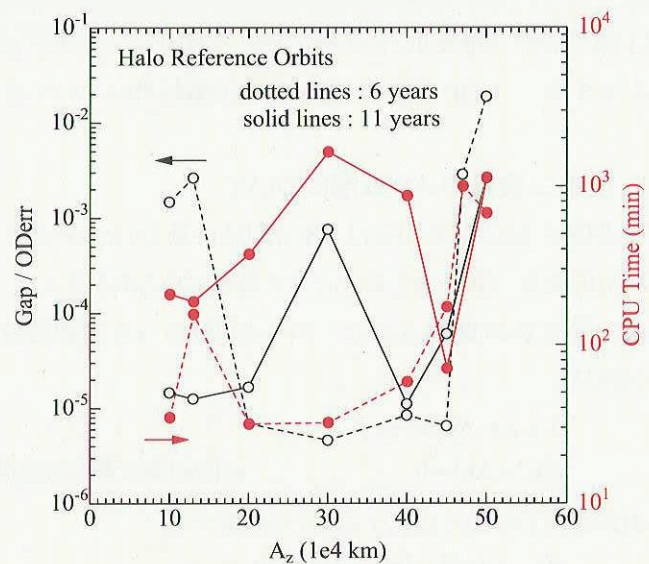


図 4-56 GAP/ODerr と CPU 時間

4.4 節のまとめ

本節では、定式化 1a ($\Delta \text{REV} = (\text{計算年数} \times 2 - 1)$) を色々なサイズのハロー軌道に適用し、基準軌道の設計を行なった。摂動として、地球公転軌道の離心率と月潮汐力を考慮した。

計算期間 6 年間の $A_z = 50$ 万 km の場合を除き、SQP 法で得られた基準軌道の位置速度の最大 gap は、軌道決定誤差より約 3 桁以上小さくなった。それらの軌道は、基準軌道として使用できると考えられる。検討したケースの約半数においては、軌道決定誤差より 5 桁小さい(数値積分誤差と同程度)gap の基準軌道が得られている。

SQP 法で解く時の iteration 回数の上限値は、100 が妥当と思われる。終了時の INDEX 値が 0 でない場合は、等号制約の誤差が最小の iteration 時の trajectory を基準軌道の候補とし、その軌道における位置速度の最大 gap

が軌道決定誤差より約3桁以上小さければ、基準軌道と見做して良いと考える。

基準軌道は、可能な限り位置速度の gap が小さい事が望ましい。軌道決定誤差より2～4桁小さい gap の軌道を、最小二乗最小ノルム解法¹⁴⁾にすれば、gap を更に2～3桁改善できる可能性がある。次章で検討する。

5. 最小二乗最小ノルム解による gap の改善

本章では、定式化 1a による SQP 法のソフトを使って設計したハロー基準軌道の位置速度 gap が、数値積分誤差よりも何桁か大きい場合に、最小二乗最小ノルム解を適用して、位置速度の gap を更に数桁改善する事を考える。定式化 1a により、解に十分近い制御変数が得られており、この後に必要な事は等号制約を更に高精度に満足させ、gap を小さくする事である。目的関数を更に小さくする事は重要ではない。と言うのは、目的関数はハロー軌道の z 方向の変動を小さくするために導入したものであるが、ある程度まで小さくなれば、ミッション上問題ないからである。

5.1 節で最小二乗最小ノルム解について解説し、5.2 節で gap を減らすソフト GDP(GDP0, GDP1)の設計方針を述べる。5.3 節で、GDP ソフトによる gap の低減結果について述べる。

5.1 最小二乗最小ノルム解について

この問題の制御変数の数は、等号制約の数よりも多いため、自由度が余っている。そこで、等号制約を満たすと共に制御変数の修正量を最小にする解を求める事を考える。

$\mathbf{c}(\mathbf{x})$ を等号制約関数(m次元ベクトル値関数)、 \mathbf{x} を制御変数(n次元)、Jを目的関数とすると、この問題は以下のよう

$$J = \Delta \mathbf{x}^T \Delta \mathbf{x} \Rightarrow \text{最小} \quad (5-1)$$

$$\mathbf{c}(\mathbf{x}_0 + \Delta \mathbf{x}) = 0 \quad \mathbf{x}_0 \text{ は制御変数の初期値} \quad (5-2)$$

(5-2)式を以下の様に $\Delta \mathbf{x}$ の1次まで展開する。

$$\mathbf{c}(\mathbf{x}_0 + \Delta \mathbf{x}) \doteq \mathbf{c}(\mathbf{x}_0) + D\Delta \mathbf{x} = 0 \quad (5-3)$$

$$D \equiv \frac{\partial \mathbf{c}}{\partial \mathbf{x}} : m \times n \text{ 行列}$$

次に、ラグランジュの未定乗数 λ を導入して、ラグランジュ関数 L を以下の様に定義する。

$$L = \Delta \mathbf{x}^T \Delta \mathbf{x} + \lambda^T \mathbf{c}(\mathbf{x}_0 + \Delta \mathbf{x}) \doteq \Delta \mathbf{x}^T \Delta \mathbf{x} + \lambda^T [\mathbf{c}(\mathbf{x}_0) + D\Delta \mathbf{x}] \quad (5-4)$$

$\Delta \mathbf{x}$ 及び λ が独立変数であり、L が極値を取る時の $\Delta \mathbf{x}$, λ は、以下の連立方程式を解いて得られる。

$$\left(\frac{\partial L}{\partial \Delta \mathbf{x}} \right)^T = 2\Delta \mathbf{x} + D^T \lambda = 0 \quad (5-5)$$

$$\left(\frac{\partial L}{\partial \lambda} \right)^T = \mathbf{c}_0 + D\Delta \mathbf{x} = 0 \quad \mathbf{c}_0 = \mathbf{c}(\mathbf{x}_0) \quad (5-6)$$

(5-5)式を $\Delta \mathbf{x}$ について解き、それを(5-6)式に代入すると、 λ が以下のように表わされ、

$$\lambda = 2(DD^T)^{-1} \mathbf{c}_0 \quad (5-7)$$

これを(5-5)式に代入して、 $\Delta \mathbf{x}$ が以下のように求められる。

$$\Delta \mathbf{x} = -D^T (DD^T)^{-1} \mathbf{c}_0 \quad (5-8)$$

なお、上式の $D^T (DD^T)^{-1}$ は、行列 D に対する Moore-Penrose の一般逆行列と呼ばれている。

D を係数行列とする最小二乗問題を考えると、D のランクが n より小さい時、二乗和を最小にする解は一意に定ま

らないが、 $\Delta \mathbf{x}$ のノルムを最小にするという条件を追加すれば解が得られる。それを、最小二乗最小ノルム解という。(5-8)式が、最小二乗最小ノルム解を与える。

$\Delta \mathbf{x}$ を求める時、D を使って(5-8)式の通りに計算すると、通常最小二乗法の正規方程式をそのまま数値計算するのと同様に精度が悪い。D を特異値分解してから、最小二乗最小ノルム解を求めるのが良い。文献 14) に、特異値分解による最小二乗最小ノルム解を求めるサブルーチン(SVDEC, SVSOL)が掲載されている。本解析でも、SVDEC, SVSOL を使用する。

5.2 gap 低減ソフト GDP の作成

最小二乗最小ノルム解により gap を小さくするソフト(GDP)を以下の仕様で作成する。

(a)名前を GDP(Gap Decrease Program)とする。

SVSOL が出力する $\Delta \mathbf{x}$ をそのまま用いる GDP0 と、減速ニュートン法¹⁴⁾により効率的に gap が小さくなる減速係数 μ を求めて、 $\mu \Delta \mathbf{x}$ を用いる GDP1 を作成する。

(b)制御変数、等号制約関数は、SQP 法によるハロー基準軌道設計ソフトと同じ定義にする。

(c)制御変数の正規化定数、等号制約関数のスケーリング則も、SQP 法によるハロー基準軌道設計ソフトと同じにする。

(d)SQP 法によるハロー基準軌道設計ソフトが出力する NEXT ファイル(求められた制御変数を格納)を、そのまま GDP の入力にする。

このような仕様により、SQP 法によるハロー基準軌道設計ソフトで得られた基準 trajectory の gap が大きい場合にも、容易に GDP ソフトを実行できる。

5.3 GDP による gap 低減

初めに SVSOL が出力する $\Delta \mathbf{x}$ をそのまま用いる GDP0 を使って gap の低減を試み、次に減速ニュートン法も適用した GDP1 を試みる。

GDP0 による gap 低減

4.4 節において gap が軌道決定誤差より 5 桁下まで到達しなかった場合に対して、GDP0 を使って gap の低減を試みる。

(1) $A_z=10$ 万 km、6 年間計算の場合

SQP 法によるソフトでは、軌道決定誤差より 3 桁小さい gap であった。GDP0 の 1 回の iteration で軌道決定誤差より 5 桁下の gap になった。CPU 時間は 3.03 分(Pentium4 3.0GHz による)である。

(2) $A_z=13$ 万 km、6 年間計算の場合

SQP 法によるソフトでは、軌道決定誤差より 3 桁小さい

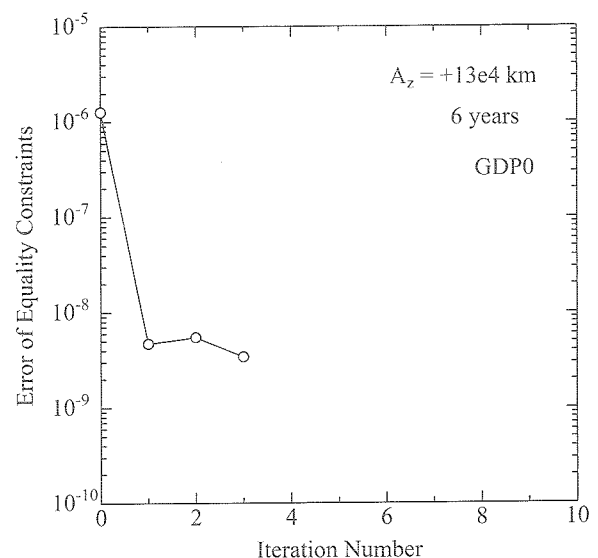


図 5-1 iteration 毎の等号制約関数の変化

gap であった。GDP0 の 3 回の iteration で軌道決定誤差より 5 桁下の gap になった。CPU 時間は 6.07 分である。

等号制約関数の変化を図 5-1 に示す。GDP0 の 2 回目の iteration では、gap は僅かに大きくなっている。gap=0 に接近すると、最小二乗最小ノルム解(線型解)の Δx をそのまま使うのは良くない事が判る。

(3) $A_z=47$ 万 km、6 年間計算の場合

SQP 法によるソフトでは、軌道決定誤差より 3 桁小さい gap であった。GDP0 の 1 回の iteration で軌道決定誤差より 5 桁下の gap になった。CPU 時間は 3.26 分である。

(4) $A_z=50$ 万 km、6 年間計算の場合

SQP 法によるソフトでは、軌道決定誤差より 2 桁小さい gap であった。GDP0 の 2 回の iteration で軌道決定誤差より 5 桁下の gap になった。CPU 時間は 4.98 分である。

等号制約関数の変化を図 5-2 に示す。

(5) $A_z=30$ 万 km、11 年間計算の場合

SQP 法によるソフトでは、軌道決定誤差より 3 桁小さい gap であった。GDP0 の 6 回の iteration で軌道決定誤差より 5 桁下の gap になった。CPU 時間は 36.49 分である。

等号制約の変化を図 5-3 に示す。3 回目と 5 回目の iteration で、gap は僅かに大きくなっている。

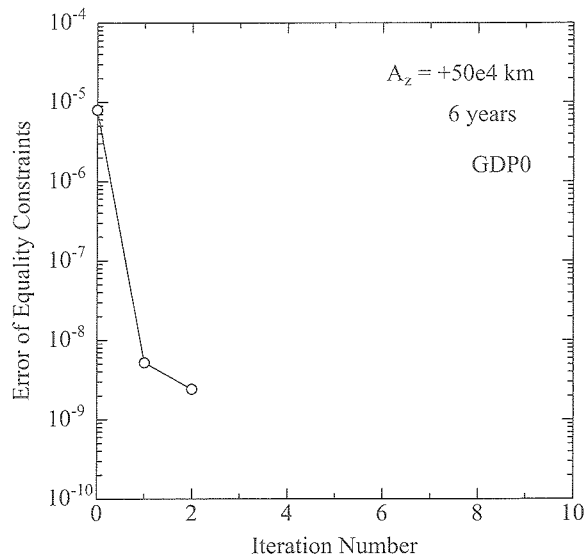


図 5-2 iteration 毎の等号制約関数の変化

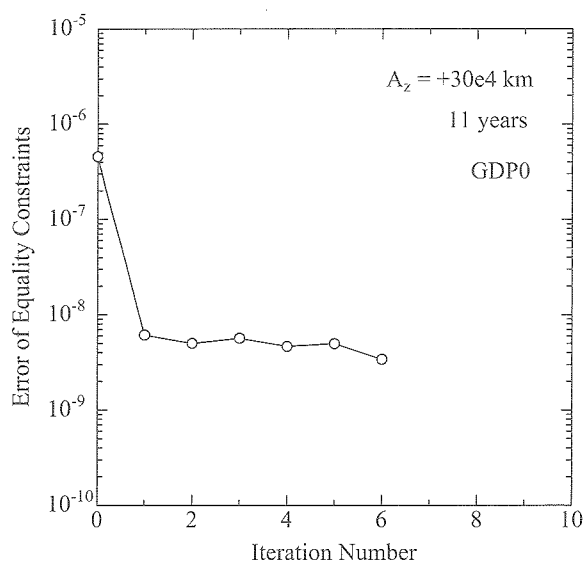


図 5-3 iteration 毎の等号制約関数の変化

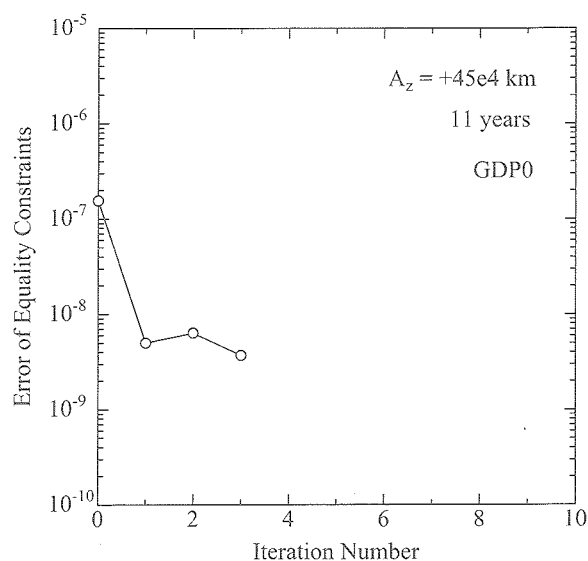


図 5-4 iteration 毎の等号制約関数の変化

(6) $A_z=45$ 万 km、11 年間の場合

SQP 法によるソフトでは、軌道決定誤差より 4 桁小さい gap であった。3 回の iteration で軌道決定誤差より 5 桁下の gap になった。CPU 時間は 21.93 分である。

等号制約の変化を図 5-4 に示す。2 回目の iteration で gap は僅かに大きくなっている。

GDP1 による gap 低減

GDP0 の繰り返し計算において、途中で gap が増加したことがあった。それらに対して、減速ニュートン法も適用した GDP1 を使用し、収束が早まるかどうかを調べる。初めに、使用した文献 14) の減速ニュートン法のアルゴリズムを以下に掲げる。

[減速ニュートン法のアルゴリズム] ($f(x) = 0$ となる x を求める)

(1) $\mu=1$ とおく。 μ は減速係数。

(2) $y = x + \mu \Delta x$ とおき、 $f(x)$ と $f(y)$ を計算する。

$|f(y)| < (1 - \mu/2) f(x)$ ならば、手順(4)へ行く。そうでないならば、手順(3)へ行く。

(3) μ を半分にして手順(2)に戻る。但し、 $\mu \geq 0.01$ の範囲とする。この範囲を外れると、 $x + \Delta x$ を新しい x とする。(1)へ戻る。

(4) y を新しい x とする。(1)へ戻る。

(1) $A_z=13$ 万 km、6 年間計算の場合

GDP1 の 2 回の iteration で軌道決定誤差より 5 桁下の gap になった。図 5-5 に示したように、単調に減少している。CPU 時間は 4.54 分であり、GDP0 の 6.07 分より早い。減速係数は、1 回目は 1.0、2 回目は 0.5 となった。

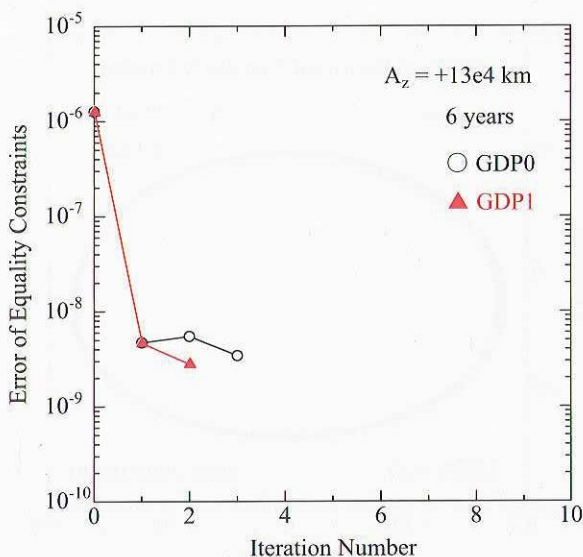


図 5-5 iteration 毎の等号制約関数の変化

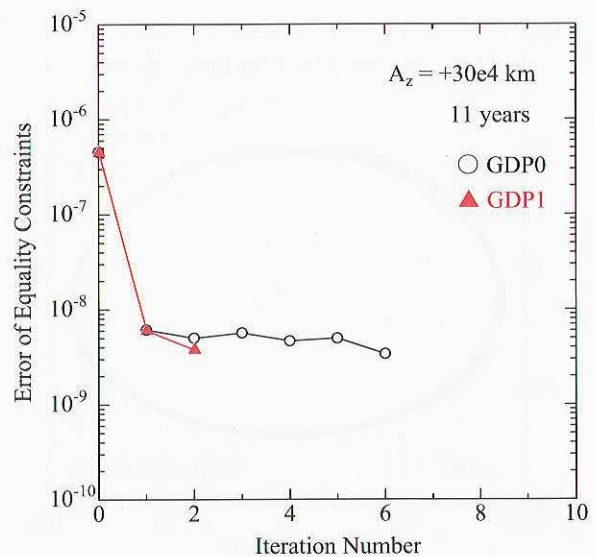


図 5-6 iteration 毎の等号制約関数の変化

(2) $A_z=30$ 万 km, 11 年間計算の場合

GDP1 の 2 回の iteration で軌道決定誤差より 5 桁下の gap になった。図 5-6 に示したように、単調に減少している。CPU 時間は 15.57 分であり、GDP0 の 36.49 分より早い。減速係数は、1 回目は 1.0、2 回目は 0.5 であった。

考察

4.4 節の検討において最も gap の大きかった $A_z=50$ 万 km、6 年間計算の場合の GDP0 による trajectory を、以下に SQP 法だけによるものと比較して示す。図 5-7 は SQP 法のソフトによる軌道決定誤差より 2 桁下の gap に留まった場合であり、その最後の制御変数を初期値として、GDP0 で収束させて得た trajectory が図 5-8 である。初期時刻付近での違いは微小であるが、終端時刻付近では両者は大きく異なる。しかし、元々最後の半周は捨てる事を想定しており、その他の部分がこの程度一致していれば問題ない。

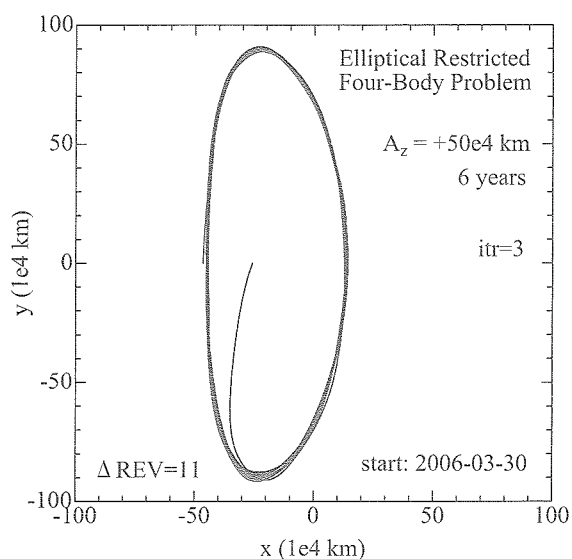


図 5-7 xy 平面図(SQP 法)

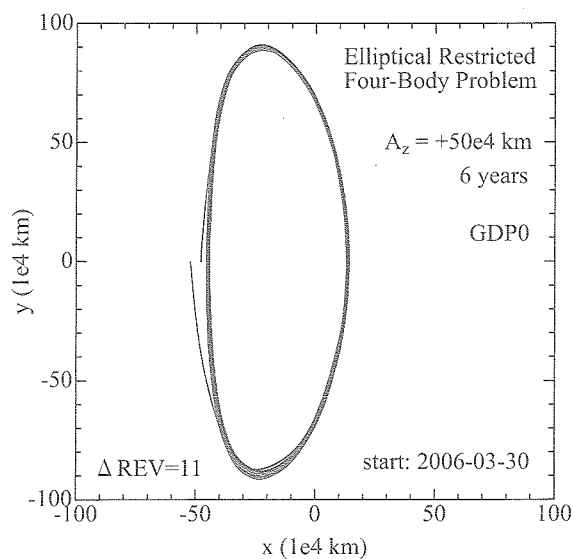


図 5-8 xy 平面図(GDP0)

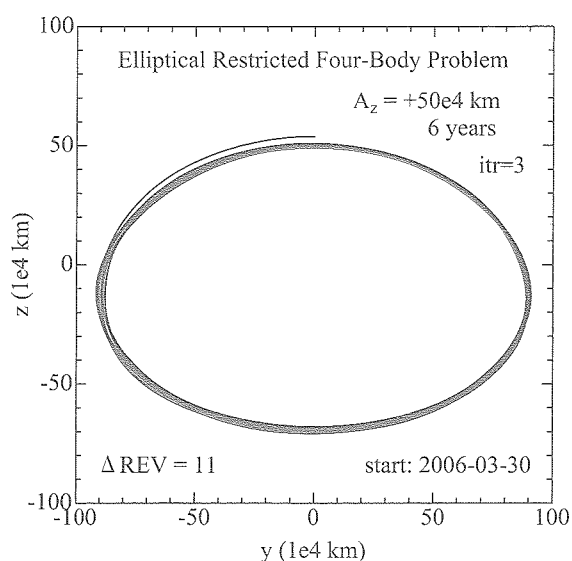


図 5-9 yz 平面図(SQP 法)

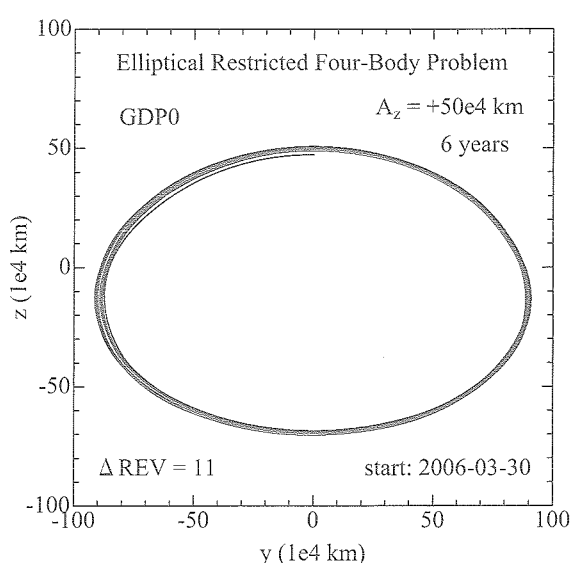


図 5-10 yz 平面図(GDP0)

図 5-9 と図 5-10 に、yz 平面図を比較した。終端時刻付近で多少異なっているが、問題ない。

制御変数の修正量を最小にしながらか等号制約を約 3 桁改善したが、ハロー基準軌道として問題ない事が判る。その他の場合は gap を 1 桁～2 桁改善したものであるが、初期時刻付近、終端時刻付近を含めて、SQP 法ソフトだけで得た trajectory と GDP0 も用いて得た trajectory は殆ど一致している。

SQP 法ソフトで軌道決定誤差より 5 桁下の gap が得られている場合は、図 5-11 に示すように、目的関数が大きく改善されて殆ど 0 になった直後に、等号制約関数も大きく改善されている。この

時の SQP 法の処理は最小二乗最小ノルム解とほぼ同じになっていると考えられる。

gap がそこまで小さくならなかった場合は、図 5-12 の様に、目的関数がいつまでも減少していない。図 5-12 は、図 5-7 と図 5-9 の場合の収束過程である。図 5-12 のような大きな目的関数値であっても、図 5-7、図 5-9 に示したように、gap が多少大きい事を別にすれば基準軌道として問題ないものであり、目的関数の減少は放

棄して等号制約の減少のみに焦点を当てた最小二乗最小ノルム解が有効になっている。

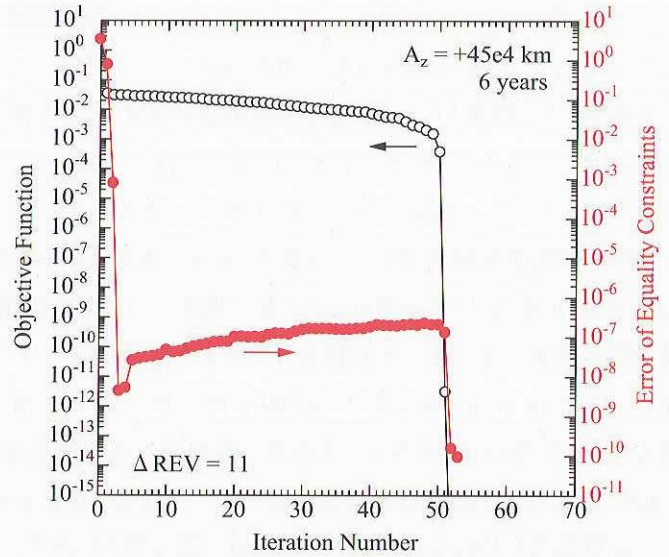


図 5-11 収束の過程($A_z=45$ 万 km)

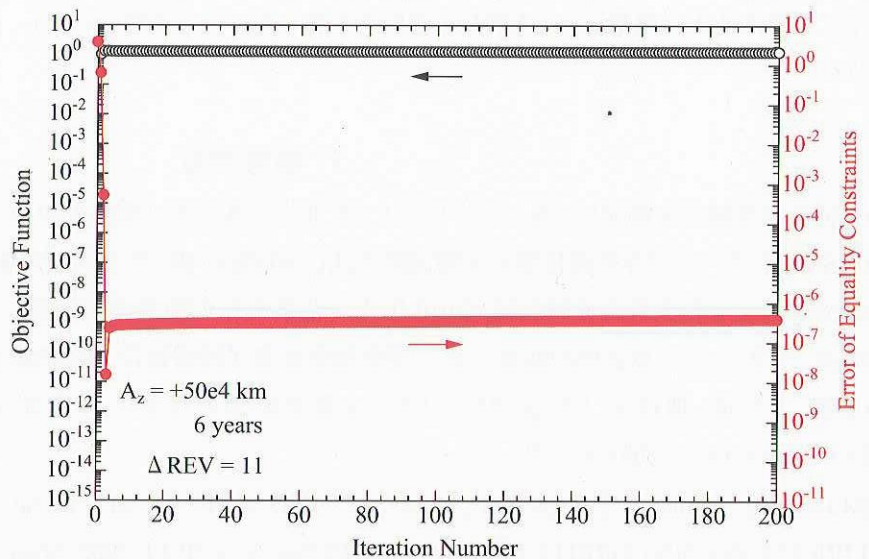


図 5-12 収束の過程($A_z=50$ 万 km、6 年間)

第 5 章では、SQP 法によるハロー基準軌道設計ソフトで gap の低減が不十分だった場合に対して、最小二乗最小ノルム解を用いて gap を更に 2～3 桁小さくする事を試みた。最小二乗最小ノルム解により、容易に gap を 2～3 桁小さくでき、減速ニュートン法も併用すると、更にスピードアップとなる事が判った。なお、GDP ソフトにより gap を十分小さくした trajectory を SQP 法だけで求めた trajectory と比較したが、両者に有意な差は認められず、GDP ソフトで得た trajectory は基準軌道として問題ない事を確認した。以上の事から、SQP 法によるソフトと最小二乗最小ノルム解法を組み合わせる事で、どんなサイズ of ハロー軌道に対しても、軌道決定誤差より 5 桁小さい gap の基準軌道を設計できる事が判った。

6. 結論

本報告では、太陽-地球系 L2 点周りの色々なサイズのハロー基準軌道を、高次解析解を求めることなく設計する方法を示した。摂動としては、地球公転軌道の離心率と月潮汐力を考慮した。その他の摂動として、太陽輻射圧と惑星潮汐力があるが、輻射圧による加速度はほぼ一定の大きさであり、惑星潮汐力は小さいので、実際の太陽系モデルにおいても、本報告の手法を適用できると考えられる。このように設計された基準軌道に追従するように、数ヶ月間隔の軌道保持制御を行なう事で、少ない ΔV による軌道保持が可能となる。

L2 点周りの軌道は不安定なため、長い期間に亘って数値積分を行なうと積分誤差が非常に大きくなってしまい、長期間の基準軌道を 1 つの初期条件だけから数値積分で作成する事はできない。ハロー軌道の半周(xz 平面を出発して再び xz 平面に戻るまでの約 90 日間の軌道)を数値積分の単位とし、xz 平面上の接続点における各半周軌道の位置・速度の gap をゼロにする事で長期間の基準軌道を作った。

SQP 法で基準軌道を設計するには、適当な初期軌道が必要であり、本報告では円制限三体問題の線型解を用いて初期軌道を作成した。地球公転軌道の離心率と月潮汐力を考慮すると、接続点において、位置で約 10 万 km、速度で約 100m/s の gap が存在する。これらの gap を数値積分誤差程度に抑えるには、約 10 桁の gap 改善が必要である。定式化 1a を用いた SQP 法のソフトにより、7 桁～10 桁の gap 改善ができた。10 桁の改善に達しなかった場合に、更に最小二乗最小ノルム解法を適用する事により、全ての場合に対し、gap は数値積分誤差程度に抑えられた。

7. 参考文献

- 1)次世代赤外線天文衛星ワーキンググループ, “次世代赤外線天文衛星 SPICA ミッション提案書,” 2005 年 3 月.
- 2)JASMINE チーム, “赤外線位置天文観測衛星(JASMINE)計画 第 1 回検討報告書,” 2003 年 7 月.
- 3)光赤外天文学将来計画検討会編, “2010 年代の光赤外天文学(将来計画検討報告書),” 2005 年 3 月.
- 4)歌島, “ラグランジュ点近傍の軌道力学,” 宇宙開発事業団技術報告 NASDA-TMR-960033, 1997 年 3 月.
- 5)歌島, “太陽-地球系 L2 点周りのリサージュ基準軌道の設計,” 宇宙航空研究開発機構研究開発報告 JAXA-RR-04-021, 2005 年 2 月.
- 6)M.Hechler, J.Cobos, “HERSCHEL, PLANCK AND GAIA ORBIT DESIGN,” International Conference on LIBRATION POINT ORBITS AND APPLICATIONS, June 10-14, 2002, Spain.
- 7)G.Gomez, J.Llibre, R.Martinez, C.Simo, “Dynamics and Mission Design Near Libration Points, Vol.1,” World Scientific Monograph Series in Mathematics, World Scientific Publishing Co., 2001.
- 8)G.Gomez, J.Llibre, R.Martinez, C.Simo, “Dynamics and Mission Design Near Libration Points, Vol.3,” World Scientific Monograph Series in Mathematics, World Scientific Publishing Co., 2001.
- 9)G.Gomez, K.Howell, J.Masdemont, and C.Simo, “Station-Keeping Strategies for Translunar Libration Point Orbits,” AAS 98-168, 1998.
- 10)G.Gomez, J.Masdemont, and C.Simo, “Quasihalo Orbits Associated with Libration Points,” The Journal of the Astronautical Sciences, Vol.46, No.2, 1998, pp. 135-176.
- 11)C. E. Roberts, “The SOHO Mission L1 Halo Orbit Recovery from the Attitude Control Anomalies of 1998,” International Conference on LIBRATION POINT ORBITS AND APPLICATIONS, June 10-14, 2002, Spain.
- 12)J.Rodriguez-Canabal, “OPERATIONAL HALO ORBIT MAINTENANCE TECHNIQUE FOR SOHO,” ESA

SP-255, 1986.

- 13) 茂木俊秀, 福島雅夫, “FORTRAN77 最適化プログラミング(岩波コンピュータサイエンスシリーズ),” 岩波書店, 1991.
- 14) 渡部 力, 名取 亮, 小国 力, “Fortran77 による数値計算ソフトウェア,” 丸善株式会社, 1989 年.
- 15) 堀 源一郎, “現代天文学講座 14・天文計算セミナー,” 恒星社, 1981 年.
- 16) Victor Szebehely, “Theory of Orbits (The Restricted Problem of Three Bodies),” Academic Press, 1967.
- 17) 歌島, “太陽-地球系 L4, L5 点近傍軌道の摂動解析,” 宇宙開発事業団技術報告 NASDA-TMR-980010, 1999 年 3 月.
- 18) 歌島, “太陽-地球系 L1, L2 点軌道の軌道決定の概要,” JAXA 情報技術開発共同センター資料 GSB-04032, 2004 年 10 月.
- 19) R.W.Farquhar, D.P.Muhonen, D.L.Richardson, “Mission Design for a Halo Orbiter of the Earth,” Journal of Spacecraft and Rockets, Vol.14, No.3, 1977, pp.170-177.
- 20) N.Eismont, D.Dunham, S.C.Jen, R.Farquhar, “LUNAR SWINGBY AS A TOOL FOR HALO-ORBIT OPTIMIZATION IN RELICT-2 PROJECT,” ESA SP-326, 1991.

宇宙航空研究開発機構研究開発報告 JAXA-RR-05-008

発行 平成17年11月30日
編集・発行 宇宙航空研究開発機構
〒182-8522 東京都調布市深大寺東町7-44-1
URL : <http://www.jaxa.jp/>
印刷・製本 (株)ピー・シー・シー・

本書及び内容についてのお問い合わせは、下記にお願いいたします。

宇宙航空宇宙研究開発機構 情報システム部 研究開発情報センター
〒305-8505 茨城県つくば市千現2-1-1
TEL:029-868-2079 FAX:029-868-2956

© 2005 宇宙航空研究開発機構

※ 本書の一部または全部を無断複写・転載・電子媒体に加工することを禁じます。



宇宙航空研究開発機構
Japan Aerospace Exploration Agency