

鍛造および押出加工に関する塑性力学的研究

第3報 軸対称問題の解析

工 藤 英 明

概 要

軸対称鍛造および押出加工問題に上界接近法を適用し、加工硬化しない Lévy-Mises の剛塑性材料が圧縮、押出、上昇穿孔および向合押出鍛造加工を受ける場合の所要力、変形および欠陥について解析を行ない、新しい知識を得るとともに今まで実験的にのみ知られている事実の説明ができた。さらに工具と材料間に Coulomb 摩擦が存在する場合ならびに材料が加工硬化する場合についての上界接近法についての考察を行なった。

結 論

実際の鍛造および押出加工においては軸対称問題はかなりしばしば見受けられるところである。もちろん、すべての鍛造ないし押出加工は第1報で取扱った平面ひずみ問題ならびに軸対称問題として解明しつくされるものではないが、軸対称問題は平面ひずみ問題に次いで解析を行ないやすく、かつ実験的研究はむしろ平面ひずみ問題よりも容易である。しかも平面ひずみおよび軸対称問題について十分明らかにすることによって、他の複雑な三次元問題考察の手がかりも与えられるであろう。この意味において、本報においては軸対称問題を取上げることにした。

すでに第1報緒論において述べたように、厳密な塑性力学的基礎の上に立った軸対称鍛造および押出問題の解析は最近やっと手がけられたばかりであり、人為的な仮定を用いて解かれている問題の種類も半無限体への押込など二、三に過ぎない。

そこで本報においては第1報で平面ひずみ問題を解析した方法と同様に、材料を加工硬化しない等方性の剛塑性体と仮定し、上界をできるだけ低くすることによって真の加工圧力および変形に近づく方法すなわち上界による接近法を採用した。この際、平面ひずみ問題について試みたような、いろいろの種類 of 可容速度場とその組合せの比較は数式が厄介になるため行わず、二種類の比較的簡単な速度場を使用して比較的単純な圧縮、押出、穿孔、押出鍛造および対称向合押出鍛造の解析を行なった。それゆえ、ここで得られた結果の真の解に対する誤差は平面ひずみ問題におけるそれほど小さいことは期待できない。本報においてはさらに材料と工具間に Coulomb 摩擦が作用する場合に摩擦係数の大きさが加工圧力にどのように影響するかを上界接近法によって計算する方法を考察し、また材料が加工硬化を行なうような場合その所要加工圧力を、非硬化性材料に対して得られた結果から誘導する方法についても考察した。

本研究においては幾種かの問題を解いたが、これは軸対称問題解析方法の前進のための手

がかりに過ぎず、各加工の特性、相当する平面ひずみ問題との比較を行なうことに重点を置きそれぞれの加工についての詳細な研究、たとえばダイス角度、形状の影響といったような因子の解明は今後の研究にまつことにした。

記 号

A : 表面積または断面積	R : 押出、穿孔断面減少比
a : (単位円筒形変形領域高さ)/(外半径)	R' : 断面比
b : (単位円筒形変形領域内径)/(外径)	r : 半径座標
D : 直径	r : 工具面の粗いことを表わす記号
D_c : コンテナ内径	S : 速度不連続面面積
D_e : 押出ダイスまたは円筒形ポンチ内径	s : 工具面が滑らかなことを表わす記号
D_i, D_o : 素材内、外径	\dot{s} : 速度不連続面における相対すべり速度
D_p : 穿孔または押込ポンチ外径	T : 素材高さまたは厚さ
\dot{E} : 内部エネルギー消費率(速度)	\dot{u}, \dot{v} : r および z 方向速度
e : 内部エネルギー消費率係数 $= \dot{E}/(Y \cdot A \cdot \dot{v})$	V : 体積
F : 相対すべり抵抗	\dot{V} : 加工速度または体積変化速度
f : 相対すべり抵抗係数 $= F/Y$	\dot{W} : 外部より与えられる仕事率(速度)
G : 材料内変形層深さ	Y : 材料単軸圧縮(または引張)降伏応力
H : 型面突起部高さまたは凹み深さ	$\bar{\epsilon}$: 全相当ひずみ $= \int d\bar{\epsilon}$
k : 材料剪断降伏応力	$\dot{\epsilon}_r, \dot{\epsilon}_\theta, \dot{\epsilon}_z$: r, θ および z 方向垂直ひずみ速度
L : 材料押出部分長さ	$\dot{\gamma}_{rz}$: rz 面内せん断ひずみ速度
l : 工具前進距離	μ : Coulomb の摩擦係数
\bar{p} : 平均加工圧力またはその上界	

3.1 上界解のための可容速度場の研究

加工の際の上界を求めるためには、すでに第 1 報において述べたように (1.1.1 参照)、与えられた速度の境界条件および体積一定の条件を満たすところの可容速度場を考える必要がある。この速度場の形式が適当であれば少い手間で十分低い、したがって精度のよい結果を得ることができる。このためには第 1 報で行なったようにいろいろなタイプの速度場について比較検討を行なうことが望ましいが、軸対称問題ではそれがかなり厄介になってくるので、以下においては比較的簡単な平行速度場および少数の三角形断面リングより成る速度場についてのみ検討を行なった。またこの場合、平面ひずみ加工問題の解析に使用して便利であった単位変形領域の概念を利用するために単位円筒形変形領域なる概念を導入した。

3.1.1 加工圧力および変形解析の基礎式

Shield および Drucker [1], Shield [2] および Levin [3] は三次元押込加工問題の上下界を求めるに当って、材料の降伏条件として最大剪断応力条件 ((1.1.3)式) を使用した。本研究においては多くの延性材料に対し一層よく適合する Mises の降伏条件を採用する*。この条件は第 1 報 (1.1.2) 式を円筒座標系に書改めて

* 降伏条件の違いによる解析結果の違いにかんしては山田の論文 [4] に説明されている。

$$\bar{\sigma} = \sqrt{\frac{1}{2}\{(\sigma_\theta - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_r)^2 + (\sigma_r - \sigma_\theta)^2 + 6(\tau_{\theta z}^2 + \tau_{zr}^2 + \tau_{r\theta})^2\}}^{\frac{1}{2}}$$

$$= \text{一定} \quad (3.1.1)$$

のように表わされる。ここに $\bar{\sigma}$ はいわゆる相当応力, $\sigma_r, \dots, \tau_{\theta z}, \dots$ は z 方向を軸とする円筒座標にかんする応力テンソルの成分である。 $\bar{\sigma}$ の大きさは単軸引張または圧縮降伏応力が Y なる等方性材料においては

$$\bar{\sigma} = Y \quad (3.1.2)$$

によって与えられる。緒論にも述べたように差当って材料は加工硬化しないと仮定するから, Y は材料の変形過程を通じて一定値をとる。さらに材料の塑性変形中の応力-ひずみ速度関係としては Lévy-Mises の関係

$$\left. \begin{aligned} \dot{\varepsilon}_r &= \dot{\lambda}(\sigma_r + p), & \dot{\varepsilon}_\theta &= \dot{\lambda}(\sigma_\theta + p), & \dot{\varepsilon}_z &= \dot{\lambda}(\sigma_z + p), \\ \dot{\gamma}_{\theta z} &= 2\dot{\lambda}\tau_{\theta z}, & \dot{\gamma}_{zr} &= 2\dot{\lambda}\tau_{zr}, & \dot{\gamma}_{r\theta} &= 2\dot{\lambda}\tau_{r\theta} \end{aligned} \right\} \quad (3.1.3)$$

が適用できるものと仮定する。ここに $\dot{\varepsilon}_r, \dots, \dot{\gamma}_{\theta z}, \dots$ は円筒座標にかんするひずみ速度テンソル成分であり, 軸対称問題においては材料要素の半径方向 (r 方向) および軸方向 (z 方向) の速度成分をそれぞれ \dot{u}, \dot{v} とすれば

$$\left. \begin{aligned} \dot{\varepsilon}_r &= \frac{\partial \dot{u}}{\partial r}, & \dot{\varepsilon}_\theta &= \frac{\dot{u}}{r}, & \dot{\varepsilon}_z &= \frac{\partial \dot{v}}{\partial z}, \\ \dot{\gamma}_{rz} &= \frac{\partial \dot{u}}{\partial z} + \frac{\partial \dot{v}}{\partial r}, & \dot{\gamma}_{\theta z} &= \dot{\gamma}_{r\theta} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (3.1.4)$$

によって与えられる。また (3.1.3) 式中の $\dot{\lambda}$ は正の比例係数であり, p はいわゆる平均水圧で

$$p = -\frac{\sigma_r + \sigma_\theta + \sigma_z}{3} \quad (3.1.5)$$

である。(3.1.4) 式から軸対称問題においては

$$\tau_{\theta z} = \tau_{r\theta} = 0. \quad (3.1.6)$$

さらに (3.1.4) 式は塑性ひずみ速度成分の間の体積一定の条件

$$\dot{\varepsilon}_r + \dot{\varepsilon}_\theta + \dot{\varepsilon}_z = 0 \quad (3.1.7)$$

を含んでいる。

上の諸式から, 塑性変形する材料表面および内部において消費されるエネルギーは単位時間当たり

$$\dot{E} = Y \int_V \dot{\varepsilon} \cdot dV + Y \int_S f \cdot \dot{s} \cdot dS \quad (3.1.8)$$

である。ここに $\dot{\varepsilon}$ は相当ひずみ速度で軸対称問題では

$$\dot{\varepsilon} = \sqrt{\frac{2}{3}\left(\dot{\varepsilon}_r^2 + \dot{\varepsilon}_\theta^2 + \dot{\varepsilon}_z^2 + \frac{1}{2}\dot{\gamma}_{rz}^2\right)}^{\frac{1}{2}} \quad (3.1.9)$$

で表わされ, f は速度の不連続面上における切り抵抗係数, すなわち切り抵抗を Y で割った値, \dot{s} は相対すべり速度である。また上式の第一の積分は考えられた材料内でそれぞれ連続な塑性変形を行なう各領域についての体積積分の総和を意味し, 第二の積分は材料と工具との接触面をも含む速度の不連続面上での面積積分の総和を意味する。

いまある剛体工具が \dot{V} なる速度で進んで材料を成形するとき、この工具と材料の接触面の、工具進行方向に直角な平面への投影面積を A とすれば、この単位投影面積当りの工具進行方向の平均加工圧力上界は

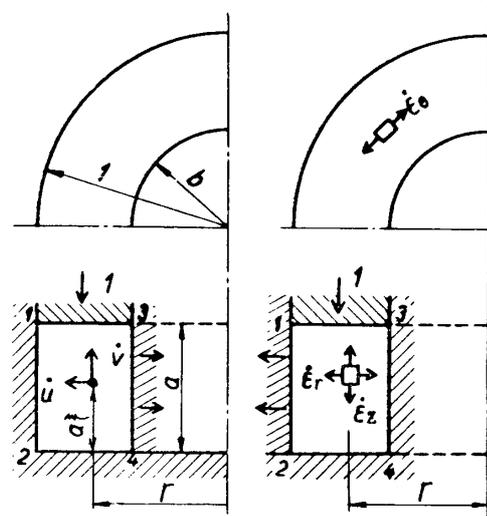
$$\frac{\bar{p}}{Y} = \frac{\dot{E}}{Y \cdot A \cdot \dot{V}} \quad (3.1.10)$$

によって求められる。平面ひずみ問題の場合にならって以後 \bar{p}/Y を圧力上界比と呼ぶことにする。

なお本研究では、工具の面は円筒面か、対称軸に直角な平面のいずれかであるような場合のみを取扱うことにする。

3.1.2 単位円筒変形領域における可容速度場と内部エネルギー消費率

加工問題解析の便宜上、平面ひずみ問題の取扱に当って使用した単位矩形変形領域 (1.1.2) と類似の単位円筒変形領域を第 3.1.1 図のように考えよう*。図 (a) においては外半径 1 、内半径 b で高さ a なる矩形断面円筒が上面 13 を外部物体により 1 なる速度で垂直下方に一樣に押下げられ、内側面 34 が一樣に内方にふくれ出すような場合である。円筒の表面 13 、 12 および 24 に接する物体は剛体とし、また 34 面に外接する物体も垂直方向には伸縮せず半径方向にのみ動くものとする。最後の条件は平面ひずみ問題における単位矩形領域の境界条件 (i) (第 1.1.1 図) に対応する。第 3.1.1 図 (b) においては反対に円筒が外方向のみに一樣にふくれ、他の条件は (a) と同じである。平面ひずみ問題においては上の二つの場合はまったく同等であるが軸対称問題においては別個のものである。



(a) 内方ふくれ出し (b) 外方ふくれ出し
第 3.1.1 図 単位円筒変形領域

3.1.2.1 平行速度場

上述のような境界条件を満す速度場のうちもっとも簡単なものは、古典的解析にもしばしば見うけられるところのひずみ速度が z 座標に無関係な速度場である。このような速度場においては、断面 1234 内に r および z 方向に引いた線は変形中それぞれ平行に移動するので、本研究においては平行速度場と呼ぶことにする。これは平面ひずみ問題に対して使用した一様速度場と似ているが、平行速度場においては $\dot{\epsilon}_z$ 以外は全領域内で一様ではない。いま断面内の点要素の r および z 座標をそれぞれ r および $a\xi$ で表わせば、第 3.1.1 図 (a) に対する平行速度場においては速度成分は

$$\dot{u} = -\frac{1-r^2}{2a \cdot r}, \quad \dot{v} = -\xi \quad (3.1.11)$$

* この方法は平面ひずみ問題において便利な hodograph による計算が今の場合用い得ないために一層便利である。

によって与えられるからひずみ速度成分は (3.1.4) 式より

$$\left. \begin{aligned} \dot{\epsilon}_r &= \frac{1}{2a} \cdot \frac{1+r^2}{r^2}, & \dot{\epsilon}_\theta &= -\frac{1}{2a} \cdot \frac{1-r^2}{r^2}, \\ \dot{\epsilon}_z &= -\frac{1}{a}, & \dot{\gamma}_{rz} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (3.1.12)$$

となり, 相当ひずみ速度は (3.1.9) 式から

$$\dot{\epsilon} = \sqrt{\frac{1}{3}} \left\{ 3 + \left(\frac{1}{r} \right)^4 \right\}^{\frac{1}{2}} \frac{1}{a}. \quad (3.1.13)$$

また境界面上の相対すべり速度は

$$\dot{s}_{13} = \dot{s}_{24} = |\dot{u}|, \quad \dot{s}_{12} = \dot{s}_{34} = |\dot{v}|. \quad (3.1.14)$$

これらを用いて (3.1.8) 式より全内部エネルギー消費率 \dot{E} を計算し, この値を $Y \times$ (加圧面面積) \times (加圧速度) で割ったものを平面ひずみのときと同様, 内部エネルギー消費率係数と呼んで e によって表わすと

$$e = \frac{\dot{E}}{\pi Y(1-b^2)} = M(b) + (f_{13} + f_{24}) \cdot N_1(b) \cdot \frac{1}{a} + \frac{f_{12} + f_{34} \cdot b}{1-b^2} \cdot a \quad (3.1.15)$$

を得る. ここに

$$\left. \begin{aligned} M(b) &= \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{1}{1-b^2} \left(2 - \ln 3 - \sqrt{3b^4 + 1} + \ln \frac{1 + \sqrt{3b^4 + 1}}{b^2} \right), \\ N_1(b) &= \frac{1}{3} \frac{2-b-b^2}{1+b} \end{aligned} \right\} \quad (3.1.16)$$

である. M は b が 0 に近づくとき ∞ になるが, b が 1 においては $2/\sqrt{3}$ となる.

第 3.1.1 図 (b) の場合に平行速度場を適用すると上と同様にして

$$e = M\left(\frac{1}{b}\right) + (f_{13} + f_{24}) \cdot N_2(b) \cdot \frac{1}{a} + \frac{f_{12} + f_{34} \cdot b}{1-b^2} a \quad (3.1.17)$$

を得る. $M(1/b)$ は $b=0$ のとき 1 となる. またここに

$$N_2(b) = \frac{1}{3} \frac{1+b-2b^2}{1+b}. \quad (3.1.18)$$

上式中 f_{13}, \dots はそれぞれの添字によって表わされる境界面上の迂り抵抗係数を意味し, 摩擦のないときには $f=0$, また材料と外部物体が完全に附着するか, 外部物体が円筒領域材料と一体をなす材料の剛性部分である場合には **Mises** の降伏条件によって $f=1/\sqrt{3}$ となる.

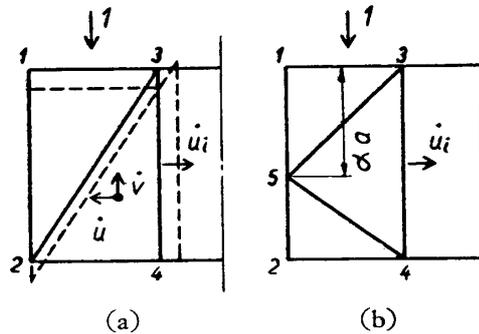
(3.1.15) および (3.1.17) 式は, ふくれ出る側面に接する剛性物体が全体として 1 なる速度で下方にも動くような場合, すなわち平面ひずみ問題における境界条件 (ii) に相当する場合 (第 1.1.1 図) にもそのまま適用できる. またすでに平面ひずみ問題にかんして述べたように, 円筒領域のふくれ出る側面に接する物体が水平方向のみに外部抵抗を受けずに動く場合には上の e の値は加圧面 $1/3$ 上の平均圧力上界 \bar{p} と Y の比を表わす. またこのような場合には第 3.1.1 図において加工の方向を逆にしたとき, すなわち円筒の側面を一様に水平方向に押し上りて上面を一様に上方に持ち上げるとき側面に働く垂直平均圧力の上界比も上の e

に等しくなる。上述の最後の二つのことがらは、後に述べる他の速度場を使用する際にも同じく適用できる。

3.1.2.2 三角形速度場

平面ひずみ問題解析の際に変形領域が幾つかの剛性三角形領域より成るような速度場が計算が簡単でしかも十分低い上界を与えることはすでに見たとおりである。そこでいま軸対称問題の解析に際してもこれと類似の速度場を使って見ることにする。ただし今の場合、材料を三角形断面を有する幾つかのリングより成ると考えると、これら全部は剛体であるわけには行かない。なぜならばこのリングが水平方向に速度成分をもてば(3.1.4)式から明らかのように必ずひずみを生じるからである。そのため、この速度場をたんに三角形速度場と呼ぶことにした。

いまたとえば第3.1.1図(a)の変形に適合するもっとも簡単な三角形速度場として第3.1.2図(a)のようなものを考えよう。ここにリング123は垂直下方のみに1なる速度で動き、それゆえ剛性を保つ。リング234内においては簡単のため \dot{u} は z ないし $\alpha\xi$ に無関係としよう。そうすると断面内の垂直線は変形後も垂直を保ち、境界面34ももちろん垂直線のまま \dot{u}_i なる速度で動く。また境界面23もリング123と適合するためつねに一定傾角 θ の直線を保つとする。このような仮定を用い体積一定の条件を考えることにより、リング234内の速度成分として



第3.1.2図 第3.1.1図(a)に対する三角形速度場

$$\left. \begin{aligned} \dot{u} &= \frac{b}{1+b} \cdot \dot{u}_i \cdot \frac{1+r}{r}, \\ \dot{v} &= -\frac{b}{1+b} \cdot \dot{u}_i \cdot \frac{\xi\alpha}{r} \end{aligned} \right\} \quad (3.1.19)$$

を得る。したがって(3.1.4)式より

$$\left. \begin{aligned} \dot{\epsilon}_r &= -\frac{b}{1+b} \cdot \dot{u}_i \cdot \frac{1}{r^2}, & \dot{\epsilon}_\theta &= \frac{b}{1+b} \cdot \dot{u}_i \cdot \frac{1+r}{r^2}, \\ \dot{\epsilon}_z &= -\frac{b}{1+b} \cdot \dot{u}_i \cdot \frac{1}{r}, & \dot{\gamma}_{rz} &= \frac{b}{1+b} \cdot \dot{u}_i \cdot \frac{\xi\alpha}{r^2} \end{aligned} \right\} \quad (3.1.20)$$

となり

$$\dot{\epsilon} = \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \frac{b}{1+b} \cdot |\dot{u}_i| \cdot \frac{\{1+r+r^2+(a^2\xi^2/4)\}^{\frac{1}{2}}}{r^2} \quad (3.1.21)$$

を得る。

塑性変形仕事率を求めるには上式の体積積分を必要とするが、これはそのままではできなかったので $\{(a^2\xi^2/4)-r\}/(1+r)^2$ を1に比べて小さいとして展開式

$$\dot{\epsilon} = \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \frac{b}{1+b} \cdot \dot{u}_i \cdot \frac{1+r}{r^2} \left\{ 1 + \frac{1}{2} \frac{(a^2\xi^2/4) - r}{(1+r)^2} \right\} \quad (3.1.22)$$

を用いれば

$$\begin{aligned} \dot{E}_{234} &= 2\pi a \cdot Y \int_b^1 r \cdot dr \int_0^{1-r} \dot{\varepsilon} \cdot d\xi \\ &= \frac{2\pi}{\sqrt{3}} Y |\dot{u}_i| \frac{b}{1+b} \left[\frac{a}{1-b} \left\{ 2 \ln \frac{1+b}{2b} - b(1-b) \right\} \right. \\ &\quad \left. + \frac{a^3}{4(1-b)^3} \left\{ \frac{1}{3} \ln \frac{1}{b} - \frac{8}{3} \ln \frac{2}{1+b} + \frac{7}{6} - \frac{4}{3}b + \frac{1}{6}b^2 \right\} \right] \end{aligned} \tag{3.1.23}$$

を得る。(3.1.22) 式は ξ が増すとともに誤差が大となるが $a\xi$ が $r=0$ においては 1.4, $r=0.5$ においては 2.5, $r=1$ においては 3.4 以下ならば誤差は 2% 以下となるから, 体積積分 (3.1.23) 式の誤差は a が上述の値以下の三角形リングに対し 1% 以下と考えてよい。

つぎに円筒 1234 内の速度の不連続面 23 上での相対すべり速度は $\dot{s}_{23} = |\dot{u}| \sec \theta$ であるから

$$\dot{E}_{23} = \pi Y \cdot f_{23} |\dot{u}_i| \frac{b}{1+b} \left\{ 1 + \frac{a^2}{(1-b)^2} \right\} (3 - 2b - b^2). \tag{3.1.24}$$

同様に境界面 24 上では $\dot{s}_{24} = |\dot{u}|$ なるゆえ

$$\dot{E}_{24} = \pi Y \cdot f_{24} |\dot{u}_i| \frac{b}{1+b} (3 - 2b - b^2). \tag{3.1.25}$$

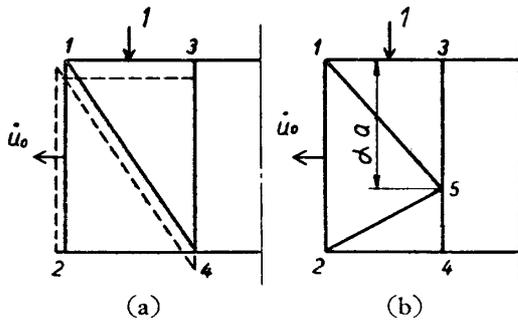
面 12 上では $\dot{s}_{12} = 1$ で

$$\dot{E}_{12} = \pi Y \cdot 2f_{12} \cdot a. \tag{3.1.26}$$

面 34 上では外部物体がどの点でも水平半径方向にのみに動くとするれば $\dot{s}_{34} = |(\dot{v})_{r=b}|$ を用いて

$$\dot{E}_{34} = \pi Y \cdot f_{34} |\dot{u}_i| \frac{b}{1+b} \cdot a^2 \tag{3.1.27}$$

を得る。



第 3.1.3 図 第 3.1.1 図 (b) に対する
三角形速度場

同じような方法によって第 1.3.1 図 (b) に対する各エネルギー消費率が計算できるが (第 3.1.3 図 (a)), (3.1.22) 式と同様の展開式を用いるさいの誤差は b が小なるほどまた a が大なるほど大きくなり, $Y \cdot \dot{\varepsilon}$ の体積積分 \dot{E}_{124} の誤差は $b=0$ では $a < 1.5$ においてのみ約 1% 以下となる。しかしながら $b=0$ (第 3.1.4 図 (a)) においては展開式を用いずとも積分可能であり

$$\dot{E}_{124} = \frac{2\pi Y}{\sqrt{3}} |\dot{u}_0| \left\{ \frac{a}{2} \sqrt{1 + \frac{a^2}{4}} + \ln \left(\frac{a}{2} + \sqrt{1 + \frac{a^2}{4}} \right) \right\} \tag{3.1.28}$$

が得られる。

上に用いた半径速度 \dot{u}_i および \dot{u}_0 は, 13 面の押下げ速度を 1 とすればそれぞれ

$$\dot{u}_i = -\frac{1-b^2}{2ab}, \quad \dot{u}_0 = \frac{1-b^2}{2a} \quad (3.1.29)$$

によって表わしうる。

上に行なった計算結果から第 3.1.2 図 (a) に対する内部エネルギー消費率係数の式を求めると、

$$e = \frac{1}{1-b^2} \left[J_1(b) + K_1(b) \cdot a^2 + \frac{1}{2\sqrt{3}} (1-b)^2 (3+b) (1+\sqrt{3} f_{24}) \frac{1}{a} \right. \\ \left. + \frac{1}{2\sqrt{3}} \{3+b+4\sqrt{3} f_{12} + \sqrt{3} f_{34} (1-b)\} a \right] \quad (3.1.30)$$

を得る。ここに

$$\left. \begin{aligned} J_1(b) &= \frac{1}{\sqrt{3}} \left\{ 2 \ln \frac{1+b}{2b} - b(1-b) \right\}, \\ K_1(b) &= \frac{1}{4\sqrt{3}(1-b)^2} \left(\frac{1}{3} \ln b - \frac{8}{3} \ln \frac{2}{1+b} + \frac{7}{6} - \frac{4}{3}b + \frac{1}{6}b^2 \right) \end{aligned} \right\} \quad (3.1.31)$$

であるが、 $b=1$ において J_1, K_1 はともに 0, $b=0.3$ ではそれぞれ 0.772 および 0.010 であり、 $b \geq 0.3$ に対しては K_1 は無視しうる量である。第 3.1.2 図 (b) の速度場の場合には上の結果を組み合わせることによって e が求まるが、この場合には三角形 345 の境界面 34 上の点の垂直速度は

$$\dot{v}_{34} = -\frac{1-b^2}{2b} \left(\frac{1-\alpha}{1-b} - \frac{\xi}{1+b} \right) \quad (3.1.32)$$

となり、一般に ξ のある値で符号を変えず。そのため \dot{E}_{34} の計算は厄介となるが \dot{s}_{34} が $|\dot{v}_{34}|$ に等しく、しかも (3.1.32) 式が符号を変えなければ K_1 を無視して

$$e = \frac{1}{1-b^2} \left[J_1(b) + \frac{3+b}{2\sqrt{3}} \left\{ 2 \frac{(1-b)^2}{a} + (1-2\alpha+2\alpha^2)a \right\} \right. \\ \left. + 2f_{12} \cdot \alpha a + \frac{1}{2} f_{34} \{1+3b-2\alpha(1+b)\} a \right] \quad (3.1.33)$$

が得られる。 e を極小とする α の値は上式を α にかんして微分すれば直ちに求まる。たとえば $f_{34}=1/\sqrt{3}$ とすれば極小条件より

$$\alpha = \frac{2+b-\sqrt{3}f_{12}}{3+b} \quad (3.1.34)$$

であり、さらにもし $f_{12}=0$ および $1/\sqrt{3}$ とすれば

$$\left. \begin{aligned} \alpha &= \frac{2+b}{3+b}, & f_{12} &= 0, \\ \alpha &= \frac{1+b}{3+b}, & f_{12} &= 1/\sqrt{3} \end{aligned} \right\} \quad (3.1.35)$$

となる。

いまこれらの α の値を (3.1.33) 式に代入すれば、 $f_{12}=0$ に対しては

$$e = \frac{1}{1-b^2} \left[J_1(b) + \frac{1}{\sqrt{3}} (1-b)^2 (3+b) \frac{1}{a} + \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{2+4b+b^2}{3+b} a \right] \quad (3.1.36)$$

また $f_{12} = 1/\sqrt{3}$ に対しては

$$e = \frac{1}{1-b^2} \left[J_1(b) + \frac{1}{\sqrt{3}}(1-b)^2(3+b) \frac{1}{a} + \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{5+6b+b^2}{3+b} a \right] \quad (3.1.37)$$

となり、これらは $a \leq 2$, $b \geq 0.3$ に対しては誤差は 1% 以下と考えられる。

第 3.1.1 図 (b) に対する二種の方法第 3.1.3 図 (a) および (b) についても上と同様に e を計算すると、第 3.1.4 図 (a) に対しては

$$e = \frac{1}{1-b^2} \left[J_2(b) + K_2(b) \cdot a^2 + \frac{1}{2\sqrt{3}}(1+3b) \left\{ (1+\sqrt{3} f_{24}) \frac{(1-b)^2}{a} + a \right\} + 2f_{34} \cdot b \cdot a + f_{12} \left(\frac{1}{2} - \frac{b}{2} \right) a \right]. \quad (3.1.38)$$

ここに

$$\left. \begin{aligned} J_2(b) &= \frac{1}{\sqrt{3}} \left\{ (1-b) - 2b^2 \ln \frac{2}{1+b} \right\}, \\ K_2(b) &= \frac{1}{4\sqrt{3}(1-b)^2} \left(\frac{8}{3} b^2 \ln \frac{1+b}{2b} - \frac{1}{3} b^2 \ln \frac{1}{b} + \frac{1}{6} - \frac{4}{3} b + \frac{7}{6} b^2 \right) \end{aligned} \right\} \quad (3.1.39)$$

である。 J_2, K_2 は $b=1$ でともに 0, $b=0.3$ でそれぞれ 0.360 および 0.006, $b=0$ ではそれぞれ 0.577 および 0.024 である。それゆえ $b \geq 0.3$, $a \leq 2$ ならば K_2 の項は (3.1.38) 式内で無視することができる。

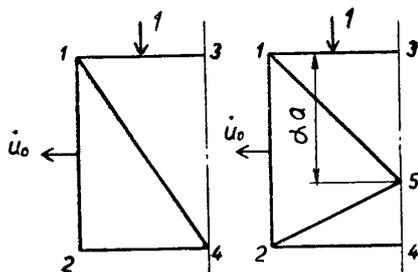
つぎに第 3.1.3 図 (b) に対しては

$$e = \frac{1}{1-b^2} \left[J_2(b) + \frac{1}{2\sqrt{3}}(1+3b) \left\{ 2 \frac{(1-b)^2}{a} + (1-2\alpha+2\alpha^2)a \right\} + 2f_{34} \alpha b \cdot a + f_{12} \left\{ \frac{3}{2} + \frac{b}{2} - \alpha(1+b) \right\} a \right]. \quad (3.1.40)$$

いまの場合は

$$\dot{u}_{12} = -\frac{1}{2} \{ (1-\alpha)(1+b) + (1-b)\xi \} \quad (3.1.41)$$

であり \dot{u}_{12} の符号は変化しない。



(a)

(b)

第 3.1.4 図 $b=0$ の場合の三角形速度場

第 3.1.3 図の特別な場合として $b=0$ すなわち中実円柱の場合には、第 3.1.4 図 (a) に対しては (3.1.38) 式より

$$e = \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{24\sqrt{3}} a^2 + \frac{1}{2\sqrt{3}}(1+\sqrt{3} f_{12}) a + \frac{1}{2\sqrt{3}}(1+\sqrt{3} f_{24}) \frac{1}{a} \quad (3.1.42)$$

を得る。 a が大きくなるときは精度を高くするために \dot{E}_{124} として (3.1.28) 式を用いれば

$$e = I(a) + \frac{1}{2\sqrt{3}}(1+\sqrt{3} f_{12}) a + \frac{1}{2\sqrt{3}}(1+\sqrt{3} f_{24}) \frac{1}{a} \quad (3.1.43)$$

とすることができ、ここに

$$I(a) = \frac{1}{\sqrt{3}} \left[\frac{1}{2} \sqrt{1 + \frac{a^2}{4}} + \frac{1}{a} \ln \left(\frac{a}{2} + \sqrt{1 + \frac{a^2}{4}} \right) \right] \quad (3.1.44)$$

である。Iは $a=0$ で $1/\sqrt{3}$ 、 $a=2$ で0.663となる。(3.1.42)式の第1および2項の和、すなわち $J_2(0) + K_2(0)a^2$ と(3.1.43)式の第1項 $I(a)$ を比較すれば両者は $a < 2$ に対しては誤差2%以下であり、したがって $a < 2$ の場合、(3.1.42)式を(3.1.43)式の代りに用いても誤差は1%以下であろう。

第3.1.4図(b)のような速度場に対しては(3.1.42)式から

$$e = \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{24\sqrt{3}}(1 - 3\alpha + 3\alpha^2)a^2 + \frac{1}{2\sqrt{3}} \left\{ \frac{2}{a} + (1 - 2\alpha + 2\alpha^2)a + \sqrt{3} f_{12}(3 - 2\alpha)a \right\} \quad (3.1.45)$$

を得る。あるいはさらに高い精度を得るには(3.1.43)式を用いて

$$e = \alpha I(\alpha a) + (1 - \alpha) I((1 - \alpha)a) + \frac{1}{2\sqrt{3}} \left\{ \frac{2}{a} + (1 - 2\alpha + 2\alpha^2)a + \sqrt{3} f_{12}(3 - 2\alpha)a \right\}. \quad (3.1.46)$$

(3.1.45) および (3.1.46) 式から、これらを極小とする α の値を求めると、 $f_{12} = 1/\sqrt{3}$ として(3.1.45)式に対しては

$$\alpha = \frac{1 + (1/16)a}{1 + (1/8)a}, \quad (3.1.47)$$

(3.1.46)式に対しては

$$229 - 900\alpha + \left(932 - 256\frac{1}{a^2} \right) \alpha^2 - 832\alpha^3 + 192\alpha^4 = 0. \quad (3.1.48)$$

これらの α の値は第3.1.1表に見るように $a < 2$ 第3.1.1表 (3.1.45) および (3.1.46) 式を極小にする α の値
対しては1に非常に近いから、これらの値を(3.1.45)ないし(3.1.46)式に代入して得た e の値は $\alpha=1$ とした(3.1.42)ないし(3.1.43)式による e の値とほとんど変わらない。結局 $b=0$ 、 $a \leq 2$ でかつ $f_{12} = 1/\sqrt{3}$ の場合には、一般の目的には簡単な(3.1.42)式を用いても十分な精度が得られる。

a	(3.1.47)式	(3.1.48)式
0.000	1.000	1.000
0.519	0.970	0.970
0.932	0.950	0.948
1.434	0.930	0.924
2.092	0.900	0.896

3.1.3 平行および三角形速度場の比較

以上考察した平行および三角形速度場における内部エネルギー消費率係数を比較して見よう。全境界面上で $f=0$ のときは前者の速度場はつねに後者の速度場より低い e を与えることがわかる。しかし、少なくとも一つの境界面上で $f=1/\sqrt{3}$ の場合には、 $a/(1-b)$ が1前後の一定範囲内で三角形速度場に対する e が、平行速度場のそれよりも低くなることを示すことができる。平面ひずみ問題の解析で行なったように、単位変形領域内にもっと多数の三角形リングを考えれば、より広い $a/(1-b)$ の範囲内で平行速度場が与えるよりも低い e を

得ることができるが、本研究においては計算の複雑を避けるために、上述の第3・1・2~4 図の速度場のみで解析を行なうことにする。すでに平面ひずみ問題の速度場の研究によって明らかにしたように（たとえば第1・1・16 図）、 $\alpha(1-b)$ が1より非常に大ないし非常に小なるときは平行速度場もかなりよい上界を与えるであろう。

応用上の目的のために上に示した e の諸式から、ある与えられた境界摩擦条件および α と b の値について最低の e の数値を計算し、これを境界条件ごとに b をパラメータとし α を横座標とする線図にプロットして置けば非常に便利である。

なお以上の諸式は、 $b \rightarrow 1$ なる極限をとればすべて平面ひずみ問題にかんして与えた一様および剛性三角形速度場の式と一致する。

3・2 Coulomb 摩擦および加工硬化の影響の導入法

本研究においてこれまで行なってきた解析では簡単のために材料と工具間の摩擦抵抗はまったく無いかまたは材料が工具に完全に附着するかのいずれかの場合のみを考え、また材料は加工硬化しないものと考えた。勿論、これらの仮定の下においても、多くの加工過程をかなり定量的に明らかにすることができたが、さらに実際問題に近づくため、上に得た解析結果を、Coulomb 摩擦が存在する条件の下でかつ加工硬化する材料を用いて加工する場合に拡張適用することが望ましい。それゆえ本章においてはこの問題を考察することにする。

3・2・1 Coulomb 摩擦の存在する場合の上界

実際の加工においては材料と工具面の間には必ず抵抗係数 f にして 0 から 1/2 (平面ひずみ問題) または $1/\sqrt{3}$ (軸対称問題) の間の摩擦抵抗が作用する。どんな潤滑方法を行っても摩擦を 0 にすることはできないし、またとくに冷間加工では材料と工具間の附着も故意にその条件を作らない限り完全には起らない。いまこの摩擦は Coulomb 摩擦であり、摩擦抵抗は接触面垂直圧力 p に一定常数の摩擦係数 μ を乗じたもので表わされるものと仮定しよう*。このような仮定を用いたとしても、すでに述べたような内部エネルギー消費率の計算による直接解析は不可能である。なぜなら、摩擦仕事率の計算に必要な接触面圧力は未知だからである。このため Drucker [5] は Coulomb 摩擦が存在する場合には、その接触面で工具と材料が完全附着するものとして (粗い工具) 求めた上界を用いるべきであることを提示した。ところが最近の発達した潤滑技術によれば、冷間加工においては $\mu=0.05$ またはそれ以下にすることが可能であり、この場合の加工圧力は $\mu=0$ の場合よりいくらか高くなるに過ぎない。したがってこのような場合の上界として Drucker の上界を用いるときは加工圧力をかなり過大評価することになる。そのため以下においては Coulomb 摩擦が存在する場合に対して、より低い上界を得る方法について考察する。

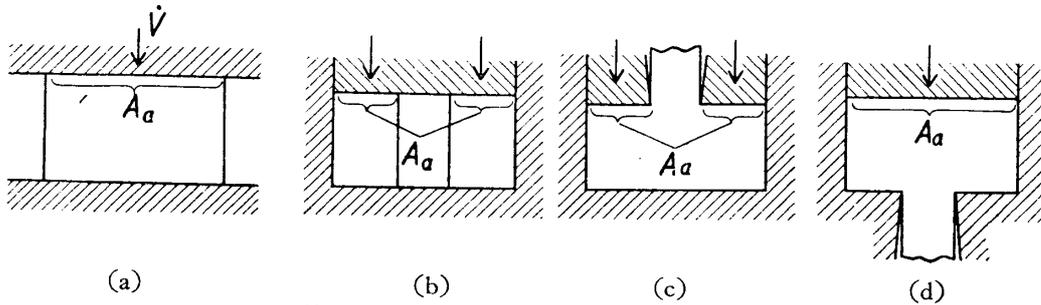
いま第 3・2・1 図のような場合を例にとり、材料が面積 A_a なる接触面上で速度 \dot{V} で前進する工具によって成形されるものとする。以下、材料と工具面の相対すべり速度を \dot{s} 、接触面積を A 、接触圧力を p 、すべり抵抗を F で表わそう。また表面摩擦のない場合は添字 0、ある場合は添字 f をもって表わすことにする。さて Coulomb 摩擦が働く場合に前進する

* 実際加工ではこの Coulomb の法則はある限られた条件内でしか成立しない (工藤英明: 機械の研究, 10 (1958), p. 37)。

工具面上での平均加工圧力の上界として

$$\left. \begin{aligned} \bar{p}'_{fa} &= \bar{p}_{0a} + \frac{\bar{F}}{A_a \cdot \dot{V}} \int_A \dot{s}_0 \cdot dA, \\ \mu &= \frac{\bar{F}}{\bar{p}'_{fmax}} \end{aligned} \right\} \quad (3.2.1)$$

を考えてみよう。ここに \bar{p}_{0a} および \dot{s}_0 は $\mu=0$ の際の前進工具面上における正しい平均接触圧力および相対すべり速度である。 \bar{p}_{0a} はまた上界値でもよい。一方 \bar{p}'_{fmax} は \bar{p}'_{fa} の計算から得られた値のうち、もっとも大きな平均圧力を示す接触面上の平均圧力を意味する。たとえば第 3.2.1 図 (a)~(c) においては $\bar{p}'_{fmax} = \bar{p}'_{fa}$ であるが、図 (d) ではコンテナ面が滑らかであれば停止している押出ダイス面上の平均圧力がこれに相当する。



第 3.2.1 図 種々の鍛造および押出加工

(3.2.1) 式においては、まず \bar{F} を仮定して \bar{p}'_{fa} を求め、その値が第二式による摩擦係数 μ の値に対応すると考えるのである。なお \bar{p}'_{fmax} を考えるときは $\dot{s}_0 = 0$ であるような接触面部分は除外した方が良好な上界が得られる。

いま (3.2.1) 式が上界であるかどうかを調べるために、それぞれの接触面上において $\mu = 0$ における真の相対すべり速度が増す方向に対し、摩擦があるときの正解の接触圧力 \bar{p}_f は減少しないものと仮定しよう。たとえば平面ひずみおよび軸対称問題においては、ある特定の接触面上の位置は、適当に設けた座標の原点よりの距離 x のみによって表わすことができ、上の仮定は

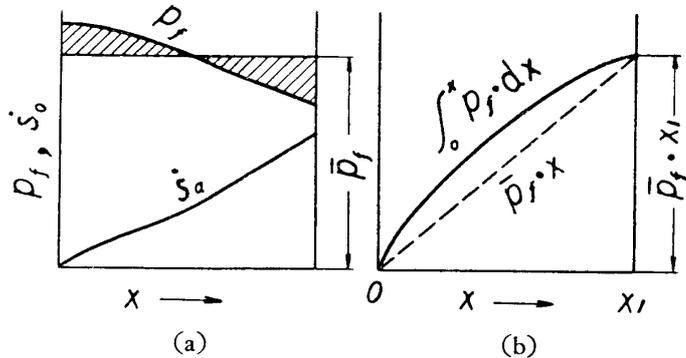
$$\frac{ds_0}{dx} \geq 0 \quad \text{に対し} \quad \frac{dp_f}{dx} \leq 0 \quad (3.2.2)$$

となる (第 3.2.2 図 (a)). この仮定は大抵の場合には成立するようである。

平面ひずみ問題における平らな接触面および軸対称問題における円筒形接触面上では

$$A = C \cdot x, \quad dA = C \cdot dx$$

とすることができるから、ある特定面 A_i 上における真の摩擦応力 μp_f と、 $\mu=0$ に対する相



第 3.2.2 図 工具と材料接触面における接触圧力および相対すべり速度分布

対すべり速度の積の面積積分は部分積分により

$$\int_{A_i} \mu p_f \cdot \dot{s}_0 \cdot dA = \mu C \left\{ \left[\dot{s}_0 \int_0^x p_f \cdot dx \right]_0^{x_1} - \int_0^{x_1} \frac{d\dot{s}_0}{dx} \left(\int_0^x p_f \cdot dx \right) dx \right\}$$

であり, 仮定 (3.2.2) 式を用いて

$$\int_0^x p_f \cdot dx = \bar{p}_f \cdot x + \delta^2$$

であるから (第 3.2.2 図 (b))

$$\int_{A_i} \mu p_f \cdot \dot{s}_0 \cdot dA \leq \mu \cdot A_i \cdot \bar{p}_f \cdot \bar{s}_0 \quad (3.2.3)$$

を証明することができる。ここに

$$\bar{p}_f = \frac{\int_{A_i} p_f \cdot dA}{A_i}, \quad \bar{s}_0 = \frac{\int_{A_i} \dot{s}_0 \cdot dA}{A_i} \quad (3.2.4)$$

であり, それぞれ p_f , \dot{s}_0 の当該接触面上の平均値を表わす。接触面が円形平面の場合には $A = C\pi x^2$, $dA = 2C\pi x \cdot dx$ となるが (3.2.3) 式はまったく同様に成立する。

一方, 山田 [4] は表面摩擦が存在する場合, 前進する工具面上の真の平均圧力 \bar{p}_{fa} は

$$\bar{p}_{fa} \leq \bar{p}_{0a} + \frac{1}{A_a \cdot \dot{V}} \int_A F \cdot \dot{s}_0 \cdot dA \quad (3.2.5)$$

であることを証明した。いまこの F を Coulomb 摩擦とすると

$$F \leq \mu p_f \quad (3.2.6)$$

である。上式の不等号は, μp_f の値が材料の単純剪断抵抗 k 以上になっても F は k 以上になり得ないためである。(3.2.5) 式は (3.2.3) および (3.2.6) 式から

$$\bar{p}_{fa} \leq \bar{p}_{0a} + \frac{\mu}{A_a \cdot \dot{V}} \int_A p_f \cdot \dot{s}_0 \cdot dA \leq \bar{p}_{0a} + \frac{\mu}{A_a \cdot \dot{V}} \sum_i \bar{p}_f \cdot \bar{s}_0 \cdot A_i.$$

ここに \sum は, それぞれにおいて仮定 (3.2.2) 式が成立つような接触面部分の総和を意味する。上式は $\bar{p}'_{fmax} \geq \bar{p}_f$ から (3.2.1) 式を用いて

$$\bar{p}_{fa} \leq \bar{p}_{0a} + \frac{\mu \bar{p}'_{fmax}}{A_a \cdot \dot{V}} \sum \bar{s}_0 \cdot A_i = \bar{p}'_{fa}. \quad (3.2.7)$$

ゆえに $\mu=0$ に対する正解が知られている場合には, 仮定 (3.2.2) 式が正しいとすれば (3.2.1) 式は確かに Coulomb 摩擦の存在する場合の上界である。

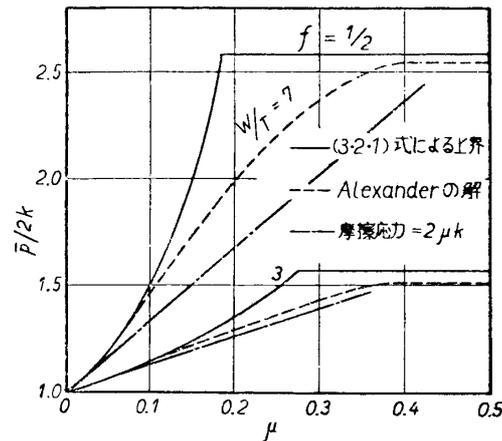
いま上の方法による上界が正解にどの位近いかを調べて見よう。Coulomb 摩擦作用の条件の下で迂り線場理論によって解かれた問題はきわめてわずかであるが, Alexander [6] は本研究第1報第1.2.4図に示したような平行型による板材の平面ひずみ圧縮の解析を行ない, 正解を求めている。彼の得た $W/T=3$ および7に対する $\bar{p}_{fa}/2k$ と摩擦係数 μ との関係は第3.2.3図に破線で示されている。 μ がある値以上になると全工具面上の迂り抵抗は k となるから $\bar{p}_{fa}/2k$ はそれ以上の μ に対して一定である。 $\mu=0$ で W/T の上述の値に対してはすでに述べた三角形速度場による圧力上界比は, 力の釣合から考えた圧力下界比と一致して $\bar{p}_{0a}/2k=1$ であり (したがってこれは正解), かつ型面上の正解相対すべり速度 \dot{s}_0 も簡単にわかる。そこで (3.2.1) 式より上界は

$$\mu = \frac{2k \cdot f}{\bar{p}'_{fa}} \tag{3.2.8}$$

に対して

$$\left. \begin{aligned} \frac{\bar{p}'_{fa}}{2k} &= 1 + \frac{4}{3}f, & \frac{W}{T} &= 3 \\ \frac{\bar{p}'_{fa}}{2k} &= 1 + \frac{24}{7}f, & \frac{W}{T} &= 7 \end{aligned} \right\} \tag{3.2.9}$$

となる。これは第3.2.3図中に実線で示してあるが、正解の破線と比べると μ の小さなところでは両者は余り違わないが μ の比較的大きいところで差はかなり大きい。しかし μ が非常に大きくて材料と型の全面的附着の生じるような条件の下では両者の差はふたたび少なくなる。とくに (3.2.1) 式による上界は μ のある値で、 $f=1/2$ として他の速度場 (第1.2.3図(a)) から求めた上界よりも高くなる。それゆえこの μ の値以上では粗い工具に対するすでに求めた上界を用いた方が有利である。いずれにしてもこの μ の値の近くではよい上界は得られないが、(3.2.1) 式は全体として Drucker の上界よりはすぐれている。



第3.2.3図 平面ひずみ板素材圧縮における摩擦係数と圧縮圧力ないしその上界の関係

他方、 μ が小さいときに対してしばしば使用されてきた考え方の中で、摩擦応力を $\mu \bar{p}_{0a}$ に等しいとするものがある。この方法は今の場合 $f=\mu$ を意味し、 $\bar{p}'_{fa}/2k$ と μ の関係は第3.2.3図鎖線で与えられる。この結果は μ が非常に小さいか、大きくても条件によっては正解に近いが ($W/T=3$)、一般的には上界とは云えない。

多くの場合には $\mu=0$ に対する正解も知られない。このときには (3.2.1) 式において \bar{p}_{0a} の代りに $\mu=0$ に対する圧力上界 \bar{p}'_{0a} を、また \dot{s}_0 の代りにこの上界に対応する速度場から導かれる相対すべり速度 \dot{s}'_0 を使用してもよさそうである。このようにして得た値が真に上界であるかどうかを上と同様に証明することはできないが、以下の正解が知られない問題に対してはこの上界を使用することにする。

3.2.2 加工硬化の影響

実際の金属材料は多かれ少なかれ加工硬化するが*、鍛造や押出問題の解析にあたっては迂り線場の理論によるにしても極限定理を応用するにしても、最初からこの因子を考えに入れて解くことは不可能である。今日までに鍛造、押出問題に関連して提案された加工硬化の影響の合理的な導入方法はすべて、まず材料を加工硬化しないものとしてある加工問題の平均加工圧力 \bar{p} と降伏応力 Y の比を求め、次に何等かの方法でその加工中の材料の平均ひずみを定めてそれに対する降伏応力を加工中の材料の平均降伏応力 Y_m として上に求めた \bar{p}/Y

* ときには加工軟化も起る。

に乗ることにより \bar{p} を得るものである。このような方法は定常過程および擬定常過程に対してはすでに報告されている。また半実験的なやり方も幾つか見られる。本節においては同じ考え方の上に立って非定常過程に対する加工硬化の影響の導入法を考察する。

以下においては材料は **Mises** の降伏条件および **Lévy-Mises** の応力-ひずみ速度関係 (3.1.2), (3.1.3) 式参照) に従うものとし、また材料の加工硬化の度合、すなわち降伏円の半径は、材料がすでに受けた塑性仕事の総計のかん数であると仮定する [7]。したがって (3.1.8) 式より*

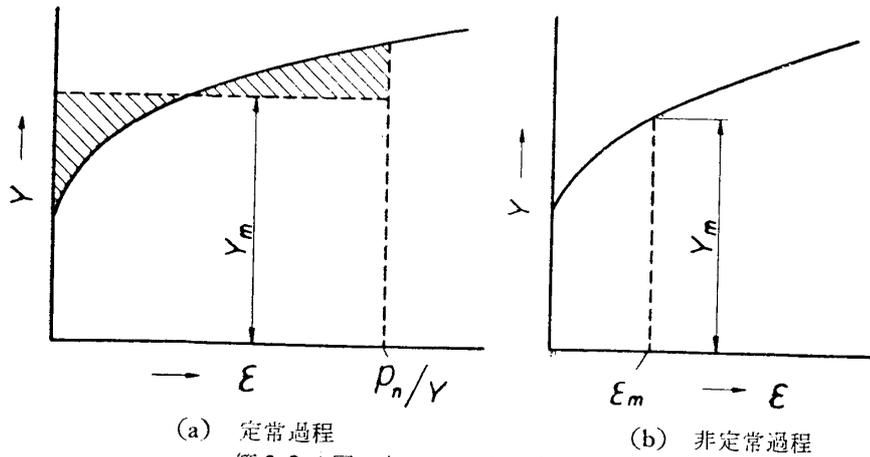
$$Y = \Phi\left(\int dw_p\right) = \Phi\left(\int \bar{\sigma} \cdot d\bar{\epsilon}\right) \tag{3.2.10}$$

あるいは

$$Y = \Psi\left(\int d\bar{\epsilon}\right). \tag{3.2.11}$$

上のかん数 Ψ の因数 $\int d\bar{\epsilon}$ は以後全相当ひずみと呼ぶことにする。単純引張または単純圧縮においては $\int d\bar{\epsilon}$ は引張ないし圧縮対数歪 ϵ そのものであるから、かん数 Ψ は引張または圧縮降伏応力-対数歪関係を表わしている。また以下の議論は **Tresca** の降伏条件およびそれに対応する応力-ひずみ速度関係に従う材料にも加工硬化について適当な仮定を設ければ同じように適用できる。

定常過程にかんする **Hill** の理論 [8] によれば材料がダイスを通り流れる場合、ダイス前方で材料を押す平均外圧力を \bar{p} 、ダイス後方で材料を引張る平均外張力を \bar{t} とし、外力のなした仕事がすべて材料の塑性変形に費やされるとして材料の流れ方向に直角な断面上の材料が変形領域を通過するさいに受ける平均の全相当ひずみ $\left(\int d\bar{\epsilon}\right)_m$ は $(\bar{p} + \bar{t})/Y$ となる。ここで普通押出ならば $\bar{t} = 0$ となる。いま加工硬化する材料が同じ加工を受ける際に非硬化性材料と同じひずみを受けるものと仮定すれば、非硬化性材料に対する $(\bar{p} + \bar{t})/Y$ の



第3.2.4図 加工中平均応力の選び方

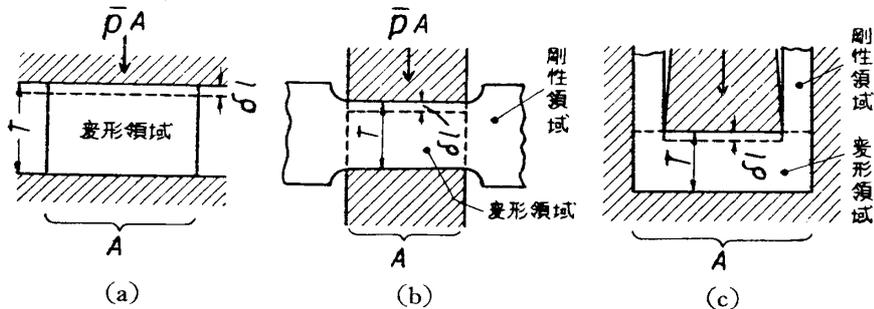
* (3.1.8) 式右辺第二項は速度不連続面上の仕事率を表わすが実際金属ではこのような不連続面が存在せずある範囲にわたる連続の大きなひずみ速度を生じる領域となるから、すべて第一項によって仕事率を表わすことができる。

値 $(\bar{p}_n + \bar{t}_n)/Y$ がわかれば硬化する材料の降伏応力曲線 $Y = \Psi(\bar{\epsilon})$ で $\bar{\epsilon} = 0$ から $(\bar{p}_n + \bar{t}_n)/Y$ までの Y の積分平均値 Y_m を求めれば (第 3・2・4 図 (a)), この Y_m はこの材料のその加工における平均降伏応力と考えることができ, 加工圧力は $Y_m \times (\bar{p}_n + \bar{t}_n)/Y$ によって与えられる. 定常過程の場合には Y_m を求めるには材料内変形領域の範囲を知る必要はない. [9] 上述の材料の加工硬化特性が加工中のひずみに影響しないという仮定は Thomsen らの研究により, 押出加工にかんしてはおおむね成立つことが知られている. また平面ひずみ問題の場合には普通 $(\bar{p}_n + \bar{t}_n)/2k$ が計算されている. そこで Mises の降伏応力に従う材料に対しては平均平面ひずみ圧縮降伏応力 $2k_m$ は, 第 3・2・4 図 (a) において $\bar{\epsilon} = 0$ から $2(\bar{p}_n + \bar{t}_n)/2\sqrt{3}k$ の間の平均降伏応力 Y_m を求め次に $2k_m = 2Y_m/\sqrt{3}$ によって得ることができる.

このような方法による加工硬化因子の導入法は平面ひずみ押出加工にかんして Johnson により有効であることが証明された [10]. かれはまた軸対称押出におけるように \bar{p}_n/Y が解析的に知られない問題に対しては加工硬化しない鉛による実験からこの値を求め, 他の材料の押出圧力を計算して成功した [11].

外力のなす仕事はすべて材料の塑性変形仕事に費やされるという仮定は, 工具面が完全に滑かな場合にのみ成立する. Coulomb 摩擦がある場合には外力のなした仕事はおそらく一部は直接熱に転換するであろう. しかしやはり外力のなした仕事はすべて塑性変形に費やされたとして平均降伏応力を求めて使用すれば, その結果は真の加工圧力を過少評価することはないであろう.

つぎに第 3・2・5 図のような非定常圧縮および押出鍛造について考えよう. 第 3・2・5 図 (a) においては材料全体を, また (b) では平面ひずみ問題なら型に狭まれた部分を, (c) では型押出口より下のコンテナ内材料全体を変形領域と考えることができる. この領域の水平断面



第 3・2・5 図 鍛造加工における平均降伏応力の考察

積を A , 垂直高さを T としよう. A は加工様式により各段階で一定かまたは増加する. 前と同様にある段階の断面積 A 上の平均加工圧力を \bar{p} とすれば工具の δl なる前進によって与えられる仕事量は

$$\delta W = \bar{p} \cdot A \cdot \delta l \tag{3-2-12}$$

である. このとき体積 $A \cdot T$ なる変形領域内の材料は, 摩擦損失がなければ単位体積当り平均して

$$\frac{\delta W}{A \cdot T} = \bar{p} \cdot \frac{\delta l}{T} \tag{3-2-13}$$

なる仕事を受取ることになる. 今の問題においてはある段階の変形領域内の材料はすべて加

工の最初から変形領域に含まれており、未変形材料は変形領域に入ってくることはないから、工具が0から l まで前進する間に、材料は平均して単位体積当り

$$w_m = \int_0^l \bar{p} \frac{\delta l}{T} \quad (3.2.14)$$

の仕事を受けたことになる。加工硬化しない材料について、各段階での \bar{p}_n/Y が知られていれば前と同じく平均全相当ひずみは

$$\bar{\epsilon}_m = \int_0^l \left(\frac{\bar{p}_n}{Y} \right) \frac{\delta l}{T_0 - l} \quad (3.2.15)$$

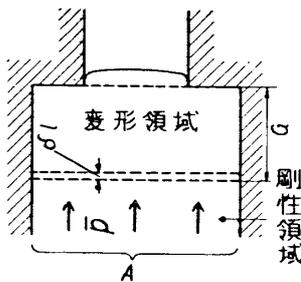
である。ここに T_0 は $l=0$ のときの T の大きいさとする。特別な場合として、滑らかな平行工具による円柱の圧縮においては $\bar{p}_n/Y=1$ であるから

$$\bar{\epsilon}_m = \ln \frac{T_0}{T} \quad (3.2.16)$$

であり、これはいわゆる圧縮対数ひずみにほかならない。

今のような問題においては変形領域の広さは工具の幾何学的配置によってのみ定まるから、加工硬化する材料に対しては(3.2.15)式の $\bar{\epsilon}_m$ を用いて $Y \sim \bar{\epsilon}$ 曲線上の $\bar{\epsilon} = \bar{\epsilon}_m$ における Y の値をとって Y_m とすればこれは平均降伏応力の近似値と考えてよいであろう(第3.2.4図(b))。一方、たとえば定常押出過程より、材料が短くなって全体が変形する非定常過程に移る場合、この方法によると非硬化性材料の場合よりも硬化する材料の方が転移の時期が早くなりうることに注意すべきである(4.3.2参照)。

実際の押出加工においては後方押出においても加工圧力が一定値となるまでに徐々に増加する。このような前定常段階も一つの非定常過程であり、押出を少しばかり行なおうという場合の所要圧力の推定のためには、この過程をも研究する必要がある。押出過程初期の圧力が定常圧力よりも低い理由は二つ考えられる。一つは押出初期はむしろ押込過程であるために自由表面が大きく、したがって所要圧力も比較的低い(第1報1.3.3および1.4.2参照)。



第3.2.6図 押出加工の前定常状態における平均降伏応力の考察

しかし断面減少比が大きくなると、この相異はなくなり、加工硬化しない材料では押出圧力は最初から定常値をとり、変形領域の深さも定常値に等しい。このような場合でも、加工硬化する材料においては加工圧力の漸増が見られる。いま第3.2.6図で、加工硬化する材料においても変形領域の深さ G は最初からずっと一定値を保つと仮定しよう。変形領域の水平断面積を A 、平均加工圧力を \bar{p} とすれば工具の δl なる前進によってなされる仕事は $\delta W = \bar{p} \cdot A \cdot \delta l$ である。いまある段階で変形領域内の材料は単位体積当り w_m なる仕事をすでに均等に受取っているものとすれば、工具の δl の前進によって $w_m \cdot A \cdot \delta l$ だけの仕事量が変形領域外に持去られる。そこで体積 $A \cdot G$ なる変形領域の材料の受ける単位体積当り平均仕事増分は

$$\delta w_m = (\bar{p} - w_m) \frac{\delta l}{G} \quad (3.2.17)$$

としてよいであろう。それゆえ、工具のストローク l における変形領域内の平均全相当ひずみは、加工硬化しない材料に対して \bar{p} は \bar{p}_n で一定とすれば

$$\bar{\epsilon}_m = \frac{\bar{p}_n}{Y} (1 - e^{-\frac{l}{G}}) \quad (3.2.18)$$

である。したがって、加工硬化する材料に対しては、 $Y \sim \epsilon$ 曲線上の $\epsilon = \bar{\epsilon}_m$ に対する Y を取って Y_m とすればよい。

次に上に与えた Y_m が、上に述べた定常状態に対する平均降伏応力 Y_m と矛盾しないかどうかを検討しよう。加工硬化する材料の押出加工においては、最初に変形領域の底面上にあった材料が押出口に達して初めて定常状態になると考えられる*。すなわち $l=G$ のとき定常状態になるものとしよう。いま材料の圧縮試験における Y と ϵ の関係を

$$Y = C \cdot \epsilon^n \quad (3.2.19)$$

で近似させるとすれば、定常過程中の平均降伏応力は

$$Y_m = \frac{1}{\bar{p}_n/Y} \int_0^{\bar{p}_n/Y} C \cdot \epsilon^n \cdot d\epsilon = \frac{C}{n+1} \left(\frac{\bar{p}_n}{Y} \right)^n \quad (3.2.20)$$

とある。他方 (3.2.18) 式で $l=G$ として ϵ_m を求めるときは平均降伏応力は

$$Y_m' = C \left(\frac{\bar{p}_n}{Y} \right) (1 - e^{-1})^n. \quad (3.2.21)$$

Y_m'/Y_m は $n=0$ において 1, $n=0.333$ において 1.14, $n=0.5$ において 1.19 である。普通の材料における n の値はほとんどこの範囲であるから、本節で求めた非定常状態に対する平均降伏応力は、定常状態に対する平均降伏応力とあまり矛盾することなくつながることがわかる。

3.3 圧縮加工

本章においては鍛造加工の基礎的な過程である平行型による素材の圧縮または据込加工を取扱う。軸対称圧縮加工にかんする従来の解析はほとんど円柱の圧縮に集中されているが、本章ではこの問題を内部エネルギー消費率法の観点より取上げて従来の研究結果と比較し、さらにコンテナ内のリング状素材の圧縮およびリング状素材の自由圧縮についても同じ方法を適用した。

3.3.1 円柱の圧縮

円柱を平行な型で圧縮する過程 (第 3.3.1 図) はもっとも簡単な鍛造加工であり、これは鍛造の基本的な過程として、また材料の圧縮試験の問題として古くから研究されている。これらの研究はほとんどすべて型面における摩擦係数 μ が小さい場合を取扱っており、変形様式としては平行速度場を用いている。Siebel [12] は μ が小さいと仮定し応力の釣合方程式を使って平均圧縮応力と Y の比として

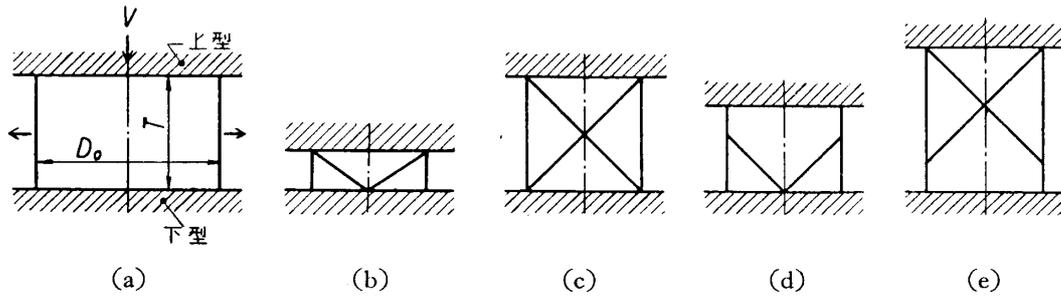
$$\frac{\bar{p}}{Y} = 1 + \frac{1}{3} \mu \frac{D_0}{T} \quad (3.3.1)$$

* 最初に変形領域底面にあった平らな断面は、押出口では彎曲するから、ここに述べたことは極めて大ざばな考え方である。

を得た. その後 Schroeder および Webster [13] は平行速度場と応力の釣合方程式から比較的小さな μ に対し

$$\frac{\bar{p}}{Y} = \frac{2}{(\mu D_0/T)^2} \left(e^{\frac{\mu D_0}{T}} - \frac{\mu D_0}{T} - 1 \right) \quad (3\cdot3\cdot2)$$

を導いた. かれらは μ または D_0/T が比較的大きな場合を考察し, 材料が中心部から次第に型面に附着する状況の下における圧縮圧力の式を示した. 極端な場合として全面に附着が起ったときには, かれらの式は (3·3·1) 式で $\mu=1/\sqrt{3}$ とおいたものに等しくなる.



第 3·3·1 図 円柱の平行圧縮に対する三角形速度場

いまこの問題に前章に示した方法を適用すれば, 平行速度場を用いる場合には (3·1·17) 式で $b=0$, $a=2T/D_0$, $f_{12}=0$, $f_{13}=f=2\mu f$ と置いて

$$\frac{\bar{p}}{Y} = 1 + \frac{1}{3} f \frac{D_0}{T} \quad (3\cdot3\cdot3)$$

を得る. いま μ が非常に小さいとすると材料に働く圧力は $\mu=0$ の場合にほとんど等しく $\bar{p}/Y \doteq 1$ であるから, $f=\mu$ と考えることができる. そうすると (3·3·3) 式は Siebel による (3·2·1) 式と一致する. μ が中程度の大きさのときには $\mu=0$ に対する正解速度場は平行速度場であるから (3·2·1) 式の上界を用いれば

$$\frac{\bar{p}}{Y} = 1 + \frac{1}{3} \mu \frac{D_0}{T} + \frac{1}{9} \left(\mu \frac{D_0}{T} \right)^2 \quad (3\cdot3\cdot4)$$

を得る. ここに $(\mu D_0/T)^3$ 以下の項は省略した. 他方 Schroeder らによる (3·3·2) 式を $(\mu D_0/T)^3$ 以下を省略して展開すると右辺は $1 + (\mu D_0/3T) + (\mu^2 D_0^2/12T^2)$ となるから両者の差は $\mu^2 D_0^2/36T^2$ であり非常に小さい. さらに粗い型に対しては $f=1/\sqrt{3}$ であるから Schroeder らの結果とまったく同じになる.

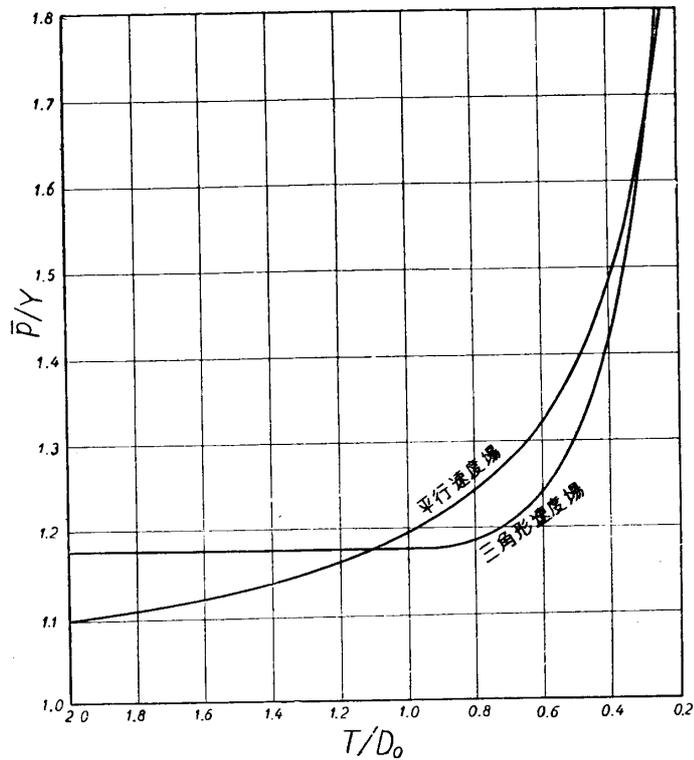
つぎにこの問題に三角形速度場 (第 3·3·1 図 (c)) を適用すれば, (3·1·46) 式において $\alpha=0.5$, $a=2T/D_0$, $f_{12}=0$ として

$$\frac{\bar{p}}{Y} = I \left(\frac{T}{D_0} \right) + \frac{1}{2\sqrt{3}} \left(\frac{D_0}{T} + \frac{T}{D_0} \right) \quad (3\cdot3\cdot5)$$

が得られる. これは型面の粗さには無関係である. 上式は T/D_0 が 0.92 の近くで極小値 1.175 をとる. そこでもし T/D_0 が 0.92 より大きいときには第 3·3·1 図 (e) のような速度場を考えれば \bar{p}/Y はつねに 1.175 である. もし型面が滑らかであれば第 3·3·1 図 (b) および (d) のような速度場を考え (1·1·43) 式を用いることにより, T/D_0 が 0.46 以上なら \bar{p}/Y は一定値 1.175 をとる. 型面が滑らかなときには $T/D_0 \geq 0.5$, 粗いときには T/D_0

≥ 1 において、軸方向に 45° 傾斜した平面が速度の不連続面となるような挫屈状の変形も考
えることができるが、本研究においてはこの種の変形は取扱わないことにする。

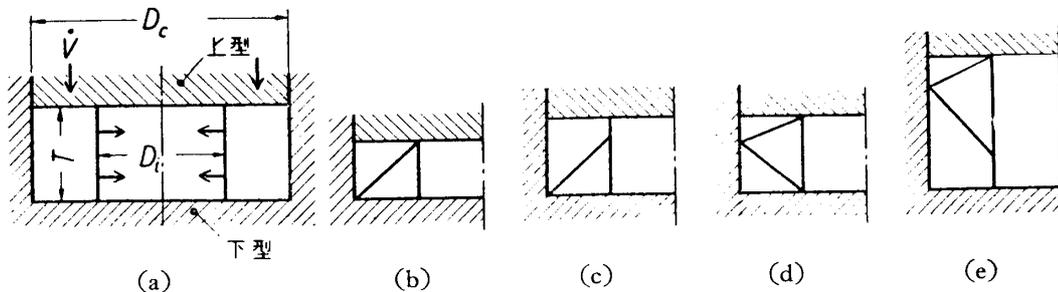
(3.3.4) および (3.3.5) 式を比
べると型面が滑らかな場合には前者は1となり後者は1以上になる
ので当然平行速度場の方が低い
 \bar{p}/Y を与える。型面が粗い場合に
は第3.3.2図に見られるように平
行速度場による \bar{p}/Y に比べ第3
.3.1図(c), (e) による \bar{p}/Y は
 T/D_0 が約 0.28 から約 1.10 の
間で低い。すでに述べたように
(3.1.3) このことは T/D_0 の上述
の範囲外では型面上に円錐形デ
ッド・メタルが生じないというこ
を意味するものではない。すなわ
ち、円柱素材をさらに多数の三角
形断面リングに分割することによ
って平行速度場より低い \bar{p}/Y を
与えるようになしうるかも知れな
い。しかし材料が多数の三角形リ
ングより成る場合には瞬間瞬間の
各点の速度は平行速度場におけるそれと異っても、有限変形後の各点の位置は両種
の速度場
であり異らないものと思われる。



第3.3.2図 粗い平行型による円柱圧縮の際の平均圧力上昇比

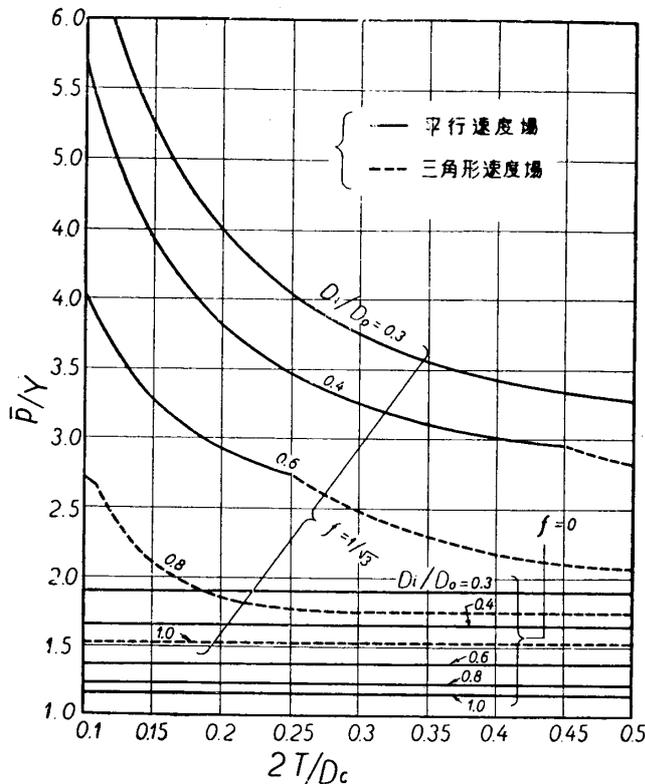
3.3.2 コンテナ内リングの圧縮

本節では第3.3.3図のように矩形断面リングが、その外径と等しい内径を有するコンテ
ナ内に入れられて上下面を平行な型で圧縮され半径方向内方にふくれるような過程を取扱う。
このような過程そのままの加工法は実際にはあまり見られないが、これも前節の円柱圧縮
と同じく、軸対称鍛造および押出加工の基礎過程として、解析と実験を比較することは興味



第3.3.3図 コンテナ内のリング圧縮における三角形速度場

ある問題である。この場合の素材表面上の平均加工圧力上界比 \bar{p}/Y は第 3・1・3 図 (a), (b) に対する e の式において b を D_i/D_c , a を $2T/D_c$ と書換えることによってただちに得られる。



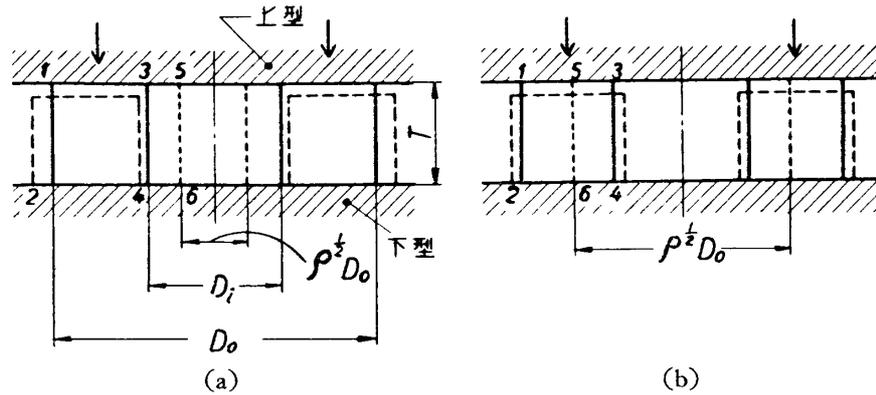
第 3・3・4 図 コンテナ内のリング圧縮における素材単位面積当り平均加工圧力上界

中で平行速度場によるものを実線、三角形速度場によるものを破線で示してある。型面が滑らかな場合には当然予想されるように平行速度場の方がつねに低い \bar{p}/Y を与え、この値は D_i/D_0 が減ると大きくなるが $2T/D_c$ には無関係である。他方型面が粗いときは $2T/D_c$ が小なるところでは平行速度場の方が \bar{p}/Y が小さい。 $2T/D_c$ が大きいところでは三角形速度場の方が \bar{p}/Y が低くなる。そしてある $2T/D_c$ 以上では第 3・3・3 図 (e) が対応し、 \bar{p}/Y は水平線となる。この場合も D_i/D_0 が小さくなるとともに \bar{p}/Y は急速に高くなる。

3・3・3 平行型によるリングの圧縮

第 3・3・5 図に示されるような矩形断面リング素材を平行な型の間で圧縮する過程は、リング素材の自由鍛造においてしばしば見られるものである。この場合、型面が完全に滑らかであれば、リングは、あたかも中実円柱のように変形し加工圧力は Y に等しい。しかしながら、型面に摩擦があるとリングおよび上下型面に囲まれた空間体積は変形が進むとともに減少し、極端な場合にはリング内径が最初の内径よりも小さくなるのが知られている。久能木 [14] はこの問題を平行速度場の仮定および応力の釣合方程式を用いて解析して工具面上の摩擦係数とリングの変形による直径変化の間の関係を見出し、リングの圧縮試験から摩擦係数を推定する方法を提案した。その後、著者 [15] はこの問題を平行速度場による上界接近法によって解析し、数値積分を行なうことなく久能木の結果に比較的一致する結果を得

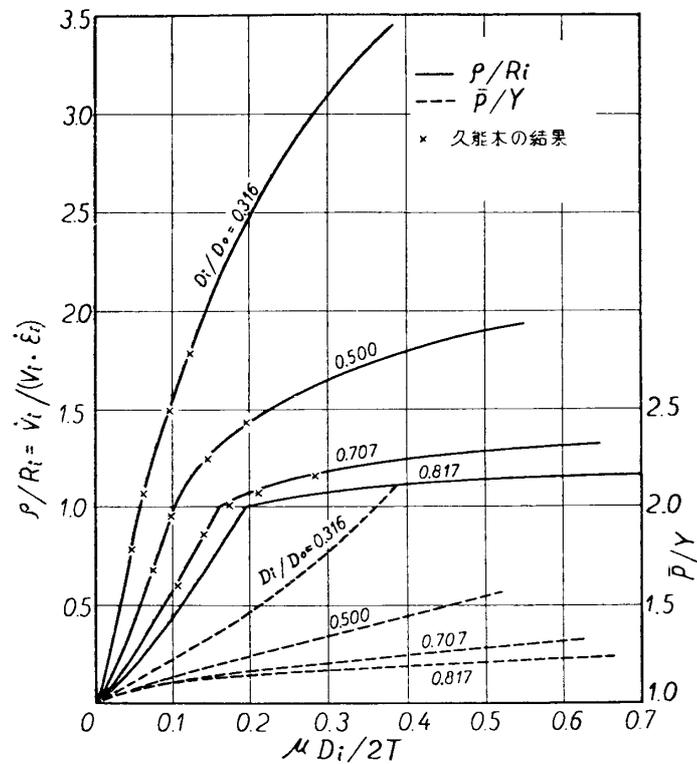
る。第 3・3・4 図は型と素材間の全接触面上の迂り抵抗係数 $f=0$ および $1/\sqrt{3}$ の場合に対する \bar{p}/Y と D_i/D_c および $2T/D_c$ の関係を平行および三角形速度場を用いて計算した結果である。ここで三角形速度場の場合は前節と同様、滑らかな型ときには第 3・3・3 図 (b) および (c) のような形式を使用した。第 3・3・3 図 (b) に対する \bar{p}/Y は (3・1・30) 式で $f_{12}=f_{24}=f_{34}=0$ とすればよい。また図 (c) のときは上式の極小値を用いる。上下型およびコンテナ面が粗いときには第 3・3・3 図 (d) に対しては (3・1・33) 式を用いればよく、図 (e) に対してはこの式の極小値が対応する。二種の摩擦条件それぞれに対してより低い方の上界を与える速度場から計算されたものが第 3・3・4 図にプロットされてある。この



第3-3-5図 平行型によるリングの圧縮

た. これと同じ結果は3-1-2-1で得られた平行速度場に対するeの式を用いれば直ちに求めることができるが, 著者がすでに行なったように表面摩擦抵抗を μY と仮定せずに $f \cdot Y$ と

すれば文献[15]中の(11)式右辺の μ を f としたものが得られる*. いま(3-2-1)式と同じ考え方を用い, まずある一定の $f(F=f \cdot Y)$ に対する圧縮圧力上界比を計算して(3-2-1)式の第二式右辺分母に代入し相当摩擦係数 μ を求め, この μ の値に対する圧縮圧力上界および無送り点位置 ρ/R_i を出せば第3-3-6図のそれぞれ破線および実線を得る. ここに $\rho = \{(\text{無送り円直径})/D_o\}^{1/2}$, $R_i = (D_i/D_o)^{1/2}$ である. 図中に×印で示したのは久能木による ρ/R_i の計算結果であるが, 両者は文献[15]の第2図に比べてさらにきわめて良好な一致を示した.



第3-3-6図 平行型によるリングの圧縮における無送り点の位置および圧力上界

3-4 押出, 上昇穿孔および押出鍛造加工

本章においてはコンテナ内の長い素材を中心に円孔のある直角ダイスで押出す定常押出加

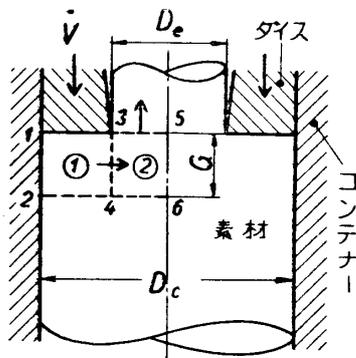
* 文献[15]中の(14)式は誤りである. この式は $\mu = \infty$ として導いたものであるが, 実際にはこのようなことはあり得ず, 摩擦抵抗のとりうる最高値は $Y/\sqrt{3}$ にすぎない.

工、円柱形ポンチでコンテナ内材料中心に深い凹みを与える定常上昇穿孔加工ならびに両者の最終非定常段階に相当する比較的短い材料の押出鍛造過程を解析する。なおここでいう押出鍛造とは丸棒の押出鍛造と円筒の上昇穿孔鍛造を含めた意味である。これらの問題を解析的に取扱ったものとしては定常押出中の材料内の圧力分布を、同じ断面を有する平面ひずみ押出における迂り線場解による圧力分布に等しいと仮定して求めた **Thomsen** [16] [17] の研究がある。また **Dipper** [18] は非定常穿孔鍛造過程を平行速度場および応力釣合条件を用いて解析したが、これには不正確な仮定と計算を使ってあり条件によっては誤差が非常に大きいと考えられる。工藤 [20] は **Dipper** の方法を改良したが本論文ではさらに良い結果が得られている。

なお本章では後方押出および後方穿孔（第3・4・1および5図）のみを考察した。もちろんコンテナ壁が完全に滑らかなときは前方押出および穿孔との間に区別はない。

3・4・1 定常押出

長い素材の押出加工（第3・4・1図）においては、すでに平面ひずみ押出加工の研究（1・



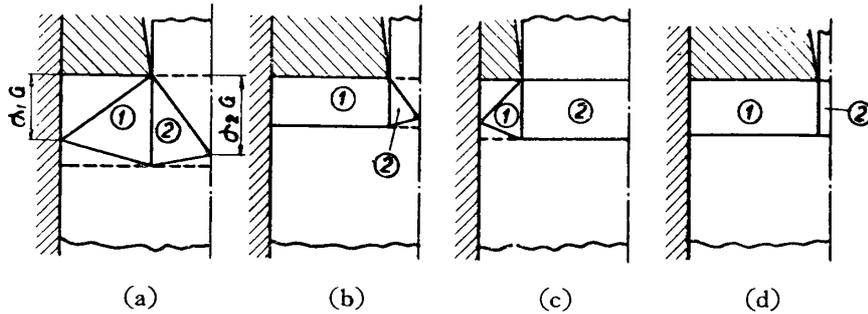
第3・4・1図 丸棒定常押出加工解析のための領域区分

4・1) において見られたように材料内の变形領域は押出ダイスの近くに限定され、ダイスから離れた部分は剛性領域としてとどまる。したがってこの解析のために二つの単位円筒形変形領域①、②を考えると便利である。円筒形領域①はその上下面を \dot{V} なる速度で圧縮され内側面34が一樣に半径方向内方にふくらみ、円柱形領域②は外側面34を内方に押されて軸方向にふくらむ。素材が停止し、ダイスが \dot{V} なる速度で進むような後方押出においては、 $(D_e/D_c)^2=R'$ とすれば体積一定の条件から35面上の上昇速度は $(1-R')\dot{V}/R'$ となる。

領域①は第3・1・2図の場合に相当し、この際外半径は $D_e/2$ 、内半径は $D_c/2$ 、 $a=2G/D_c$ 、加圧速度は \dot{V} である。領域②は第3・1・4図において変形方向の符号を変えたものに対応し、この図で外半径を $D_e/2$ 、 $a=2G/D_c \cdot R'^{1/2}$ 、上面加圧速度を $(1-R')\dot{V}/R'$ としたものに相当する。領域①、②の下方の材料は剛体であるから $f_{24}=f_{46}=1/\sqrt{3}$ 、また領域②の35面上においてはすでに押出された材料が剛性部分となって抵抗を与えるから $f_{35}=1/\sqrt{3}$ である。さらに領域①、②の境界面上の迂り抵抗係数 f_{34} はもちろん $1/\sqrt{3}$ に等しい。

このような二つの領域に対し平行および三角形速度場のいずれがより低い圧力上界を与えるかは加工条件によって異なる。これらの速度場に対してすでに求めた内部エネルギー消費率係数 e を使用するに当たって両領域の境界面における相対すべり速度の方向について検討する必要がある。領域①、②がともに平行速度場の場合（第3・4・2図(d)）においては材料の垂直方向速度 \dot{v} は両領域で反対の符号をもつから、両領域に対して側面に接する外部物体が垂直方向に伸縮せず水平方向にのみ動くとして求めた e をそのまま使用することができる。

第3・4・2図(a)のような三角形速度場においては領域①内の境界面34上の点の垂直速度は条件によって上方に向ったり下方に向ったりすることはすでに述べた(3・1・2・2)。今



第3・4・2図 丸棒定常押出加工の加工圧力上昇を計算するための種々の速度場のタイプ

の場合は (3・1・32) 式より

$$(\dot{v}_{s4})_{\text{①}} = -\frac{1}{2} \frac{1-R'}{R'^{1/2}} \cdot \dot{V} \left(\frac{1-\alpha_1}{1-R'^{1/2}} - \frac{\xi}{1+R'^{1/2}} \right), \quad (3.4.1)$$

また (3・1・41) 式より

$$(\dot{v}_{s4})_{\text{②}} = \frac{1}{2} \frac{1-R'}{R'^{1/2}} \cdot \dot{V} \left(\frac{1-\alpha_2}{R'^{1/2}} + \frac{\xi}{R'^{1/2}} \right). \quad (3.4.2)$$

そこで両者の相対すべり速度は

$$(\dot{v}_{s4})_{\text{②}} - (\dot{v}_{s4})_{\text{①}} = \frac{1}{2} \frac{1-R'}{R'^{1/2}} \cdot \dot{V} \left\{ \frac{1-\alpha_1}{1-R'^{1/2}} + \frac{1-\alpha_2}{R'^{1/2}} + \xi \left(\frac{1}{R'^{1/2}} - \frac{1}{1+R'^{1/2}} \right) \right\} \quad (3.4.3)$$

となる。上式は ξ いかんにかかわらず符号一定であり、この面上の迂り仕事率はすでに計算した e の式 (3・1・36) または (3・1・37) と (3・1・42) 式を加え合わせたものにそのまま含まれる。他の組合せの場合 (第3・4・2図 (b) および (c)) についても同じことがいえる。したがってすでに得られた e の式の領域 ① に対するものを e_1 、領域 ② に対するものを e_2 で表わせば \dot{V} なる押出速度に対する全内部エネルギー消費率は

$$\dot{E} = Y \cdot e_1 \cdot \frac{\pi}{4} (D_c^2 - D_e^2) \cdot \dot{V} + Y \cdot e_2 \cdot \frac{\pi}{4} D_e^2 \cdot \frac{1-R'}{R'} \cdot \dot{V} \quad (3.4.4)$$

によって与えられ、材料断面積ないしコンテナ断面積当りの平均押出圧力上昇比は

$$\frac{\bar{p}}{Y} = \frac{\dot{E}}{\pi (D_c/2)^2 \cdot Y \cdot \dot{V}} = R(e_1 + e_2) \quad (3.4.5)$$

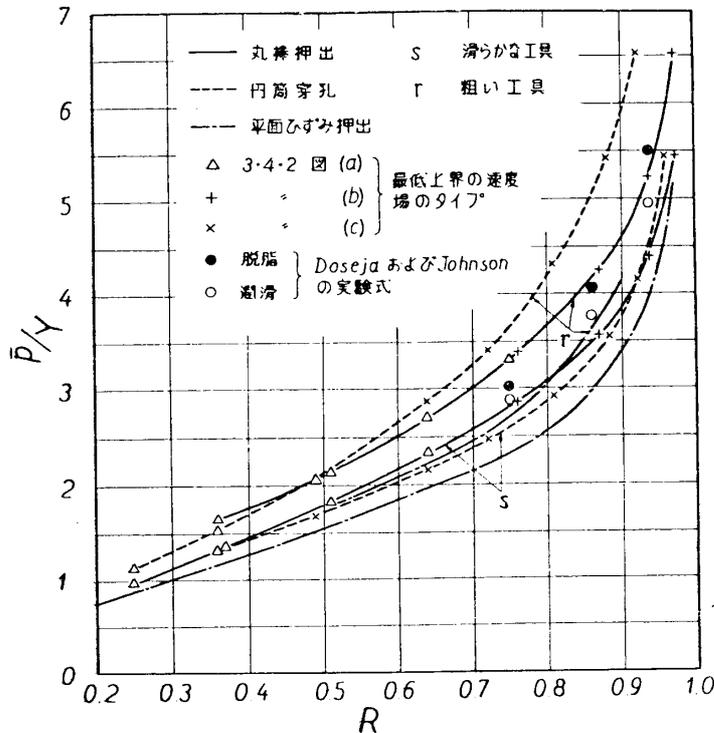
となる。ここに R は押出断面減少比で $1-R'$ に等しい。ダイス単位面積当りの圧力ならば上式右辺の R を除けばよい。上式は平面押出加工における対応する式 (1・4・1) とまったく同じ形である。上式中 e_1, e_2 はそれぞれに対する摩擦境界条件と a, b のかん数であるから、工具の摩擦条件が $f=0$ か $1/\sqrt{3}$ が与えられれば

$$\left. \begin{aligned} e_1 &= e_1(a, b) = e_1 \left(\frac{2G}{D_c}, R'^{1/2} \right), \\ e_2 &= e_2(a) = e_2 \left(\frac{2G}{D_c}, \frac{1}{R'^{1/2}} \right) \end{aligned} \right\} \quad (3.4.6)$$

である。すでに示した e_1, e_2 の式を (3・4・5) 式に代入し、 G にかんして微分して 0 と置けば最低上昇が得られる。とくに領域 ①, ② に平行速度場を用いるならば (3・4・5) 式は G に

かんする二次多項式となるから、 \bar{p} を極小にする G も \bar{p} の極小値も解析的に表示できる。しかしすでに述べたようにあらかじめ e_1, e_2 の最小値がいろいろな摩擦条件について a および b のかん数として数表か線図にされてあれば (3.4.5) 式の極小値は数値計算によって簡単に求まる。

第3.4.3図にはこのようにして計算した棒材押出定常圧力上界(素材断面積当り)を断面



第3.4.3図 丸棒押出および円筒上昇穿孔の定常加工圧力(素材断面積当り)上界比と断面減少比の関係

平面ひずみ問題は大体同じ傾向にあるが、前者の方がいくらか高く、その割合は R が小さいほど大きいことがわかる。このことは Johnson [19], Dodeja および Johnson [11] の実験結果と一致している。またかれらが降伏応力一定の鉛について求めた丸棒押出にかんする精密な実験結果を図中に \circ 印(潤滑した場合)、 \bullet 印(脱脂した場合)で示してあるが、これと著者の上界曲線の一致はきわめて良好である*。 R が大きなところで潤滑した工具による実験結果が s の曲線より割合に高くなっているのは、かれらも述べているように R が大きいと潤滑効果が悪くなると考えればやむをえないことである。

第3.4.3図の実線を Johnson らに習って数式表示すれば、滑らかな工具に対しては $R = 0.3 \sim 0.97$ の範囲で

$$\frac{\bar{p}}{Y} = 0.88 - 1.30 \ln(1 - R). \tag{3.4.7}$$

* Johnson らの無潤滑に対する結果は前方押出における変形層底面に働く平均圧力である。しかし平面ひずみ問題の対応する解(第1.4.3図)から明らかなようにこれは断面減少比が比較的大きいと、後方押出におけるダイス面の位置での平均圧力とほとんど変わらないと考えられる。

減少比 $R(=1-R')$ に対し実線で示してある。下の曲線は全工具面が滑らかな場合、上の曲線は粗い工具で後方押出を行なう場合である。またプロットの点で Δ 印は第3.4.2図(a)のタイプの実験結果、 $+$ 印は第3.4.2図(b)のタイプのもっとも低い上界を与えたことを意味する。いまこの上界を対応する摩擦条件の平面ひずみ押出加工における押出圧力上界と比較してみよう。後者は、材料が Mises の降伏条件に従うものとするとき第1.4.3図の $\bar{p}/2k$ の値を $2/\sqrt{3}$ 倍すれば \bar{p}/Y に換算できる。この値は滑らかな工具に対し第3.4.3図に鎖線をもって示してある。図から軸対称と

また粗い工具に対しては

$$\frac{\bar{P}}{Y} = 1.06 - 1.55 \ln(1 - R) \quad (3.4.8)$$

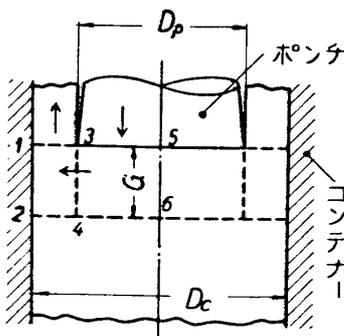
により誤差 5% 以内で表わしうる。

第 3.4.4 図には最低の押出圧力上界を与える定常変形層の深さ G とコンテナ半径 $D_c/2$ の比を R に対してプロットしてある。これを見ると $R=0.7$ の近くで最大が現われており、平面ひずみ押出の場合とは傾向が異なる。しかし後者においては $R=0.5$ あたりが最大点でこれは $W_e/W_c=0.5$ のときであり(第 1.4.8 図), 軸対称の場合には $R=0.7$ は $D_e/D_c=0.5$ であるから, その意味においてはやはり両者に共通点がある。また本計算においては, ダイス全面にわたるような剛性三角形デッド・

メタルが附着する条件は, 滑らかな工具の場合には $R < \text{約 } 0.65$, 粗い工具の場合には $R < \text{約 } 0.75$ であった。

3.4.2 定常上昇穿孔

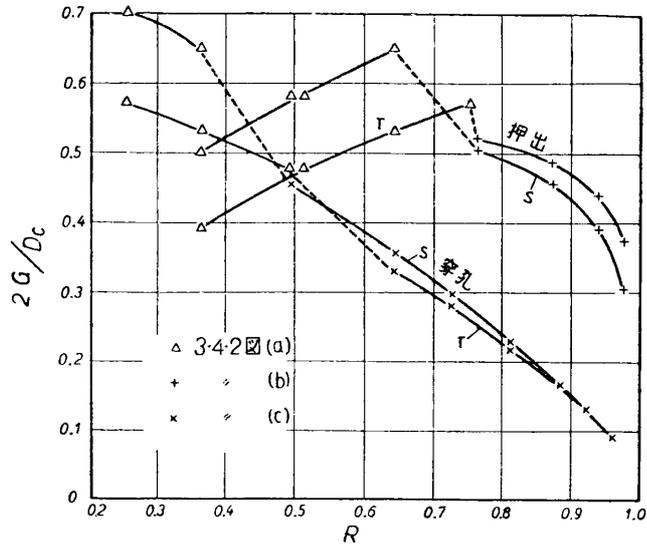
第 3.4.5 図に見られるような円柱形ポンチによる定常穿孔加工は前節の直角ダイスによる押出加工にきわめて類似している。すなわち第 3.4.1 図において材料の運動方向を反対にし,



第 3.4.5 図 円筒上昇穿孔加工解析のための領域区分

し, ダイスの部分を押出口, 押出された材料をポンチと考えれば両者の対応性が明らかになる。ただ滑らかなダイスを用いたときには $f_{13}=0, f_{35}=1/\sqrt{3}$ であるのに対し, 滑らかなポンチにおいては $f_{13}=1/\sqrt{3}, f_{35}=0$ という相異があるに過ぎない。したがってダイスもポンチも粗い場合には断面減少比 R なる押出とそれが $1-R$ なる穿孔はまったく互に逆過程と考えることができる。またダイスおよびポンチが滑らかであっても第 3.4.2 図 (a) のような速度場を用いる場合にはダイスまたはポンチ面上で相対すべりが無いから, 両者はやはり完全に同等である。もちろん上述の同等性が成立つためにはコンテナ面が粗いときには穿孔において押出口 13 より上方の押出された材料がコンテナ面上で回りエネルギーを消費しないという条件が必要である。

いま上のような互に完全に逆過程と考えるような押出および穿孔に対する加工圧力上界比の関係を調べよう。いま $(D_e/D_c)^2=R'$ なる押出において, ダイスの前進速度を \dot{V} とす



第 3.4.4 図 丸棒定常押出および円筒定常上昇穿孔における変形層の深さ

れば押出材料の上昇速度は $(1-R')\dot{V}/R'$ であることはすでに述べた。この場合に対する最適速度場における内部エネルギー消費率 \dot{E}_e はすでに求めた押出圧力上界 \bar{p}_e を用いて

$$\dot{E}_e = \bar{p}_e \cdot \frac{\pi}{4} D_c^2 \cdot \dot{V} \quad (3.4.9)$$

と表わすことができる。次に $D_p = D_e$ なるポンチで穿孔を行なう場合、穿孔断面減少比を $(D_p/D_c)^2 = R_p$ として穿孔速度が $(1-R_p)\dot{V}/R_p$ ならば押出される材料の速度は \dot{V} となるから、押出の場合と同じ速度場における内部エネルギー消費率 \dot{E}_p は (3.4.9) 式の \dot{E}_e と同じになるはずである。したがってこの速度場から得られる素材単位面積当りの穿孔圧力上界 \bar{p}_p は

$$\dot{E}_p = \bar{p}_p \cdot \frac{\pi}{4} D_c^2 \cdot \frac{1-R_p}{R_p} \cdot \dot{V} = \dot{E}_e \quad (3.4.10)$$

から求めることができる。(3.4.9) および (3.4.10) 式より

$$\frac{\bar{p}_p}{Y} = \frac{R_p}{1-R_p} \frac{\bar{p}_e}{Y} \quad (3.4.11)$$

が両加工における加工圧力上界比の関係を与える。(3.4.11) 式を見れば、同等性が成立つ範囲でダイス面当りの押出圧力最低上界とポンチ面当りの穿孔圧力最低上界は $D_e = D_p$ または $R' = R_p$ のときまったく等しくなることがわかる。

押出と穿孔の間の同等性が成立たないような場合、すなわちポンチが滑らかな第3.3.2図(b), (c) または (d) のような速度場を用いる場合には、やはり (3.4.5) 式の e_1, e_2 に予め計算してある対応する摩擦条件に対する値を代入し、 R として穿孔加工断面減少比 R_p を用いれば、素材断面積当りの定常加工圧力上界比 \bar{p}_p/Y が得られる。

上述の方法によって計算した上界比は第3.4.3図に滑らかな工具および粗い工具について破線で示してある。ここで前と同じく Δ 印は第3.4.2図(a), \times は(c)のタイプ of 速度場がもっとも低い \bar{p}/Y を与えたことを意味する。なお著者[20]はこの問題に対してすでに第3.4.2図(d)の速度場を用いて上界を与えたが、その結果はここに示すものよりもとくに R が中程度でかなり高かった。図の曲線から、滑らかな工具の場合には棒材押出と穿孔圧力上界比は $R=0.25\sim 0.96$ の範囲で同じ R に対して8%以上は異なることがわかる。平面ひずみ組合せ押出についてもすでに述べたが、今の場合でも工具の摩擦が存在しない場合には定常押出圧力は断面減少率が一定なら、断面形がかなり変わってもほぼ一定であることは興味深い。なおこのことはダイスまたはポンチ面が粗く、コンテナ面は滑らかな場合にも成立すると思われる。

他方コンテナ壁も粗い場合には、穿孔圧力上界は押出圧力上界に比べてとくに R が大きいところで著しく高い。 R が非常に小さくなるとこの関係は逆になる。すなわち、加工中コンテナ壁上で材料の相対すべり速度が高いと加工所要圧力は高くなるのである。平面ひずみ穿孔(1.4.2)にかんしても述べたように薄肉円筒容器の穿孔加工における潤滑の重要性[21]はこのことからもうなずける。

第3.4.3図の穿孔圧力上界比計算値を前と同様数式表示すれば $R=0.3\sim 0.96$ の範囲で滑らかな工具に対し

$$\frac{\bar{p}}{Y} = 0.66 - 1.41 \ln(1 - R), \quad (3.4.12)$$

粗い工具に対し

$$\frac{\bar{p}}{Y} = 0.42 - 2.41 \ln(1 - R) \quad (3.4.13)$$

によって誤差 5% 以下で表わしうる。

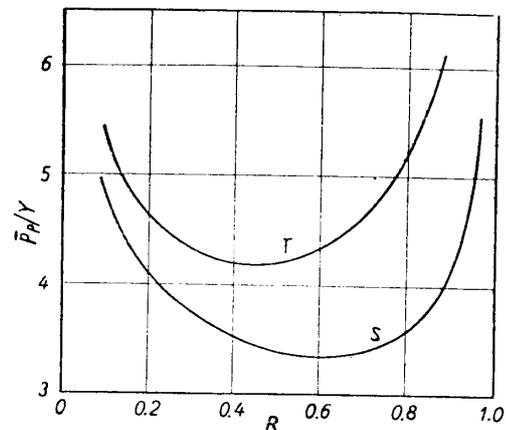
すでに 1.4.2 において述べたように穿孔における最大圧力であるポンチ圧力はコンテナ面が滑らかでポンチ面が粗いときには断面減少比 $R=0.5$ において極小となり、 $\bar{p}/Y \sim R$ 曲線は $R=0.5$ に対して対称であり、全工具面が滑らかな場合には R が 0.5 より大きなところで極小となった。いま同じようにポンチ圧力上界比 \bar{p}_p/Y を R にかんしてプロットすると第 3.4.6 図を得る。図中の曲線は粗い工具では $R=0.45$ 附近、滑らかなポンチにおいては $R=0.6$ の近くで極小となっている。本節で計算は行わなかったが滑らかなコンテナ、粗いポンチによる穿孔に対してはおそらく $R=0.5$ にかんしてだいたい対称形の \bar{p}_p/Y 曲線が得られるであろう。ポンチ圧力と断面減少比の第 3.4.6 図のような関係はこれまでに知られている実験結果 [22] とよく一致している。

穿孔加工における最低上界に対する定常変形層の深さは第 3.4.4 図にプロットしてある。 R が 0.5 より大きいところではこの深さは同一の R の棒材押出に比べてかなり小さい。しかし R がさらに小さくなるとかえって大きくなる。この場合もおそらく $R=0.25$ すなわち $D_p/D_c = 0.5$ 近くで極大が現われるものと思われる。

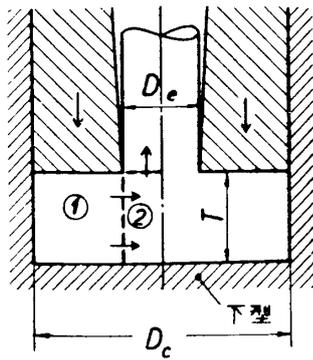
またポンチ端面全面に附着するデッド・メタル領域は滑らかな工具のときは $R < \text{約 } 0.4$ 、粗い工具のときは $R < \text{約 } 0.6$ においてのみ存在することになる。このことは久能木による観察結果 [23] とほぼ一致している。

3.4.3 押出鍛造

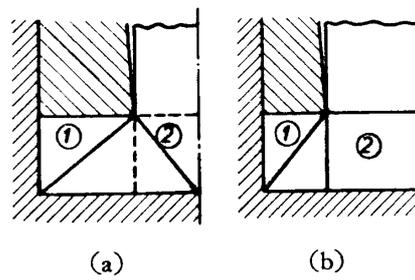
短い素材を用いて押出加工を行なう場合、または長い素材の押出加工の最終段階においては平面ひずみ問題で明らかにしたように、コンテナ内の押残り材料全体が変形すると考えられるから、変形過程は非定常になる。この問題に対する上界は、第 3.4.7 図において前と同様に領域 ①、② を考え、それぞれの中で第 3.4.2 図に示したような速度場を用いることによって (3.4.5) 式から計算することができる。ただし今の場合には (3.4.6) 式中の G の代りに材料押残り長さ T を使用する。下の平面型が滑らかな場合には第 3.4.8 図のような速度場も低い上界を与えるように思われる。さらに $2T/D_c$ がある値より小さくなるとすでに平面ひずみ押出鍛造 (1.5.1) にかんする研究によって明らかなように素材の押出口直下底部が持上る可能性がある。いまこの凹み生成の条件が上述の方法で解析的に表示しうるかどうかを調べて見よう。



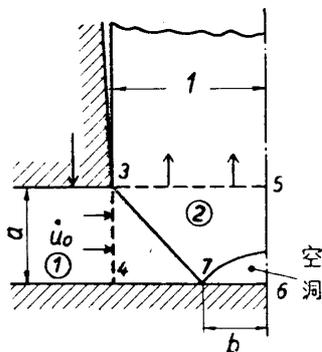
第 3.4.6 図 円筒定常上昇穿孔ポンチ圧力上界と断面減少比の関係



第3・4・7図 丸棒押出鍛造解析のための領域区分



第3・4・8図 丸棒押出鍛造解析のため用いた第3・4・2図以外の速度場



第3・4・9図 丸棒押出鍛造後期における底面空洞生成の条件

第3・4・9図に見られるように材料内の領域②に平面ひずみ押出鍛造問題で用いたものに対応する凹み生成の速度場を考えよう。断面347のリングはすでに述べた三角形速度場と同じ性質をもち、面37より上の棒の部分は剛性領域とする。簡単のため図のように寸法記号を与えると、円筒面34を半径方向内方に一様に押す場合の領域②にかんする内部エネルギー消費率係数は(3・1・40)式で $f_{34}=0$ として

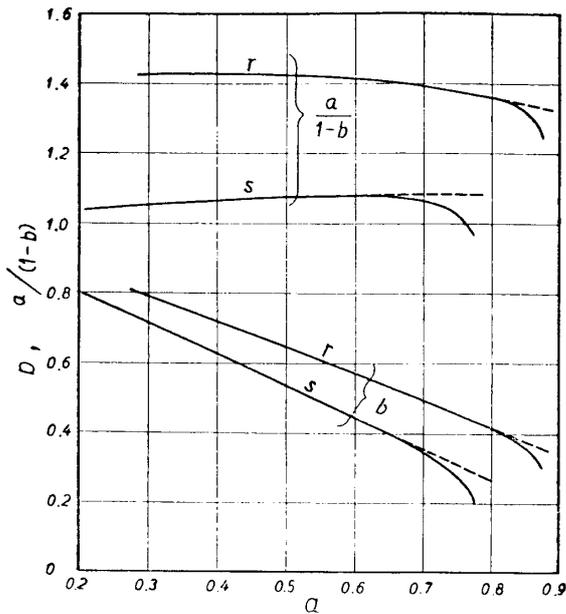
$$e = \frac{1}{1-b^2} \left[J_2(b) + K_2(b) \cdot a^2 + \frac{1}{2\sqrt{3}}(1+3b) \right] \times \left\{ (1 + \sqrt{3} f_{46}) \frac{(1-b)^2}{a} + a \right\} + \frac{1}{2\sqrt{3}}(1-b)a \quad (3.4-14)$$

上式で $K_2(b) \cdot a^2$ を無視し、 b についての極小をとると

$$(1+b)^2 a^2 + \left\{ (1-b)(2b^2 + b - 1) - 4b \ln \frac{2}{1+b} \right\} a + \frac{1}{2}(1 + \sqrt{3} f_{46})(1-b)^2(1-6b-3b^2) = 0 \quad (3.4-15)$$

を得る。上式から計算した a と b の関係、および円錐面37の傾斜 $a/(1-b)$ の値は第3・4・10図に示す。図より $b > 0.3$ に対しては $a/(1-b)$ は $f_{46}=0$ のとき約1.05、 $f_{46}=1/\sqrt{3}$ のとき約1.4である。これらの値は対応する平面ひずみ問題においてはそれぞれ1.00, 1.414であった。

押出が進行しているとき、いかなる段階から空洞ができはじめるか、すなわちいかなる a に対して $b > 0$ において e が極小となるかを解析的に求めるには(3・1・40)式よりもさらに厳密な式を使う必要がある。たとえばこの式から導いた(3・4・15)式では $b=0$ とおくと a は虚根となる。いま空洞を生じない速度場に対する e 対 a の曲線および(3・4・15)式から求めた b と a の値を(3・4・14)式に代入して得た e 対 a の曲線を引いて、いかなる a において後者の e の方が低くなるかを調べると、第3・4・9図において領域②の摩擦の境界条件

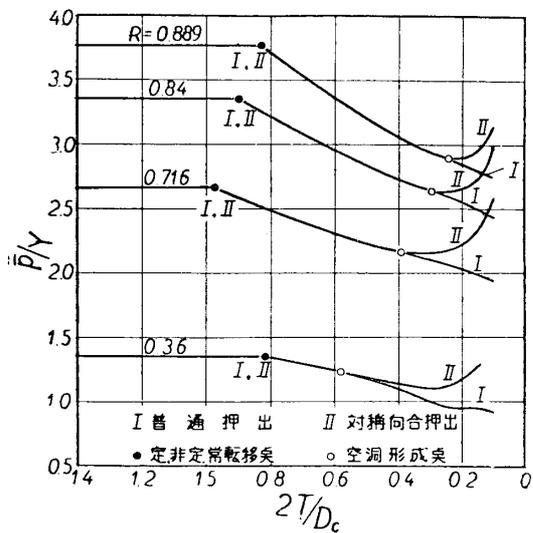


第 3.4.10 図 丸棒押出鍛造後期に生ずる底面空洞の寸法

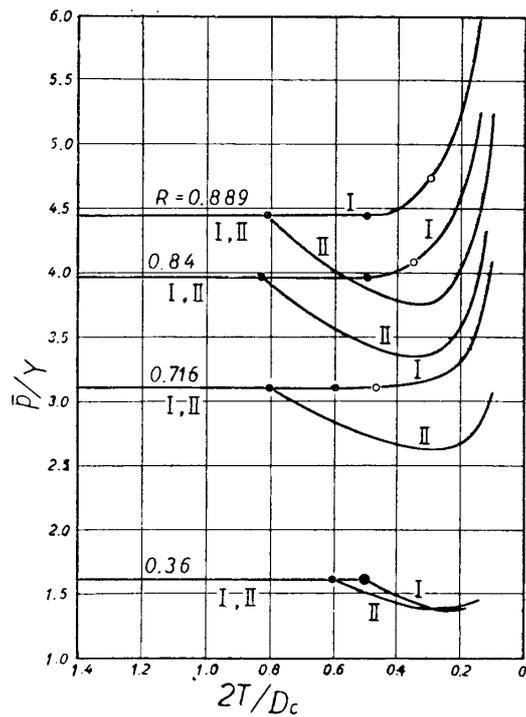
中 ● は定常, 非定常転移点を, また ○ 印は空洞形成点を示す. すでに平面ひずみ問題にかんして述べたように滑らかな工具の場合には定常から非定常過程に移って後は \bar{p}/Y は T が小さくなるとともに一様に低下し一定値に近づく. 他方, 工具が粗いと定, 非

rss においては前者がつねに低いから空洞はできない*. 滑らかな工具による棒材押出鍛造の場合には摩擦の境界条件は rrs でこのとき $a=0.73$ 以下で空洞ができることになる. また rsr の場合には $a=0.56$, 粗い工具による押出鍛造のように rrr の場合には $a=0.88$ 以下で空洞ができる. いずれの場合も空洞形成開始時には b は有限値をもっている. すなわち, 材料底面中央のある直径をもった円形面が底の型面より同時に離れ始める.

第 3.4.11 図の曲線 I はこのようにして空洞形成過程までも含めた押出鍛造およびそれ以前の定常押出過程における \bar{p}/Y と $2T/D_c$ の関係を滑らかな工具 (a) と粗い工具 (b) について計算したものである. 図



(a) 滑らかな工具



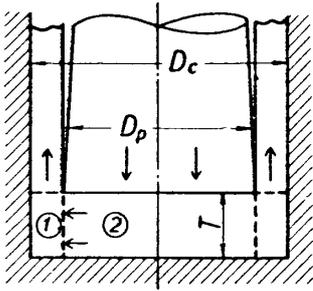
(b) 粗い工具, 後方押出

第 3.4.11 図 丸棒押出および押出鍛造における圧力上昇と素材長さ

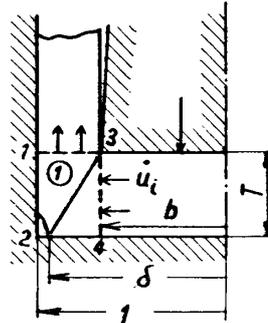
* 円柱形変形領域の上面 3.5 が自由な場合には, 曲りを含むような速度場を考えれば空洞も起り得るのである.

定常転移点以後は \bar{p}/Y は $R=0.36$ を除き上昇する一方である。この転移の起る $2T/D_c$ の値は滑らかな工具の場合の方が大きい。下型が滑らかなとき空洞形成前の非定常過程における領域②においては第3・4・8図(a)の速度場が対応する。この速度場は第4報で示す底面表皮捲込による欠陥を説明するものである。材料空洞形成は一般に定、非定常転移点の後に起るが、粗い工具の場合には転移と同時に空洞形成が起っている ($R=0.36$) ものもある。Johnson [24] は空洞形成と定、非定常転移は同時に起ると述べているがこれは粗い工具を用いる場合には近似的に成立するであろうが、滑らかな工具ではかなり相異なる。

第3・4・12図のような短い材料の上昇穿孔加工は最近広く採用されるようになった底付円筒の衝撃押出加工に相当するものである。この場合もすでに述べたとまったく同様に圧力上昇が計算できる。また今の場合には棒材押出鍛造における底の空洞形成に対応する欠陥として、底付円筒形材料の底面角部の持上りがあることはすでに福井、



第3・4・12図 円筒上昇穿孔鍛造解析のための領域区分



第3・4・13図 円筒上昇穿孔鍛造後期における材料の下面における持上りの条件

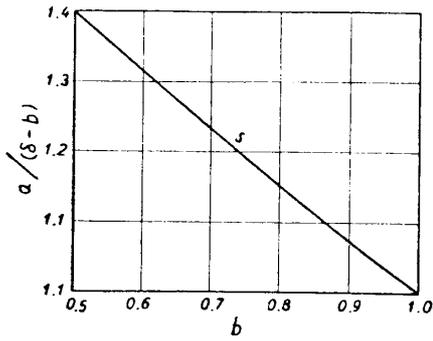
工藤、清野 [21] らによって実験的に指摘されているところである。いまこの持上りに対応する速度場を第3・4・13図のように考えると、 $b/\delta = \varepsilon$ なる記号を用い (3・1・30) 式より、 $K_1(\varepsilon)$ を無視して

$$e = \frac{1}{1-\varepsilon^2} \left[J_1(\varepsilon) + \frac{1}{2\sqrt{3}} (1-\varepsilon)^2 (3+\varepsilon) (1+\sqrt{3}f_{24}) \frac{b}{a\varepsilon} + \frac{1}{2\sqrt{3}} \left(4 + 4\sqrt{3}f_{12} \frac{\varepsilon^2}{b^2} \right) \frac{a\varepsilon}{b} \right] \quad (3\cdot4\cdot16)$$

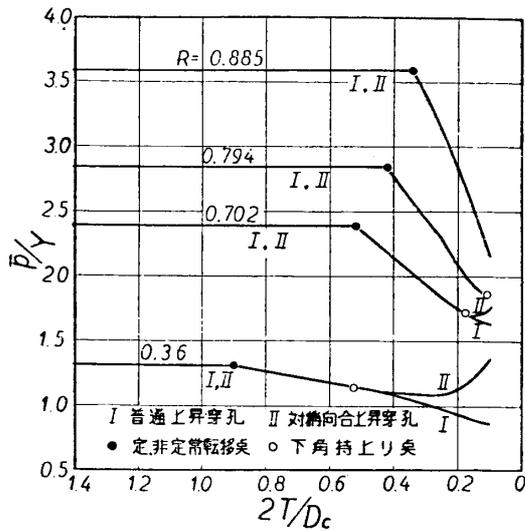
を得る。例によって $\partial e / \partial \varepsilon = 0$ から

$$2 \left\{ 1 + \varepsilon^2 + \sqrt{3}f_{12} \frac{\varepsilon^2}{b^2} (3 - \varepsilon^2) \right\} \left(\frac{a}{b} \right)^2 + \left\{ 4\varepsilon \ln \frac{1+\varepsilon}{2\varepsilon} - \frac{2}{\varepsilon} + 1 + 2\varepsilon - \varepsilon^2 \right\} \left(\frac{a}{b} \right) + \frac{1}{2} (1 + \sqrt{3}f_{24}) \left(-\frac{3}{\varepsilon^2} + 10 - 8\varepsilon + \varepsilon^2 \right) = 0 \quad (3\cdot4\cdot17)$$

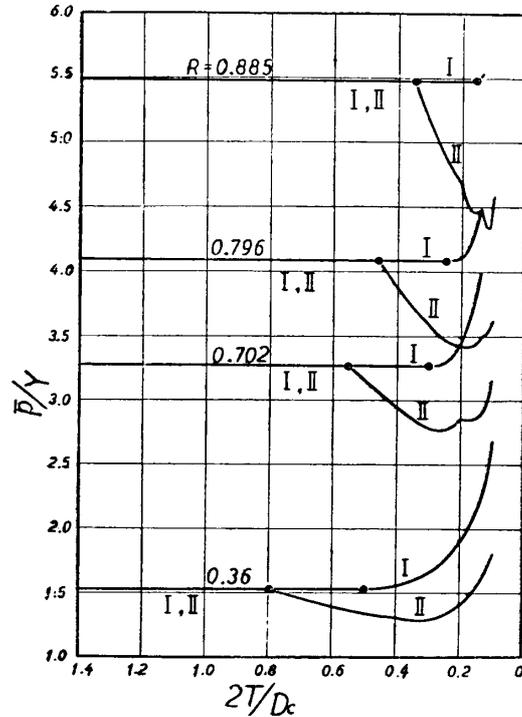
となる。上式では $f_{12}=0$ のとき a/b は ε のみのかん数となる。第3・4・14図は上式から計算した $f_{12}=f_{24}=0$ の場合の円錐面23の傾斜 $\alpha/(\delta-b) = \varepsilon a/(1-\varepsilon)b$ の値である。この値は $b=1$ において1となり平面ひずみ穿孔鍛造問題の場合 (1・5・1) と一致する。またこの図の縦座標は、 $f_{12}=f_{24}=0$ のとき材料下角の持上りが起る段階 $\delta=1$ をも示す。たとえば $b=0.7$ のとき $a/(1-b)=1.23$ であるから、 T が押出口の中 $(D_c - D_p)/2$ の1.23倍まで減ったとき角の持上りが始まることを意味する。型面が粗い場合にも同様に計算は可能であるが、持上りの時期は滑らかな型の場合よりもかなり遅いであろう。



第 3.4.14 図 滑らかな工具における上昇穿孔
鍛造後期の素材下角の持上り部分寸法



(a) 滑らかな工具



(b) 粗い工具, 後方穿孔

第 3.4.15 図 円筒上昇穿孔および穿孔鍛造中の圧力上昇と素材厚さの関係

なお以上に述べたような底面空洞形成ないし角の持上りが起るような条件の下では 3.4.2 で示した押出と上昇穿孔の対応性は成立しなくなることに注意する必要がある。

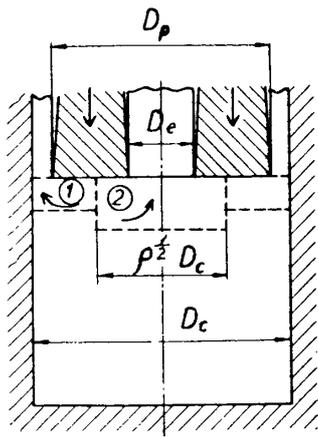
3.4.4 一方向組合せ押出および押出鍛造

第 1 報第 1.4.11 図に示すような段付棒押出加工あるいはこれと類似の段付側壁の円筒上昇穿孔(直列押出)にかんしては (1.4.8, 20 および 21) 式において $2k$ の代わりに Y を用いれば, 軸対称問題の場合もまったく同じ結論が導き出される。

第 3.4.16 図に示されるような押出部分が同心の丸棒と円筒より成るような加工(並列押出)の場合には図のように内外の二つの単位押出領域を考える。二つの領域の境界面すなわちダイス面に対する無送り面の直径を $\rho^{1/2}D_c$ とし $R_1=(D_p/D_c)^2$, $R_2=1-(D_e/D_c)^2$ なる記号を用いれば各単位押出領域に対する断面減少比 r_1 および r_2 は第 1 報(1.4.12)式によって与えられ, またそれぞれに対する押出圧力上昇比を \bar{p}_1/Y , \bar{p}_2/Y とすれば第 3.4.16 図の押出加工における素材断面積当りの平均押出圧力上昇比は(1.4.14)式によって与えられる。

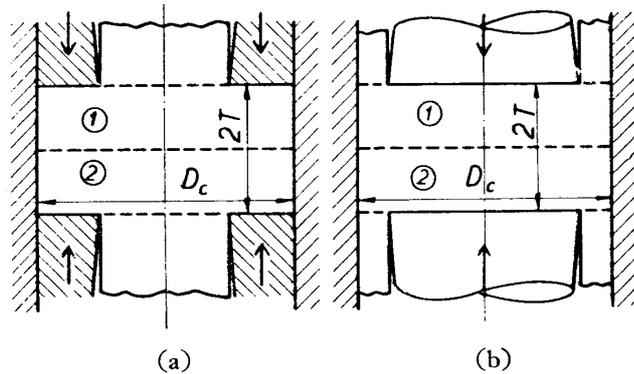
3.4.5 向合組合せ押出および穿孔鍛造

第 3.4.15 図の曲線 I は上のようにして計算した穿孔押出鍛造における \bar{p}/Y と $2T/D_c$ の関係を示す。この場合も棒材押出鍛造と同じく非定常状態では粗い工具と滑らかな工具とでは \bar{p}/Y と $2T/D_c$ の関係がまったく相反する。



第 3・4・16 図
並列組合せ押出加工

通押出鍛造に見られるような底の持上りに相当する現象は起らない。第 3・4・11 および 15 図の曲線 II はそれぞれ第 3・4・17 図 (a) および (b) に対する \bar{p}/Y と $2T/D_c$ の関係である。工具が滑らかな場合には丸棒押出でも円筒上昇穿孔でも非定常過程の途中までは同じ $2T/D_c$ に対する \bar{p}/Y は等しい。ただしこの場合向合押出鍛造においては材料押残り部長さを $2T$ としてある。 $2T/D_c$ がある値より小さくなると向合押出鍛造の方が \bar{p}/Y が高くなる。これは上述のように空洞形成が許されないためである。そこで考えられることは、材料が比較的わずかなエネルギー消費によってクラックを生じ得るものとする。図の○印以後少したってから材料内に欠陥を生じることである。このとき \bar{p}/Y は図の I, II の曲線の間となるであろう。事実この種のクラックは棒材向合押出鍛造の実験で見出された。



第 3・4・17 図 対称向合押出鍛造加工

総 括

1. 第 1 および 2 報で平面ひずみ鍛造および押出加工問題の解析に有効であることが明らかにされた上界接近法を軸対称加工問題に適用するため、Lévy-Mises 材料に対して比較的簡単な二種の速度場を使用し、平面ひずみ問題における単位矩形変形領域と類似の単位リング状変形領域内における内部エネルギー消費率係数の式を求めて計算し図表にした。
2. 加工中の材料を適当な単位変形領域に区分して上述の図表を使用することにより、円柱、リングの圧縮、丸棒押出、円筒穿孔、押出鍛造および一、二の組合せ押出鍛造加工の解析を比較的簡単な手間で行なうことができた。
3. 材料を加工硬化しないと仮定し、また材料と工具の接触面が完全に滑らかであるかま

たは粗いとして求めた加工圧力上界より，加工硬化する材料を用いて，**Coulomb** 摩擦が作用するような条件の下において加工する場合の加工圧力の上界を求める方法について考察した。

4. 以上の方法による解析で得られた結果の主なものは次のごとくである。

a) 平行型による円柱の圧縮加工における加工圧力上界は，摩擦係数が小さい場合にはすでに得られている他の研究者の結果とほとんど一致した。型面が粗い場合には，材料のある高さ-直径比の範囲内では，型面全面にまたがる円錐形デッド・メタルの存在するような速度場が，一様な変形を行なう速度場よりも低い上界を与えた。

b) 平行型によるリングの圧縮における加工圧力上界比と変形を求め，他の研究者による通常方法の解析結果と非常によく一致することがわかった。

c) コンテナ内のリングの平行型による圧縮における加工圧力上界を計算し，素材リングの外径-内径比および高さ-外径比の影響を調べた。

d) 直角ダイスによる棒材定常押出加工圧力上界と断面減少率の関係を求め，対応する平面ひずみ押出における上界と比較した。これらの結果は他の研究者による鉛を用いた厳密な実験結果ときわめてよい一致を示した。

e) 平面ポンチによる円筒定常上昇穿孔加工圧力上界と断面減少率の関係を求め，工具が滑らかな場合には同一の断面減少率の丸棒押出圧力と大体等しいことを見出した。しかしコンテナが粗い場合は穿孔圧力は断面減少率とともに非常に高くなる。今日までの多くの実験結果と一致して，定常押出，穿孔圧力と， $1-R$ の両対数プロットはほぼ直線をなす。

f) 上述の丸棒押出および円筒穿孔加工の後期ないし短い素材を用いての加工に見られる非定常押出鍛造過程を解析し，断面減少比ならびに素材長さと加工圧力の関係を調べた結果，上下型が共に滑らかな場合は，非定常過程において圧力は素材長さとともに減少し，上下型が共に粗い場合は圧力は板厚が減るとともに増大することを見出した。また素材の押残り長さが非常に短くなると，丸棒押出鍛造においては押出孔直下の材料底面に表皮捲込ないし空洞形成が起り，円筒穿孔では素材下角が欠けるといった経験的現象を最低上界速度場によって説明することができた。

g) 上下対称向合押出または穿孔鍛造における所要圧力と断面減少比と素材長さの関係を調べ，材料内にクラックが生じなければ加工圧力は非定常過程で，ある素材長さで最小をとることを見出した。このことは第4報で実験によって見出された向合押出鍛造品の内部クラック発生を説明するものである。

h) 押出，穿孔加工は軸対称問題と平面ひずみ問題では定性的にかなり類似性が見出された。しかしリングの圧縮のような加工は，平面ひずみ問題でこれに対応する加工はない。

謝 辞

以上の研究を通じ，始終，御指導，援助ならびに激励を賜わった東大航空研究所福井伸二教授に厚く御礼を申し上げます。また研究室の清野次郎，滝田巖君および岩崎通信機株式会社の亀谷成君には数値計算，原稿校正，印刷にあたって多大の助力をいただき心より感謝いたします。また本研究の費用の一部は文部省総合科学研究費に負うものであります。

1959年2月25日，材料部

文 献

- [1] Shield, R. T., Drucker, D. C.: *Jr. App. Mech.*, **20** (1953), p. 453.
- [2] Shield, R. T.: *Quart. App. Math.* **13** (1955), p. 27.
- [3] Levin, E.: 同上, p. 133.
- [4] 山田嘉昭: 機械の研究, **5** (1958), p. 621.
- [5] Drucker, D. C.: *Jr. App. Mech.* **21** (1954), p. 71.
- [6] Alexander, J. M.: *Jr. Mech. Phys. Solids*, **3** (1955), p. 233.
- [7] ヒル, R: “塑性学” (鷺津, 山田, 工藤訳), 培風館, 東京, 1954, p. 22.
- [8] 同上, p. 171.
- [9] Thomsen, E. G., Frisch, J.: *Trans. A.S.M.E.*, **77** (1955), p. 1343.
- [10] Johnson, W.: *Jr. Mech. Phys. Solids*, **4** (1956), p. 269.
- [11] Dodeja, L. C., Johnson, W.: 同上, **5** (1957), p. 281.
- [12] Siebel, E.: *Stahl u. Eisen*, **43** (1923), p. 1295.
- [13] Schroeder, W., Webster, D. A.: *Jr. App. Mech.* **16** (1949), p. 289.
- [14] 久能木真人: 科研報告, **30** (1954), p. 63.
- [15] Kudo, H.: *Proc. 5th Japan Nat. Cong. App. Mech.*, (1955), p. 75.
- [16] Thomsen, E. G.: *Trans. A.S.M.E.*, **78** (1956), p. 407.
- [17] Thomsen, E. G.: *Jr. App. Mech.*, **23** (1956), p. 225.
- [18] Dipper, M.: *Archiv. f. Eisenhüttenwes.*, **20** (1949), p. 275.
- [19] Johnson, W.: *Jr. Inst. Met.*, **85** (1956), p. 403.
- [20] Kudo, H.: *Proc. 7th Japan Nat. Cong. App. Mech.*, (1957), p. 57.
- [21] Fukui, S., Kudo, H., Seino, J.: *Rep. Inst. Sci. Tech., Univ. Tokyo*, **11** (1957), p. 91.
- [22] Siebel, E.: “*Die Formgebung in bildsamen Zustand*”, Verlag Stahleisen G. m. b. H., Düsseldorf, 1932, p. 56.
- [23] 久能木真人: 日本機械学会論文集, **22-IV** (1956), p. 429.
- [24] Johnson, W.: *Jr. Mech. Phys. Solids*, **5** (1957), p. 202.

Abstract

Hideaki KUDO, *Study on Forging and Extrusion Processes. Part III—Analysis on Axi-symmetrical Problems*. In the present paper, several axi-symmetrical forging and extrusion of Lévy-Mises material are analysed by means of the upper bound approach method which was found to be very effective and convenient in the preceding studies on plane-strain problems (Part I and II). To facilitate calculation, only two kinds of relatively simple velocity field, namely, the parallel velocity field and the triangle velocity field (Figs. 3·1·2, 3 and 4) are used. Also the concept of unit cylindrical deforming region (Fig. 3·1·1) analogous to that used in the plane-strain analysis is introduced and served to save the labour of calculation in the analysis of particular working problems.

The modifications of the upper bound solution obtained for rigid-perfectly-plastic material and perfectly smooth or rough tool surface are also proposed to account for the effect of work-hardening of the material and of the Coulomb friction between material and tool.

With the use of these analytical methods, the upper bounds for working pressure, the mode of deformation as well as the defect formation during compression of cylinder (Fig. 3·3·1) and ring (Figs. 3·3·3 and 5), bar extrusion (Fig. 3·4·1), tube piercing (Fig. 3·4·5), extrusion-forging (Figs. 3·4·7 and 12) and opposed extrusion-forging (Fig. 3·4·17) are studied. Some of these results are compared with the analytical and experimental results obtained by other investigators and found to be in good consistency with them. These results will be also compared with the experimental results in the following report, Part IV.