熱交換器外表面より熱放散なき場合は

空気温度

$$\theta_f=\theta_{f_0}-\frac{c_1}{k_h}[\alpha_1+\alpha_2] \tag{AI·30}$$

蓄熱体温度

$$\theta_h=\theta_{h_0}-\frac{c_1}{k_h}[\alpha_2] \tag{AI·31}$$

(山口富夫)

補遺 AII. 貯気槽内空気温度が時間に対して直線的に変化する場合の貯気槽球殻壁の温度変化

[記　号]

α_i:	熱伝達係数	[kcal/m²·sec·°C]
λ:	熱伝導率	[kcal/m·sec·°C]
c_p:	比　熱	[kcal/kg°C]
σ:	密　度	[kg/m³]
$\kappa=\dfrac{\lambda}{c\sigma}$:	温度伝導率	[m²/sec]
h_i:	$\dfrac{\alpha_i}{\lambda}$	[1/m]
r_2:	球殻外半径	[m]
r_1:	球殻内半径	[m]
r:	球殻中心からの距離	[m]

基礎式

$$\frac{\partial\theta}{\partial t}=k\left(\frac{\partial^2\theta}{\partial r^2}+\frac{2}{r}\frac{\partial\theta}{\partial r}\right) \qquad r_1\leq r\leq r_2 \tag{AII·1}$$

$$t=0 \qquad \theta=0 \tag{AII·2}$$

$$r=r_1 \qquad \frac{\partial\theta}{\partial r}=h_2\{\theta-f(t)\} \tag{AII·3}$$

$$r=r_2 \qquad \frac{\partial\theta}{\partial r}=-h_1\theta \tag{AII·4}$$

今 $\Theta=\theta r$ とし，式 (AII·1)～(AII·4) に代入すると下記の如くなる．

$$\frac{\partial\Theta}{\partial t}=k\frac{\partial^2\Theta}{\partial r^2} \tag{AII·1'}$$

$$t=0 \qquad \Theta=0 \tag{AII·2'}$$

$$r=r_1 \qquad r\frac{\partial\Theta}{\partial r}-(1+h_2r)\Theta=-h_2r^2f(t) \tag{AII·3'}$$

$$r=r_2 \qquad r\frac{\partial\Theta}{\partial r}-(1-h_1r)\Theta=0 \tag{AII·4'}$$

$$f(t)=ct$$

式 (AII·1')，(AII·2') の演算子解は

$$\Theta = Ae^{\sqrt{\frac{p}{k}}r} + Be^{-\sqrt{\frac{p}{k}}r} \tag{AII·5}$$

式 (AII·5) を式 (AII·3′), (AII·4′) に代入し, A, B を求める.

$$A = \frac{-h_2 r_1^2 c e^{-\sqrt{\frac{p}{k}}r_2} ⓓ}{p[ⓐⓓe^{-\sqrt{\frac{p}{k}}l} - ⓑⓒe^{\sqrt{\frac{p}{k}}l}]} \qquad B = \frac{-h_2 r_1^2 c e^{-\sqrt{\frac{p}{k}}r_2} ⓒ}{p[ⓐⓓe^{-\sqrt{\frac{p}{k}}l} - ⓑⓒe^{\sqrt{\frac{p}{k}}l}]} \tag{AII·6}$$

ここに

$$ⓐ = r_1\sqrt{\frac{p}{k}} - (1+h_2 r_1) \qquad ⓒ = r_2\sqrt{\frac{p}{k}} - (1-h_1 r_2)$$

$$ⓑ = r_1\sqrt{\frac{p}{k}} + (1+h_2 r_1) \qquad ⓓ = r_2\sqrt{\frac{p}{k}} + (1-h_1 r_2)$$

$$l = r_2 - r_1$$

(6) 式を (5) 式に代入すると

$$\Theta \supset \frac{h_2 r_1^2 c}{p}\left\{\frac{(1-h_1 r_2)\sinh\sqrt{\frac{p}{k}}x - r_2\sqrt{\frac{p}{k}}\cosh\sqrt{\frac{p}{k}}x}{\left[(1+h_2 r_1)(1-h_1 r_2) - r_1 r_2\frac{p}{k}\right]\sinh\sqrt{\frac{p}{k}}l - \sqrt{\frac{p}{k}}[l + r_1 r_2(h_1+h_2)]\cosh\sqrt{\frac{p}{k}}l}\right\} \tag{AII·7}$$

$$x = r_2 - r$$

ゆえに

$$\Theta = \frac{h_2 r_1^2 c}{2\pi i}\int_{Br}\frac{e^{zt}}{z^2} \times \frac{(1-h_1 r_2)\sinh\sqrt{\frac{z}{k}}x - r_2\sqrt{\frac{z}{k}}\cosh\sqrt{\frac{z}{k}}x}{\left[(1+h_2 r_1)(1-h_1 r_2) - r_1 r_2\frac{z}{k}\right]\sinh\sqrt{\frac{z}{k}}l - \sqrt{\frac{z}{k}}[l + r_1 r_2(h_1+h_2)]\cosh\sqrt{\frac{z}{k}}l}dz \tag{AII·8}$$

式 (AII·8) を解くことによって球殻外壁の温度分布を求めることができる.

i) $z=0$ すなわち, 原点における極からの影響を調べる.

$\Theta_{z=0} = \Theta_1$ とする.

$$\frac{e^{zt}}{z^2}\frac{(1-h_1 r_2)\sinh\sqrt{\frac{z}{k}}x - r_2\sqrt{\frac{z}{k}}\cosh\sqrt{\frac{z}{k}}x}{\left[(1+h_2 r_1)(1-h_1 r_2) - r_1 r_2\frac{z}{k}\right]\sinh\sqrt{\frac{z}{k}}l - \sqrt{\frac{z}{k}}[l + r_1 r_2(h_1+h_2)]\cosh\sqrt{\frac{z}{k}}l}$$

$$= \frac{1}{z^2}\frac{(Ax - r_2) + z\left[(Ax - r_2)t + \frac{1}{k}\left(A\frac{x^3}{3!} - r_2\frac{x^2}{2!}\right)\right] + \cdots\cdot}{(Bl - D) + \left(\frac{z}{k}\right)\left(B\frac{l^3}{3!} - r_1 r_2 l - D\frac{l^2}{2!}\right) + \cdots\cdot}$$

上式において $\frac{1}{z}$ の係数を求めると Θ_1 は下記の如く表わされる.

$$\Theta_1=\frac{h_2r_1^2c}{(Bl-D)}\left\{(Ax-r_2)t+\frac{1}{k}\left[\left(A\frac{x^3}{3!}-r_2\frac{x^2}{2!}\right)-\left(\frac{Ax-r_2}{Bl-D}\right)\left(B\frac{l^3}{3!}-r_1r_2l-D\frac{l^2}{2!}\right)\right\}\right. \tag{AII・9}$$

ii) 次に $\left\{(B-r_1r_2)\frac{z}{k}\sinh\sqrt{\frac{z}{k}}l-\sqrt{\frac{z}{k}}D\cosh\sqrt{\frac{z}{k}}l\right\}=0$ の影響を調べる．この時の Θ を Θ_2 とする．

$\sqrt{\frac{z}{k}}=i\alpha_n$, $\frac{z}{k}=-\alpha_n^2$ とすると α_n は次式の正根である．

$$\tan\alpha_n l=\frac{\alpha_n D}{B+r_1r_2\alpha_n^2} \tag{AII・10}$$

$$n=1,\ 2,\ 3,\cdots\cdots,\ \infty$$

すなわち，$z=-\alpha_n^2k$ が極であり，この z において式 (AII・8) を計算すると Θ_2 が得られる．

$$\Theta_2=h_2r_1^2c\left\{\frac{e^{zt}}{z^2}\frac{A\sinh\sqrt{\frac{z}{k}}x-r_2\sqrt{\frac{z}{k}}\cosh\sqrt{\frac{z}{k}}x}{\frac{d}{dz}\left\{\left(B-r_1r_2\frac{z}{k}\right)\sinh\sqrt{\frac{z}{k}}l-\sqrt{\frac{z}{k}}D\cosh\sqrt{\frac{z}{k}}l\right\}}\right\}_{\substack{z=-k\alpha_n^2\\ \sqrt{\frac{z}{k}}=i\alpha_n}}$$

$$=-\frac{2h_2r_1^2c}{k}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{-k\alpha_n^2t}}{\alpha_n^3}\frac{A\sin\alpha_nx-r_2\alpha_n\cos\alpha_nx}{[\{(B+r_1r_2\alpha_n^2)l-D\}\cos\alpha_nl+\alpha_n(2r_1r_2+lD)\sin\alpha_nl]} \tag{AII・11}$$

ゆえに求める貯気槽球殻外壁の温度分布は下記の如くなる．

$$\Theta=\Theta_1+\Theta_2$$

$$=h_2r_1^2c\left[\frac{1}{(Bl-D)}\left\{(Ax-r_2)t+\frac{1}{k}\left[\left(A\frac{x^3}{3!}-r_2\frac{x^2}{2!}\right)-\left(\frac{Ax-r_2}{Bl-D}\right)l\left(B\frac{l^2}{3!}-r_1r_2-D\frac{l}{2!}\right)\right]\right\}\right.$$
$$\left.-\frac{2}{k}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{-k\alpha_n^2t}}{\alpha_n^3}\frac{A\sin\alpha_nx-r_2\alpha_n\cos\alpha_nx}{[\{(B+r_1r_2\alpha_n^2)l-D\}\cos\alpha_nl+\alpha_n(2r_1r_2+lD)\sin\alpha_nl]}\right] \tag{AII・12}$$

∴

$$\theta=\frac{h_2r_1^2c}{r}\left[\frac{1}{(Bl-D)}\left\{(Ax-r_2)t+\frac{1}{k}\left[\left(A\frac{x^3}{3!}-r_2\frac{x^2}{2!}\right)-\left(\frac{Ax-r_2}{Bl-D}\right)l\left(B\frac{l^2}{3!}-r_1r_2-D\frac{l}{2!}\right)\right]\right\}\right.$$
$$\left.-\frac{2}{k}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{-k\alpha_n^2t}}{\alpha_n^3}\frac{A\sin\alpha_nx-r_2\alpha_n\cos\alpha_nx}{[\{(B+r_1r_2\alpha_n^2)l-D\}\cos\alpha_nl+\alpha_n(2r_1r_2+lD)\sin\alpha_nl]}\right] \tag{AII・13}$$

ただし
$$\left\{\begin{array}{lll} A=1-h_1r_2 & D=l+r_1r_2(h_1+h_2) & l=r_2-r_1 \\ B=(1+h_2r_1)(1-h_1r_2) & & x=r_2-r \end{array}\right\}$$

次に空気温度が時間に対し一定の場合について解析すると次の如くなる．

$$f(t)=\theta_0$$

$$\Theta=\theta_0h_2r_1^2\left\{\frac{Ax-r_2}{Bl-D}+2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{-k\alpha_n^2t}}{\alpha_n}\frac{A\sin\alpha_nx-r_2\alpha_n\cos\alpha_nx}{[\{(B+r_1r_2\alpha_n^2)l-D\}\cos\alpha_nl+\alpha_n(2r_1r_2+lD)\sin\alpha_nl]}\right\} \tag{AII・14}$$

$$\theta=\frac{\theta_0h_2r_1^2}{r}\left\{\frac{Ax-r_2}{Bl-D}+2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{-k\alpha_n^2t}}{\alpha_n}\frac{A\sin\alpha_nx-r_2\alpha_n\cos\alpha_nx}{[\{(B+r_1r_2\alpha_n^2)l-D\}\cos\alpha_nl+\alpha_n(2r_1r_2+lD)\sin\alpha_nl]}\right\} \tag{AII・15}$$

（山口富夫）