

非一様電磁波の負誘電率媒質中への透過現象 (第1部 TM波)

飯 口 真 一

Transmission Phenomenon of Inhomogeneous Electromagnetic
Wave into a Negative Permittivity Medium
(Part I TM Wave)

By
Shin-ichi IIGUCHI

Abstract: In the region of the plasma physics and the wave propagation, homogeneous plane electromagnetic wave cannot propagate in the negative permittivity medium since it has only the attenuating term, and the wave incident from the positive permittivity medium is reflected totally from the interface between positive and negative permittivity mediums.

In this paper it is proved that the wave of large inhomogeneity has the propagating term even in the negative permittivity medium, and that the transmitting coefficient of the wave from the positive permittivity medium is so large as to become 100 % at the matching condition.

Inhomogeneity means that the amplitude of the wave is inhomogeneous in the plane transverse to the propagating direction.

Inhomogeneous wave cannot be realized in the infinite extent domain even if it satisfies the Maxwell's Equations, since it becomes infinite because of its dependence of $\text{Exp}(\alpha z)$.

Hence the applicable region of this theory must be considered.

Three applicable examples to be considered are as follows.

- ① The inhomogeneous wave can be shut out from the place where it will become infinite by dividing it by use of the reactance sheet as the homogeneous plane wave can be divided by the sheet of metal plate.
- ② The inhomogeneous wave from the finite extent plane source can be considered to be approximately equal to the wave from the infinite extent plane one in the sufficient smaller cubic region than the finite size of the source.

The theory can be applied in this small region.

- ③ The wave from the finite extent source contains the inhomogeneous wave in the form of continuous spectrum.

This theory can be applied to the inhomogeneous wavelet.

概 要

プラズマ物理および電波伝ばんの領域における現象として、一様平面電磁波は負誘電率媒質中では減衰項のみからなるゆえに伝ばせず、また、正誘電率媒質からの一様平面入射波は全部反射すると説明されている。上記の説明はもちろん正しい。

本論文は、非一様電磁波は、その非一様度が大きければ、負誘電率媒質中でも伝ば項を持ち、また、正誘電率媒質中から入射した時は、その透過率が大きくなり、100%にもなりうることを証明したものである。

非一様とは、電磁波の進行方向に垂直な方向で振幅が非一様という意味である。

非一様波には、 $\text{Exp}(\alpha z)$ の dependence があり、無限遠で界が無限大となり、無限大のエネルギーを持つこととなるので、Maxwell の方程式をみたしても、無限遠まで考える時は、実在するものではない。

したがって、この理論の適用範囲を考えねばならぬが、次の3例をあげた。①無限領域の平面波を金属板で仕切るように、リアクタンス sheet でこの非一様波を仕切り、無限大が起るべきところには電磁波がないようにする。②大きな平面的波源よりの非一様波は、それより1けた程度小さい立体領域では、近似的に、無限大波源よりの波と等しいと見なしうるゆえに、その領域内で適用する。③有限の大きさの波源よりの波は、一様波のほかに、非一様波が必ず連続的合成の形で含まれている。ここに、この現象を適用し、計算を工夫し、有効な物理的解釈を加える。

緒 言

普通のプラズマの教科書の初めの部分に、静磁界がかけられていないプラズマの等価誘電率は、プラズマ周波数より低い周波数では負になり、その中では、一様平面電磁波は減衰項のみ持って伝ば項は持たず、したがって、伝ばしないと説明してある。また、電波伝ばん現象としての低い周波数における電離層よりの大きな反射は、この負誘電率媒質中の非伝ばにより説明されている。以上の説明はそれはそれで正しい。

本論文は、Maxwell の方程式をみたす非一様電磁波は、その非一様度が大きければ、負誘電率媒質中でも伝ば項を持つことができ、正誘電率媒質中で非一様な電磁波を負誘電率媒質に入射せしめると、非一様度が大きければ、大きな透過係数が得られ、100%にもなしうることを証明したものである。

負誘電率媒質はただ誘電率が負である媒質と巨視的に考えて、Maxwell の方程式を境界条件を用いてすなおに解き、変数分離定数間の関係とポインティングの定理をたよりに説明を加えたものである。

上記の非一様電磁波とは、電磁波の進行方向に垂直な面内で、その振幅が指數関数的に変化しているもので、 $\text{Exp}(\alpha z)$ の dependence があり、無限領域を考える場合は、無限遠で無限大になる。したがって、これを実現させるには無限大のエネルギーがいるので、Maxwell の方程式をみたすものでも存在するものでもない。

したがって、この理論の適用範囲を考える必要がある。

① 有限領域に、無限領域まで考えた場合の電磁界そのままをつくる方法。これは普通の一様平面波の場合でも同じである。一様平面波でも、無限領域にわたるエネルギーの総和は

無限大である。しかし、これは、面積無限大の2枚の完全導体板で閉じ込めうるので、その間では無限領域で考えた現象がそのまま成立する。第1の適用例は、非一様平面波を、リアクタンス sheet で閉じ込めようとするものである。

② 一様平面波の反射屈折現象は、波が有限領域にのみ存在し、かつ閉じ込められない場合でも、かなり正確に成立しているようである。その場合でも、波面の端のところではかなり変っているであろう。それと同様に、非一様波について、板で閉じ込めない場合でも、波の横方向の広がりに比べて、十分小さい立体部分の内部については、無限領域で解いたものに近い現象が起ると考えうる。

③ 有限の広がりの電磁流から出る波は、ほとんどすべて、一様平面波と非一様波との連続合成からなる[1]。非一様波が一つでは、無限遠で無限大になる。しかし、これは素波として存在し、その合成は無限大にならぬ。この非一様素波のふるまいはあまり知られていないが、この素波には、無限領域でも、この理論がそのまま使えるわけである。この非一様素波は、leaky wave, surface wave[2] に重要な役割をなすものである。特に、improper leaky wave は、無限遠で無限大になるが、これについては、従来、無限大になる空間領域を区切って説明している。これは正当ではなく、素波としては、無限大になるのを許しておき、連続的合成の結果、無限大は消えると考えるべきであろう。これについては、また、述べる機会があろう。

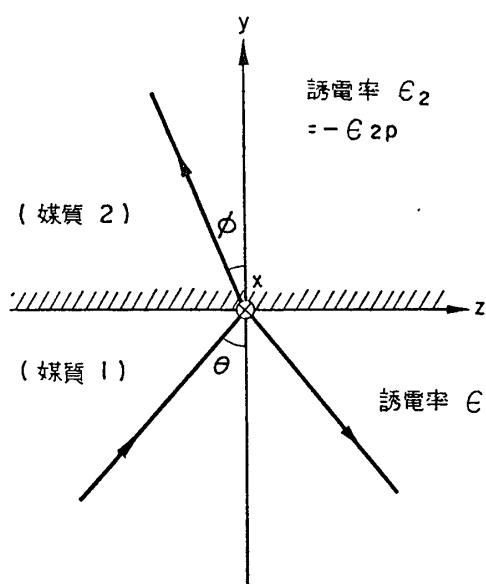
[記 号]

$\epsilon_1 > 0, \epsilon_2 < 0$	それぞれ第1, 2 媒質の誘電率
$\epsilon_{2p} = -\epsilon_2$	
P_1, Q_1, Q_2	それぞれ入射、反射、透過波の H_x 成分の振幅
$\beta = \beta_r + j\alpha_r$	全部の波の z 方向の複素位相定数。 $\beta_r \geq 0$ と仮定する。
$\pm k_1 = \pm(\xi_1 + j\eta_1)$	入射、反射波の y 方向の複素位相定数。 $\xi_1 > 0$ と仮定する。
$-k_2 = -(\xi_2 + j\eta_2)$	透過波の y 方向の複素位相定数。この問題の場合には、のちに、 $\xi_2 \geq 0$ となることがわかる。
(以上の $\beta_r, \alpha_r, \xi_1, \eta_1, \xi_2, \eta_2$ はすべて実数とする)	
θ, ϕ	それぞれ、入射角と屈折角
u 軸	第1媒質中の入射波の有効電力および位相の進行方向
v 軸	u 軸に垂直
l 軸	第2媒質中の透過波の有効電力の進行方向で、位相の後退方向
m 軸	l 軸に垂直

1. Maxwell の方程式とその解（第1図参照）

$\partial/\partial x = 0$ と仮定すると、Maxwell の方程式は、 H_x, E_y, E_z を含む組と、 E_x, H_y, H_z を含む組とに別れる。今、前の組のみ取り扱うこととする。

$$\frac{\partial H_x}{\partial z} = j\omega\epsilon E_y, \quad \frac{\partial H_x}{\partial y} = -j\omega\epsilon E_z, \quad \frac{\partial E_y}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial y} = j\omega\mu H_x \quad (1)$$



第1図 非一様波の透過反射現象

(1) の第 1, 2 式より, E_y, E_z を求め, これを第 3 式に代入すれば, H_x に関する波動方程式が得られる.

$$\frac{\partial^2 H_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 H_x}{\partial z^2} + \omega^2 \mu \epsilon H_x = 0 \quad (2)$$

$H_x \propto e^{-j\beta z}$ を仮定し,

$$k^2 = \omega^2 \mu \epsilon - \beta^2 \quad (3)$$

とおけば次式が得られる.

$$\frac{\partial^2 H_x}{\partial y^2} = -k^2 H_x$$

これより,

$$H_x = (P e^{-jky} + Q e^{jky}) e^{-j\beta z} \quad (4)$$

(4) を用いて, (1) より E_z, E_y を求めると,

$$E_z = \frac{k}{\omega \epsilon} (P e^{-jky} - Q e^{jky}) e^{-j\beta z} \quad (5)$$

$$E_y = \frac{-\beta}{\omega \epsilon} (P e^{-jky} + Q e^{jky}) e^{-j\beta z} \quad (6)$$

媒質 1 については, (4, 5, 6) に適当に subscript 1 を付したものが解となる. すなわち,

$$H_{x_1} = (P_1 e^{-jk_1 y} + Q_1 e^{jk_1 y}) e^{-j\beta z} \quad (7)$$

$$E_{z_1} = \frac{k_1}{\omega \epsilon_1} (P_1 e^{-jk_1 y} - Q_1 e^{jk_1 y}) e^{-j\beta z} \quad (8)$$

$$E_{y_1} = \frac{-\beta}{\omega \epsilon_1} (P_1 e^{-jk_1 y} + Q_1 e^{jk_1 y}) e^{-j\beta z} \quad (9)$$

付録 2 に詳述したように, 媒質 2 については (4, 5, 6) に適当に subscript 2 を付したもののが一般解となりうるが, 媒質 2 が無限遠までそのまま存在する場合には, 2 項の中の一つを取ればよい. ここで, 第 2 項を採用することとすれば, 無限遠点に源の存在しないこの問題の場合には, k_2 の実数部分 ξ_2 が正か零である.

$$H_{x_2} = Q_2 e^{jk_2 y} e^{-j\beta z} \quad (10)$$

$$E_{z_2} = \frac{-k_2}{\omega \epsilon_2} Q_2 e^{jk_2 y} e^{-j\beta z} \quad (11)$$

$$E_{y_2} = \frac{-\beta}{\omega \epsilon_2} Q_2 e^{jk_2 y} e^{-j\beta z} \quad (12)$$

$$\xi_2 \geq 0 \quad (13)$$

指數関数のところを次のように書いておくとわかりやすい.

$$\left. \begin{aligned} e^{-j\beta z} &= e^{-j\beta_r z} e^{j\alpha_r z} \\ e^{\mp jk_1 y} &= e^{\mp j\xi_1 y} e^{\pm j\eta_1 y} \\ e^{jk_2 y} &= e^{j\xi_2 y} e^{-j\eta_2 y} \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

第1図のようすに, 入射波の Ray が第3象限にあると定めれば,

$$\beta_r \geq 0 \quad (15)$$

(第1図の θ が零, すなわち垂直入射の場合を後で取り扱うこととなるが, それを含むように $\beta_r=0$ をも含めた. 各定数の符号などの関係を考察するとき, $\beta_r=0$ は, $\beta_r=+\delta$ ($\delta>0$) で, $\delta\rightarrow 0$ として考えると明瞭になる.)

また, (3) より,

$$k_1^2 = \omega^2 \mu \epsilon_1 - \beta^2 \quad (16)$$

$$k_2^2 = -\omega^2 \mu \epsilon_{2p} - \beta^2 \quad (17)$$

2. $y=0$ での境界条件および P_1 , Q_1 , Q_2 の関係

H_x , E_z の $y=0$ における連続条件より, (7, 8, 10, 11) を用いると,

$$\left. \begin{aligned} P_1 + Q_1 &= Q_2 \\ \frac{k_1}{\epsilon_1} (P_1 - Q_1) &= \frac{k_2}{\epsilon_{2p}} Q_2 \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

(18) より次式をうる.

$$\frac{Q_1}{P_1} = \frac{\frac{k_1}{\epsilon_1} - \frac{k_2}{\epsilon_{2p}}}{\frac{k_1}{\epsilon_1} + \frac{k_2}{\epsilon_{2p}}} \quad (19)$$

$$\frac{Q_2}{P_1} = \frac{\frac{2k_1}{\epsilon_1}}{\frac{k_1}{\epsilon_1} + \frac{k_2}{\epsilon_{2p}}} \quad (20)$$

k_1 , k_2 に記号表にある式を代入すれば,

$$\frac{Q_2}{P_1} = \frac{2 \left(\frac{\xi_1}{\epsilon_1} + j \frac{\eta_1}{\epsilon_1} \right)}{\left(\frac{\xi_1}{\epsilon_1} + \frac{\xi_2}{\epsilon_{2p}} \right) + j \left(\frac{\eta_1}{\epsilon_1} + \frac{\eta_2}{\epsilon_{2p}} \right)} \quad (21)$$

3. 電力透過係数

ここでは, 振幅 Q_2 を持つ透過波の複素 Poynting Vector の y 方向成分の実数部と, 振幅 P_1 を持つ入射波の複素 Poynting Vector の y 方向成分の実数部との比を電力透過係数 T と定義した.

透過波については, (10, 11) を用いると,

$$\begin{aligned} E_{z_1} H_{x_1}^* &= \frac{k_2}{\omega \epsilon_{2p}} Q_2 Q_2^* e^{j(k_2 - k_2^*)y} e^{-j(\beta - \beta^*)z} \\ \therefore R_e [E_{z_1} H_{x_1}^*]_{y=0} &= \frac{\xi_2}{\omega \epsilon_{2p}} Q_2 Q_2^* e^{2\alpha_r z} \end{aligned} \quad (22)$$

入射波については, (7, 8) の第1項を用いると,

$$\begin{aligned} E_{z_1} H_{x_1}^* &= \frac{k_1}{\omega \epsilon_1} P_1 P_1^* e^{-j(k_1 - k_1^*)y} e^{-j(\beta - \beta^*)z} \\ \therefore R_e [E_{z_1} H_{x_1}^*]_{y=0} &= \frac{\xi_1}{\omega \epsilon_1} P_1 P_1^* e^{2\alpha_r z} \end{aligned} \quad (23)$$

したがって、

$$\begin{aligned} T &= \frac{\xi_2}{\epsilon_{2p}} \frac{\epsilon_1}{\xi_1} \frac{Q_2}{P_1} \left(\frac{Q_2}{P_1} \right)^* \\ &= \frac{4 \frac{\xi_2}{\epsilon_{2p}} \frac{\epsilon_1}{\xi_1} \left[\left(\frac{\xi_1}{\epsilon_1} \right)^2 + \left(\frac{\eta_1}{\epsilon_1} \right)^2 \right]}{\left(\frac{\xi_1}{\epsilon_1} + \frac{\xi_2}{\epsilon_{2p}} \right)^2 + \left(\frac{\eta_1}{\epsilon_1} + \frac{\eta_2}{\epsilon_{2p}} \right)^2} \end{aligned} \quad (24)$$

ここで、(21) を用いた。

4. 垂直入射の場合

一般の場合の電力透過係数の式 (24) は複雑であるゆえ、垂直入射の場合について考察する。垂直入射の場合は、 $\beta_r = 0$ であるが、これを用いると (17) より、

$$\xi_2^2 - \eta_2^2 = \alpha_r^2 - \omega^2 \mu \epsilon_{2p} \quad (25)$$

$$\xi_2 \eta_2 = 0 \quad (26)$$

① $\alpha_r^2 > \omega^2 \mu \epsilon_{2p}$ ならば、 $\xi_2 \neq 0, \eta_2 = 0$

② $\alpha_r^2 = \omega^2 \mu \epsilon_{2p}$ ならば、 $\xi_2 = 0, \eta_2 = 0$

③ $\alpha_r^2 < \omega^2 \mu \epsilon_{2p}$ ならば、 $\xi_2 = 0, \eta_2 \neq 0$

入射波については、(16) より、

$$\xi_1^2 - \eta_1^2 = \alpha_r^2 + \omega^2 \mu \epsilon_1 \quad (27)$$

$$\xi_1 \eta_1 = 0 \quad (28)$$

この両式より、

$$\xi_1 \neq 0, \eta_1 = 0 \quad (29)$$

前節で導いた電力透過係数の式 (24) を見ればわかるように、 $\xi_2 = 0$ では透過が無い。透過があるためには、 $\xi_2 \neq 0$ である。これは、上の Case ① に相当するゆえに、 $\eta_2 = 0$ である。したがって、(24) は次のように簡単になる。

$$T_\perp = \frac{4 \frac{\xi_1}{\epsilon_1} \frac{\xi_2}{\epsilon_{2p}}}{\left(\frac{\xi_1}{\epsilon_1} + \frac{\xi_2}{\epsilon_{2p}} \right)^2} \quad (30)$$

ここで、

$$\epsilon_{2p} = M \epsilon_1 \quad (31)$$

$$\alpha_r^2 = A(\omega^2 \mu \epsilon_{2p}) \quad (32)$$

とおくと、

$$\left. \begin{aligned} \xi_1 &= \sqrt{AM+1} \omega \sqrt{\mu \epsilon_1} \\ \xi_2 &= \sqrt{(A-1)M} \omega \sqrt{\mu \epsilon_1} \end{aligned} \right\} \quad (33)$$

となり、

$$T_\perp = \frac{4 \sqrt{AM+1} \sqrt{M} \sqrt{A-1}}{(\sqrt{AM+1} \sqrt{M} + \sqrt{A-1})^2} \quad (34)$$

考察 (31) より、第1媒質を真空とすれば、 $-M$ は第2媒質の比誘電率であり、(32) よ

り、 A は電磁波の z 方向の「非一様度」の目安となる。

(34) より、 T_{\perp} が 1 になる条件は、 $\sqrt{AM+1}\sqrt{M}=\sqrt{A-1}$ であるが、これより次式が出る。

$$A(1-M)=1 \quad (35)$$

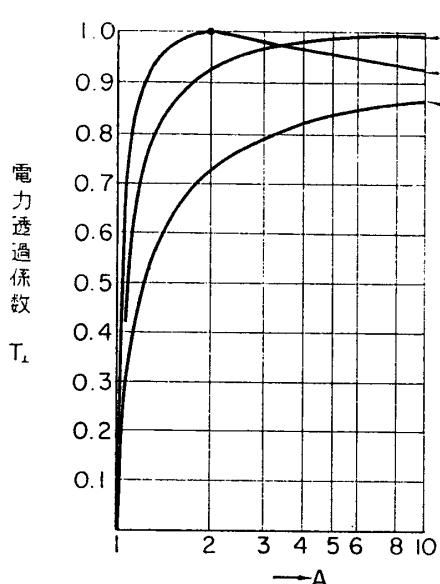
これは、(30) に遡れば、 $\xi_1/\epsilon_1=\xi_2/\epsilon_{2p}$ に相当し、(7, 8), (10, 11) より、 $y=0$ における y 方向の電波インピーダンスの整合の条件と一致する。

また、 T_{\perp} が零になる条件は、 $\sqrt{AM+1}\sqrt{M}/\sqrt{A-1}$ が零か無限大かになることであるが、これは次のようになる。

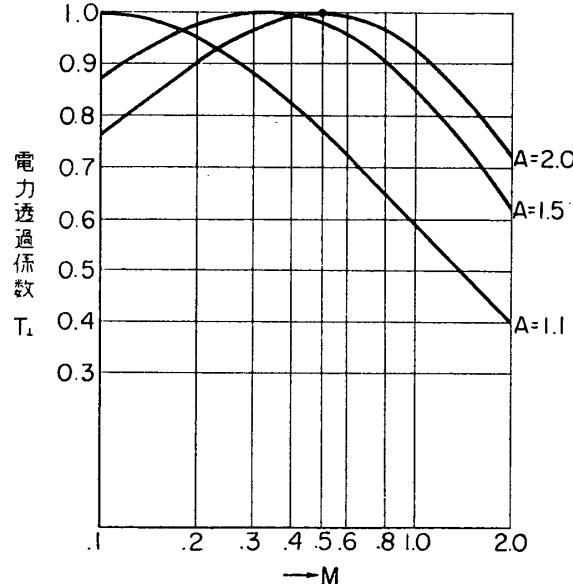
$$\left. \begin{array}{l} A=1 \\ M \neq 0 \end{array} \right\} \text{または, } \left. \begin{array}{l} M=0 \\ A \neq 1 \end{array} \right\} \text{または, } \left. \begin{array}{l} M=\infty \end{array} \right\} \quad (36)$$

(30) に遡れば、これは、 $(\xi_1/\epsilon_1)/(\xi_2/\epsilon_{2p})$ が、零か無限大かになる条件と一致する。

第2図は縦軸に T_{\perp} を、横軸に A を取り、 $M=0.5, 1.0, 2.0$ をパラメータとしてプロ



第2図 電力透過係数 T_{\perp} と非一様度 A との関係



第3図 電力透過係数 T_{\perp} と M との関係

ットしたものである。この図は当然のことながら、 A がしゃ断点 1 よりわずかに大きくなると、 T_{\perp} が急激に上昇することをよく示している。また、 $M=0.5$ の時は、 $A=2$ で T_{\perp} が 1、すなわち整合の状態になることを示している。

第3図は、縦軸に T_{\perp} を、横軸に M を取り、 $A=1.1, 1.5, 2.0$ をパラメータとしてプロットしたものである。

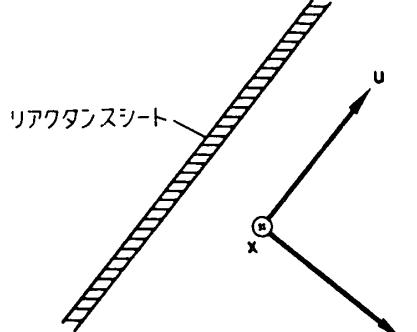
5. 理論の適用性

① この非一様波を等価リアクタンス sheet で区切り、その部分では厳密に、無限領域まで考えたその部分での電磁波と全く等しい波をつくろうとするものである。第1媒質については、(A-13, 1) の E_u と H_x とで、 $-v$ 方向のインピーダンスを求めるとき、(v 方向に

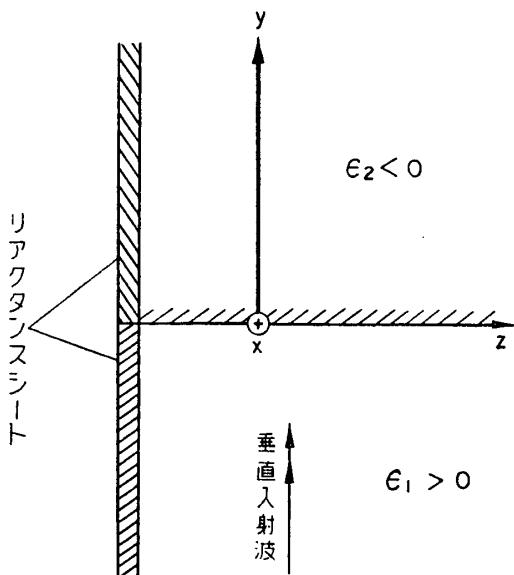
減少する波を考えれば、(A-13) の複号の下をとる)

$$E_u/H_x = j\sqrt{\eta_1^2 + \alpha_r^2}/\omega\epsilon_1$$

ゆえに、このようなりアクタンス sheet を第4図のように u 軸に平行におけば、この sheet より $+v$ 方向に、非一様波を閉じ込めることができ、無限大を生じない。



第4図 非一様波を閉じ込む
リアクタンスシート



第5図 二つの媒質とリアクタンスシート

第2媒質については、 $-j\sqrt{\eta_2^2 + \alpha_r^2}/\omega\epsilon_{2p}$ のリアクタンス sheet を、 l 軸に平行におけばよい。

二つの媒質をあわせたものは、第5図であり、この sheet より、 $+z$ 側の非一様波に、前節までの理論を適用しうる。

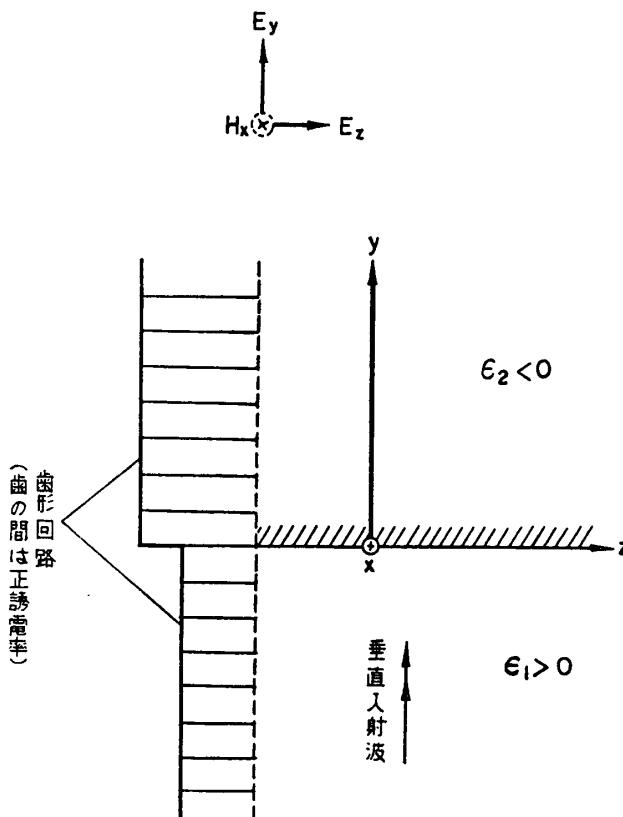
実際には、このリアクタンス sheet は、金属歯形回路（歯の間は、正誘電率媒質）で近似的に、実現可能である。（図6参照）

② 広がりの有限な波源より出た波で、波源の横方向の寸法にくらべて、一けた程度小さい平面領域で、かつその程度に近い立体領域内でのものは、広がりの無限大の波源より生ずるその小領域内の波と近似的に等しいと考えて、この小領域に、前節までの理論を適用するものである。

③ これについては、「概要」および「緒言」で説明したもので足りている。要約すれば、有限の広がりの波源から出た波は、一様平面波と非一様波との連続合成よりなり[1]、非一様素波一つでは無限大になるが、この素波に対しては、前節までの理論がそのまま適用できる。この非一様素波は、surface wave, leaky wave[2] に重要な役割りを演ずる。

6. 結 言

この現象が、計算方法への利用または電磁波的理のためのみでなく、自然あるいは、実験室でのある現象の説明および有効利用の可能性の多少は、現在のところ、筆者にはわから



第6図 リアクタンスシートに等価な金属歯形回路

ない。

実は、筆者は、それをめあてとして計算したのであるが、一步退いて、負誘電率媒質中の電磁波の状態を今までよりはるかに明確にしてあるゆえに、この計算方法を拡張すれば、負誘電率媒質が関係している伝送系における諸現象、たとえば、surface wave および leaky wave などを解釈する上に有効であろうと思われる。

参考文献

- [1] M. Born & E. Wolf: "Principles of optics", p. 561, Pergamon Press, New York, (1964)
- [2] T. Tamir & A. A. Oliner: "The spectrum of electromagnetic waves guided by a plasma layer", Proc. IEEE, 51, 2, (Feb. 1963) p. 317

付録 1. 媒質 1 内の波動

媒質 1 内の波動は、本文 (7, 8, 9) のように、波動方程式の二つの特解の和よりなるが、もし媒質 1 が無限領域にわたるものならば、特解一つで解になりうる。この問題の場合は、第 2 媒質との境界があるため、二つの特解を加えて一般解とした。その中の一方を入射波、他方を反射波と考えうるが、それはどちらでもよい。いま、第 1 項を入射波と考える。第 1 項のみを再掲すると次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} H_{x_1} &= P_1 e^{-jk_1 y} e^{-j\beta z} \\ E_{z_1} &= P_1 \frac{k_1}{\omega \epsilon_1} e^{-jk_1 y} e^{-j\beta z} \\ E_{y_1} &= -P_1 \frac{\beta}{\omega \epsilon_1} e^{-jk_1 y} e^{-j\beta z} \end{aligned} \right\} \quad (A-1)$$

第1図のように Ray が第3象限にある入射波を考えれば,

$$\xi_1 > 0, \quad \beta_r \geq 0 \quad (A-2)$$

(A-1) の波動の形は次のようになる.

$$e^{-j(\xi_1 y + \beta_r z)} e^{(\eta_1 y + \alpha_r z)} \quad (A-3)$$

付図1のように, u, v 座標に変換する

$$\left. \begin{aligned} y &= u \cos \theta - v \sin \theta \\ z &= u \sin \theta + v \cos \theta \end{aligned} \right\} \quad (A-4)$$

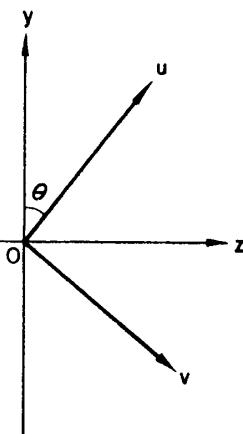
位相項について考えるに,

$$\begin{aligned} \xi_1 y + \beta_r z &= (\xi_1 \cos \theta + \beta_r \cos \theta) u \\ &\quad + (-\xi_1 \sin \theta + \beta_r \cos \theta) v \end{aligned}$$

したがって, v 方向に位相変化がないように u, v 軸を選んだときには,

$$\tan \theta = \frac{\beta_r}{\xi_1}$$

付図1 媒質1における $u-v$ 座標系



$\xi_1 > 0, \pi/2 > \theta \geq 0$ としているゆえに,

$$\cos \theta = \frac{\xi_1}{\sqrt{\xi_1^2 + \beta_r^2}} \quad (A-5)$$

$$\therefore \quad \sin \theta = \frac{\beta_r}{\sqrt{\xi_1^2 + \beta_r^2}} \quad (A-6)$$

このとき, $\xi_1 \cos \theta + \beta_r \sin \theta = \sqrt{\xi_1^2 + \beta_r^2}$

ゆえに, 位相項は次のようになる.

$$e^{-j\sqrt{\xi_1^2 + \beta_r^2} u} \quad (A-7)$$

次に, 減衰(または増大)項について考えるに,

$$\eta_1 y + \alpha_r z = (\eta_1 \cos \theta + \alpha_r \sin \theta) u + (-\eta_1 \sin \theta + \alpha_r \cos \theta) v$$

$$u \text{ の係数} = \eta_1 \cos \theta + \alpha_r \sin \theta = \frac{\xi_1 \eta_1 + \beta_r \alpha_r}{\sqrt{\xi_1^2 + \beta_r^2}}$$

本文(16)より, $\xi_1 \eta_1 + \beta_r \alpha_r = 0$ となるゆえ, この項は零となる. さらに, $\eta_1 \cos \theta + \alpha_r \sin \theta = 0$ より, 次のようになる.

$$\tan \theta = -\frac{\eta_1}{\alpha_r}$$

$\pi/2 > \theta \geq 0$ であるゆえ, α_r の正, 負により,

$$\cos \theta = \frac{\pm \alpha_r}{\sqrt{\eta_1^2 + \alpha_r^2}} \quad (A-8)$$

$$\therefore \quad \sin \theta = \frac{\mp \eta_1}{\sqrt{\eta_1^2 + \alpha_r^2}} \quad (A-9)$$

このとき, $-\eta_1 \sin \theta + \alpha_r \cos \theta = \pm \sqrt{\eta_1^2 + \alpha_r^2}$

ゆえに減衰項は次のようになる.

$$e^{\pm \sqrt{\eta_1^2 + \alpha_r^2} v} \quad (A-10)$$

したがって, 波動の形は, (A-7, 10) をまとめて,

$$e^{-j\sqrt{\xi_1^2 + \beta_r^2} u} e^{\pm \sqrt{\eta_1^2 + \alpha_r^2} v} \quad (A-11)$$

(ただし, 複号は α_r の正負による.)

次に v , u 方向の電界成分を求める. (指數関数の項 $e^{-j\sqrt{\xi_1^2 + \beta_r^2} u} e^{\pm \sqrt{\eta_1^2 + \alpha_r^2} v}$ を除いて考える.)

$$\begin{aligned} E_v &= E_z \cos \theta - E_y \sin \theta \\ &= \frac{P_1}{\omega \epsilon_1} [(\xi_1 \cos \theta + \beta_r \sin \theta) + j(\eta_1 \cos \theta + \alpha_r \sin \theta)] \\ &= \frac{P_1}{\omega \epsilon_1} \sqrt{\xi_1^2 + \beta_r^2} \end{aligned} \quad (A-12)$$

$$\begin{aligned} E_u &= E_z \sin \theta + E_y \cos \theta \\ &= \frac{P_1}{\omega \epsilon_1} [(\xi_1 \sin \theta - \beta_r \cos \theta) + j(\eta_1 \sin \theta - \alpha_r \cos \theta)] \\ &= \mp j \frac{P_1}{\omega \epsilon_1} \sqrt{\eta_1^2 + \alpha_r^2} \end{aligned} \quad (A-13)$$

(ただし, (A-13) の複号は, α_r の正負による)

(A-11, 12, 13) より, 実効電力流は, 正しく u 方向に向っていることおよび u 方向には, 電力は増減せず, 同じ強さで流れていることがわかる.

以上の所説と全く同様にして, 本文 (7, 8, 9) の第2項の波動の実効電力流は, 正しく u' 方向に向っていることおよび u' 方向には, 電力の増減はなく, 同じ強さで流れていることがわかる. (付図2参照)

付録2. 媒質2内の波動

媒質2内の波動は本文 (10, 11, 12) である. 本文図1の入射状態では, あとで $\xi_2 > 0$ か $\xi_2 = 0$ とわかるのであるが, 今はまだわからないとしておく.

波動の形は次のようになる.

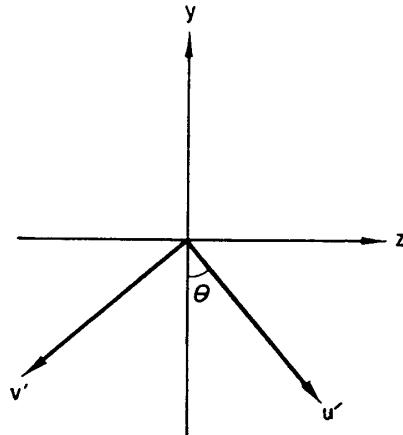
$$e^{j(\xi_2 y - \beta_r z) - (\eta_2 y - \alpha_r z)} \quad (B-1)$$

付図3のように, l , m 座標に変換する.

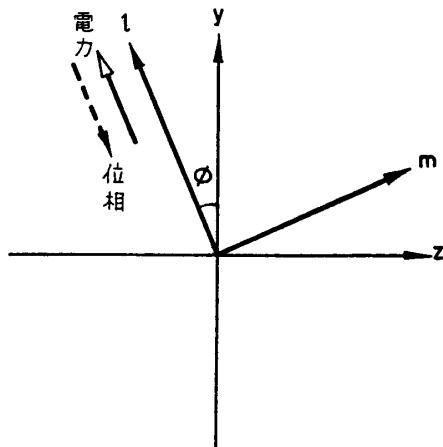
$$\left. \begin{aligned} y &= l \cos \phi + m \sin \phi \\ z &= -l \sin \phi + m \cos \phi \end{aligned} \right\} \quad (B-2)$$

位相項について考えるに,

$$\xi_2 y - \beta_r z = (\xi_2 \cos \phi + \beta_r \sin \phi) l + (\xi_2 \sin \phi - \beta_r \cos \phi) m$$



付図2 媒質1における u' - v' 座標系



付図3 媒質2におけるl-m座標系

したがって、 m 方向には位相変化がないように l , m 軸を選んだときには、 $\tan \phi = \beta_r / \xi_2$

この式は、 β_r の符号が定まっているとき、 ϕ と ξ_2 との符号の関係を示す式である。 $\beta_r \geq 0$ としているゆえに、 l 軸が第2象限にあれば、 $\xi_2 > 0$ 、第1象限にあれば、 $\xi_2 < 0$ となる。また、 $\phi = \pm \pi/2$ のとき、 $\xi_2 = 0$ となる。

上式より、

$$\cos \phi = \frac{\pm \xi_2}{\sqrt{\xi_2^2 + \beta_r^2}} \quad (B-3)$$

($-\pi/2 < \phi < \pi/2$ であるゆえに、 $\cos \phi > 0$ 。ゆえに、上式の複号は ξ_2 の正負による)

$$\sin \phi = \frac{\pm \beta_r}{\sqrt{\xi_2^2 + \beta_r^2}} \quad (B-4)$$

このとき、 $\xi_2 \cos \phi + \beta_r \sin \phi = \pm \sqrt{\xi_2^2 + \beta_r^2}$

ゆえに、位相項は次のようになる。

$$e^{\pm j \sqrt{\xi_2^2 + \beta_r^2} l} \quad (B-5)$$

次に、減衰項について考えるに、

$$\eta_2 y - \alpha_r z = (\eta_2 \cos \phi + \alpha_r \sin \phi) l + (\eta_2 \sin \phi - \alpha_r \cos \phi) m$$

$$l \text{ の係数} = \eta_2 \cos \phi + \alpha_r \sin \phi = \pm \frac{\xi_2 \eta_2 + \beta_r \alpha_r}{\sqrt{\xi_2^2 + \beta_r^2}}$$

本文 (17) より、 $\xi_2 \eta_2 + \beta_r \alpha_r = 0$ となるゆえ、この項は零となる。さらに、 $\eta_2 \cos \phi + \alpha_r \sin \phi = 0$ より次のようになる。

$$\tan \phi = -\eta_2 / \alpha_r$$

これより、 l 軸が第2象限にあれば、 η_2 と α_r は異符号、第1象限にあれば同符号である。

上式より、

$$\cos \phi = \frac{\pm \alpha_r}{\sqrt{\eta_2^2 + \alpha_r^2}} \quad (B-6)$$

(ただし複号は、 α_r の正負による)

$$\sin \phi = \frac{\mp \eta_2}{\sqrt{\eta_2^2 + \alpha_r^2}} \quad (B-7)$$

このとき、 $\eta_2 \sin \phi - \alpha_r \cos \phi = \mp \sqrt{\eta_2^2 + \alpha_r^2}$

ゆえに減衰項は次のようになる。

$$e^{\pm \sqrt{\eta_2^2 + \alpha_r^2} m} \quad (B-8)$$

したがって、波動の形は (B-5, 8) をまとめて、

$$e^{\pm j \sqrt{\xi_2^2 + \beta_r^2} l} e^{\pm \sqrt{\eta_2^2 + \alpha_r^2} m} \quad (B-9)$$

(ただし、位相項、減衰項の複号はそれぞれ ξ_2 , α_r の正負による。)

次に、 m , l 方向の電界成分を求める。(指標関数の項 $e^{\pm j \sqrt{\xi_2^2 + \beta_r^2} l} e^{\pm \sqrt{\eta_2^2 + \alpha_r^2} m}$ を除いて

考える。)

$$\begin{aligned}
 E_m &= E_x \cos \phi + E_y \sin \phi \\
 &= \frac{-Q_2}{\omega \epsilon_2} [(\xi_2 \cos \phi + \beta_r \sin \phi) + j(\eta_2 \cos \phi + \alpha_r \sin \phi)] \\
 &= \pm \frac{Q_2}{\omega \epsilon_{2p}} \sqrt{\xi_2^2 + \beta_r^2}
 \end{aligned} \tag{B-10}$$

(複号は、 ξ_2 の正負による)

$$\begin{aligned}
 E_l &= -E_x \sin \phi + E_y \cos \phi \\
 &= \frac{-Q_2}{\omega \epsilon_2} [(-\xi_2 \sin \phi + \beta_r \cos \phi) + j(-\eta_2 \sin \phi + \alpha_r \cos \phi)] \\
 &= \pm j \frac{Q_2}{\omega \epsilon_{2p}} \sqrt{\eta_2^2 + \alpha_r^2}
 \end{aligned} \tag{B-11}$$

(複号は、 α_r の正負による)

$$\begin{aligned}
 R_e [E_m H_x^*]_{y=z=0} & \\
 &= \pm \frac{Q_2 Q_2^*}{\omega \epsilon_{2p}} \sqrt{\xi_2^2 + \beta_r^2}
 \end{aligned} \tag{B-12}$$

ゆえに、実効電力流は、 ξ_2 の正負によって、 $+l$ 方向、 $-l$ 方向に向っていることがわかる。さらに、(B-9) をみれば、 $\pm l$ 方向には電力は増減せずに同じ強さで流れていることがわかる。

ここまで到達すると、この問題に関しては、 ξ_2 は正か零、 l 軸は第2象限にあるべきことがわかる。以下、これについて述べる。

まず、もう少し初めの部分から考えてみると、電磁界の形としては、本文(4, 5, 6)に subscript 2 を付したもののが一般解となりうるが、媒質 2 が無限遠までそのまま存在する場合には、2 項の中の一つを取ればよろしい。なぜならば、このときは 2 個の振幅 Q_1, Q_2 のおののは、本文(19, 20)のように、振幅 P_1 のみで表すことができるが、さらに 1 個の振幅 P_2 を加えると、3 個の振幅 Q_1, P_2, Q_2 のおののは、振幅 P_1 のみで表すことができないからである。

2 項の中の一つと述べたが、それはどちらの項でもよい。なぜならば、一方から他方へ移るには単に k を $-k$ にすれば良く、 k を定める方程式は、本文(3)のみで、この式中には k^2 の形で入っているからである。そのようなわけで第2項を採用したのが、(10, 11, 12) である。

(B-12) の下の叙述で、 ξ_2 の正負によって実効電力流は $+l$ 方向、 $-l$ 方向に向うことになり、これらの状態は $+l$ の無限遠まで続くので、 $+l$ の無限遠方に電磁界の源のないこの問題の場合には、 $\xi_2 \geq 0$ である。このとき、(B-3) の上の叙述によって、 l 軸は第2象限にある。

付録 3. 各方向の伝ば定数間の関係

本文(16)より、次の関係式が得られる。

$$(\xi_1^2 + \beta_r^2) = \omega^2 \mu \epsilon_1 + (\eta_1^2 + \alpha_r^2) \tag{C-1}$$

$$\xi_1 \eta_1 = -\beta_r \alpha_r \quad (C-2)$$

(A-11) から明きらかにように、 $-j\sqrt{\xi_1^2 + \beta_r^2}$, $\pm\sqrt{\eta_1^2 + \alpha_r^2}$ はそれぞれ u , v 方向の伝ば定数である。 (C-1) より、 $\xi_1^2 + \beta_r^2$, $\eta_1^2 + \alpha_r^2$ のいづれか一方を定めれば他方は定まってしまう。それは入射角 θ に無関係に定めることができる。すなわち、入射角 θ は、 $\tan \theta = \beta_r / \xi_1$ から、別に定めることができる。したがって、伝ば定数に関して、入射波の自由度は 2つあることとなる。すなわち「進行方向に垂直な方向の減衰度」(または、「進行方向の位相定数」を採用しても良い。) と「進行方向」とである。

次に、第2媒質中の定数との関連について述べると、本文 (16, 17) より、

$$k_2^2 - k_1^2 = -\omega^2 \mu (\epsilon_{2p} + \epsilon_1)$$

が得られるが、これより次式が得られる。

$$\xi_2^2 - \eta_2^2 = -\omega^2 \mu (\epsilon_{2p} + \epsilon_1) + (\xi_1^2 - \eta_1^2) \quad (C-3)$$

$$\xi_2 \eta_2 = \xi_1 \eta_1 \quad (C-4)$$

(C-3, 4) より、 ξ_1 , η_1 が定まれば、 ξ_2 , η_2 が定まる。また、(C-1, 2) より、 ξ_1 , η_1 が定まれば、 β_r , α_r も定まる。

したがって、第1媒質中の電磁波の「進行方向」および「進行方向に垂直な方向の減衰度」が定まつていれば、第2媒質中の電磁波のそれらも定まる。

付録 4. Snell の法則

$\sin \theta$ は (A-6) より、 $\sin \phi$ は (B-4) のプラス符号のものを用いると、

$$\frac{\sin \theta}{\sin \phi} = \frac{\frac{\beta_r}{\sqrt{\xi_1^2 + \beta_r^2}}}{\frac{\beta_r}{\sqrt{\xi_2^2 + \beta_r^2}}} = \frac{\frac{\omega}{\sqrt{\xi_1^2 + \beta_r^2}}}{\frac{\omega}{\sqrt{\xi_2^2 + \beta_r^2}}} = \frac{\text{第1媒質中の位相速度}}{\text{第2媒質中の位相速度}}$$

となり、正誘電率媒質間における Snell の法則の拡張と考える。ただし、この場合の分母子の位相速度は、付録 3 に詳述したように、「進行方向に垂直な方向の減衰度」によって変ることに注意しなければならぬ。

1967 年 5 月 31 日 計測部