

二次流れをともしう管内流熱伝達のアナロジー

石垣 博^{*1}

Analogy of Convective Heat Transfer between Developing Laminar Secondary Flows in Pipes

by

Hirosaki ISHIGAKI¹

National Aerospace Laboratory, Kakuda Research Center.

ABSTRACT

Analogy of convective heat transfer between developing laminar flows in curved pipes and orthogonally rotating pipes is described through similarity arguments and numerical computation. Governing parameters and a dimensionless axial distance are properly used for the respective flows. When the second parameter is large in each flow, it is shown that the temperature profiles and the Nusselt numbers of the two flows are approximately similar for the same values of the governing parameter, Prandtl number and the dimensionless axial distance.

1. 緒 言

遠心力あるいはコリオリの力が作用する管内流の熱伝達は多くの工業機器、たとえば熱交換器や回転機械の冷却系などに関連して重要である。断面内に体積力が作用する管内流は一般に二次流れを有し、複雑な三次元流動になる。管入口から完全に発達するまでの助走区間において、このような流れと熱伝達がどのような発達特性をもつかを調べることは基礎的、実用的に重要な課題である。

著者は管の曲率による遠心力、管の回転による遠心力とコリオリの力、管の加熱（冷却）による浮力などの体積力が作用する管内流の流動伝熱特性を体系的、統一的に記述すべく、系統的な研究を進めている。そのなかにあつて、静止曲管と直交回転直管の二つの管内流のあいだに成立するアナロジー（定量的相似性）は一つの中核的な部分をなすものである。著者はこれら二つの流れの完全発達流について層流⁽¹⁾⁻⁽³⁾、乱流^{(4),(5)}ともにアナロジーが成立し、特性数の同じ値に対して二つの流れの管摩擦係数やヌッセルト数が一致することを示した。さらに層流助走区間の流れでは軸方向無次元距離を導き、この無次元距離を用いて二つの流れの発達特性も相似になることを示した⁽⁶⁾。本報告はこれらの研究結果をふまえながら、層流助走区間における熱伝達のアナロジーとその発達特性を明らかにしたものである。

標記二つの助走区間熱伝達に関する既存の研究はすべて個別に行われ、両者の関連を論じた研究は見あたらない。速度場と温度場が同時に発達する曲

管内助走流の熱伝達はPatankar, Pratap & Spalding⁽⁷⁾により、直交回転円管内助走流の同様の問題はSkidadaressis & Spalding⁽⁸⁾により数値的に解析されている。なお既存の文献については曲管流の熱伝達についてのNandakumar & Masliyah⁽⁹⁾、回転管流の熱伝達についてのYang, Fann & Kim⁽¹⁰⁾のレビューがあるので、これらを参照して頂きたい。

これら二つの管内流の速度場、温度場をあつかった文献を見ると、助走流に関する計算あるいは実験の結果は、横軸に z/d （または曲管の場合には管の曲り角 ϕ ）をとって表示されている。しかし z/d は流れの相似性とは無関係であるので、このような変数で一般的な特性を表示することは不可能である。またこれら管内流の熱伝達はプラントル数 Pr により著しく影響をうけるが、 Pr の効果を体系的に論じた研究は見あたらない。

これまでの著者の研究を総合すれば標記二つの層流については次のことがいえる。(1) 曲管流はディーン数 K_{LC} と曲率パラメータ λ 、直交回転管内流は無次元数 K_{LR} とロスビー数 Ro の各2つの特性数により支配される。(2) λ と Ro がともに大きければこれらの影響は無視でき、このときに両者のアナロジーが成立する^{(1),(2)}。(3) 助走区間では軸方向無次元距離 Z_C と Z_R をそれぞれ用いれば二つの流れのアナロジーが記述でき、 $Z_C = Z_R$ の位置で $K_{LC} = K_{LR}$ の流れ構造や摩擦係数は大略一致する⁽⁶⁾。(4) 完全発達流の熱伝達はさらに Pr により大きく異なり、 $Pr \ll 1$ では温度場におよぼす二次流れの影響は無視でき、逆に $Pr \gg 1$ では二次流れの影響が著しい⁽³⁾。

本報告では標記二つの助走流熱伝達のあいだにも

*1 航空宇宙技術研究所角田宇宙推進技術研究センター

アナロジーが成立することを示し、 Pr により温度場の発達の様相がどのようになるかを明らかにする。熱的境界条件は軸方向熱流束一定、周方向壁温一定とし、速度場と温度場は同時に発達するものとする。入口速度分布は一樣流入の場合を主として示すが、放物流入の場合の温度場の発達の様子を示して一樣流入の場合と比較する。なお速度場の結果については簡単に述べるので、詳しくは文献(6)を参照していただきたい。

2. 主な記号

K_L	: K_{LC}, K_{LR} の総称
K_{LC}	: 曲管の層流特性数 (ディーン数) $= Re \sqrt{\lambda}$
K_{LR}	: 直交回転管の層流特性数 $= Re \sqrt{Ro}$
Nu_H	: 周平均ヌッセルト数 $= q_w d / [(T_w - T_b)k]$
Pr	: プラントル数 $= \nu / \alpha$
q_w	: 壁熱流束
R	: 曲管の曲率半径
Re	: レイノルズ数 $= u_m d / \nu$
Ro	: ロスビー数 $= u_m / \Omega d$
T_w	: 壁面温度
T_b	: 混合平均温度
u_m	: 管内平均流速
Z	: Z_C, Z_R の総称
Z_C	: 曲管の軸方向無次元距離 $= R\phi / (d\sqrt{\lambda})$
Z_R	: 直交回転管の軸方向無次元距離 $= z / (d\sqrt{Ro})$
λ	: 曲管の曲率パラメータ $= R' / d$
Ω	: 直交回転管の回転角速度

3. 基礎方程式と数値解法

図1に示すように曲管に固定して円環座標 (r, θ, ϕ) をとり、速度成分を (u, v, w) とする。ここで λ が十分に大きい ($\lambda \gtrsim 8$) と仮定すれば、管軸距離 $z = R\phi$ として方程式系は円筒座標 (r, θ, z) に帰着する。また直交回転管についても図2に示すように直管に固定して円筒座標 (r, θ, z) をとる。流れは定常、非圧縮性層流であり、物性値は一定とする。管壁は軸方向に熱流束一定、周方向に温度一定で加熱されているものとする。

文献(6)の解析と同様に、管内の流れは放物形の流れであると仮定する。流れの方程式が放物化できる条件は一方 (軸方向) に支配的な流れ (主流) が存在し、その方向に流れのはく離がなく拡散が無視できること、および圧力が主流方向と断面方向、すなわち \bar{p} と p に分離できること、である。この仮定の検討は文献(6)を見ていただきたいが、結局放物化の条件は $\lambda, Ro \gg 1$ に帰着し、これはアナロジーが成立する条件に合致する。

このとき、たとえば曲管内の流れは次のような連続式と放物化Navier-Stokes式により記述される。

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (ru) + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad \dots \dots \dots (1)$$

$$u \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{v}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} + w \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{v^2}{r} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} + \frac{u^2 \cos \theta}{R}$$

$$+ \nu \left(\nabla^2 u - \frac{u}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial v}{\partial \theta} \right) \quad \dots \dots \dots (2)$$

$$u \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{v}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} + w \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{uv}{r} = -\frac{1}{\rho r} \frac{\partial p}{\partial \theta} - \frac{u^2 \sin \theta}{R} + \nu \left(\nabla^2 v - \frac{v}{r^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) \quad \dots \dots \dots (3)$$

$$u \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{v}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} + w \frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \nabla^2 w \quad \dots \dots \dots (4)$$

ここに ρ は密度、 ν は動粘性係数である。直交回転管の式については文献(6)を参照していただきたい。エネルギー式は二つの流れに対して共通に次式で与えられる。

$$u \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{v}{r} \frac{\partial T}{\partial \theta} + w \frac{\partial T}{\partial z} = \alpha \nabla^2 T \quad \dots \dots \dots (5)$$

ここで α は温度拡散率、ラプラシアン ∇^2 は

$$\nabla^2 = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}$$

である。

はじめ x 軸についての対称性は仮定せず、全断面についての予備計算を行ったが、計算結果はすべて x 軸について対称性を示した。そこで本計算では対称性を仮定し、半断面について計算した。したがって境界条件は次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} r = d/2 : u = v = w = 0, T = T_w, \\ \theta = 0, \pi : \frac{\partial u}{\partial \theta} = v = \frac{\partial w}{\partial \theta} = \frac{\partial T}{\partial \theta} = 0 \end{aligned} \right\} \quad \dots \dots \dots (6)$$

数値計算プログラムはPatankarの著書⁽¹¹⁾を参考にして作成したもので、著者の一連の研究に用いているものである。有限体積法、スタガード格子、ベキ乗スキーム、SIMPLE法によっている。格子点は r 方向42、周方向37点とり、 θ 方向はほぼ等間隔、 r 方向は壁近傍で密な不等間隔 (壁と隣接格子点との距離は $0.005 \times$ 管半径で、壁からの距離 $0.1 \times$ 管半径のあいだに9格子点入っている) にとった。 Z 方向の刻み Δz は管入口で $\Delta Z = 0.001$ として $Z = 1$ に至るまで各ステップごとに1%ずつ増加させ、 $Z > 1$ では一定とした。管の入口から $Z = 15$ までの総ステップ数は約1,500になる。

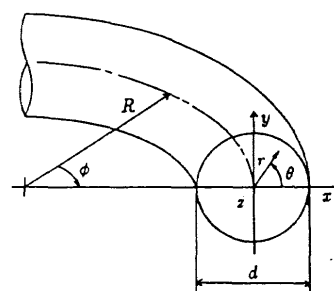


Fig.1 Configuration of curved pipe flow

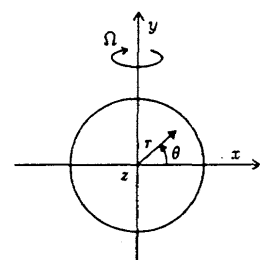


Fig.2 Configuration of an orthogonally rotating pipe flow

4. 相似性の考察

これらの流れでは管断面内に発生する二次流れが熱伝達を増加させるが、増加の程度は Pr によって大きく異なる。著者は文献(3)で完全発達温度場の Pr 依存性を相似性の議論により考察し、その推論を計算結果により検証した。本報でも計算結果を示すまでに、助走区間の温度場の相似性を簡単に述べる。

著者の相似理論で用いている無次元変換は、軸方向代表速度 w_m 、断面内の代表速度を U_S として、一般的に次のように表される。

$$\left. \begin{aligned} \tilde{u} &= \frac{u}{U_S}, & \tilde{v} &= \frac{v}{U_S}, & \tilde{w} &= \frac{w}{w_m} \\ \tilde{T} &= \frac{T - T_e}{T_S - T_e}, & \tilde{r} &= \frac{r}{d}, & \tilde{z} &= \frac{z}{Z_S} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (7)$$

ここに T_e は入口温度であり、管壁熱流束が軸方向に一定のときの代表温度は $T_S = q_w d / k$ 、曲管と回転管についての断面内代表速度 U_S は $w_m / \sqrt{\lambda}$ と w_m / \sqrt{Ro} 、軸方向代表長さ Z_S は $d\sqrt{\lambda}$ と $d\sqrt{Ro}$ である⁽⁶⁾。これらを用いてエネルギー式(5)を無次元化すれば、次のようになる。

$$Pr \left(\tilde{u} \frac{\partial \tilde{T}}{\partial \tilde{r}} + \tilde{v} \frac{\partial \tilde{T}}{\partial \tilde{\theta}} + \tilde{w} \frac{\partial \tilde{T}}{\partial \tilde{z}} \right) = \frac{1}{K_L} \tilde{\nabla}^2 \tilde{T} \dots\dots\dots (8)$$

ここに

$$\tilde{\nabla}^2 = \frac{1}{\tilde{r}} \frac{\partial}{\partial \tilde{r}} \left(\tilde{r} \frac{\partial}{\partial \tilde{r}} \right) + \frac{1}{\tilde{r}^2} \frac{\partial^2}{\partial \tilde{\theta}^2}$$

である。速度場の無次元式は文献(6)を見て頂きたい。なお $\tilde{\nabla}^2$ で省略した $\partial^2 / \partial \tilde{z}^2$ を式(7)から評価すればわかるように、放物流れの近似が妥当性をもつ条件は λ あるいは $Ro \gg 1$ である⁽⁶⁾。この条件は二つの流れで λ あるいは Ro の影響が省略できる条件、すなわちアナロジーが成立する条件に合致する。

K_L は曲管流においては K_{LC} 、直交回転管流においては K_{LR} をあらわし、 U_S を代表速度とするそれぞれの流れの断面内レイノルズ数に相当するから、 K_L が小のときは粘性流、 K_L が大のときは境界層流になる。また $\tilde{z} = Z$ は曲管流では Z_C 、直交回転管流では Z_R をあらわし、式(7)の Z_S は断面内の流れが U_S の速度で長さ d を移動する時間内に軸方向に速度 w_m で到達する距離を意味している⁽⁶⁾。なおこれまでの無次

元化、たとえば速度スケールに v/d を用いるなどの方式では(8)に相当する無次元式に K_L が全く現れない(たとえばKalb-Seader⁽¹²⁾など)。しかし温度場が K_L により支配されることは明白だから、このような無次元化は物理的に正当なものとはいえない。

式(8)から強制対流温度場は Pr によって著しく異なることがわかる。すなわち(i) $Pr \ll 1$ のときは左辺は非常に小さくなるので、温度場は二次流れの影響をうけない。(ii) $Pr \approx 1$ のときは式(8)は軸速度場の式と相似になるので、温度場は軸速度場に相似になる。(iii) $Pr \gg 1$ のときは左辺が非常に大きくなるので、二次流れの影響が支配的になり、コア内の温度分布は発達領域の二次流れ線に相似なパターンに漸近する。

5. 温度場の発達

ここでは二つの流れの温度場が各 Pr についてどのような変化をしながら完全発達温度場に漸近するか、また $K_{LC} = K_{LR} = K_L$ の二つの流れの温度パターンが $Z_C = Z_R = Z$ となる各位置でどの程度の定量的相似性を示すかを見る。

K_L が比較的小さい場合の例として、 $K_L = 100$ 、一様流入条件での無次元温度 $(T_w - T)/(T_w - T_b)$ の等高線を4種の $Pr (= 0.01, 0.7, 7, 100)$ について図3(b)-(e)に

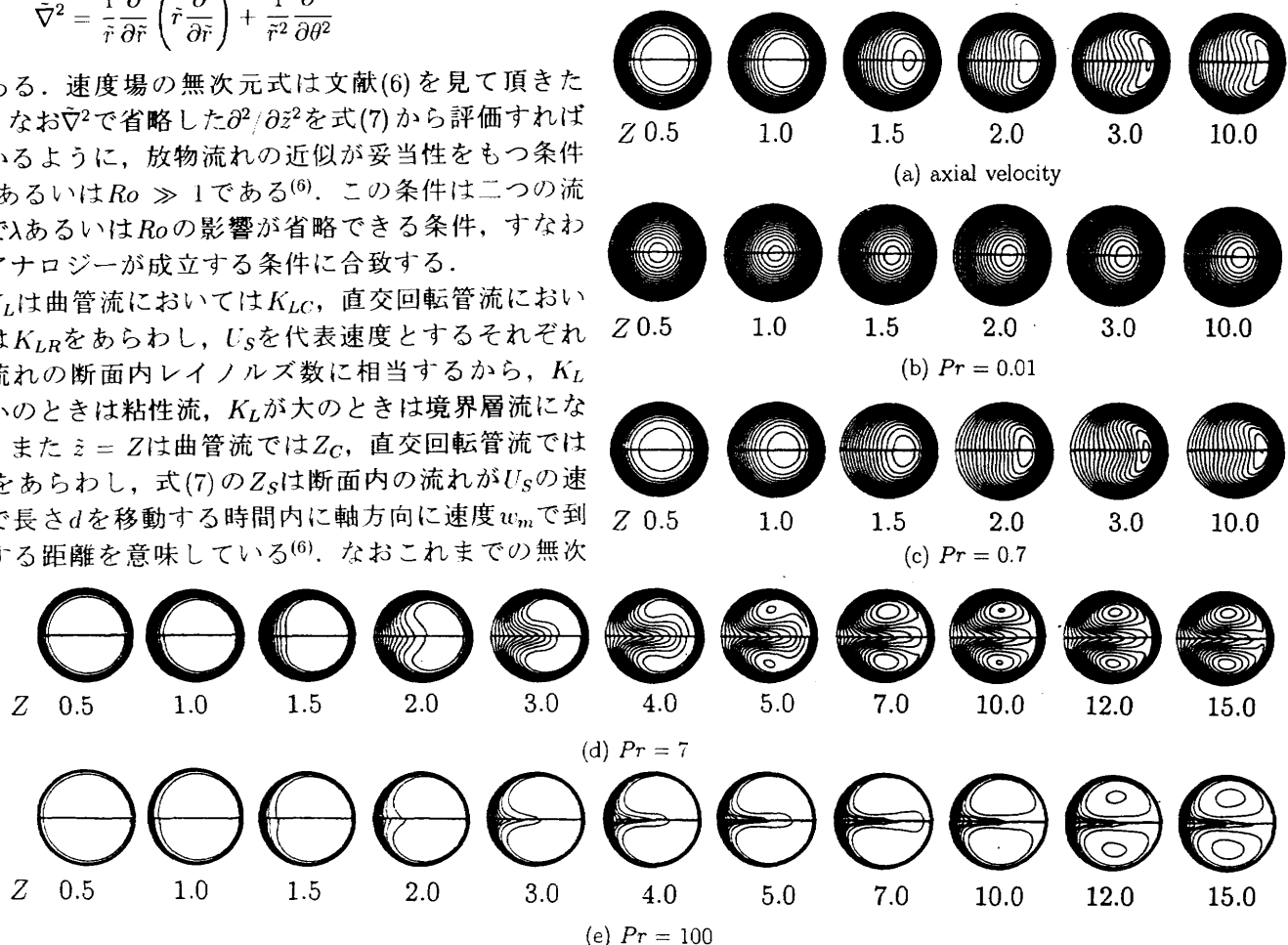


Fig.3 Development of contours for uniform entry flow of $K_L = 100$, $\lambda = 20$, $Ro = 50$: (a) dimensionless axial velocity u/w_m , (b)-(e) dimensionless temperature $(T_w - T)/(T_w - T_b)$. Upper half shows curved pipe flow and lower half shows rotating pipe flow.

示す。図の上半分が曲管流($\lambda = 20$)，下半分が直交回転管流($Ro = 50$)の計算結果である。図3(a)は軸速度 w/w_m の等高線であり，当然のことに Pr に無関係である。管入口部では壁に沿って粘性層が同心円状にまず発達し，次に二次流れが強くなって非粘性コア部は右側の壁に向かって移動しながら消滅する。

最初にこの軸速度と図3(c)の $Pr = 0.7$ の温度等高線を比較すると，両者は相似性を保ちながら発達していることがわかる。図3(b)の $Pr = 0.01$ の場合は温度場はほとんど二次流れの影響を受けず，管入口の近傍で急速に完全発達状態になって，以後最大値の位置がわずかに右側に移動するだけで，ほとんど変化しない。これは式(9)で左辺第1項をゼロとした熱伝導式の解に相当する。これとは逆に図3(d)，(e)の $Pr = 7, 100$ では，左側($\theta = 180^\circ$)から x 軸に沿って右側($\theta = 0^\circ$)に熱を輸送する二次流れが渦運動へと発達していく様子が温度をトレーサとして明瞭に察知できる。図3(b)–(e)のいずれの Pr においても，等温線の上下半部は各軸方向位置においてたがいにほぼ相似であり，温度場のアナロジーが成立していることがわかる。

つぎに一樣流入の $K_L = 500$ のときの等温線を図4に示す。 K_L が大きいこの場合の断面内流れは境界層的な性格をもつ。図4(a)の軸速度を見ると，流入部近くでの粘性層の発達は壁近傍に局限され，図3(a)の

ように粘性層が同心円状に非粘性コアを直接侵蝕することはない。非粘性コアは左側の逆旋み点から侵入する低速流体により侵蝕され，やがて消滅する。

$K_L = 500$ の温度場も定性的には $K_L = 100$ の場合と同じような発達をする。 $Pr = 0.01$ の場合には熱伝導が大きいため管入口近くですぐに発達しきった状態になり，後は二次流れの影響により最大値の位置がわずかに右側にずれる。 $Pr = 0.7$ では温度場は軸速度場と相似に発達する。 $Pr = 7, 100$ では二次流れの流線におくれをともなつて追従するように温度場が発達する。

温度場におよぼす流入条件の影響を見るために，図5に流体が直管完全発達流の放物分布をもつて流入する場合の温度場の変化を図5に示す。流体に作用する体積力の大きさが局所的に異なるために二次流れ，したがって軸速度は助走区間ではげしく変化し， $Pr = 0.7$ の温度場もこれと相似に激しく変化する。 $Pr = 0.01$ では温度場は速度場からほとんど独立だから，図4と同じになる。 $Pr = 7, 100$ では等温線は複雑な軸方向速度場を反映しながら完全発達領域の二次流線パターンに漸近する。

6. 熱伝達の発達特性

実用的に特に重要な $Pr = 0.7$ (空気) と 7 (水) について，一樣流入の場合のヌッセルト数の発達を示し，

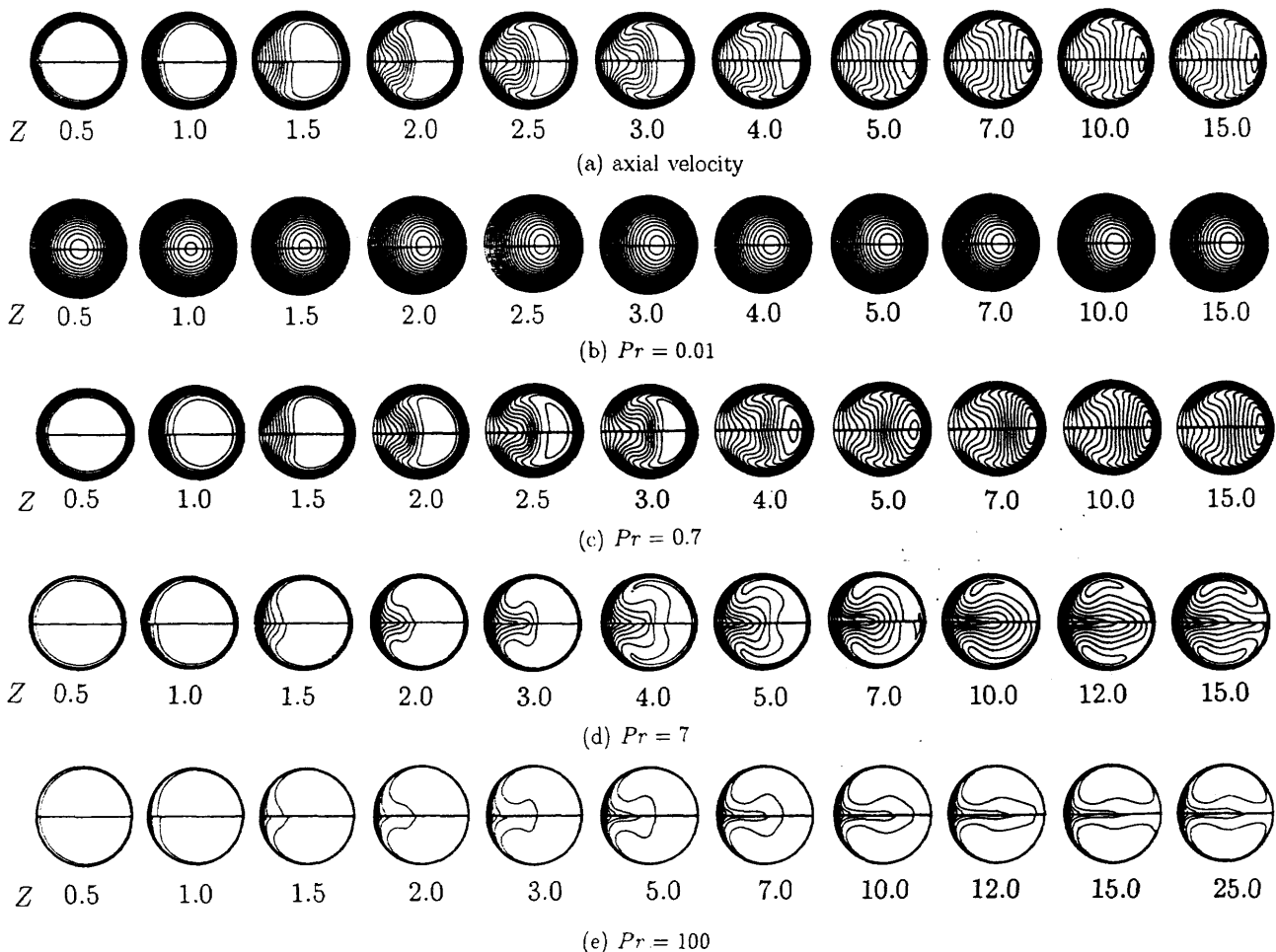


Fig.4 Development of contours for uniform entry flow of $K_L = 500$, $\lambda = 20$, $Ro = 50$: (a) dimensionless axial velocity w/w_m , (b)–(e) dimensionless temperature $(T_w - T)/(T_w - T_b)$. Upper half shows curved pipe flow and lower half shows rotating pipe flow.

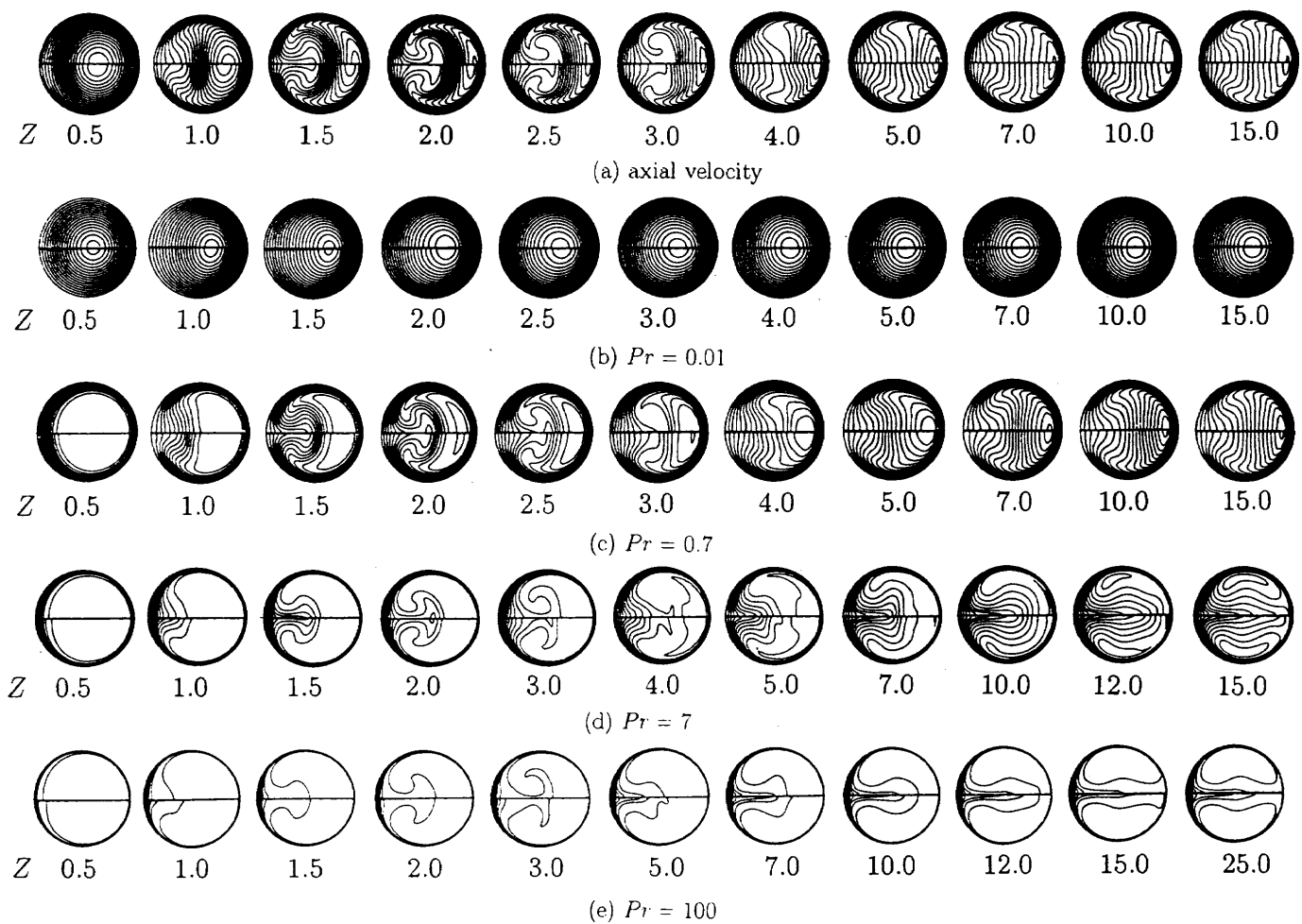


Fig.5 Development of contours for parabolic entry flow of $K_L = 500$, $\lambda = 20$, $Ro = 50$: (a) dimensionless axial velocity w/w_m , (b)-(e) dimensionless temperature $(T_w - T)/(T_w - T_b)$. Upper half shows curved pipe flow and lower half shows rotating pipe flow.

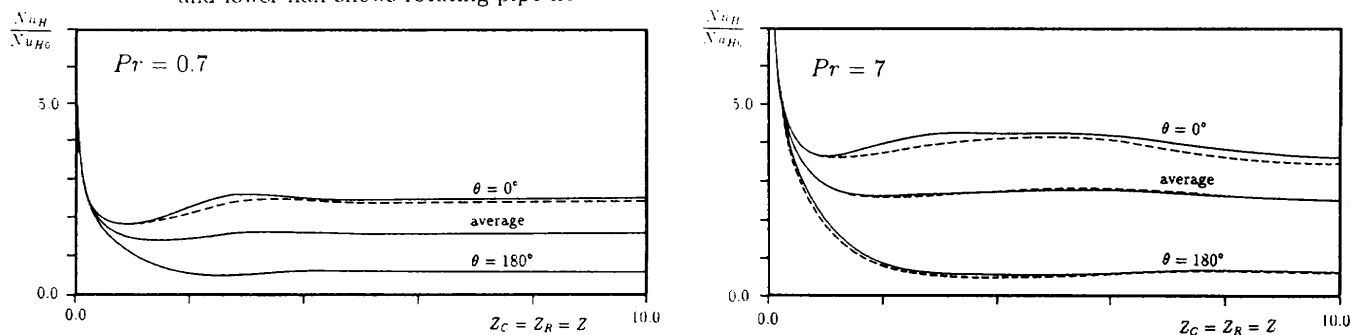


Fig.6 Axial variation of average and local Nusselt number of uniform entry flow for $K_L = 100$, $\lambda = 20$, $Ro = 50$.
— : curved pipe flow, - - - : rotating pipe flow.

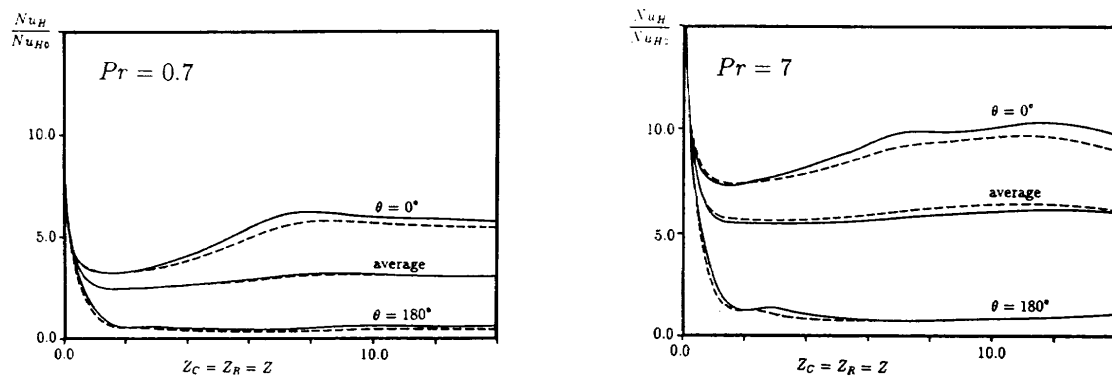


Fig.7 Axial variation of average and local Nusselt number of uniform entry flow for $K_L = 500$, $\lambda = 20$, $Ro = 50$.
— : curved pipe flow, - - - : rotating pipe flow.

二つの流れの熱伝達が定量的にどの程度の一致度を示すかを見る。図6は $K_L = 100$ の場合の周平均ヌッセルト数と $\theta = 0^\circ$ と 180° の局所ヌッセルト数を静止直管の値 $Nu_{H0} = 48/11$ で無次元化して示したもので、二次流れによる増加の度合がわかる。実線は曲管、破線は回転管の計算結果である。管入口近傍($Z < 0.5$)では熱伝導層が静止直管と同じく同心円状に発達するので、局所ヌッセルト数は一様に減少するが、二次流れの発生・発達にともない、局所ヌッセルト数は $\theta = 0^\circ$ の二次流れ淀み点では大きく、 $\theta = 180^\circ$ の逆淀み点では静止直管よりも小さくなる。二つの流れのヌッセルト数は特に $\theta = 0^\circ$ の局所値では若干のちがいを示しているが、平均値はほとんど一致している。図7は $K_L = 500$ の場合の計算結果であるが、この場合も同様の結果を示している。 Pr が大きくなると二つの流れの平均ヌッセルト数にも若干の差異が生じる。

7. 結言

遠心力が作用する曲円管とコリオリの力が作用する直交回転円管内の流れのアナロジーについての著者の研究の一環として、本報では助走区間の層流熱伝達の発達を相似性の考察と数値計算結果により論じた。得られた主な結果を要約すれば、次のようになる。

- (1) 前報での力学的相似性の研究成果をふまえて熱的相似性を議論し、その結果にもとづいて λ と Ro がともに大きいときに $K_{LC} = K_{LR}$ かつ Pr が等しければ $Z_C = Z_R$ の位置で二つの流れの温度場がほとんど同一の挙動を示すことを $Pr = 0.01, 0.7, 7, 100$ についての無次元温度パターンの計算結果により示した。
- (2) $Pr = 0.7$ と7の平均および局所ヌッセルト数が下流方向にどのように変化するかを $K_L = 100$ と500について示し、二つの流れの値が各軸方向無次元位置で近似的に一致することを示した。
- (3) これらの熱伝達特性におよぼす Pr の影響を速度場、温度場の構造と関係づけながら明らかにした。すなわち (i) $Pr \ll 1$ のときは二次流れの影響が無視できて静止直管の温度場に類似すること、(ii) $Pr \approx 1$ の場合は軸速度場と相似に温度場が発達すること、(iii) $Pr \gg 1$ の場合は二次流れの影響を強くうけながら発達し、二次流れ線のパターンに漸近すること、などを示した。

引用文献

- (1) 石垣博, 機論, **58**-550, B(1992), 1661-1667.
- (2) Ishigaki, H., J. Fluid Mech., **268**(1994), 133-145.
- (3) 石垣博, 機論, **61**-585, B(1995), 1782-1789.
- (4) 石垣博, 機論, **60**-576, B(1994), 2736-2741.
- (5) Ishigaki, H., J. Fluid Mech. **307**(1996), 1-10.
- (6) 石垣博, 機論, **59**-561, B(1993), 1486-1493.
- (7) Patankar, S. V., Pratap, V. S. and Spalding, D. B., J. Fluid Mech. **62**(1974), 539-551.
- (8) Skiadaressis, D. and Spalding, D. B., Imperial College Heat Transfer Report, HTS/77/3 (1997), 1.
- (9) Nandakumar, K. and Masliyah, J. H., Advances in transport processes, 4 (1986), 49-112, John Wiley, & Sons.
- (10) Yang, W. J., Fann, S. and Kim, J. H., Apple. Mech. Rev. **47** (1994), 367-396.
- (11) Patankar, S. V., Numerical Heat Transfer and Fluid Flow. (1980). 113-137. Hemisphere.
- (12) Kalb, C. E. and Seader, J. D., Int. J. Heat Mass T., **15** (1972), 801-817.