

# 航空研究所彙報

## 第七十一號

昭和五年七月

### 低壓低温風洞の壁の強さに就て

所員 佐々木達治郎  
萩原幾太郎

#### 1. 緒言

目下製作中の低壓低温風洞に於て壁の強さが問題になつた。無論壁の強さを非常に大にして、低壓にした場合弾性的不安定により潰崩しない様にすればよいのであるが、熱容量が大になり冷却するに非常な power を要する不利がある。それ故成るべく薄くして熱容量を減少し然も弾性的不安定を起さない様にすることが必要である。之が爲には collapse ring を附けるのが一番よい方法であらうと思はれるが、ring を非常に丈夫にすれば熱容量を相當増すから可成弱い ring で満足しなければならぬ。此様な場合には ring は壁と共に潰崩するのであつて、普通用ひられる丈夫な collapse ring の場合は少し趣が異なる。Collapse ring の丈夫な場合は今迄澤山研究されて居るが<sup>1)</sup>、弱い場合の研究は一尠見當らん様である。<sup>2)</sup>

#### 2. 理論

Collapse ring のない場合圓筒の厚さの中央の部分をつなげた中央面上に  $\alpha, \beta$  なる直交曲線座標を取り中央面から外方に引いた法線上の距離を  $z$  とすれば strain energy function  $W$  は概略<sup>3)</sup>

$$2W = \frac{E}{1-\sigma^2} \left[ \epsilon_1 + \epsilon_2 - z(z_1 + z_2) \right]^2 - \frac{2E}{1+\sigma} (\epsilon_1 - z_1)(\epsilon_2 - z_2) + \frac{E}{2(1+\sigma)} (\varpi - 2\tau z)^2 \dots (1)$$

- 1) Fairbairn, Lond. Phil. Trans. R. Soc., Vol. 148 (1859), p. 389.  
Southwell, 同上 Vol. 213 (1913), p. 187.  
Love, The Mathematical Theory of Elasticity, 3rd Edition, p. 563.
- 2) 徳川子爵の研究があると云ふ事である。
- 3) Love, Elasticity, p. 533.

で與へられる。茲で  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varpi$  は夫々圓壩の軸, 圓周方向の elongation 及び shear であり,  $x_1, x_2, \tau$  は change of curvature を表す。即ち今  $x, \phi, z$  を變形しない中央面上に原點を有する動座標とし,  $z$  は外方に引いた normal の方向,  $x$  は圓壩の軸,  $\phi$  は圓周方向とする。  $u, v, w$  を其原點が變位する量の  $x, \phi, z$  方向の成分とする時は

$$\varepsilon_1 = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \varepsilon_2 = \frac{1}{a} \left( \frac{\partial v}{\partial \phi} - w \right), \quad \varpi = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{1}{a} \frac{\partial u}{\partial \phi},$$

$$x_1 = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \quad x_2 = \frac{1}{a^2} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial \phi^2} + \frac{\partial v}{\partial \phi} \right), \quad \tau = \frac{1}{a} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial w}{\partial \phi} + v \right)$$

となる。茲で  $a$  は圓壩の中央面の半徑である。

次に

$$u = U \cos mx \sin n\phi,$$

$$v = V \sin mx \cos n\phi,$$

$$w = W \sin mx \sin n\phi,$$

とすれば, 圓壩の長さが  $l$  ならば  $m = \frac{\pi}{l}$  である。即ち此様な變形は兩端では形は變らないが長さの方向には變位し, 中間では  $n$  lobed curve になるものである。

Strain energy を  $2\bar{W}$  とし板の厚さを  $2h$  とすれば

$$2\bar{W} = \frac{a\pi^2 E h}{m(1-\sigma^2)} \left\{ \left[ Um + \frac{Vn+W}{a} \right]^2 - 2(1-\sigma) \left[ \frac{Um(Vn+W)}{a} - \frac{1}{4} \left( Vm + \frac{Un}{a} \right)^2 \right] \right\}$$

$$+ \frac{a\pi^2 E h^3}{3m(1-\sigma^2)} \left\{ \left[ W \left( m^2 + \frac{n^2}{a^2} \right) + \frac{Vn}{a^2} \right]^2 - 2(1-\sigma) \left[ Wm^2 \frac{n}{a^2} (Wn+V) - \frac{m^2}{a^2} (Wn+V)^2 \right] \right\}$$

又變形した中央面に對する normal の direction cosine は

$$l = -\frac{\partial w}{\partial x}, \quad m = -\frac{1}{a} \left( \frac{\partial w}{\partial \phi} + v \right), \quad n = 1$$

であるから external pressure によつてなされた仕事は

$$Q = \int_0^{2\pi} \int_0^l a d\phi dx p \left[ l \frac{(1+\varepsilon_1)(1+\varepsilon_2)}{2} u + m \frac{(1+\varepsilon_1)(1+\varepsilon_2)}{2} v + \frac{n}{2} \left\{ 1 + (1+\varepsilon_1)(1+\varepsilon_2) w \right\} \right]$$

$$= -p \frac{a\pi^2}{m} \left[ 2UWm + 2 \frac{VWn}{a} + \frac{W^2}{a} + \frac{V^2}{a} \right]$$

である。茲に  $p$  は external pressure である。

次に圓壩の兩端は塞いであるから  $\frac{\pi a^2 p}{4\pi a h}$  なる thrust が働く。此 thrust のなす仕事は

$$Q_2 = \int_0^{2\pi} \int_0^l \int_{-h}^h -T \left( 1 + \frac{\varepsilon_2}{2} \right) \varepsilon_1 a d\phi dx dz = -\frac{a\pi^2}{m} p \frac{Um}{8} (Vn+W)$$

である。

Neutral equilibrium に際しては

$$\delta \int \left\{ \bar{W} - (Q_1 + Q_2) \right\} dt = 0$$

であるから 計算し  $U, V, W$  を eliminate し省略算を行ふ時は

$$p = \frac{Eh}{a} \left\{ \frac{n^2(n^2-1)h^2}{3(1-\sigma^2)a^2} + \frac{m^4 a^4}{n^2(n^2-1)} \right\} \dots\dots\dots (2)$$

となる。之が collapsing pressure である。此式は概略 Southwell 又は Love の formula と一致する。

次に弱い ring が附いて居る時には之は壁と共に deform する。ring の附いて居る場合は deformation の状態は少し異なるかも知れぬが ring が弱いのであるから ring のない時と大差ないであろう。それ故 ring の deform する状態は壁の deformation に従属するものと見てよい。今 ring が附着して居る壁の部分を ring と一體と看做す時は壁の部分に於て成立する energy function は ring の部分に適用出来ることを考へるも大なる無理はないであろう。<sup>1)</sup>

(1) 式を書き直せば

$$\begin{aligned} 2W = & \frac{E}{1-\sigma^2} (\epsilon_1 + \epsilon_2)^2 - \frac{2E}{1+\sigma} \epsilon_1 \epsilon_2 + \frac{E}{2(1+\sigma)} \omega^2 \\ & - 2z \left[ \frac{E}{1-\sigma^2} (\epsilon_1 + \epsilon_2)(x_1 + x_2) - \frac{2E}{1+\sigma} (\epsilon_1 x_2 + \epsilon_2 x_1) + \frac{E}{2(1+\sigma)} 2\tau \omega \right] \\ & + z^2 \left[ \frac{E}{1-\sigma^2} (x_1 + x_2)^2 - \frac{2E}{1+\sigma} x_1 x_2 + \frac{E}{2(1+\sigma)} 4\tau^2 \right] \end{aligned}$$

となる。之を ring の附着して居る壁の部分と ring とを一體にした體積に積分する時は  $z^2$  の項の影響は他より遙かに大である。 $z^2$  の項を壁の縦断面に於て積分すれば  $\iint z^2 dx dz$  は壁の中央面が圓壩の縦断面と交る線に對する慣性能率である。それ故同一の慣性能率を有する板と同一な Potential energy を有するものとすることも大なる誤はないであろう。即ち壁の厚さがそれだけ厚くなつたものと考へ得るのである。但し之は  $z^2$  の項のみに就て云ふので他の項に對しては元の厚さを有するものとす。此様な考により前と同一な計算を行ふ時は (2) 式の代りに

$$p = \frac{E}{a^3} \frac{n^2(n^2-1)}{3(1-\sigma^2)} H^3 + \frac{Em^4 a^3}{n^2(n^2-1)} h \dots\dots\dots (3)$$

1) Ring とそれが附着して居る壁の部分とを一體と見る時は thin rod の理論を用ひる事が出来る。Ring の change of curvature 及び torsion は壁の其部に於けるものと 1st approximation では同一である。此 thin rod に働く force 及び couple は壁の其部分に働く stress 及び couple から計算出来る。それ故 thin rod の equation of equilibrium から此 thin rod に働く stress resultant 及び couple を計算することが出来る。従つて potential energy も計算出来るのであるが計算は甚だ複雑である。次の便法は thin rod の理論を用ひて strain を計算し壁の其部に於ける strain と rod と壁の界面に於て連続なる様に rod の strain を定めるのである。嚴密な解には到達し得ないが略近的には rod と壁と同一な strain energy function を有するものとして出来る。

なる。茲で  $2H$  は ring と壁と一體となつたものと同じな慣性能率を有する板の厚さである。

Collapse ring がない場合に實驗を行つて  $p$  と  $h$  の關係を得た後に ring を附けたもの、 $p$  を求めるには  $H$  を求めて右邊第一項の  $h^3$  の代りに  $H^3$  を代入すればよいのである。

Ring と壁とが完全に一體となる程よく附着して居ない時には ring と壁との間に slip が起るのであろう。然し ring の deformation は壁の deformation に從屬するものと考え得るを以て前述の略近の程度に於ては同様な strain energy function を有するものとして假定し、 $H$  を求めるに際しては ring の慣性能率はそれ自身の断面の中心を通る軸に關して取ることにすれば大なる誤はない。

### 3. 實 験

(2) 式によれば

$$p = Ah^3 + Bh$$

なるから實驗によつて  $A, B$  を定めることが出来る。

實驗に使用した模型では材料は亞鉛引鐵板であつて、圓錐の直徑 15cm. 長さ 80 cm. で兩端は眞鍮板に鑢付けしてある。

第一の實驗では鐵板の Young's modulus が  $1.7 \times 10^{12}$  dynes/cm<sup>2</sup> であつて板の厚さは 0.32 mm., 0.51 mm., 0.64 mm., 0.79 mm. の四種を用いた。其結果は第一表に示す通りである。

第 一 表		
實 驗 番 號	厚 さ mm.	$p$ . mm.(Hg)
62	0.32	131
67	0.32	122
56	0.51	341
68	0.51	291
69	0.51	394
63	0.64	460
64	0.64	536
70	0.64	585
65	0.79	791
66	0.79	813

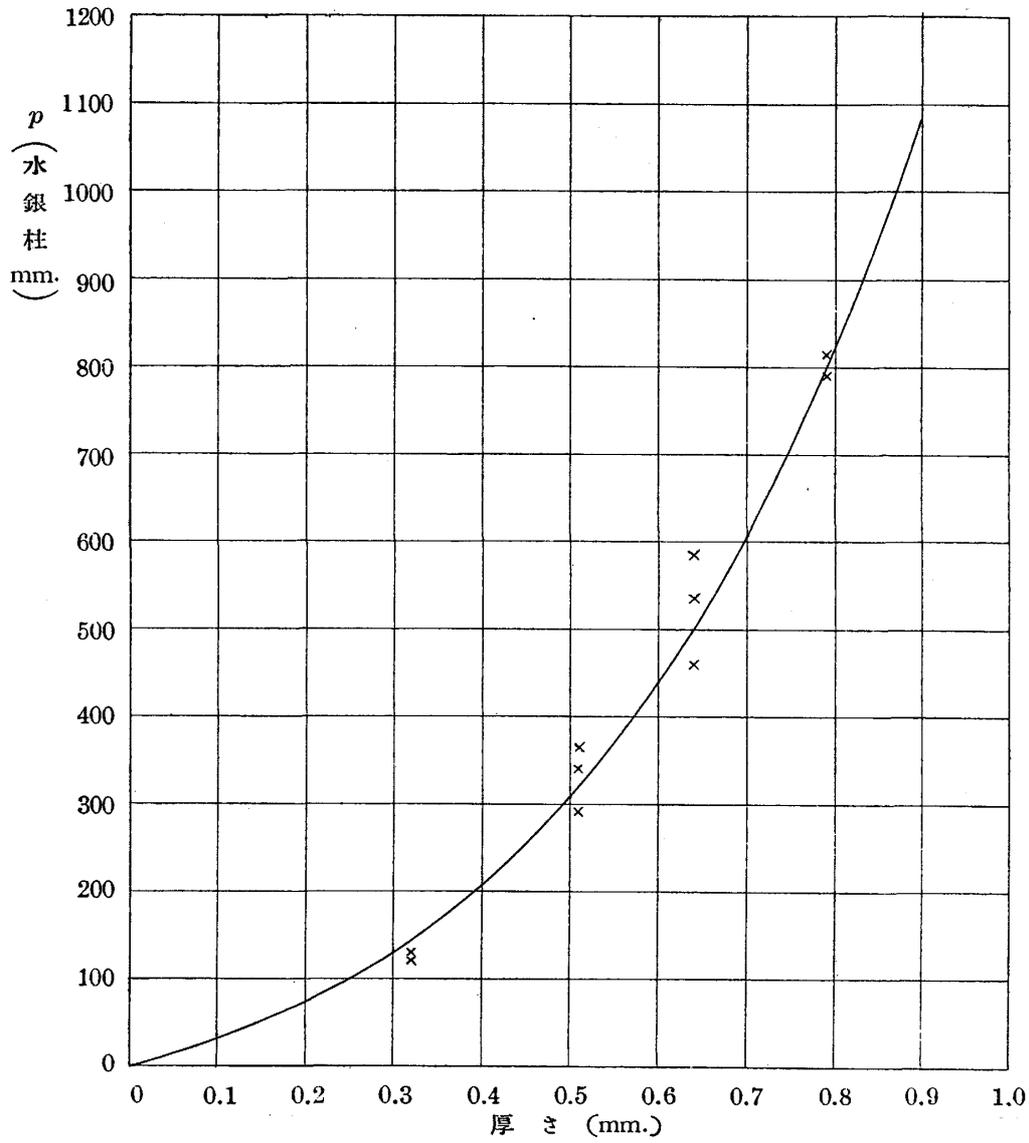
之を圖示すれば第一圖の様であつて、實驗式は

$$p = 8448 h^3 + 698 h.$$

次に  $2h = 0.51$ mm. の壁に collapse ring を附けた場合の實驗式(3)式に相當する式即ち

$$p = 8448 H_n^3 + 698 h$$

から計算した  $p$  を示せば第二表の通りである。Collapse ring の断面は長さ 0.51mm.,  $3.6^{\text{mm.}} \times 3.6^{\text{mm.}}$  の angle である。

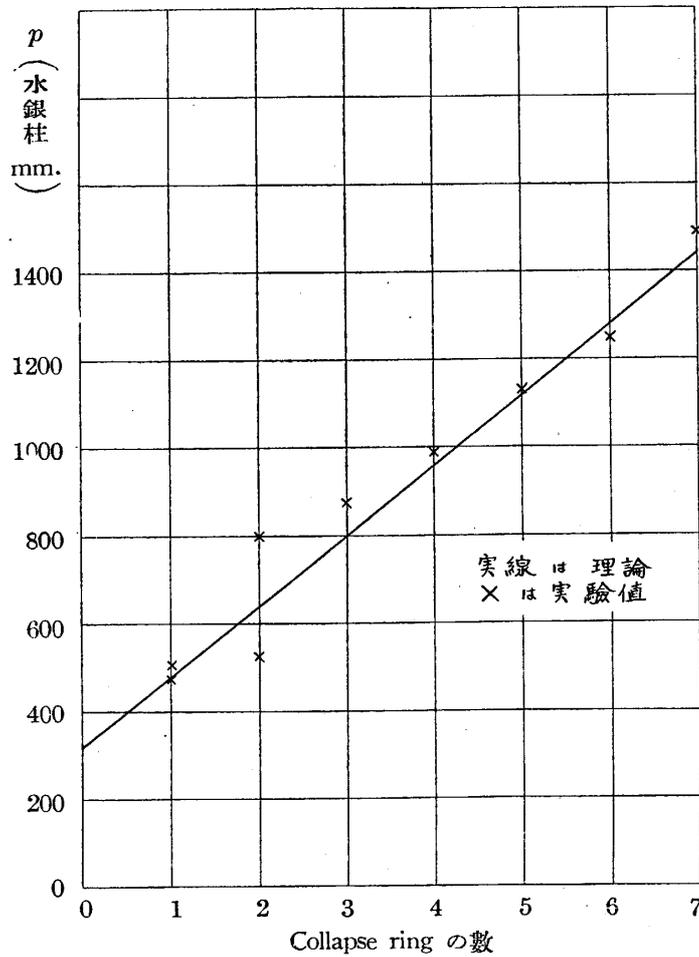


第一圖

第二表

ring の数	$8448 H_n^3$	計算した $p$	実験の $p$	実験番號
1	301mm.	479 mm.	478mm.	57
1	„	„	505	59
2	462.5	640.5	799	58
2	„	„	528	60
3	624	802	874	46
4	784	962	992	47
5	946	1124	1132	48
6	1107	1285	1250	51
7	1268	1446	1493	50

計算した  $p$  と実験した  $p$  とを ring の数に對して plot すれば第二圖の通りである。



第二圖

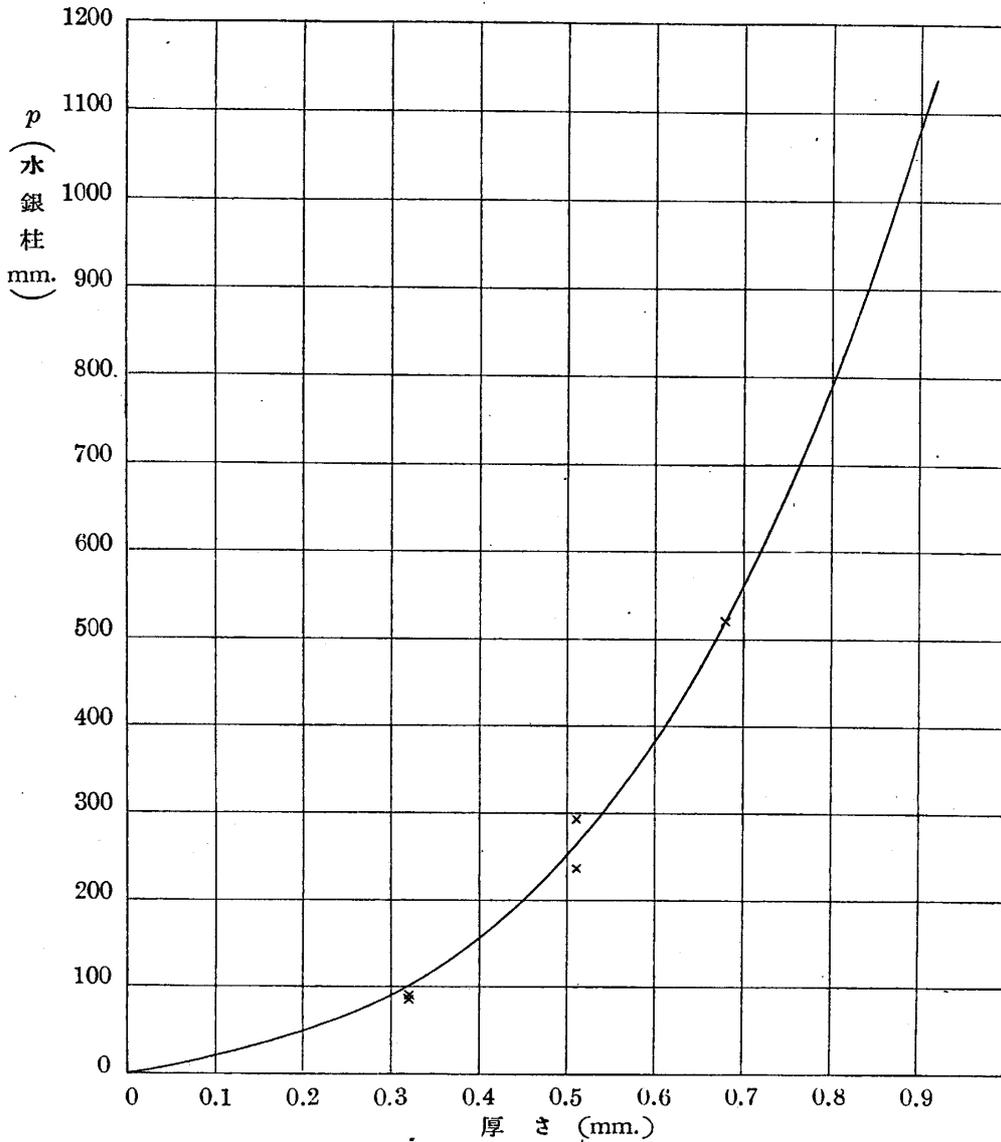
第二の實驗では Young's Modulus  $1.5 \times 10^{12}$  dynes/cm<sup>2</sup> の鐵板を用ひ厚さ 0.32 mm., 0.51 mm., 0.68 mm. の三種に就て實驗した。其結果は第三表に示す通りである。

第三表

實驗番號	厚さ mm.	p. mm. (Hg)
11	0.32	90.2
27	0.32	86.2
1	0.51	237
5	0.51	294
8	0.68	521

之を圖示すれば第三圖の通りであつて實驗式は

$$p=10024h^3+384h$$



第三圖

次に  $2h=0.32$  mm. の壁に厚さ  $0.32$  mm.,  $3.5\text{mm.} \times 3.5\text{mm.}$  の大きさの collapse ring を附けた場合の  
 実験値

$$p=10024H_n^3+384h$$

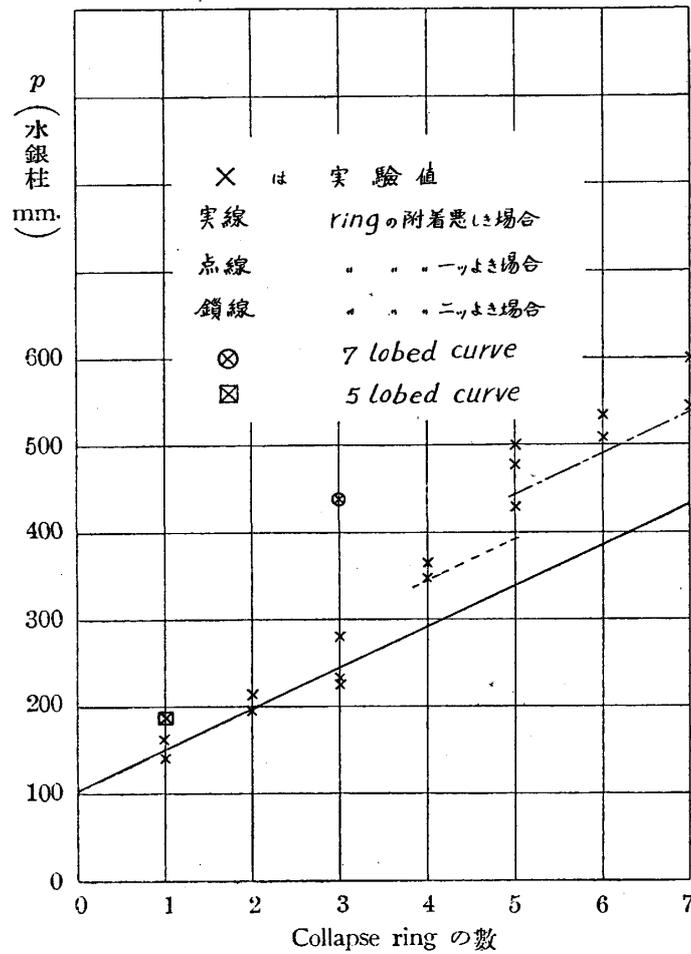
から計算した  $p$  を示せば第四表の通りである。此場合 collapse ring の附着が悪かつたから  $H_n$  を計算する場合には ring の断面の慣性能率は壁ご別に計算した。

第四表

ring の数	$10024H_n^3$	$p$ (計算)	$p$ (実験)	実験番號
1	88.1mm.	149.6mm.	186	15
1	〃	〃	164	19
1	〃	〃	144	28

ring の数	$10024H_n^3$	$p$ (計算)	$p$ (実験)	実験番号
2	135.2	196.7	197	12
2	"	"	214	20
3	182.3	243.8	233	13
3	"	"	440	16
3	"	"	283	21
3	"	"	228	35
4	229.7	291.2	348	14
4	"	"	365	22
5	276.5	338.0	479	17
5	"	"	430	29
5	"	"	502	36
6	324.0	385.5	512	18
6	"	"	536	30
7	370.5	432.0	600	43
7	"	"	54b	44

計算した  $p$  と実験した  $p$  とを ring の数に對して plot すれば第四圖の通りである。



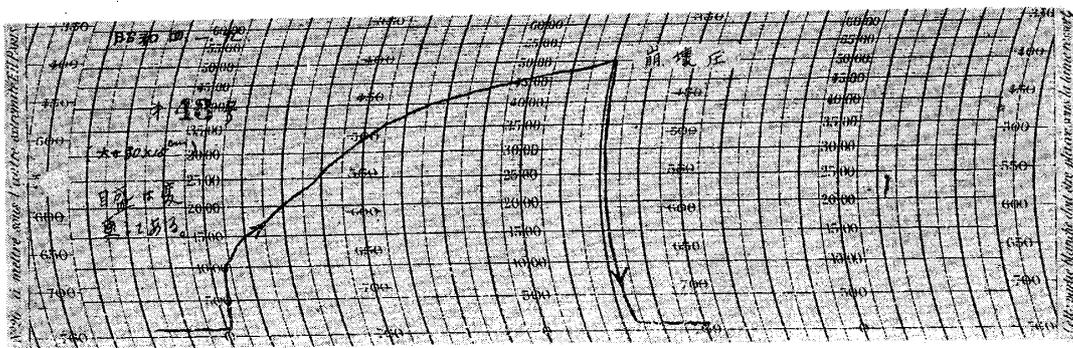
第四圖

Ring の数が 3 までは計算と実験と可成よく一致するが、それ以上では大分異なる。それで今一個の ring がよく密着して居るものとして計算すれば點線の様になり二個の ring が密着して居るものとして計算すれば鎖線の様になり幾分実験値に近くなる。それ故 ring が附着する具合によつて如此差異が生ずるものも考へるも大なる誤はない様である。

此實驗に於て 15 號及び 16 號では  $p$  が大變大になつて居るが之は後に附けた寫眞で見る様に ring の部分が變形しないで 15 號では 5 lobed curve に 16 號では 7-lobed curve に断面がなつたからである。Ring のない時及び ring が弱くて壁と共に變形する場合には此位の dimension のものでは 3 lobed curve になるのは(2)式から直ちに解るここである。然し ring が變形しない時は 15 號の如く ring が一つの場合は 5 lobed curve に 16 號の如く ring が三つある場合には 7 lobed curve になることも (2)式から解る。16 號の寫眞で ring と ring との間は 7 lobed curve になつて居るが全體として崩壊して ring の部分も變形して居るのは、ring の部分が變形しないで 7 lobed curve になつたものに尙外壓を加へたからである。此實驗で見るに此位の ring が丁度變形するこしないこの界目にあるこが解る。之を見る爲に壁を同一状態にして一つの ring をつけた場合 ring の強さを變へて實驗して見た。其結果は次表に示す通りである。

實驗番號	壁の厚さ	ring の断面	$p$	全體として崩壊した $p$
52	0.32mm.	厚さ 0.32mm. 3.5mm. × 3.5mm. の angle	152mm.	152mm.
53	〃	厚さ 〃 4.5 × 4.5 〃	170	391
54	〃	厚さ 〃 6.0 × 6.0 〃	187	388

53 號 54 號は ring の所が變形しないで 5 lobed curve になつたのであるが之に尙外壓を加へて見たら 16 號の場合と同様に全體として崩壊した。53 號の場合全體として崩壊する時は計算上  $p=620$  mm. になるが實驗では 391 mm. になつて居る。之は一度 5 lobed curve になつた後に崩壊したのであるから計算と違ふのは當然である。此様に ring が共に變形する場合の計算が ring が變形しない場合の計算より  $p$  が大になれば  $p$  が小なる方の状態に崩壊するこが解る。圓筒は其一部が崩壊すれば役に立なくなるのであるから collapse ring を非常に強くするも大なる利益がない。寧ろ弱いものを澤山用ひる方が有利である。



第五圖

實驗の仕方は collapsing pressure が一氣壓以下の時は中の氣壓を下げ、一氣壓以上になる時は高壓槽に入れて一定外壓を加へた後中の氣壓を下けた。collapse を起す時の氣壓の變り方は第五圖に示す通りであつて急激に變る點で collapse が起るのである。

此研究に際して田丸教授の御懇切な御指導を受けたことを深く感謝する。又實驗に際して福田一紀君の御助力を得たことを併せて感謝する。

