

# 軸圧縮をうける平板の座屈後の挙動

## 第1報 解析的安定判別法による座屈値の検討

邊 吾 一・植 村 益 次

Post-buckling Behaviors of Flat Plates under Axial Compression  
1st. Rep. Discussion of Secondary Buckling Values by Analytical Method

By

O-il BYON and Masuji UEMURA

**Abstract:** The post-buckling behaviors and load-carrying capacity of thin plates under uniaxial compression have been discussed so far as being in stable states. However, they become unstable with further loading and the secondary buckling which occurs accompanying snapping-through to higher-order deflection pattern has not yet been clarified.

In this first paper, a thin square plate under uniaxial compression which is simply supported along four edges is considered as an example. By a proposed method based on the second variation of total potential energy to judge the stability of post-buckling equilibrium state, the inevitability of secondary buckling is proved analytically and the effects of various factors, such as initial imperfection, assumed virtual displacement pattern, post-buckling deflection pattern and in-plane boundary conditions, on the secondary buckling values are clarified.

In the forthcoming paper, the secondary buckling of clamped plates will be discussed by the finite element method and the numerical results will be certified by experiments.

### 概 要

一軸圧縮をうけて一次座屈した後の薄板の挙動の研究は多いが、さらに負荷を増加したときの二次座屈についての研究は極めて少ない。従来の解析においては、一次座屈後の平衡状態が不安定になり、高次波形に飛び移り二次座屈現象が発生する必然性および二次座屈値については明らかにされていない。

そこで本文(第1報)では、先ず一軸圧縮をうける薄板において周辺単純支持の場合を例にとり、全ポテンシャルエネルギーの第二変分値によって一次座屈後の平衡状態の安定判別を行なう方法を提案し、

解析的手法により二次座屈現象発生の必然性を立証し、二次座屈値に及ぼす初期たわみ、微小擾乱仮想波形、一次座屈たわみ波形および面内境界条件の影響などを明らかにする。

第2報では周辺固定の場合を有限要素法で計算し、実験によって実証した結果を示す積りである。

## 1. はしがき

構造物が薄肉軽量化されると座屈が構造設計基準となってくる。しかし薄板では座屈後といえども荷重低下がなく耐荷能力があるので、運用領域として一次座屈後の挙動のみが数多くの研究で検討されてきた。しかし一次座屈後の薄板は荷重増加に対していつ迄も安定ではなく、不安定となって高次波形へ飛び移る二次座屈をおこし、耐荷剛性がさらに低下する興味深い現象がある。

しかし薄板の二次座屈現象に対する従来の研究は極めて少なく、わずかに棒と非線型バネ系に置換したモデル解析[1]、各種の平衡状態を解析しモード変換のあることを示唆した報告[2][3]、フラッタ解析の極限としてある特殊な面内境界条件を想定した際にたわみ平衡状態が不安定になることを示した報告[4][5]、一次座屈後の不安定を示した実験結果[6]があるのみであり、その他二次座屈前後の波形でのエネルギーの観点からその可能性が示唆されている程度である。

このように従来は一次座屈後の安定性検討や二次座屈値の定量的研究はほとんどなく、二次座屈現象に与える諸因子の影響なども検討されていない。

そこで第1報では、薄板の物理的なたわみ波形と微小擾乱仮想波形(変位)とを区別した安定判別法[7]～[9]を用いて二次座屈現象の必然性を明らかにし、二次座屈値に与える諸因子の影響、例えば初期たわみ、実たわみ波形、微小擾乱仮想変位の表示波形、面内境界条件などの影響を解析的手法によって明らかにする。第2報では解析的手法では計算し難い周辺固定の場合を有限要素法で解析し、実験も行って理論結果を検証する積りである。

## 2. 基礎式

### 2.1. 平衡方程式と適合条件式

長方形平板の座標を図1のようにとり、 $x$ 、 $y$ 、 $z$ 軸方向の中央面の変位をそれぞれ $u$ 、 $v$ 、 $w$ 、また初期たわみを $w_0$ とする。変位成分と面内ひずみ成分 $\epsilon_x$ 、 $\epsilon_y$ 、 $\gamma_{xy}$ との関係は、

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_x &= (\partial u / \partial x) + (\partial w / \partial x)^2 / 2 + (\partial w / \partial x)(\partial w_0 / \partial x) - z(\partial^2 w / \partial x^2) \\ \epsilon_y &= (\partial v / \partial y) + (\partial w / \partial y)^2 / 2 + (\partial w / \partial y)(\partial w_0 / \partial y) - z(\partial^2 w / \partial y^2) \\ \gamma_{xy} &= (\partial u / \partial y) + (\partial v / \partial x) + (\partial w / \partial x)(\partial w / \partial y) \\ &\quad + (\partial w / \partial x)(\partial w_0 / \partial y) + (\partial w / \partial y)(\partial w_0 / \partial x) - 2z(\partial^2 w / \partial x \partial y) \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

であり、面内ひずみ成分と平面応力成分 $\sigma_x$ 、 $\sigma_y$ 、 $\tau_{xy}$ との関係は、弾性域内に限定すると、

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_x &= (\sigma_x - \nu \sigma_y) / E, \quad \epsilon_y = (\sigma_y - \nu \sigma_x) / E \\ \gamma_{xy} &= 2(1 + \nu) \tau_{xy} / E \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

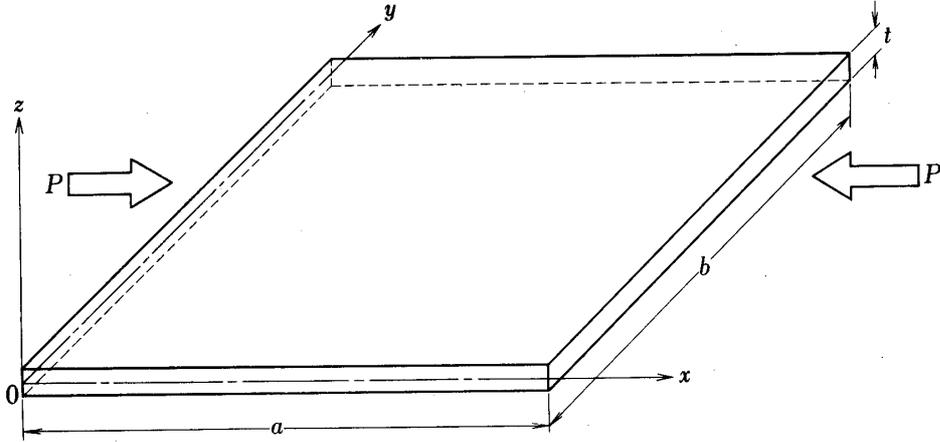


図1 一軸圧縮をうける長方形平板

である。ここで  $E$  はヤング係数、 $\nu$  はポアソン比である。単位幅当りの面内力  $N_x$ ,  $N_y$ ,  $N_{xy}$  は板厚  $t$  にわたる応力を積分して

$$N_x = \int_{-t/2}^{t/2} \sigma_x dz, \quad N_y = \int_{-t/2}^{t/2} \sigma_y dz, \quad N_{xy} = \int_{-t/2}^{t/2} \tau_{xy} dz \quad (3)$$

で与えられ、板の面内および板厚方向の平衡方程式は次式で与えられる。

$$\partial N_x / \partial x + \partial N_{xy} / \partial y = 0, \quad \partial N_{xy} / \partial x + \partial N_y / \partial y = 0 \quad (4)$$

$$D(\partial^4 w / \partial x^4 + 2\partial^4 w / \partial x^2 \partial y^2 + \partial^4 w / \partial y^4) - N_x \partial^2 (w + w_0) / \partial x^2 - 2N_{xy} \partial^2 (w + w_0) / \partial x \partial y - N_y \partial^2 (w + w_0) / \partial y^2 = 0 \quad (5)$$

ここで、 $D = Et^3 / 12(1 - \nu^2)$  は板の曲げ剛性であり、面内平衡方程式 (4) を満足するように、次に定義する応力関数  $F$  を導入すると、

$$N_x = t \partial^2 F / \partial y^2, \quad N_y = t \partial^2 F / \partial x^2, \quad N_{xy} = -t \partial^2 F / \partial x \partial y \quad (6)$$

板厚方向平衡方程式 (5) は次式となる。

$$(D/t)(\partial^4 w / \partial x^4 + 2\partial^4 w / \partial x^2 \partial y^2 + \partial^4 w / \partial y^4) - (\partial^2 F / \partial y^2) \partial^2 (w + w_0) / \partial x^2 - (\partial^2 F / \partial x^2) \partial^2 (w + w_0) / \partial y^2 + 2(\partial^2 F / \partial x \partial y) \partial^2 (w + w_0) / \partial x \partial y = 0 \quad (7)$$

一方適合条件式は式 (1), (2), (6) を用い

$$\partial^4 F / \partial x^4 + 2\partial^4 F / \partial x^2 \partial y^2 + \partial^4 F / \partial y^4 = E [(\partial^2 w / \partial x \partial y)^2 - (\partial^2 w / \partial x^2)(\partial^2 w / \partial y^2) + 2(\partial^2 w / \partial x \partial y)(\partial^2 w_0 / \partial x \partial y) - (\partial^2 w / \partial x^2)(\partial^2 w_0 / \partial y^2) - (\partial^2 w / \partial y^2)(\partial^2 w_0 / \partial x^2)] \quad (8)$$

となる。板の中央面での平均軸縮み  $\varepsilon_1$  は

$$\varepsilon_1 = -(1/a) \int_0^a (\partial u / \partial x) dx = -(1/a) \int_0^a [(\partial^2 F / \partial y^2 - \nu \partial^2 F / \partial x^2) / E - (\partial w / \partial x)^2 / 2 - (\partial w / \partial x)(\partial w_0 / \partial x)] dx \quad (9)$$

で与えられ、これから平均軸圧縮応力  $\sigma_1$  (= 軸圧縮力  $P/bt$ ) との関係が求められる。結局板の座屈後の挙動は式 (7), (8) の  $w, F$  に関する連立非線型偏微分方程式を与えられた境界条件の下で解けばよいが、厳密解を得ることは極めて難しいので、以下近似的に解くことにする。

## 2.2. 安定判別法

平衡方程式はエネルギー停留原理により、全ポテンシャルエネルギー  $\Pi$  の第一変分  $\delta \Pi$  を零と等置しても求められるが、平衡状態の安定判別は次に示す  $\Pi$  の第二変分の正負から議論できる。

$$\begin{aligned} \delta^2 \Pi = & \int_0^a \int_0^b \{ (\delta N_x + \delta N_y)^2 + 2(1 + \nu)(\delta N_{xy}^2 - \delta N_x \delta N_y) \} / 2Et \\ & + \{ N_x (\partial \delta w / \partial x)^2 + N_y (\partial \delta w / \partial y)^2 + 2N_{xy} (\partial \delta w / \partial x)(\partial \delta w / \partial y) \} / 2 \\ & + D \{ (\partial^2 \delta w / \partial x^2 + \partial^2 \delta w / \partial y^2)^2 + 2(1 - \nu) [(\partial^2 \delta w / \partial x \partial y)^2 \\ & - (\partial^2 \delta w / \partial x^2)(\partial^2 \delta w / \partial y^2)] \} / 2 dx dy \end{aligned} \quad (10)$$

ここで

$$\left. \begin{aligned} \delta N_x &= (Et/1 - \nu^2) [(\partial \delta u / \partial x) + (\partial w / \partial x)(\partial \delta w / \partial x) + (\partial w_0 / \partial x)(\partial \delta w / \partial x) \\ &\quad + \nu \{ (\partial \delta v / \partial y) + (\partial w / \partial y)(\partial \delta w / \partial y) + (\partial w_0 / \partial y)(\partial \delta w / \partial y) \}] \\ \delta N_y &= (Et/1 - \nu^2) [(\partial \delta v / \partial y) + (\partial w / \partial y)(\partial \delta w / \partial y) + (\partial w_0 / \partial y)(\partial \delta w / \partial y) \\ &\quad + \nu \{ (\partial \delta u / \partial x) + (\partial w / \partial x)(\partial \delta w / \partial x) + (\partial w_0 / \partial x)(\partial \delta w / \partial x) \}] \\ \delta N_{xy} &= (Et/2(1 + \nu)) [(\partial \delta u / \partial y) + (\partial \delta v / \partial x) + (\partial w / \partial x)(\partial \delta w / \partial y) \\ &\quad + (\partial w / \partial y)(\partial \delta w / \partial x) + (\partial w_0 / \partial x)(\partial \delta w / \partial y) + (\partial w_0 / \partial y)(\partial \delta w / \partial x)] \end{aligned} \right\} (11)$$

式(10)の  $\delta^2 \Pi > 0$  なら平衡状態は安定、 $\delta^2 \Pi = 0$  なら中立平衡、 $\delta^2 \Pi < 0$  なら不安定である。しかしどのような仮想変位を想定するかは問題であり、この想定と無関係に  $\delta^2 \Pi$  の絶対的な正負を判定することは難しい。ここでは適切な仮想変位を想定する一手法として、著者の一人が提案した方法 [7]~[9]、すなわち第二変分  $\delta^2 \Pi$  の仮想変位成分について極値を求めするため、仮想変位に関する境界条件のもとに  $\delta^2 \Pi$  を  $\delta u, \delta v, \delta w$  について変分し、 $\delta(\delta^2 \Pi) = 0$  より下記の釣合い式を得る。

$$\partial \delta N_x / \partial x + \partial \delta N_{xy} / \partial y = 0, \quad \partial \delta N_{xy} / \partial x + \partial \delta N_y / \partial y = 0 \quad (12 \cdot a)$$

$$\begin{aligned} D(\partial^4 \delta w / \partial x^4 + 2\partial^4 \delta w / \partial x^2 \partial y^2 + \partial^4 \delta w / \partial y^4) - \delta N_x \partial^2 (w + w_0) / \partial x^2 \\ - \delta N_y \partial^2 (w + w_0) / \partial y^2 - 2\delta N_{xy} \partial^2 (w + w_0) / \partial x \partial y - N_x \partial^2 \delta w / \partial x^2 \\ - N_y \partial^2 \delta w / \partial y^2 - 2N_{xy} \partial^2 \delta w / \partial x \partial y = 0 \end{aligned} \quad (12 \cdot b)$$

次に式 (12・a) を満足するような仮想応力関数  $\delta F$  を次のように定義して導入すると、

$$\delta N_x = t(\partial^2 \delta F / \partial y^2), \quad \delta N_y = t(\partial^2 \delta F / \partial x^2), \quad \delta N_{xy} = -t(\partial^2 \delta F / \partial x \partial y) \quad (13)$$

式 (11) から得られる仮想変位に対する適合条件式は次式で示される.

$$\begin{aligned} \partial^4 \delta F / \partial x^4 + 2\partial^4 \delta F / \partial x^2 \partial y^2 + \partial^4 \delta F / \partial y^4 = E [ & 2(\partial^2 w / \partial x \partial y)(\partial^2 \delta w / \partial x \partial y) \\ & - (\partial^2 w / \partial x^2)(\partial^2 \delta w / \partial y^2) - (\partial^2 w / \partial y^2)(\partial^2 \delta w / \partial x^2) + 2(\partial^2 w_0 / \partial x \partial y) \times \\ & (\partial^2 \delta w / \partial x \partial y) - (\partial^2 w_0 / \partial x^2)(\partial^2 \delta w / \partial y^2) - (\partial^2 w_0 / \partial y^2)(\partial^2 \delta w / \partial x^2) ] \end{aligned} \quad (14)$$

2.1 節で一次座屈後の物理的変形状態が決定された後, 式 (12・b), (14) から  $\delta w$ ,  $\delta F$  を求めればよいが, 変数係数の同次方程式のため計算が極めて面倒になるので, ここでは近似法によることにする. 先ず仮想たわみに対する境界条件を満足するように  $\delta w$  を仮定し, 式 (14) から  $\delta u$ ,  $\delta v$  に対する境界条件を満足するような  $\delta F$  を決定し, 式 (10) に代入して  $\delta^2 \Pi$  の正負を判定する方法を適用する.

### 3. 解析結果と考察

2.1 節の基礎式に基づき, 一軸圧縮をうける周辺単純支持の薄板の一次座屈後の挙動を解析し, 2.2 節で述べた安定判別法によって二次座屈値およびそれらに及ぼす各種の影響を解析し, 考察・検討を加える. 薄板の座屈波形は板の細長比に依存するが, 本文では正方形板 ( $\lambda = a/b = 1$ ) に近い板に限ることを初めに断っておく.

#### 3.1. 初期たわみの影響

##### 3.1.1. 一次座屈後の平衡状態

板厚方向の面外境界条件は,

$$\left. \begin{aligned} x=0, a \text{ で } w = \partial^2 w / \partial x^2 = 0 \\ y=0, b \text{ で } w = \partial^2 w / \partial y^2 = 0 \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

面内境界条件は

$$\left. \begin{aligned} x=0, a \text{ で } u \text{ は } y \text{ 軸に沿って一定 } \left( \int_0^b N_x dy = -P \right), \\ N_{xy} = 0 \\ y=0, b \text{ で } v \text{ は } x \text{ 軸に沿って一定 } \left( \int_0^a N_y dx = 0 \right), \\ N_{xy} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

の場合を考える. 一次座屈後のたわみ波形  $w$  と初期たわみ波形  $w_0$  を, 試験板での実測波形を考慮して板の中央点について対称, および逆対称モードの2項で近似表示する.

$$\left. \begin{aligned} w &= [w_{11} \sin(\pi x/a) + w_{21} \sin(2\pi x/a)] \sin(\pi y/b) \\ w_0 &= [A_{11} \sin(\pi x/a) + A_{21} \sin(2\pi x/a)] \sin(\pi y/b) \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

先ず式 (17) を式 (8) の右辺に代入して積分を行い, 面内境界条件式 (16) を満足するように  $F$  を決定した後, これらを式 (7) の板厚方向の平衡方程式に代入し, ガレルキン法を適用すると,  $\bar{w}_{11}$ ,  $\bar{w}_{21}$  に関する次の二元三次方程式を得る.

$$\begin{aligned} & \bar{\sigma}_{cr1}\bar{w}_{11} - \bar{\sigma}_1(\bar{w}_{11} + \bar{A}_{11}) + (2/3)\lambda^2 C_1(\bar{w}_{11} + \bar{A}_{11})(\bar{w}_{11}^2 + 2\bar{A}_{11}\bar{w}_{11}) \\ & - (3/\lambda^2)\bar{A}_{21}(\bar{A}_{21}\bar{w}_{11} - \bar{A}_{11}\bar{w}_{21}) + (\lambda^2/3)C_2(\bar{w}_{21} + \bar{A}_{21})(\bar{w}_{11}\bar{w}_{21} \\ & + \bar{A}_{11}\bar{w}_{21} + \bar{A}_{21}\bar{w}_{11}) = 0 \end{aligned} \quad (18 \cdot 1)$$

$$\begin{aligned} & 4\bar{\sigma}_{cr2}\bar{w}_{21} - 4\bar{\sigma}_1(\bar{w}_{21} + \bar{A}_{21}) + (2/3)\lambda^2 C_3(\bar{w}_{21} + \bar{A}_{21})(\bar{w}_{21}^2 + 2\bar{A}_{21}\bar{w}_{21}) \\ & - (3/\lambda^2)\bar{A}_{11}(\bar{A}_{11}\bar{w}_{21} - \bar{A}_{21}\bar{w}_{11}) + (\lambda^2/3)C_2(\bar{w}_{11} + \bar{A}_{11}) \times \\ & (\bar{w}_{11}\bar{w}_{21} + \bar{A}_{11}\bar{w}_{21} + \bar{A}_{21}\bar{w}_{11}) = 0 \end{aligned} \quad (18 \cdot 2)$$

ここで

$$\begin{aligned} \bar{w}_{11} &= (w_{11}/t)\sqrt{1-\nu^2}, \quad \bar{w}_{21} = (w_{21}/t)\sqrt{1-\nu^2}, \quad \bar{A}_{11} = (A_{11}/t)\sqrt{1-\nu^2} \\ \bar{A}_{21} &= (A_{21}/t)\sqrt{1-\nu^2}, \quad \bar{\sigma}_1 = \sigma_1/(D\pi^2/tb^2), \quad \bar{\varepsilon}_1 = \varepsilon_1/(D\pi^2/Etb^2) \\ \bar{\sigma}_{cr1} &= \{(1/\lambda) + \lambda\}^2, \quad \bar{\sigma}_{cr2} = \{(2/\lambda) + (\lambda/2)\}^2, \quad \lambda = a/b \\ C_1 &= (9/8\lambda^4)(1 + \lambda^4), \quad C_2 = (9/\lambda^4)[1 + \lambda^4 + (\lambda^4/4)\{81/(1 + 4\lambda^2)^2 \\ & + 1/(9 + 4\lambda^2)^2\}], \quad C_3 = (9/\lambda^4)(2 + \lambda^4/8) \end{aligned} \quad (19)$$

式(18)の両式にニュートン・ラフソン法を適用して $\bar{w}_{11}$ ,  $\bar{w}_{21}$ を求め、式(9)に代入して、平均軸圧縮応力と平均軸縮みの関係を得る。

$$\bar{\varepsilon}_1 = \bar{\sigma}_1 + (3/2\lambda^2)(\bar{w}_{11}^2 + 2\bar{A}_{11}\bar{w}_{11} + 4\bar{w}_{21}^2 + 8\bar{A}_{21}\bar{w}_{21}) \quad (20)$$

(1)  $w$ ,  $w_0$ を1項近似する場合、たわみ波形および初期たわみ波形を1項で近似した場合は、式(18・1)のみを用いて求められ、 $\bar{A}_{11}$ の2種の値に対する $\bar{\sigma}_1 \sim \bar{\varepsilon}_1$ 線図を図2に示す。

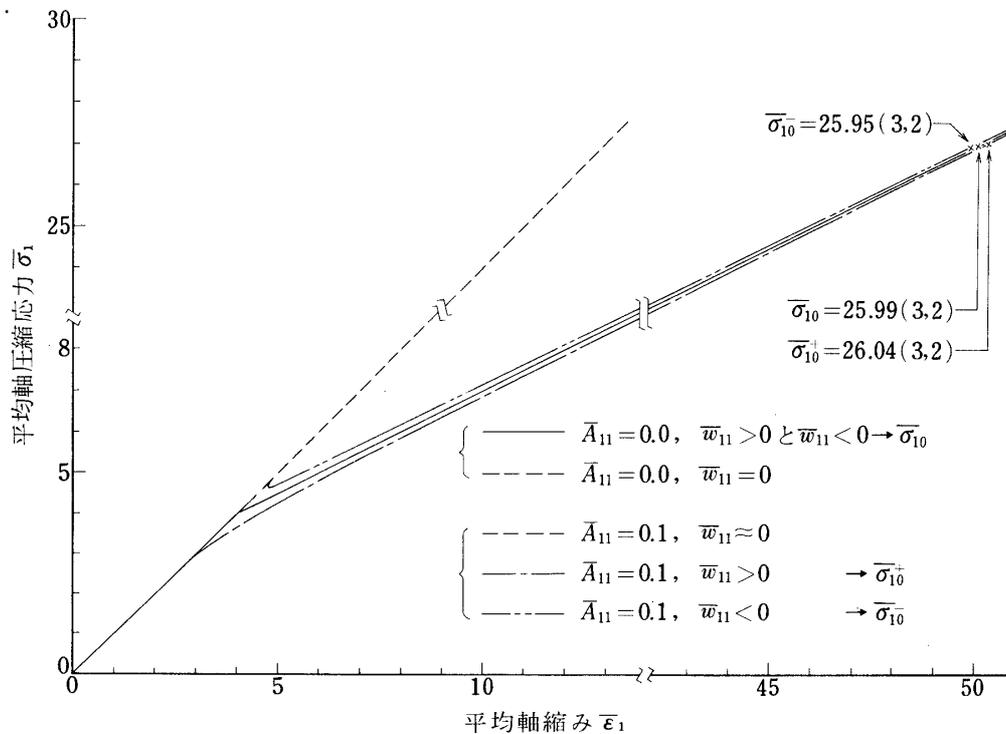


図2  $\bar{\sigma}_1 \sim \bar{\varepsilon}_1$ 関係と二次座屈値 ( $w$ を1項近似し、 $\bar{A}_{11}$ のみの場合)

(2)  $w, w_0$ を2項近似する場合,  $\bar{A}_{11}, \bar{A}_{21}$ のある種の組合せに対して $\bar{\sigma}_1 \sim \bar{\epsilon}_1$ 関係曲線を図3, 4に示す.  $\bar{w}_{11}, \bar{w}_{21}$ の大きさと正負に応じて5種の平衡状態が存在する.  $\bar{A}_{11}$ が $\bar{A}_{21}$

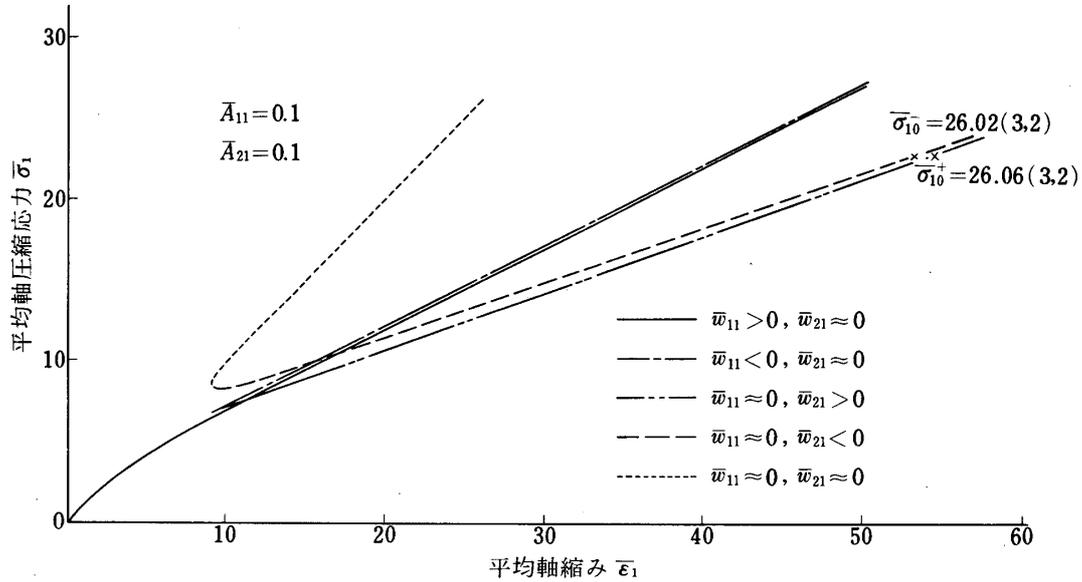


図3  $\bar{\sigma}_1 \sim \bar{\epsilon}_1$ 関係と二次座屈値 ( $w$ を2項近似し,  $\bar{A}_{11} = 0.1, \bar{A}_{21} = 0.1$ の場合)

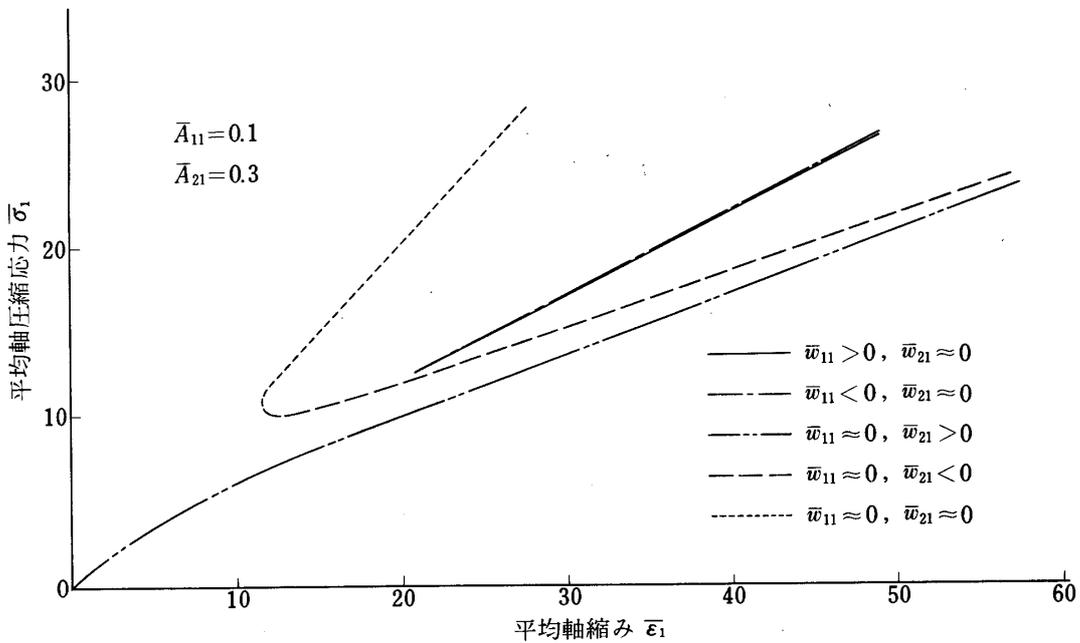


図4  $\bar{\sigma}_1 \sim \bar{\epsilon}_1$ 関係と二次座屈値 ( $w$ を2項近似し,  $\bar{A}_{11} = 0.1, \bar{A}_{21} = 0.3$ の場合)

よりも大きいか、または同程度の場合には、負荷の初期に $\bar{w}_{11}$ 成分が支配的で初期たわみの方向にたわむ平衡状態（実線）のみが存在するが（図3）、 $\bar{A}_{21}$ が $\bar{A}_{11}$ よりも大きい場合には、負荷の初期に $\bar{w}_{21}$ 成分が支配的で正の平衡状態（2点鎖線）が存在するようになる（図4）。本研究では正方形板を考えているので、一次座屈後の平衡状態の安定判別の解析には $\bar{w}_{11}$ 成分が支配的な波形（実線と1点鎖線）のみに限定し、初期たわみ $\bar{A}_{21}$ の値も通常経験するように $\bar{A}_{11}$ の値よりも小さいかあるいは精々同程度の値として解析を行う。

### 3.1.2. 一次座屈後の平衡状態の安定判別

微小擾乱仮想変位および仮想面内力に対する境界条件は、 $\delta(\delta^2\Pi)=0$ の条件に対応して

$$\left. \begin{array}{l} x=0, a \text{ で } \delta u=0, \delta N_{xy}=0, \delta w=\partial^2\delta w/\partial x^2=0 \\ y=0, b \text{ で } \delta v=0, \delta N_{xy}=0, \delta w=\partial^2\delta w/\partial y^2=0 \end{array} \right\} \quad (21)$$

を考え、周辺単純支持の条件より $\delta w$ は

$$\delta w = \delta w_{pq} \sin(p\pi x/a) \sin(q\pi y/b) \quad (22)$$

と仮定する。式(22)で $p, q$ は正整数であるが、平衡状態での主たわみ波形と同形の $p=q=1$ の場合は式(21)を満足しないので除外する。式(17), (22)の $w, w_0, \delta w$ を式(14)に代入し、式(21)の境界条件を満足するように仮想応力関数 $\delta F$ を求め、式(10)に代入して、 $\delta^2\Pi$ を計算すると次式となる。

$$\begin{aligned} \delta^2\bar{\Pi} = & \delta\bar{w}_{pq}^2 \left[ \frac{3}{32} \lambda^2 \sum_{i=1}^8 \frac{(\bar{w}_i + \bar{A}_i)^2 (p + E_i q_i)^4}{(K_i^2 + \lambda^2 L_i^2)^2} \xi_{ki}^0 \xi_{li}^0 \right. \\ & + (3/32) \{ \bar{w}_{11} (\bar{w}_{11} + 2\bar{A}_{11}) [(p^2/\lambda^2)\delta_q^1 + \lambda^2 q^2 \delta_p^1] \\ & + \bar{w}_{21} (\bar{w}_{21} + 2\bar{A}_{21}) [(4p^2/\lambda^2)\delta_q^1 + \lambda^2 q^2 \delta_p^2] \} \\ & \left. - p^2 \bar{\sigma}_1 / 8 + \{ (p^2/\lambda) + q^2 \lambda \}^2 / 8 \right] \quad (23) \end{aligned}$$

ここで

$$\begin{aligned} \delta^2\bar{\Pi} = & \delta^2\Pi / \left( \frac{D\pi^4}{ab} \right) \left( \frac{t^2}{1-\nu^2} \right), \quad \delta\bar{w}_{pq} = \frac{\delta w_{pq}}{t} \sqrt{1-\nu^2}, \\ \delta_{\beta}^{\alpha} \left\{ \begin{array}{l} =1 (\alpha=\beta) \\ =0 (\alpha \neq \beta) \end{array} \right\}, \quad \xi_{\beta}^0 \left\{ \begin{array}{l} =2 (\beta=0) \\ =1 (\beta \neq 0) \end{array} \right\} \quad (24) \end{aligned}$$

式(23)中の諸量は表1に示す値をとる。

(1)  $\bar{w}, \bar{A}$ を1項で近似した場合の平衡状態の安定判別、 $p \leq 6, q \leq 3$ (ただし $p=q=1$ の場合は除く)の各種の微小擾乱仮想変位に対して $\delta^2\bar{\Pi}=0$ となる臨界軸圧縮応力を $\bar{\sigma}_{10}$ (二次座屈値)として表2に示す。 $\bar{w}_{11}$ 成分が正の場合の $\bar{\sigma}_{10}$ を $\bar{\sigma}_{10}^+$ 、負の場合の $\bar{\sigma}_{10}$ を $\bar{\sigma}_{10}^-$ と定義し、これらを図2に示す。同図において(A, B)の数字A, Bは微小擾乱変位の $x, y$ 方向の半波数を表わす。

表1 式(23)中の諸量値

$i$	$K_i$	$L_i$	$E_i$	$q_i$	$\bar{w}_i$	$\bar{A}_i$
1	$p-1$	$q-1$	-1	$q$	$\bar{w}_{11}$	$\bar{A}_{11}$
2	$p+1$	$q+1$	-1	$q$	$\bar{w}_{11}$	$\bar{A}_{11}$
3	$p+1$	$q-1$	+1	$q$	$\bar{w}_{11}$	$\bar{A}_{11}$
4	$p-1$	$q+1$	+1	$q$	$\bar{w}_{11}$	$\bar{A}_{11}$
5	$p-2$	$q-1$	-1	$2q$	$\bar{w}_{21}$	$\bar{A}_{21}$
6	$p+2$	$q+1$	-1	$2q$	$\bar{w}_{21}$	$\bar{A}_{21}$
7	$p+2$	$q-1$	+1	$2q$	$\bar{w}_{21}$	$\bar{A}_{21}$
8	$p-2$	$q+1$	+1	$2q$	$\bar{w}_{21}$	$\bar{A}_{21}$

表2 各種の微小擾乱波形に対する二次座屈値

$p$	$\bar{A}_{11}$	$q$					
		1		2		3	
		$\bar{\sigma}_{10}^+$	$\bar{\sigma}_{10}^-$	$\bar{\sigma}_{10}^+$	$\bar{\sigma}_{10}^-$	$\bar{\sigma}_{10}^+$	$\bar{\sigma}_{10}^-$
1	0.0	-		安定		安定	
	0.1			24.96		99.14	
2	0.0	安定		37.33		149.9	
	0.1			37.50	37.21	150.0	150.0
3	0.0	137.3		25.99		54.00	
	0.1	140.8	11.10	26.04	25.95	54.04	53.97
4	0.0	58.84		29.93		48.35	
	0.1	58.80	18.06	29.96	29.92	48.38	48.34
5	0.0	69.46		37.61		53.67	
	0.1	69.47	27.03	37.63	37.60	52.68	52.66
6	0.0	88.73		47.87		61.30	
	0.1	88.78	38.02	47.89	47.87	61.31	61.30

(2)  $\bar{w}$ ,  $\bar{A}$ を2項で近似した場合の平衡状態の安定判別,  $\bar{\sigma}_{10}^+$ ,  $\bar{\sigma}_{10}^-$ を(1)と同様に定義し, 安定判別結果を表3に示す. 表1で明らかのように,  $p=3$ ,  $q=2$ の場合に最小の二次座屈値 $\bar{\sigma}_{10}$ を与えるので, 各種の初期たわみ振幅の組合せに対して, この場合の最小 $\bar{\sigma}_{10}$ 値のみを示している. 実際には一次座屈後は初期たわみの方向にたわむので $\bar{\sigma}_{10}^+$ が負荷時の二

表3 初期たわみの大きさに対する最小の二次座屈値( $p=3, q=2$ )

$\bar{A}_{11}$	$\bar{A}_{21}$	$\bar{\sigma}_{10}^+$	$\bar{\sigma}_{10}^-$
0.01	0.03	25.99	25.98
0.03	"	26.01	25.97
0.05	"	26.02	25.96
0.10	"	26.05	25.94
0.30	"	26.21	25.90
0.10	0.01	26.05	25.94
"	0.03	26.05	25.94
"	0.05	26.05	25.95
"	0.10	26.06	26.02

次座屈値として意味があり、 $\bar{\sigma}_{10}^-$ は実験で観察されたが、二次座屈後の除荷時に初めに一度初期たわみと反対方向にたわむことがあり、復元時の二次座屈値として意味があることを付言しておく。

### 3.1.3. 解析結果の検討

(1) 表2より正方形板の一次座屈後の $x, y$ 両方向1半波の平衡状態は、実験で二次座屈後に見られる $x$ 方向2半波、 $y$ 方向1半波の平衡波形と同形の微小擾乱波形( $p=2, q=1$ )を考へても常に安定との結果しか与えない。一次座屈波形と同じ $p=q=1$ の場合は本文では考へなかつたが、この場合も従来の直接解析法で示されているように不安定になることを立証できない。しかし高次の微小擾乱波形 $p \geq 2$ かつ $q \geq 2$ を考へると不安定になり、2次座屈の必然性を立証できたことは本文の興味ある成果の一つである。

(2) 表2より、正方形板の一次座屈後の平衡状態は初期たわみの大きさに拘らず $p=3, q=2$ の微小擾乱仮想変位を考へた時に最小の二次座屈値 $\bar{\sigma}_{10}^+$ を与え、これで二次座屈がおこると思われる。

(3) 表2, 3で示されたように本解析で考へた程度の初期たわみの大きさに対しては、二次座屈値はほとんど変化しない。

## 3.2. たわみ波形と微小擾乱仮想変位の多項近似の影響

前節3.1.では微小擾乱仮想変位 $\delta w$ を無限級数による一般形で表示した場合の各項1項のみを考へた場合を解析した。しかしここでは $\delta w$ を多項で近似した場合を解析して項数の影響を示すが、たわみ波形についても多項式で近似表示する。初期たわみの影響は前節で検討したので本節では考へないが、面内・面外境界条件も前節と同様である。

### 3.2.1. 一次座屈後の平衡曲線

初期たわみ $w_0=0$ とし、一次座屈後のたわみ波形を

$$w = \sum_m \sum_n w_{mn} \sin(m\pi x/a) \sin(n\pi y/b) \quad (25)$$

で表示するが,  $m, n$  は正整数を取る. 前節と同様な手順で解析されるが, ここでは次の3種の場合のみについて記述しておく.

(1) たわみ波形を1項近似 ( $m=n=1$ ) した場合, 正方形板が  $x, y$  両方向1半波で座屈した場合の平衡状態を表わす関係式は

$$\bar{w}_{11}(\bar{\sigma}_{cr1} - \bar{\sigma}_1 + 2\lambda^2 C_1 \bar{w}_{11}^2 / 3) = 0 \quad (26 \cdot a)$$

となり,  $\bar{\sigma}_1 \sim \bar{\epsilon}_1$  線図は次式で表わされる.

$$\bar{\epsilon}_1 = \bar{\sigma}_1 + (3/2\lambda^2) \bar{w}_{11}^2 \quad (26 \cdot b)$$

(2) たわみ波形を2項近似した場合

①  $m=1$  と  $3, n=1$  の場合は,  $x$  方向対称波形をさらに精度よく2項近似した場合で, 平衡状態は次の2元3次方程式から求まる.

$$\begin{aligned} & [ \{ (1/\lambda) + \lambda \}^2 - \bar{\sigma}_1 + (3/4) \{ (1/\lambda^2) + \lambda^2 \} \bar{w}_{11}^2 - (9/4) \lambda^2 \bar{w}_{11} \bar{w}_{31} \\ & + 4 \bar{w}_{31}^2 \{ (3/4) [\lambda^2 + (9/4\lambda^2)] + 48/[4\lambda + (4/\lambda)] \}^2 \\ & + 3/[4\lambda + (16/\lambda)^2] \} ] \bar{w}_{11} = 0 \end{aligned} \quad (27 \cdot a)$$

$$\begin{aligned} & [ \{ (9/\lambda) + \lambda \}^2 - 9\bar{\sigma}_1 + (3/4) \{ (81/\lambda^2) + \lambda^2 \} \bar{w}_{31}^2 + 4\bar{w}_{11}^2 \{ (3/4) [\lambda^2 \\ & + (9/4\lambda^2)] + 48/[4\lambda + (4/\lambda)] \}^2 + 3/[4\lambda + (16/\lambda)]^2 \} ] \bar{w}_{31} - (3/4) \lambda^2 \bar{w}_{11}^3 = 0 \end{aligned} \quad (27 \cdot b)$$

$\bar{\sigma}_1 \sim \bar{\epsilon}_1$  の関係式は次式で与えられる.

$$\bar{\epsilon}_1 = \bar{\sigma}_1 + (3/2\lambda^2) (\bar{w}_{11}^2 + 9\bar{w}_{31}^2) \quad (27 \cdot c)$$

②  $m=1$  と  $2, n=1$  の場合は, 板の中央点に対して  $x$  方向には対称と逆対称の2項で近似した場合で, 前節で既に初期たわみがある場合について検討したが, 初期たわみがない場合には若干性格を異にするので述べる.

平衡状態を表わす関係式

$$\bar{w}_{11}(\bar{\sigma}_{cr1} - \bar{\sigma}_1 + 2\lambda^2 C_1 \bar{w}_{11}^2 / 3 + \lambda^2 C_2 \bar{w}_{21}^2 / 3) = 0 \quad (28 \cdot a)$$

$$\bar{w}_{21}(\bar{\sigma}_{cr2} - \bar{\sigma}_1 + \lambda^2 C_3 \bar{w}_{21}^2 / 6 + \lambda^2 C_2 \bar{w}_{11}^2 / 12) = 0 \quad (28 \cdot b)$$

平均軸圧縮応力と平均軸縮みとの関係式

$$\bar{\epsilon}_1 = \bar{\sigma}_1 + (3/2\lambda^2) (\bar{w}_{11}^2 + 4\bar{w}_{21}^2) \quad (28 \cdot c)$$

図5によると一次座屈値は(1)および(2)-①の両場合には, 従来古典的臨界値として得られた通り  $\bar{\sigma}_{cr1} = 4$  であるが, 座屈後の板の耐荷剛性は, 2項近似((2)-①)の場合の方が1項近似の場合に比べて低くなる. これは予想される高次の対称波形を加え, 自由度を一つ余分に増したので当然予想される結果である. 対称座屈波形を2項近似した場合には, ある軸荷重以上で  $\bar{w}_{11}, \bar{w}_{31}$  の正負および大きさによって(A), (B), (C)3種の平衡状態が存在し, それらを図6に  $\bar{\sigma}_1 \sim \bar{\delta}$  (板中央点でのたわみ無次元量  $(\delta/t)\sqrt{1-\nu^2}$ ) 線図

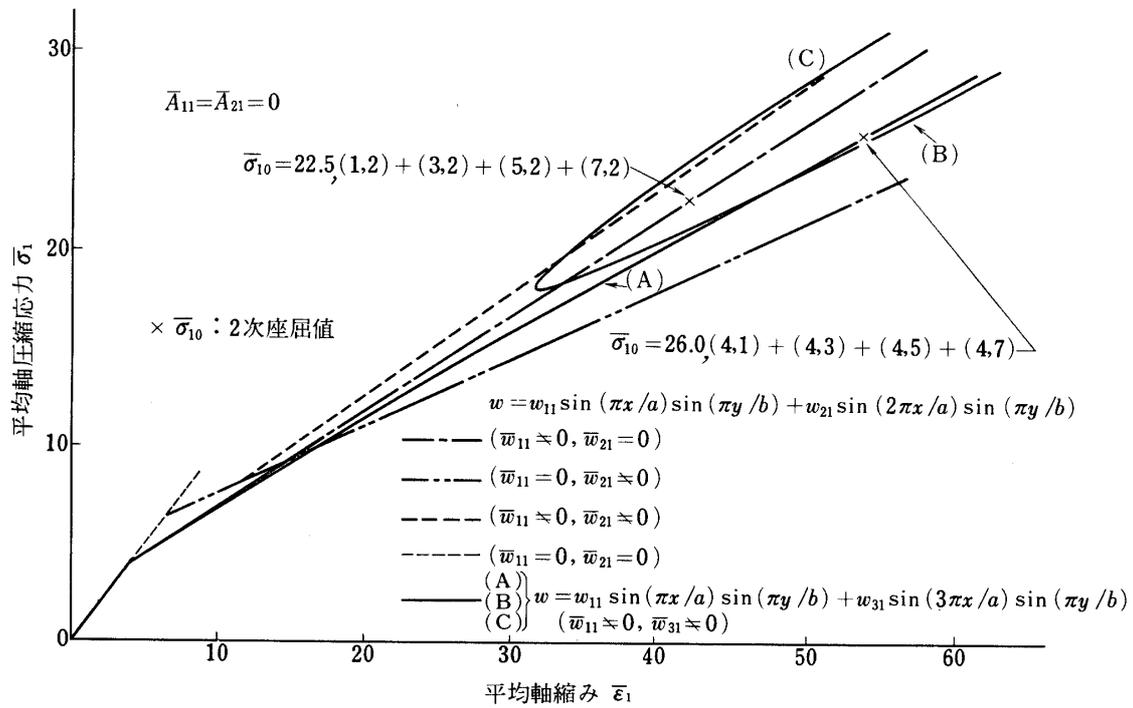


図5  $\bar{\sigma}_1 \sim \bar{\epsilon}_1$  関係と二次座屈値 ( $w$  を2項近似し, 初期たわみ = 0 の場合)

で示すが, 負荷初期から連続的に実現される平衡状態は (A) の平衡状態である. 非対称波形を含む (2) - ② の場合は, 初期たわみがないと負荷初期から平衡状態が存在しないである軸圧縮荷重以上になって初めて平衡状態が存在し, 前節とは異なる. 従って次に安定判別を行う平衡状態は, 負荷初期から平衡状態が存在する (1) の場合と (2) - ① の (A) 曲線の対称な平衡状態に限ることとする.

3.2.2. 一次座屈後の平衡状態の安定判別

微小擾乱仮想変位  $\delta w$  および仮想面内力の境界条件は式 (21) と同様であり,  $\delta w$  を多項表示すること.

$$\delta w = \sum_p \sum_q \delta w_{pq} \sin(p\pi x/a) \sin(q\pi y/b) \tag{29}$$

となり, 前節と同様な手順で次の第二変分値  $\delta^2 \Pi$  を求められる.

$$\begin{aligned} \delta^2 \Pi = & \sum_p \sum_q \sum_{p'} \sum_{q'} \delta \bar{w}_{pq} \cdot \delta \bar{w}_{p'q'} [(1/8)\{(p^2/\lambda) + (q^2\lambda)\}^2 \delta p_p \delta q_q \\ & - \bar{\sigma}_1 (p^2/8) \delta p_p \delta q_q + \sum_m \sum_n \sum_{m'} \sum_{n'} \bar{w}_{mn} \bar{w}_{m'n'} \{H_1(m, n, m', n', p, q, p', q') \\ & - H_2(m, n, m', n', p, q, p', q')\}] \end{aligned} \tag{30}$$

式 (30) で  $p', q'$  は微小擾乱仮想変位の半波数を表わす  $p, q$  と同じく正整数であり,

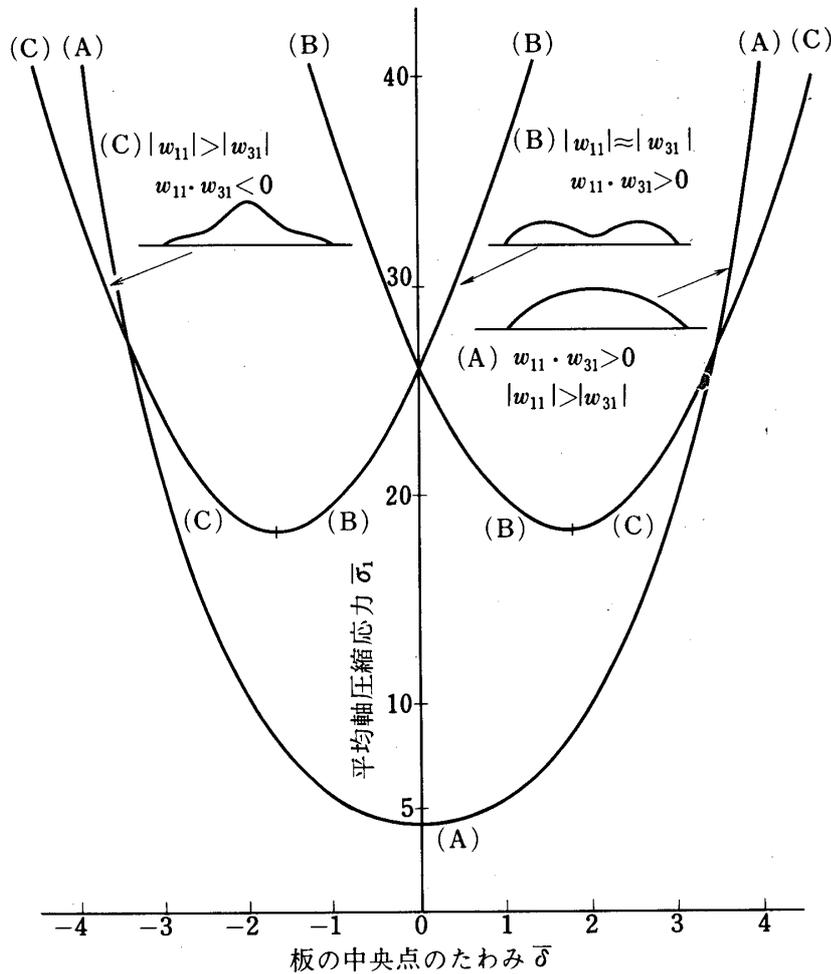


図6  $\bar{\sigma}_1 \sim \bar{\delta}$  関係

( $w = w_{11} + w_{13}$  で2項近似した場合)

$m', n'$  はたわみ波形を表わす  $m, n$  と同じく正整数である。  $H_1$  と  $H_2$  は ( ) 内の変数に因る常数であるが、紙面の都合上記述を省略する。各擾波形が単独に作用した場合の  $\delta^2 \bar{\Pi}$  を  $\delta^2 \bar{\Pi}_{pq, pq}$ 、連成による  $\delta^2 \bar{\Pi}$  を  $\delta^2 \bar{\Pi}_{pq, p'q'} (= \delta^2 \bar{\Pi}_{p'q', pq})$  として式(30)の右辺を行列形式に書くと次式となる。

$$\begin{bmatrix} \delta \bar{w}_{11} \\ \vdots \\ \delta \bar{w}_{p1} \\ \vdots \\ \delta \bar{w}_{1q} \\ \vdots \\ \delta \bar{w}_{pq} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \delta^2 \bar{\Pi}_{11, 11} & \cdots & \delta^2 \bar{\Pi}_{11, p1} & \cdots & \delta^2 \bar{\Pi}_{11, 1q} & \cdots & \delta^2 \bar{\Pi}_{11, pq} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \cdots & \delta^2 \bar{\Pi}_{p1, p1} & \cdots & \delta^2 \bar{\Pi}_{p1, 1q} & \cdots & \delta^2 \bar{\Pi}_{p1, pq} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \cdots & \delta^2 \bar{\Pi}_{1q, 1q} & \cdots & \delta^2 \bar{\Pi}_{1q, pq} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \cdots & \delta^2 \bar{\Pi}_{pq, pq} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta \bar{w}_{11} \\ \vdots \\ \delta \bar{w}_{p1} \\ \vdots \\ \delta \bar{w}_{1q} \\ \vdots \\ \delta \bar{w}_{pq} \end{bmatrix} \quad (31)$$

対称

従って考慮した微小擾乱仮想変位 $\delta w$ の項数に関する主行列式がすべて正なら安定、一つでも負なら不安定、一つでも零なら中立平衡である。以下3.2.1で述べたように2種のたわみ波形について安定判別を行う。

(1) たわみ波形を1項近似( $m=n=1$ )した場合、板の一次座屈後のたわみを式(25)の1項で近似し、 $\delta w$ を1項~4項で近似した場合について、 $\delta^2 \bar{\Pi}=0$ となる二次座屈値 $\bar{\sigma}_{10}$ を図7に項数を横軸にとって示す。例えば(3,2)+(5,2)は次式を用いたことを意味する。

$$\delta w = [\delta w_{32} \sin(3\pi x/a) + \delta w_{52} \sin(5\pi x/a)] \sin(2\pi y/b) \quad (32)$$

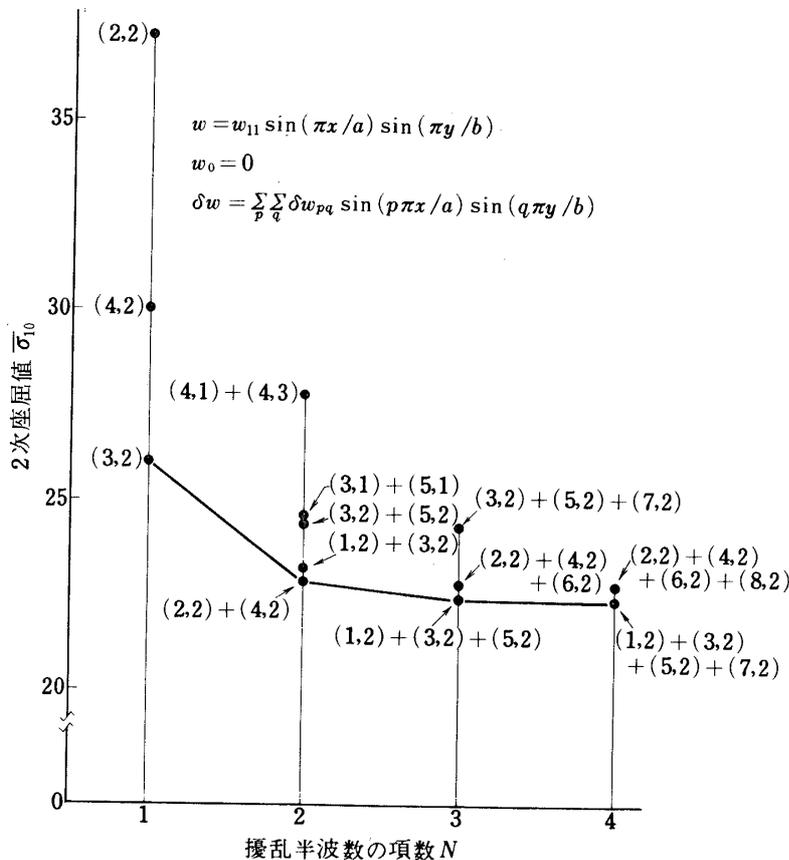


図7 二次座屈値 $\bar{\sigma}_{10}$ の微小擾乱仮想変位の項数 $N$ による変化  
( $\lambda = 1$ ,  $w = w_{11}$ の場合)

(2) たわみ変形を2項近似( $m=1$ と $3$ ,  $n=1$ )した場合、一次座屈後のたわみ波形を式(25)の2項で近似した(A)の場合について2次座屈値の微小擾乱波形項数に対する変化を図8に示すが、比較のため(1)の場合の最低値(図7参照)も点線で合せ示す。

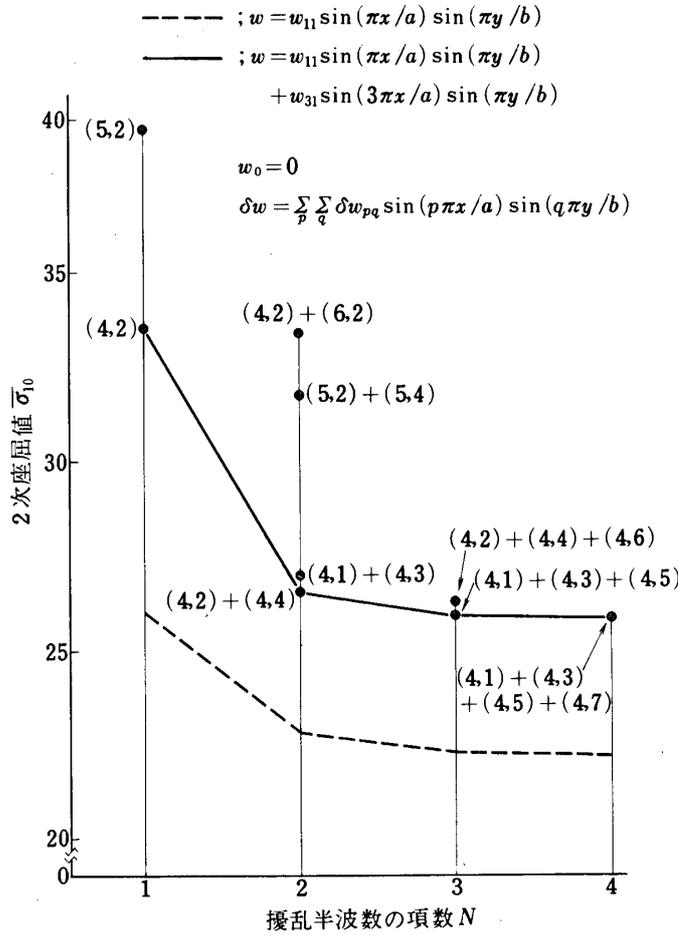


図8 二次座屈値  $\bar{\sigma}_{10}$  の微小擾乱仮想変位の項数  $N$  による変化  
 ( $\lambda = 1, w = w_{11} + w_{31}$  の場合)

3.2.3. 解析結果の検討

(1) 微小擾乱仮想変位を多項近似することによって二次座屈値  $\sigma_{10}$  は低下することが図7, 8よりわかる。

(2) 微小擾乱波形の多項重畳による二次座屈値低下に対する効果は、対称モード（奇数半波）は対称モード同士のみで存在し、対称モードと逆対称モード間の重畳効果はない。

(3) さらにこの重畳効果は各々の奇数あるいは偶数の半波数とすぐ相隣る奇数あるいは偶数の半波数との間のみで生ずる。例えば3半波の場合は1, 5半波との間でのみ重畳効果がある。従って4項以上取っても二次座屈値はほとんど変化しないで収束値となる。

(4) 軸圧縮荷重によるたわみ波形を2項近似した場合の二次座屈値は、1項近似場合よりも高い値に収束することが図8からわかる。これは一次座屈後のたわみ波形を表わす項数が多い程、安定度の高い平衡曲線を示しているからと思われる。

### 3.3. 面内境界条件の影響

前節までの解析では、面内境界条件として式(16)で表わされる代表的な場合について解析し、その他の各種因子の影響を検討したが、本節では面内境界条件の影響を検討する。面内境界条件としては、前節までの場合(a)をも含み、次の3通りの場合を考える。ただし全周辺において $N_{xy}=0$ と、 $x=0, a$ で $u$ は $y$ 軸に沿って一定で $\int_0^b N_x dy = -P$ は共通である。 $y=0, b$ での条件は次の3種である。

$$\left. \begin{array}{l} \text{(a) } v \text{ は } x \text{ 軸に沿って一定, } \int_0^a N_y dx = 0 \\ \text{(b) } v = 0 \\ \text{(c) } N_y = 0 \end{array} \right\} \quad (33)$$

#### 3.3.1. 一次座屈後の平衡状態

初期たわみと一次座屈後のたわみ波形は、代表的な対称モードと逆対称モードを1項ずつ取って式(17)のように表示し、式(8)に代入して次の特解 $F_1$ が求められる。

$$\begin{aligned} F_1 = & (E/32)w_{11}(w_{11}+2A_{11})[\lambda^2 \cos(2\pi x/a) + \cos(2\pi y/b)/\lambda^2] \\ & + (E/8)w_{21}(w_{21}+2A_{21})[(\lambda^2/16) \cos(4\pi x/a) + \cos(2\pi y/b)/\lambda^2] \\ & - E(w_{11}w_{21}+w_{11}A_{21}+w_{21}A_{11})(\lambda^2/36)[9 \cos(\pi x/a) - \cos(3\pi x/a) \\ & - \{81/(4\lambda^2+1)^2\} \cos(\pi x/a) \cos(2\pi y/b) + \{9/(4\lambda^2+9)^2\} \times \\ & \cos(3\pi x/a) \cos(2\pi y/b)] \end{aligned} \quad (34)$$

一般解 $F_2$ は面内境界条件式(33)の相違に対応してそれぞれ次式で与えられる。

$$\begin{aligned} \text{(a) } F_2 = & -s_1 y^2 / 2 \\ \text{(b) } F_2 = & -s_1 y^2 / 2 + C_v x^2 / 2 \\ \text{(c) } F_2 = & -s_1 y^2 / 2 + \sum_{i=1}^4 \cos(i\pi x/a) [C_{i1} \cosh(i\pi y/a) \\ & + C_{i2}(i\pi y/a) \cosh(i\pi y/a) + C_{i3} \sinh(i\pi y/a) \\ & + C_{i4}(i\pi y/a) \sinh(i\pi y/a)] \end{aligned} \quad (35)$$

式中の未定係数は各面内境界条件に従って決定され、平均軸圧縮応力 $\sigma_1 = P/bt = -\int_0^b N_x dy/b$ とおけば未定係数 $s_1$ は $\sigma_1$ となる。応力関数は

$$F = F_1 + F_2 \quad (36)$$

で与えられ、前述の手法を用いて各面内境界条件の場合に対応して、それぞれ板の一次座屈後の平衡状態を表わす式や $\bar{\sigma}_1 \sim \bar{\varepsilon}_1$ 関係も得られるが、紙面の都合で記述を省略する。

数値例としては $\bar{w}_{11} \neq 0$ ,  $\bar{w}_{21} = \bar{A}_{11} = \bar{A}_{21} = 0$ の場合を取り上げる。すなわち一次座屈後の平衡状態が対称モードの基本波形で1項近似されるとき、初期たわみの影響は3.1節で論

議したのでここでは考慮しない。

各場合について平均軸圧縮応力 $\bar{\sigma}_1$ と板の中央点の最大たわみ $\bar{\delta} = \bar{w}(x=a/2, y=b/2)$ の関係を図9に、平均軸縮み $\bar{\epsilon}_1$ との関係を図10に示す。

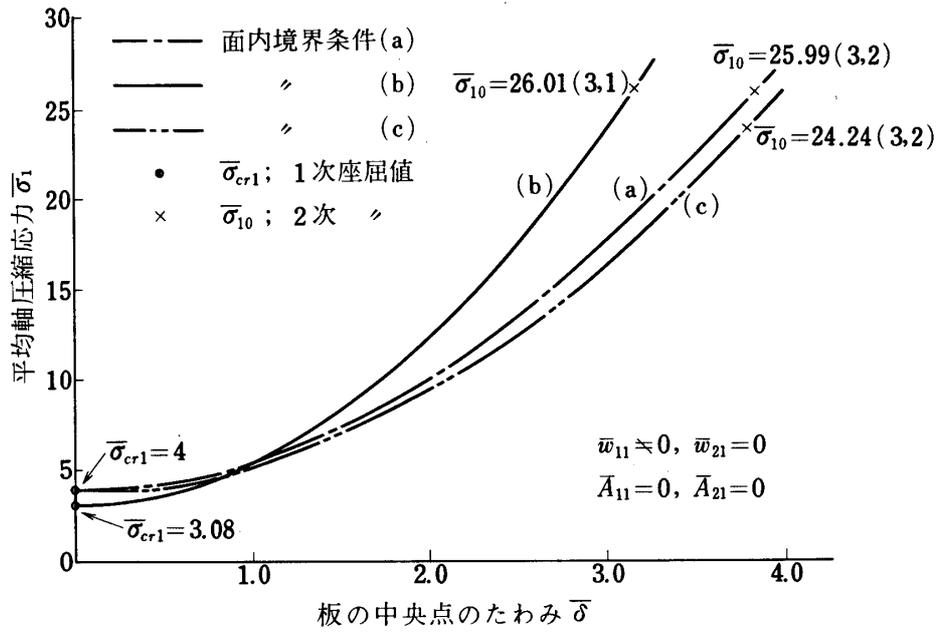


図9  $\bar{\sigma}_1 \sim \bar{\delta}$  関係と二次座屈値の面内境界条件による変化

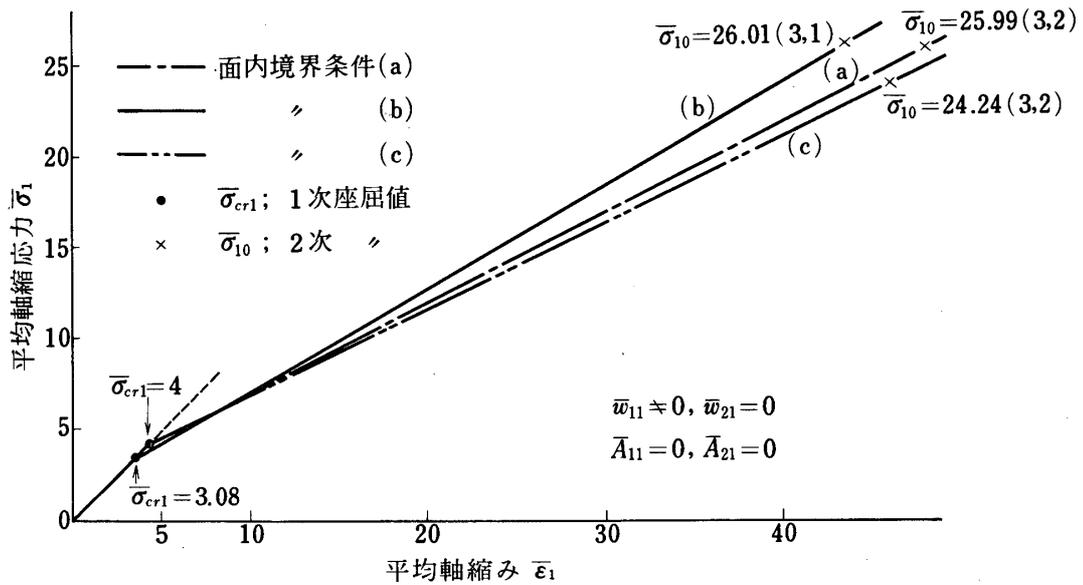


図10  $\bar{\sigma}_1 \sim \bar{\epsilon}_1$  関係と二次座屈値の面内境界条件による変化

(1) (a), (c) の場合は  $y$  方向面内応力  $N_y$  あるいはその合力の発生はなく, 一次座屈値  $\bar{\sigma}_{cr1}=4$  であるが, (b) の場合は側辺に沿って  $y$  方向変位  $v$  が拘束され,  $N_y$  が発生して  $\bar{\sigma}_{cr1}=3.08$  となる.

(2) 一次座屈後は, 側辺に沿って変位  $v$  が拘束されると中央点たわみ  $\delta$  は小さくなるので, 大たわみ状態での中央点たわみは (c) の場合が最も大きく, 以下 (a), (b) の順となる.

### 3.3.2. 一次座屈後の平衡状態の安定判別

ここでは微小擾乱仮想変位を, 周辺単純支持の面外境界条件を満足する1項のみで表示し,

$$\delta w = \delta w_{pq} \sin(p\pi x/a) \sin(q\pi y/b) \quad (37)$$

とする. 微小擾乱仮想変位および仮想面内力の境界条件は,  $\delta(\delta^2\Pi)=0$  に対応して, 各場合について負荷辺では,

$$x=0, a \text{ で } \delta u=0, \delta N_{xy}=0 \quad (38 \cdot a)$$

は共通であるが, 側辺では次のようになる.

$$\left. \begin{array}{l} \text{(a) } y=0, b \text{ で } \delta v=0, \left( \int_0^a \delta N_y dx = 0 \right), \delta N_{xy}=0 \\ \text{(b) } \quad \quad \quad \delta v=0, \delta N_{xy}=0 \\ \text{(c) } \quad \quad \quad \delta N_y=0, \delta N_{xy}=0 \end{array} \right\} \quad (38 \cdot b)$$

前述と同様な手法で式(14)を用いて, 先ず次の特解  $\delta F_1$  を求めることができる.

$$\begin{aligned} \delta F_1 = & (E\lambda^2/4)\delta w_{pq}(w_{11}+A_{11}) \times \\ & \left[ \left\{ \frac{(p+q)^2 \cos[(p+1)\pi x/a]}{[(p+1)^2+\lambda^2(q-1)^2]^2} - \frac{(p-q)^2 \cos[(p-1)\pi x/a]}{[(p-1)^2+\lambda^2(q-1)^2]^2} \right\} \cos[(q-1)\pi y/b] \right. \\ & + \left. \left\{ \frac{(p+q)^2 \cos[(p-1)\pi x/a]}{[(p-1)^2+\lambda^2(q+1)^2]^2} - \frac{(p-q)^2 \cos[(p+1)\pi x/a]}{[(p+1)^2+\lambda^2(q+1)^2]^2} \right\} \cos[(q+1)\pi y/b] \right] \\ & + (E\lambda^2/4)\delta w_{pq}(w_{21}+A_{21}) \times \\ & \left[ \left\{ \frac{(p+2q)^2 \cos[(p+2)\pi x/a]}{[(p+2)^2+\lambda^2(q-1)^2]^2} - \frac{(p-2q)^2 \cos[(p-2)\pi x/a]}{[(p-2)^2+\lambda^2(q-1)^2]^2} \right\} \cos[(q-1)\pi y/b] \right. \\ & + \left. \left\{ \frac{(p+2q)^2 \cos[(p-2)\pi x/a]}{[(p-2)^2+\lambda^2(q+1)^2]^2} - \frac{(p-2q)^2 \cos[(p+2)\pi x/a]}{[(p+2)^2+\lambda^2(q+1)^2]^2} \right\} \cos[(q+1)\pi y/b] \right] \end{aligned} \quad (39)$$

一般解は面内境界条件の相違に対応して, それぞれ次の3つの場合に分けて考えられる.

$$\begin{array}{l} \text{(a) } \delta F_2 = 0 \\ \text{(b) } \delta F_2 = (1/2)C_D x^2 \\ \text{(c) } \delta F_2 = \sum_{i=1}^8 \cos(K_i \pi x/a) [\{D_{i1} + D_{i2}(K_i \pi y/a)\} \times \\ \quad \quad \quad \cosh(K_i \pi y/a) + \{D_{i3} + D_{i4}(K_i \pi y/a)\} \sinh(K_i \pi y/a)] \end{array} \quad (40)$$

ただし  $K_1=p-1=K_4$ ,  $K_2=p+1=K_3$ ,  $K_5=p-2=K_8$ ,  $K_6=p+2=K_7$  である. (a) の場合は特解のみで面内境界条件を満足し, (b), (c) の場合の未定係数は式 (38) の条件から決定され, 結局仮想応力関数  $\delta F$  は次式で与えられる.

$$\delta F = \delta F_1 + \delta F_2 \quad (41)$$

前述の手法で安定判別のための第2変分  $\delta^2 \bar{\Pi}$  を求められるが, 紙面の都合で省略する.

### 3.3.3. 解析結果の検討

微小擾乱仮想変位として  $p=1\sim 5$ ,  $q=1\sim 3$  の半波数を考えた場合,  $\delta^2 \bar{\Pi} = 0$  より得られた2次座屈値  $\bar{\sigma}_{10}$  を表4に示し, その内で最小の二次座屈値  $\bar{\sigma}_{10}$  は図9, 10に図示したが, 境界条件 (a) の場合は  $p=3$ ,  $q=2$  のとき  $\bar{\sigma}_{10} = 25.99$ , (b) の場合は  $p=3$ ,  $q=1$  のとき  $\bar{\sigma}_{10} = 26.01$ , (c) の場合は  $p=3$ ,  $q=2$  のとき  $\bar{\sigma}_{10} = 24.24$  である. 従って (c) の場合すなわち側辺で面内拘束を自由にした場合が最小の二次座屈値を与えることがわかる. これは (c) の場合には座屈変形様式の変化に対して抵抗が少ないのに対して, 側辺面内変位  $v$  を拘束する他の場合は, 変形様式の変化に対する抵抗が大きいためと思われる.

表4  $\bar{A}_{11}=0$ ,  $\bar{A}_{21}=0$ ,  $\bar{w}_{11} \neq 0$ ,  $\bar{w}_{21}=0$

p	面内境界条件	q		
		1	2	3
1	a	—	安定	安定
	b			
	c			
2	a	安定	37.33	149.9
	b		54.36	安定
	c		25.49	99.53
3	a	137.3	25.99	54.00
	b	26.01	27.30	80.00
	c	268.2	24.24	49.78
4	a	58.84	29.93	48.85
	b	33.25	30.58	56.27
	c	69.25	29.23	46.70
5	a	69.45	37.61	52.67
	b	45.24	38.14	57.42
	c	78.84	37.25	51.77

## 4. 結 論

(1) 従来の解析では, 周辺単純支持の薄板の一次座屈後の平衡状態が不安定になると二次座屈現象の必然性を明らかにできなかったが, 一次座屈後のたわみ波形と微小擾乱仮想変位を区別した解析的安定判別法を用いることにより, 二次座屈現象を明らかにでき, 一次座屈後の薄板構造の耐荷能設計に有益な資料が得られた. 解析結果は後報の実験結果とも大体符合することを付言しておく.

(2) 一次座屈後の平衡状態および二次座屈値に及ぼす各種の因子の影響を検討した。

① 板厚の10%程度までの初期たわみの存在する場合の二次座屈値は、一次成分  $\bar{A}_{11}$  が大きくなると若干大きくなるが、二次成分  $\bar{A}_{21}$  の大きさによってはほとんど変らない。いずれにしても初期たわみは、大たわみ状態での二次座屈値に顕著な影響を与えない。

② 微小擾乱波形を多項表示することによって、各項の重畳効果によって二次座屈値は低下するが、4項以上とってもほとんど低下しない。

③ 一次座屈後のたわみ波形については、対称モードのみで2項近似した場合の二次座屈値は1項近似した場合よりも高い値となる。

④ 面内境界条件の影響については、3通りの場合を検討したが、側辺で面内変位を拘束しない方が、一次座屈値は増加しても二次座屈値は低くなる。

(3) 周辺単純支持板の一次座屈値は周辺固定板の値より小さいが、二次座屈値は一次座屈値より数倍大きく、後述する周辺固定板での値より逆に大きいのは興味がある。

(4) 今後の研究課題としては、二次座屈現象は飛び移り現象なので、動的解析も行い、二次座屈現象過程および二次座屈後の平衡状態について解析を行なう必要がある。なお第2報では、解析的手法による解析の困難な周辺固定の場合について有限要素法による解析を行い、薄板の一軸圧縮実験結果との比較検討も行う積りである。

#### 参 考 文 献

- [ 1 ] M. Stein, NASA-TR-R-39 (1959)
- [ 2 ] W.J. Supple, Int. Jour. Mech. Sci., 10, (1968), 723
- [ 3 ] W.J. Supple, Int. Jour. Solids & Stru., 6, (1970), 1243
- [ 4 ] S. Kobayashi, Trans. J.S.A.S.S., 5-8, (1962), 79
- [ 5 ] 小林, 浅井, 日本航空宇宙学会誌, 16 - 174 (1968) 10
- [ 6 ] H.L. Cox, The Buckling of Plates & Shells, (1963), 15, Pergamon Press
- [ 7 ] 植村, 機械学会論文集, 30-215 (昭39) 848
- [ 8 ] 植村, 機械学会論文集, 26-164 (昭35) 501
- [ 9 ] 植村, 機械学会論文集, 35-276 (昭44) 1617