

外圧に因る球形殻の挫屈 (第 2 報)

(特に下限挫屈荷重並びにエネルギー障壁について)

植村 益次, 吉村 慶丸

The Buckling of Spherical Shells by External Pressure (2nd Report)

(Especially on the Lower Buckling Load and the Energy Barrier)

Masuji UEMURA and Yoshimaru YOSHIMURA

ABSTRACT: The buckling of spherical shells under constant external pressure is treated from the energetic view point, based on the pressure-deflection relation obtained previously from the equilibrium equations of the shell under reasonable assumptions. The agreements of the theoretical values of the lower buckling load, the corresponding angle on which the buckled part stands to the center of the sphere and the deflection after buckling with the experimental results are satisfactory. The energy barrier to be jumped over in buckling is reduced to a small value reasonable for the buckling to take place from the idea that the buckling may extend progressively from a certain small segment of the shell to the final stable state.

After the present investigation was accomplished, the writers have become aware of the paper by H. S. Tsien, based on the same view point of this paper, which had been left unknown to us owing to the second world war. The reason why we dare to publish the present paper, nevertheless, is that the present method is more exact and our concept as to the energy barrier is considered to be in advance of his results.

(Received December 9, 1952)

1. 緒言

球形殻の挫屈が円筒殻と同様に特異性を示すことは、その変形が何れも概不伸張有限変形であることから予想できる。前報の平衡方程式による解析¹⁾によつて、Kármán & Tsien²⁾の第1の論文の定性的な誤を指摘したが、挫屈後の平衡安定状態を決定できなかつた。従つて本報告では、外圧による球形殻の挫屈をエネルギーの立場から取扱ひ、下挫屈荷重・エネルギー障壁等の考察から挫屈現象を論じてみたいと思う。

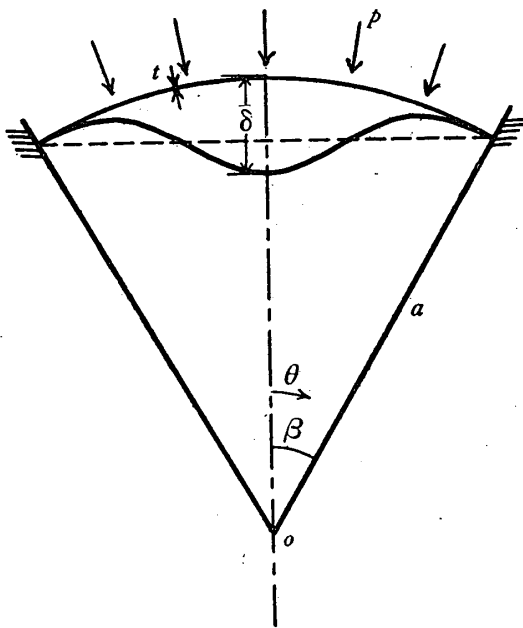
本研究実施後に、同じ問題をやはりエネルギー

の立場から論じた Tsien³⁾の訂正論文(第二次大戦中のもので入手不可能であつた)のあることを偶々知り、友近教授の御好意によりその原文を見ることができた。そのために本報告の価値は半減したと思うが、それにも拘らず敢えて発表する理由は、次に述べる点で本報告が寄与するところがあると思うからである。それは第1に、Tsienの論文がその基礎をおいている Friedrichs の応力一撓みの関係は、かなり乱暴な省略算によつて導かれたものであるのに対して、我々の理論の基礎をなす応力一撓みの関係は、平衡方程式を用いて

可なり合理的に計算した結果であることである。
これは又 Tsien が将来の可能な発展として指示したところと偶々一致したものである。第2には、エネルギー障壁の立場から挫屈過程について考察を進めることができたことである。

2. 全ポテンシャルエネルギー

実験結果⁴⁾に基づき、球形殻は挫屈前に外圧によつて一様に圧縮され、其の後その一部が第1図の様に挫屈し、残りの部分は殆んど球形を保つものとする。挫屈状態の全ポテンシャルエネルギー W を考える。



第 1 図

先ず殻の伸びによる歪エネルギー U_1 は

$$U_1 = \frac{\pi t a^2 \beta^2}{E} \int_0^1 \{ (\sigma_1 + \sigma_{10})^2 - 2\nu(\sigma_1 + \sigma_{10})(\sigma_2 + \sigma_{20}) + (\sigma_2 + \sigma_{20})^2 \} s ds \quad (1)$$

曲げによる歪エネルギー U_2 は

$$U_2 = \frac{\pi E t^3 a^2 \beta^2}{12(1-\nu^2)} \int_0^1 (\kappa_1^2 + 2\nu\kappa_1\kappa_2 + \kappa_2^2) s ds$$

であり、又外力のポテンシャル T は

$$T = 2\pi p a^2 \beta^2 \int_0^1 (w + w_0) s ds \quad (2)$$

である。但し

a ; 球形殻の半径

2β ; 部分球形殻の中心角

t ; 球形殻の板厚

E ; ヤング係数

ν ; ポアソン比

p ; 球形殻の単位表面積に仿らく外圧力

σ_1, σ_2 ; 挫屈による経線・緯線方向の附加引張応力

κ_1, κ_2 ; 挫屈による緯線・経線周りの曲率変化

w ; 挫屈による撓

$s = \theta/\beta$

$$\sigma_{10} = \sigma_{20} = -\frac{ap}{2t}, \quad w_0 = -\frac{a^2 p}{2} \frac{1-\nu}{Et} \quad (3)$$

(添字“0”は一様圧縮によるものを意味する。)

全ポテンシャルエネルギー W は

$$W = U_1 + U_2 + T \quad (4)$$

である。

次に適当な挫屈形として、次の境界条件

$$\left. \begin{aligned} s=0; \quad w=-\delta, \quad dw/ds=0 \\ s=1; \quad w=0, \quad dw/ds=0 \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

を満足する w

$$w = -\delta(1-2s^2+s^4) \quad (6)$$

を仮定する。この撓形では境界において曲率等の不連続を伴うが、 $t/a \ll 1$ ではその誤差は著しくない。中心角 β は小さいとして、一次の微少量のみを考慮した平衡方程式を解くと、前報で示したように次の値が得られる。

$$\left. \begin{aligned} \sigma_1 &= -\frac{E\delta}{6a} \left[\left\{ \frac{2(2-\nu)}{1-\nu} - 3s^2 + s^4 \right\} - \frac{\delta}{a\beta^2} \left\{ \frac{5-3\nu}{1-\nu} - 6s^2 + 4s^4 - s^6 \right\} \right] \\ \sigma_2 &= -\frac{E\delta}{6a} \left[\left\{ \frac{2(2-\nu)}{1-\nu} - 9s^2 + 5s^4 \right\} - \frac{\delta}{a\beta^2} \left\{ \frac{5-3\nu}{1-\nu} - 18s^2 + 20s^4 - 7s^6 \right\} \right] \\ \kappa_1 &= \frac{d^2 w}{ds^2} = \frac{4\delta}{a^2 \beta^2} (1-3s^2) \\ \kappa_2 &= \frac{dw}{ds} / s = \frac{4\delta}{a^2 \beta^2} (1-s^2) \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

(3), (6), 及び (7) を用いて W を計算し、無次元量で表わすと、

$$\begin{aligned} W' = \frac{Wa}{\pi E t^4} &= \frac{23-9\nu}{126(1-\nu)\alpha} y^4 - \frac{(3-\nu)}{9(1-\nu)} y^3 \\ &+ \left\{ \frac{(7-2\nu)\alpha}{45(1-\nu)} - \frac{2}{3} x + \frac{8}{9(1-\nu^2)\alpha} \right\} y^2 \\ &- \alpha x^2 (1-\nu) \end{aligned} \quad (8)$$

$$\text{但し } \alpha = \frac{a\beta^2}{t}, \quad x = \frac{pa^2}{2Et^2}, \quad y = \frac{\delta}{t}$$

である。

平衡方程式は $W' = \min$ の条件即ち $dW'/dy = 0$ から導かれ、

$$x = \frac{23-9\nu}{42(1-\nu)}y^2 - \frac{3-\nu}{4(1-\nu)}y + \left\{ \frac{7-2\nu}{30(1-\nu)}\alpha + \frac{4}{3(1-\nu^2)\alpha} \right\} \quad (9)$$

で示されるが、前報に於いて、殻面に直角方向の平衡方程式を Galerkin 法によつて積分して得たものと全く一致する。

3) 挫屈荷重の決定

球形殻の挫屈の実験は、普通水圧の下で行われる。其の際挫屈の経過に伴う圧力の変化の仕方により、後に述べる下限挫屈荷重の値が影響されるものであるが、こゝでは簡単のために圧力一定の場合を考える。これは水槽に装置された加圧装置に dead weight を使用するか、水槽の体積が極めて大きい場合に相当する。

扱て球形殻が一樣圧縮の状態から、部分的に挫屈し、エネルギーの散逸がないものとする、外圧のなした仕事は、内部的な歪エネルギーに変化したことになる。 $p = \text{一定}$ の場合には、外圧のなした仕事は外圧のポテンシャルの符号をかえたものに等しく、挫屈前後で全ポテンシャルエネルギーの値は等しいとも考えられる。

挫屈直前のポテンシャルエネルギー W' を W'_0 とすると、(8) で $y=0$ より

$$W'_0 = -(1-\nu)\alpha x^2 \quad (10)$$

である。従つて上に述べた条件即ち $W'_{y=y} = W'_0$ より

$$\frac{23-9\nu}{14(1-\nu)}\alpha y^2 - \frac{3-\nu}{1-\nu}y + \left\{ \frac{(7-2\nu)}{5(1-\nu)} - 6x + \frac{8}{(1-\nu^2)\alpha} \right\} = 0 \quad (11)$$

が得られる。勿論この条件式は、外圧のなした仕事を歪エネルギーの増加分と等置して、

$$\begin{aligned} 2\pi p a^2 \beta^2 \int_0^1 w s ds = & \frac{\pi t a^2 \beta^2}{E} \int_0^1 \left\{ (\sigma_1 + \sigma_{10})^2 \right. \\ & - 2\nu(\sigma_1 + \sigma_{10})(\sigma_2 + \sigma_{20}) + (\sigma_2 + \sigma_{20})^2 \\ & \left. - (\sigma_{10}^2 - 2\nu\sigma_{10}\sigma_{20} + \sigma_{20}^2) \right\} s ds \\ & + \frac{\pi E t^3 a^2 \beta^2}{12(1-\nu^2)} \int_0^1 (\kappa_1^2 + 2\nu\kappa_1\kappa_2 + \kappa_2^2) s ds \quad (12) \end{aligned}$$

からも得られる。

(11) は挫屈平衡状態を意味する故に、その場合の y として、(9) より求めた y_e

$$y_e = \frac{1}{23-9\nu} \left[\frac{21(3-\nu)\alpha}{4} + \sqrt{\frac{7}{80}(259-146\nu)} \right. \\ \left. + 27\nu^2\alpha^2 + 42(1-\nu)(23-9\nu)\alpha x - \frac{56(23-9\nu)}{1+\alpha} \right] \quad (13)$$

を代入すると、結局 $\nu = \frac{1}{3}$ として

$$9\alpha^2 x^2 - \left(\frac{29}{10}\alpha^2 + 27 \right) \alpha x + \left(\frac{19}{1200}\alpha^4 + \frac{87}{20}\alpha^2 + \frac{81}{4} \right) = 0 \quad (14)$$

の関係式が得られ、これを第 2 図に示す。第 2 図から見られる様に、 x には最小値 x_m が存在するが、この値が挫屈の可能性を示す最低値で、

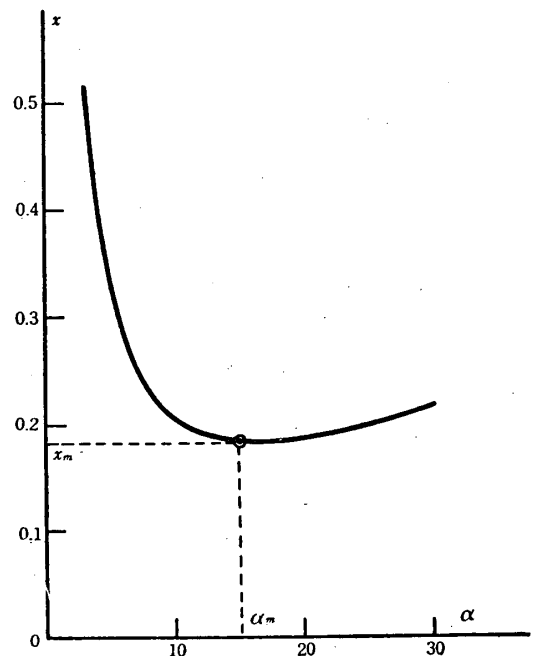
“下限挫屈荷重”と定義する。 $\nu = 1/3$ では

$$\left. \begin{aligned} x_m &= 0.1835 \\ \alpha_m &= 15.0 \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

又 (13) より

$$y_m = 14.0 \quad (16)$$

である。



第 2 図

4. 挫屈過程

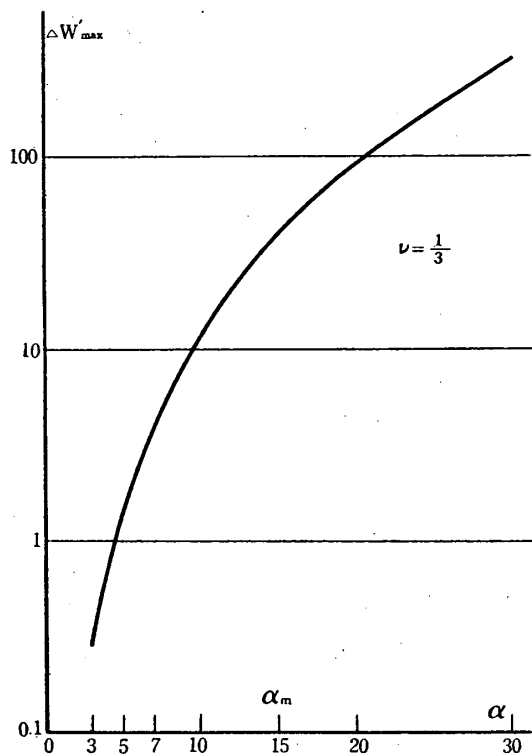
前節に示した新しいエネルギー的考察によつて求められた“下限挫屈荷重”は、勿論挫屈の可能

性を示すものであつて、若し注意深く実験が行われるならば更に高い挫屈値を示すであらう。球形殻が実際に挫屈し平衡安定状態に移行する場合、或るエネルギー障壁を飛び越えなければならないのであつて、挫屈の可能性を検討するには、この点に就いて更に考察する必要がある。

挫屈前完全球形殻であつたものが、その一部が挫屈して平衡安定状態に達する場合、終始 α が一定と考えると、エネルギー障壁 $\Delta W'$ は

$$\Delta W' = \frac{23-9\nu}{126(1-\nu)\alpha} y^4 - \frac{3-\nu}{9(1-\nu)} y^3 + \left\{ \frac{(7-2\nu)}{45(1-\nu)} \alpha - \frac{2}{3} x + \frac{8}{9(1-\nu^2)\alpha} \right\} y^2 \quad (17)$$

で表わされ、(14) を満足する $\alpha \sim x$ の場合について $\Delta W'$ の最大値 $\Delta W'_{max}$ を第3図に示す。



第 3 図

扱て $\alpha = \alpha_m$ の場合、

$$\Delta W'_{max} = 38.1 \quad (18)$$

であつて、極めて大きく、前節で論議した挫屈の可能性は極めて小さいものと考えられる。

そこで一定の挫屈荷重で挫屈が進行する場合、 y と α とは漸次増加し、夫々 y_m と α_m で挫屈平衡安定状態に達するものとする。その際 α と y とは、平衡方程式 (9) を満足する。撓み y の

小さい挫屈初期には、(9) を満足する α が存在しないので、最小の α 即ち (9) より

$$\frac{(259-146\nu+27\nu^2)}{80(23-9\nu)} \alpha'^2 + 6(1-\nu) \alpha' x - \frac{8}{1+\nu} = 0 \quad (19)$$

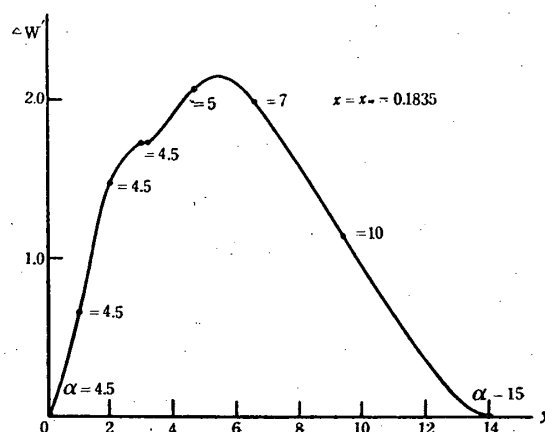
を満足する α' で挫屈が開始するものとする。以上の考察に基づき、 $x = x_m$ の場合のエネルギー障壁 $\Delta W'$ を y に対して第4図に示す。この場合には、

$$\Delta W'_{max} = 2.15 \quad (20)$$

で、(18) より遙かに小さい。又更に微小変位理論による古典的挫屈値 $x_{cr} = 0.606$ と参照して、 x_m 以上 x_{cr} に達する迄に必要な歪エネルギーの量

$$\Delta W' = \frac{2}{3} \alpha_m (x_{cr}^2 - x_m^2) = 3.335 \quad (21)$$

と比較しても、(20) は小さい。



第 4 図

従つて挫屈過程についてこのような考察を行えば、挫屈の可能性も可成り合理的なものとなるであらう。

5. 諸結果との比較

Tsien³⁾ は第1報²⁾ に於ける“下限挫屈荷重”の論拠を訂正し、外圧 p が挫屈により変化する場合も合せ解析している。本法と同じ挫屈形 w を仮定しているが、本法ではポアソン比を0としないで、緯線方向の変位 u も考慮して二次元的に解析している点は、Tsien も指摘しているように更に精密なものである。

今 E. E. Sechler & W. Bollay による実験値及び Tsien の理論値と第1表に比較する。

第 1 表

	実験値 (E.E. Sechler & W. Bollay)	理論値 ($\nu=1/3$)	
		筆者等 の結果	Tsien の結果
x_m	0.154	0.1835	0.1581
y_m	12.5	14.0	16.6
a_m	14.7	15.0	19.0
$\beta_m(a/t=900)$	7.31°	7.41°	8.32°

大体実験値と良く合致しており、古典的線型理論との甚だしい相異は解決出来たと云える。

6. 結 言

・球形殻が外圧一定の下で挫屈する場合について、平衡方程式による解を用いてエネルギー的考察を加え、実験値と良く合致した挫屈条件を論ず

(1952 年 12 月 9 日受理)

ることができた。又今迄全く等閑視されていた挫屈過程についても、考察を行つた結果、挫屈条件の合理性が立証された様に思われる。

終りに貴重な文献を特にお貸し頂いた友近教授、並びに計算の手傳をして下さつた田近陽子君に感謝の意を表する。

文 献

- 1) 吉村慶丸, 植村益次: 東大理工研報告, 3 (1949), 316.
- 2) Th. von Kármán & H.S. Tsien: *Jour. of Aero. Sci.*, 7 (1939), 43.
- 3) H.S. Tsien: *Jour. of Aero. Sci.*, 9 (1942), 373.
- 4) 徳川武定: 造船協会々報, 59 (1939), 194.