

ナビエストークス方程式による二次元翼まわりの 遷音速流の数値解析

汪 翼 雲* 藤 原 俊 隆**

Numerical Analysis of Transonic Flow around Two-Dimensional Airfoil by Solving Navier-Stokes Equations

Yi-Yun WANG and Toshi FUJIWARA

Dept. of Aeronautical Engineering, Nagoya University

(Yi-Yun Wang: On leave from Beijing Aerodynamics Research Laboratory, China)

ABSTRACT

An effective finite-difference scheme for solving full compressible Navier-Stokes equations was initiated by Beam and Warming. The purpose of this paper is to develop that technique and apply it to the calculation of a typical subsonic or transonic, inviscid or viscous steady flow. We almost identically follow the Beam-Warming technique that may be summarized into the following three characteristics: a) Delta-form approximate factorization algorithm, b) Implicit three-level scheme. c) The cross derivative viscous terms were explicitly replaced by the values of previous time.

First, the strong conservation-law form of the Navier-Stokes equations is written in Cartesian coordinates, and then transformed into a general grid system. Following the Beam-Warming difference scheme, we generally adopt the parameter combination $\delta = 1/2$ and $\theta = 1$. After introducing spatial factorization, second-order dissipative terms are added to the left-hand side, while fourth-order terms are added to the right-hand side; the fourth-order smoothing terms are changed to second-order terms at points adjacent to the boundaries.

The numerical computations were carried out only for a typical NACA 0012 airfoil. The grid system used is a C-type, where 51 points are distributed uniformly over the airfoil surface with identical arc length. The lines of constant ξ consist of two parts: One part of those emanating from the airfoil surface points is the solution of the Laplace equation and the others are parabolas. The distribution of points on wake cut and in the η -direction is exponential.

The calculations start from uniform free-stream variables throughout the flow field. The boundary conditions in the far field are free-stream. The following four cases are

* 北京空気動力研究所より研修生として在学中

** 名古屋大学工学部

calculated: a) $M_\infty = 0.63$ and $\alpha = 0$, causing an entirely subsonic flow. b) $M_\infty = 0.63$ and $\alpha = 2$ degrees, the highest velocity of upper surface being close to sonic. c) $M_\infty = 0.75$ and $\alpha = 0$, when supersonic regions appear but there are no shock waves. The flow is supersonic. d) $M_\infty = 0.75$ and $\alpha = 2$ degrees, generating a shock wave over the upper flow field. The flow is transonic in the case of inviscid calculations. Viscous calculations, on the other hand, show no shock waves, while flow separation on the upper surface caused by the angle of attack is conspicuous.

1. はじめに

BeamとWarmingが1978年に陰的差分法を考案して以来¹⁾, ナビエ・ストークス方程式が完全な形で解かれるようになった。圧縮性のある定常流については、どの様なマッハ数の範囲に対しても、粘性を考慮した流れの様子が定量的に得られるから、航空機の設計に測り知れない便宜を与える可能性を持つ。方法的には未だ複雑かつ計算時間を長く要するが、BW法により計算された解は他の色々な近似解と比較するための基準と見做されている。本研究ではBW法を殆んどそのまま用いて、具体的に計算の詳細を明らかにし、問題の定式化を定量的に分り易く示し、典型的な翼型まわりの流れを求めるのに応用する。

ここでBeam-Warming法の特徴は次の三点に要約されることを強調しておく。

- デルタ形式の近似因数分解アルゴリズムを用いる。
- 陰的な三段階差分スキーム。
- 交差微分形の粘性項は、過去の時刻における値によって陽的に表示される。以下においては、なるべく式を具体的に示しながら説明することにする。

2. 基本方程式の変換

デカルト座標を用いて圧縮性ナビエ・ストークス方程式を完全に近い保存形で表示し、無次元量を用いると次の様になる。

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F(U)}{\partial x} + \frac{\partial G(U)}{\partial y} = \frac{1}{Re} \left[\frac{\partial V_1(U, U_x)}{\partial x} \right. \\ \left. + \frac{\partial V_2(U, U_y)}{\partial x} + \frac{\partial W_1(U, U_x)}{\partial y} + \frac{\partial W_2(U, U_y)}{\partial y} \right] \end{aligned} \quad (1)$$

但しここで、

$$\begin{aligned} U = \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ e \end{bmatrix}, \quad F = \begin{bmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ \rho u v \\ (e+p)u \end{bmatrix}, \quad G = \begin{bmatrix} \rho v \\ \rho u v \\ \rho v^2 + p \\ (e+p)v \end{bmatrix}, \\ V_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ (\lambda+2\mu)u_x \\ \mu v_x \\ \mu v u_x + (\lambda+2\mu)u u_x + k T_x \end{bmatrix}, \quad V_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ \lambda v_y \\ \mu u_y \\ \mu v u_y + \lambda u v_y \end{bmatrix}, \\ W_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ \mu v_x \\ \lambda u_x \\ \mu u v_x + \lambda v u_x \end{bmatrix}, \quad W_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ \mu u_y \\ (\lambda+2\mu)v_y \\ \mu u u_y + (\lambda+2\mu)v v_y + k T_y \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (2)$$

$$p = (r-1)[e - \rho(u^2 + v^2)/2], \quad (3)$$

$$T = p / (r-1)\rho \quad (4)$$

(1)式は次に定義される ξ, η を用いて (x, y, t) から (ξ, η, τ) 系に変換される。ここで

$$\xi = (x, y), \quad \eta = \eta(x, y), \quad \tau = t \quad (5)$$

は新しい座標系であり、物体と境界における条件を満たす格子系である。これらによって(1)式は

$$\begin{aligned} \frac{\partial \hat{U}}{\partial \tau} + \frac{\partial \hat{F}}{\partial \xi} + \frac{\partial \hat{G}}{\partial \eta} = \frac{1}{Re} \left[\frac{\partial \hat{V}_1(U, U_\xi)}{\partial \xi} + \frac{\partial \hat{V}_2(U, U_\eta)}{\partial \xi} \right. \\ \left. + \frac{\partial \hat{W}_1(U, U_\xi)}{\partial \eta} + \frac{\partial \hat{W}_2(U, U_\eta)}{\partial \eta} \right], \end{aligned} \quad (6)$$

と書換えられる。式中の記号は次の様に定義される。

$$\begin{aligned} J^{-1} &= x_\xi y_\eta - x_\eta y_\xi, \\ \hat{U} &= J^{-1} U, \\ \hat{F} &= y_\eta F - x_\eta G, \\ \hat{G} &= -y_\xi F + x_\xi G, \\ \hat{V}_1(U, U_\xi) &= J [y_\eta^2 V_1(U, U_\xi) - x_\eta y_\eta V_2(U, U_\xi) \\ &\quad - x_\eta y_\eta W_1(U, U_\xi) + x_\eta^2 W_2(U, U_\xi)], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\hat{V}_2(U, U_\eta) &= J[-y_\xi y_\eta V_1(U, U_\eta) + x_\xi y_\eta V_2(U, U_\eta) \\
&\quad + x_\eta y_\xi W_1(U, U_\eta) - x_\xi x_\eta W_2(U, U_\eta)], \\
\hat{W}_1(U, U_\xi) &= J[-y_\xi y_\eta V_1(U, U_\xi) + x_\eta y_\xi V_2(U, U_\xi) \\
&\quad + x_\xi y_\eta W_1(U, U_\xi) - x_\xi x_\eta W_2(U, U_\xi)], \\
\hat{W}_2(U, U_\eta) &= J[y_\xi^2 V_1(U, U_\eta) - x_\xi y_\xi V_2(U, U_\eta) \\
&\quad - x_\xi y_\xi W_1(U, U_\eta) + x_\xi^2 W_2(U, U_\eta)].
\end{aligned} \quad (7)$$

3. 差分方程式

変換された基本方程式(6)に対し、次の Beam-Warming 差分式を用いる。

$$\begin{aligned}
\Delta \hat{U}^n &= \frac{\theta \Delta \tau}{1+\delta} \frac{\partial}{\partial \tau} \Delta \hat{U}^n + \frac{\Delta \tau}{1+\delta} \frac{\partial}{\partial \tau} \hat{U}^n + \frac{\delta}{1+\delta} \Delta \hat{U}^{n-1} \\
&\quad + o[(\theta - \frac{1}{2} - \delta) \Delta \tau^2 + \Delta \tau^3].
\end{aligned} \quad (8)$$

$\delta > 0$ で $\theta > 0$ のとき、この差分スキームは3段で陰的である。このスキームが無条件安定で2次精度を持つ様に、 $\delta = 1/2$ 及び $\theta = 1$ と選ばれる。(6)式を(8)式に代入して次の式が得られる。

$$\begin{aligned}
\Delta \hat{U}^n &= \frac{\theta \Delta \tau}{1+\delta} \left[\frac{\partial}{\partial \xi} (-\hat{F}^n + \frac{\Delta \hat{V}_1^n + \Delta \hat{V}_2^n}{Re}) \right. \\
&\quad \left. + \frac{\partial}{\partial \eta} (-\hat{G}^n + \frac{\Delta \hat{W}_1^n + \Delta \hat{W}_2^n}{Re}) \right] \\
&\quad + \frac{\Delta \tau}{1+\delta} \left[\frac{\partial}{\partial \xi} (-\hat{F}^n + \frac{\hat{V}_1^n + \hat{V}_2^n}{Re}) \right. \\
&\quad \left. + \frac{\partial}{\partial \eta} (-\hat{G}^n + \frac{\hat{W}_1^n + \hat{W}_2^n}{Re}) \right] + \frac{\delta}{1+\delta} \Delta \hat{U}^{n-1} \\
&\quad + o[(\theta - \frac{1}{2} - \delta) \Delta \tau^2 + \Delta \tau^3].
\end{aligned} \quad (9)$$

ここで次の様な Taylor 展開を導入する。

$$\begin{aligned}
\Delta \hat{F}^n &= \left(\frac{\partial \hat{F}}{\partial \hat{U}} \right)^n \Delta \hat{U}^n + o(\Delta \tau^2) = \hat{A}^n \Delta \hat{U}^n + o(\Delta \tau^2), \\
\Delta \hat{V}_1^n &= \left(\frac{\partial \hat{V}_1}{\partial \hat{U}} \right)^n \Delta \hat{U}^n + \left(\frac{\partial \hat{V}_1}{\partial u_\xi} \right)^n \Delta \hat{U}_\xi^n + o(\Delta \tau^2) \\
&= \hat{P}^n \Delta \hat{U}^n + \hat{Q}^n \Delta \hat{U}_\xi^n + o(\Delta \tau^2) \\
&= (\hat{P} - \hat{Q}_\xi)^n \Delta \hat{U}^n + \frac{\partial}{\partial \xi} (\hat{Q}^n \Delta \hat{U}^n) + o(\Delta \tau^2).
\end{aligned} \quad (10)$$

同様にして、

$$\Delta \hat{G}^n = \left(\frac{\partial \hat{G}}{\partial \hat{U}} \right)^n \Delta \hat{U}^n + o(\Delta \tau^2) = \hat{B}^n \Delta \hat{U}^n + o(\Delta \tau^2),$$

$$\begin{aligned}
\Delta \hat{W}_2^n &= \left(\frac{\partial \hat{W}_2}{\partial \hat{U}} \right)^n \Delta \hat{U}^n + \left(\frac{\partial \hat{W}_2}{\partial u_\eta} \right)^n \Delta \hat{U}_\eta^n + o(\Delta \tau^2) \\
&= \hat{R}^n \Delta \hat{U}^n + \hat{S}^n \Delta \hat{U}_\eta^n + o(\Delta \tau^2) \\
&= (\hat{R} - \hat{S}_\eta)^n \Delta \hat{U}^n + \frac{\partial}{\partial \eta} (\hat{S}^n \Delta \hat{U}^n) + o(\Delta \tau^2).
\end{aligned} \quad (11)$$

ここで $\hat{P} - \hat{Q}_\xi$ 及び $\hat{R} - \hat{S}_\eta$ は $\hat{\alpha} \mu_\tau + \hat{\beta} \mu_\xi + \hat{\gamma} \mu_\eta$ という形をしていることに注目しておく。亜音速又は遷音速領域では強い衝撃波は存在せず、温度勾配はどちらかといえば小さい。計算すれば簡単に分ることだが、これらの項は省略できる。

更に我々は次の様にオーダー見積りを行うことができる。

$$\begin{aligned}
\Delta \hat{V}_2^n &= \Delta \hat{V}_2^{n-1} + o(\Delta \tau^2), \\
\Delta \hat{W}_1^n &= \Delta \hat{W}_1^{n-1} + o(\Delta \tau^2).
\end{aligned} \quad (12)$$

これを用いると粘性項の交差微分から生じる困難、即ちコーナーにおいて4格子点が必要になるという困難を避けることができる。

近似式(10)~(12)を(9)式に導入し、空間微分項の因数分解を行なうと、最終的に我々は次の差分方程式を得る。

$$\begin{aligned}
&\{I + \frac{\theta \Delta \tau}{1+\delta} \left[\frac{\partial}{\partial \xi} \hat{A}^n - \frac{1}{Re} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \hat{Q}^n \right]\} \cdot \\
&\{I + \frac{\theta \Delta \tau}{1+\delta} \left[\frac{\partial}{\partial \eta} \hat{B}^n - \frac{1}{Re} \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \hat{S}^n \right]\} \Delta \hat{U}^n \\
&= \text{sign } \delta \cdot \frac{\theta \Delta \tau}{1+\delta} \frac{1}{Re} [\Delta \hat{V}_2^{n-1} + \Delta \hat{W}_1^{n-1}] \\
&\quad + \frac{\Delta \tau}{1+\delta} \left[\frac{\partial}{\partial \xi} (-\hat{F}^n + \frac{\hat{V}_1^n + \hat{V}_2^n}{Re}) \right. \\
&\quad \left. + \frac{\partial}{\partial \eta} (-\hat{G}^n + \frac{\hat{W}_1^n + \hat{W}_2^n}{Re}) \right] + \frac{\delta}{1+\delta} \Delta \hat{U}^{n-1} \\
&\quad + o[(\theta - \frac{1}{2} - \delta) \Delta \tau^2 + \Delta \tau^3]
\end{aligned} \quad (13)$$

4. 人工粘性項の付加

本計算だけでなく他の論文でも明らかにされているが、速やかに解に収束させ減衰をスピードアップさせるために人工粘性の項を付加する必要がある。文献2)に基いて、(13)式の左辺に2次の粘性項、右辺に4次の粘性項を付加することにする。

$$\begin{aligned}
\text{RHS} = & \text{sign } \delta \cdot \frac{\theta}{1+\delta} \frac{\Delta \tau}{Re} \left[\Delta \hat{V}_2^{n-1} + \Delta \hat{W}_1^{n-1} \right] \\
& + \frac{\Delta \tau}{1+\delta} \left[\frac{\partial}{\partial \xi} \left(-\hat{F}^n + \frac{\hat{V}_1^n + \hat{V}_2^n}{Re} \right) \right. \\
& \left. + \frac{\partial}{\partial \eta} \left(-\hat{G}^n + \frac{\hat{W}_1^n + \hat{W}_2^n}{Re} \right) \right] + \frac{\delta}{1+\delta} \Delta \hat{U}^{n-1} \\
& - \omega \Delta \tau J^{-1} \left[(\hat{V}_\xi \hat{V}_\xi)^2 + (\hat{V}_\eta \hat{V}_\eta)^2 \right] J \hat{U}^n,
\end{aligned} \quad (14)$$

$$\begin{aligned}
\left\{ I + \frac{\theta}{1+\delta} \frac{\Delta \tau}{Re} \left[\frac{\partial}{\partial \xi} \hat{A}^n - \frac{1}{Re} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \hat{Q}^n \right] \right. \\
\left. - \omega \Delta \tau J^{-1} \hat{V}_\xi \hat{V}_\xi J \right\} \Delta \hat{U}^* = \text{RHS},
\end{aligned} \quad (15)$$

$$\begin{aligned}
\left\{ I + \frac{\theta}{1+\delta} \frac{\Delta \tau}{Re} \left[\frac{\partial}{\partial \eta} \hat{B}^n - \frac{1}{Re} \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \hat{S}^n \right] \right. \\
\left. - \omega \Delta \tau J^{-1} \hat{V}_\eta \hat{V}_\eta J \right\} \Delta \hat{U}^n = \Delta \hat{U}^*,
\end{aligned} \quad (16)$$

$$U^{n+1} = U^n + J \Delta \hat{U}^n \quad (17)$$

線型安定性を調べることによって、人工粘性の係数 ω については次の不等式が成立たねばならないことが分る。

$$\omega \Delta \tau \leq (1+2\delta)/4(1+\delta)$$

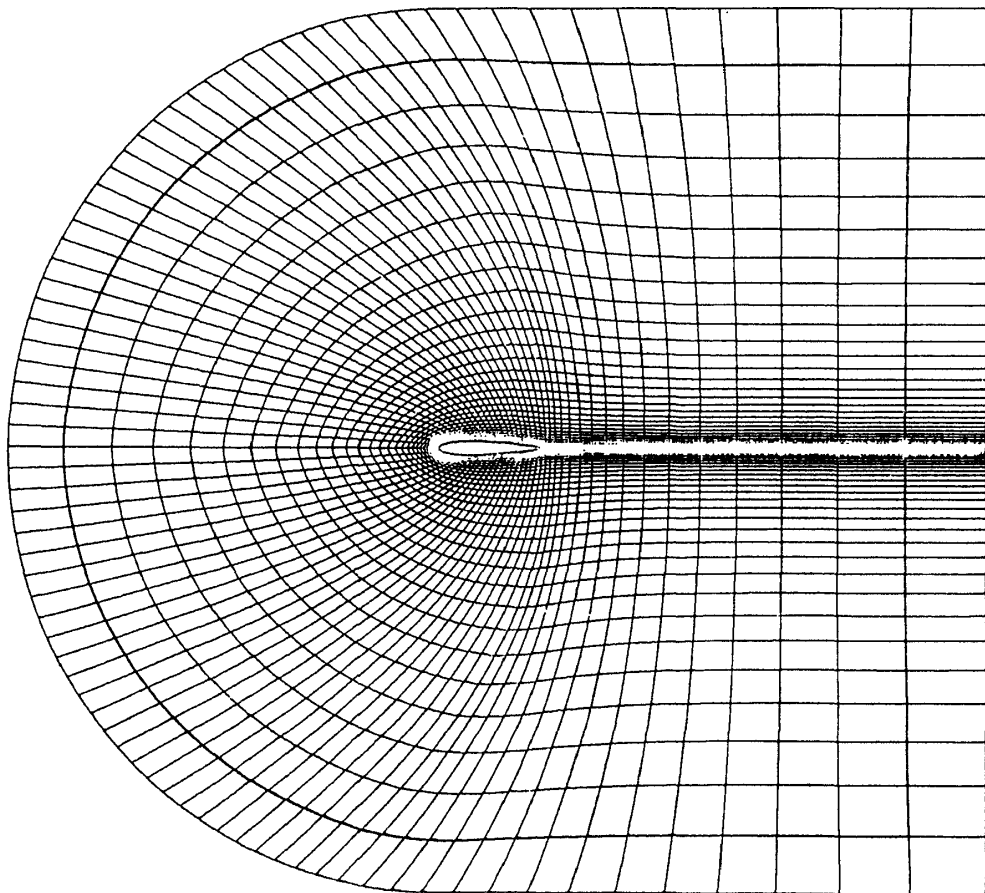
境界近傍においては、(14)式中の4次の人工粘性項は2次に変更されるが、これによる影響は無視できる。

5. 格子点の形成

実際の数値計算はNACA-0012翼断面について行なわれる。用いられた格子点は図1に示されるが、翼面上に51点が均一に分布している。 ξ = 一定の曲線は次の二つの群から成っている：翼面に端を発するものはラプラス方程式の解であり、他は放物線である。後流カット上及び η 方向の点の分布は指数関数である。

6. 非粘性流

計算の初期条件としては、流れ場の全てにおいて一様な上流の状態が生じていると考える。遠方の境界条件は一様流である。下流境界での ρ , u , v は



NACA 0012 83*31

図1 NACA-0012翼に対して用いられた格子点。

線型の外挿によって与えられ、 e は(3)式で $p = p_\infty$ として定める。後流カットに沿った流れ場の値は、カット上下の変数を単純に相加平均して得られる。翼面上の ρ 及び $\hat{u}(\xi, 0)$ は線型外挿と $\hat{v}(\xi, 0) = 0$ によって定まる。この様なわけで、 $u(x, y)$ と $v(x, y)$ は次の関係式から求まる。

$$\left. \begin{aligned} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} x_\xi & x_\eta \\ y_\xi & y_\eta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{u} \\ \hat{v} \end{bmatrix}, \\ \begin{bmatrix} \hat{u} \\ \hat{v} \end{bmatrix} &= J \begin{bmatrix} y_\eta & -x_\eta \\ -y_\xi & x_\xi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}. \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

p を求めるためには次の式が必要になる。 $\eta_x \times (\xi$ 方向の運動量保存) + $\eta_y \times (\eta$ 方向の運動量保存) より、

$$\begin{aligned} J^{-2} \frac{\partial p}{\partial n} &= -(y_\xi y_\eta + x_\xi x_\eta) p_\xi + (y_\xi^2 + x_\xi^2) p_\eta \\ &= -\rho J^{-1} \hat{u} (-y_\xi u_\xi + x_\xi v_\xi) \\ &\quad + \frac{1}{Re} \left\{ \vec{S} \cdot \left[\frac{\partial(\hat{V}_1 + \hat{V}_2)}{\partial \xi} + \frac{\partial(\hat{W}_1 + \hat{W}_2)}{\partial \eta} \right] \right\}, \end{aligned} \quad (19)$$

ここで、 $\vec{S} = (0, -y_\xi, x_\xi, 0)$ なるベクトルである。この方程式 (tri-diagonal 行列) を陰的に解いて p を求め、(3)式によって e を求めることができる。ここで注意しておくが、計算においては終始 $\omega \Delta \tau$

$= (1 + 2\delta) / 8(1 + \delta)$ なる人工粘性が用いられた。

計算されたマッハ数と迎角は次の4通りである。

- a) $M_\infty = 0.63$, $\alpha = 0^\circ$; 流れは完全に亜音速。
- b) $M_\infty = 0.63$, $\alpha = 2^\circ$; 翼上面の最大速度は音速に近くなる。従って流れは亜臨界である。
- c) $M_\infty = 0.75$, $\alpha = 0^\circ$; 超音速領域が現われるが、衝撃波は形成されない。従って流れは超臨界である。

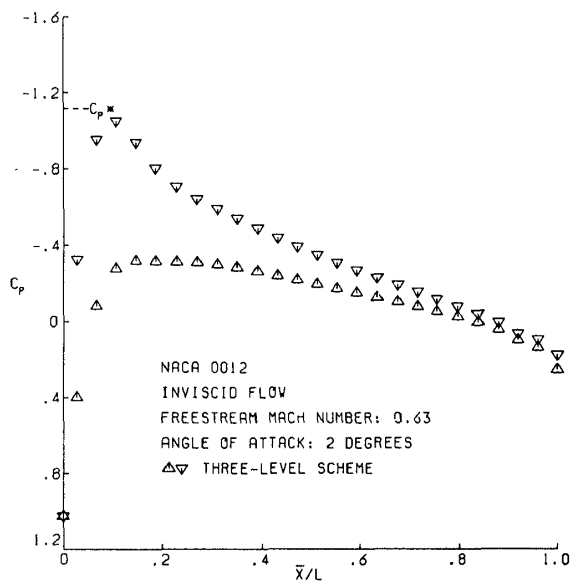


図3 $M_\infty = 0.63$, $\alpha = 0^\circ$ に対する非粘性流の圧力分布。 \triangle は上面、 ∇ は下面の値で、差分スキームは3段。

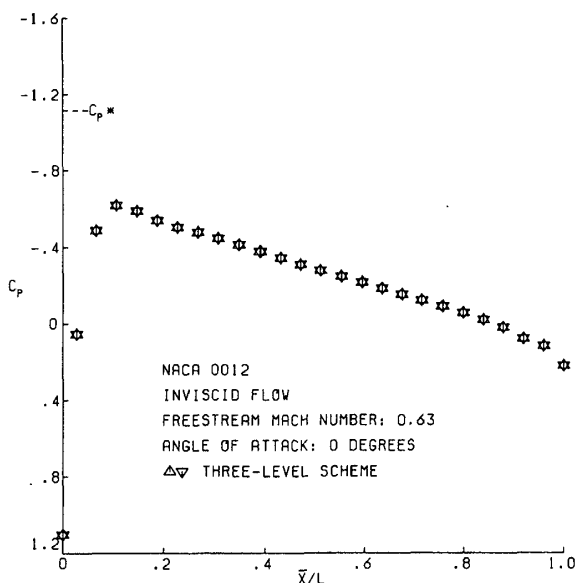


図2 $M_\infty = 0.63$, $\alpha = 0^\circ$ に対する非粘性流の圧力分布。差分スキームは3段。

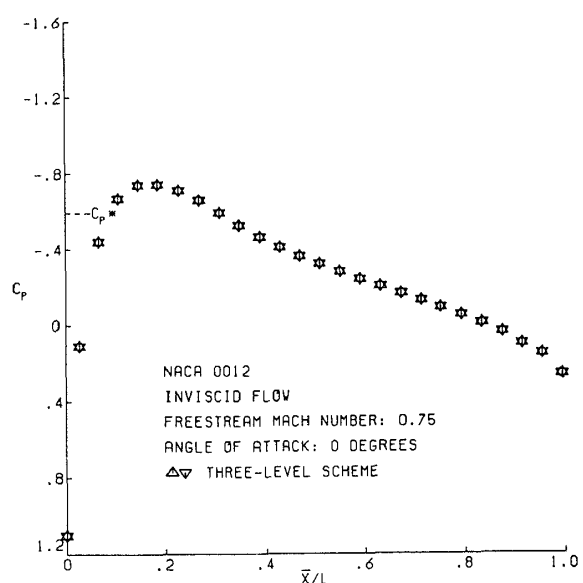


図4 $M_\infty = 0.75$, $\alpha = 0^\circ$ に対する非粘性流の圧力分布。差分スキームは3段。

d) $M_\infty = 0.75$, $\alpha = 2^\circ$; 翼上面に衝撃波が現れる。流れは遷音速である。

これら 4 つの場合の翼面上下面での圧力分布が図 2 ~ 5 に示されている。図 5 においては, $\theta = 1$, δ

$= 0$ とした 2 段差分スキームの結果が示され, 3 段スキームの結果と比較されている。図 6 には d) の場合の等マッハ数線の分布が示されている。

7. 粘性流

粘性流の計算は非粘性流の計算と殆んど変わらないが, 式はより複雑になる。異なる点は次の 2 点である。

a) 翼面上で $u = v = 0$ であり, p と T は (19) 式と $\partial T / \partial n = 0$ を陰的に解いて得られる。 ρ と e は (3) と (4) 式から求まる。

b) 人工粘性項の係数 ω ($\omega \Delta \tau$ でない) は 0 (1) の定数とおかれた。

粘性流に合わせるためには, η 方向の格子点分布を

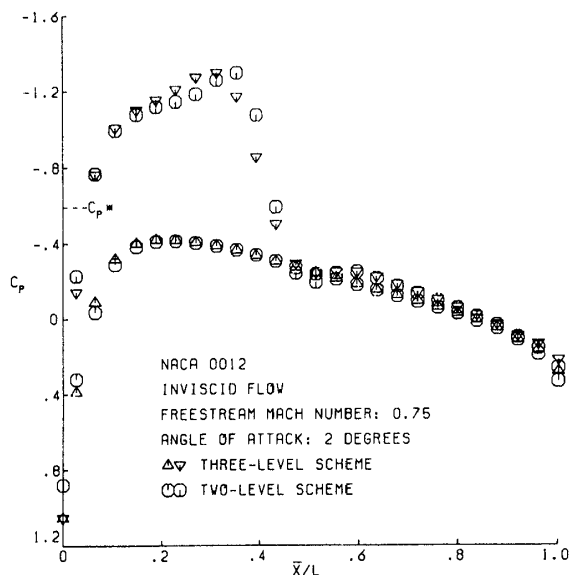


図 5 $M_\infty = 0.75$, $\alpha = 2^\circ$ に対する非粘性流の圧力分布。2 段と 3 段の差分スキームが比較されている。

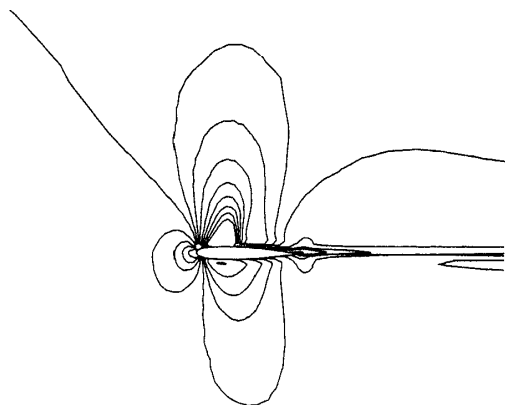


図 6 $M_\infty = 0.75$, $\alpha = 2^\circ$ に対する等マッハ数線の分布。

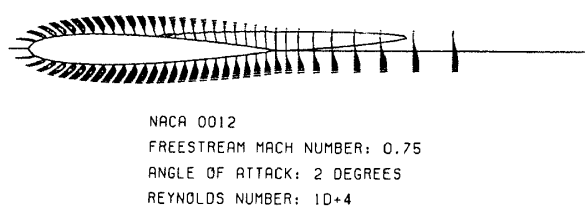


図 7 翼型近傍での速度分布と剥離領域の様子。
 $M_\infty = 0.75$, $\alpha = 2^\circ$, $Re = 10^4$ に対する粘性流の解。

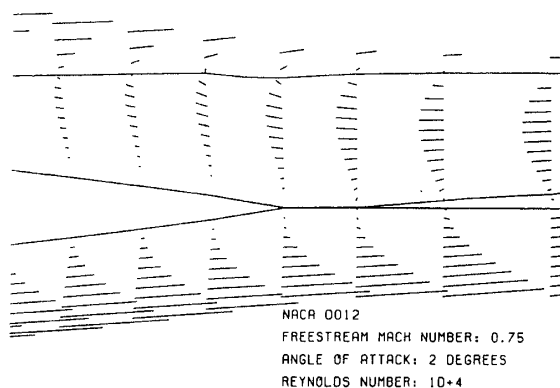


図 8 翼後縁付近の剥離の詳細
(図 7 のクローズアップ)。

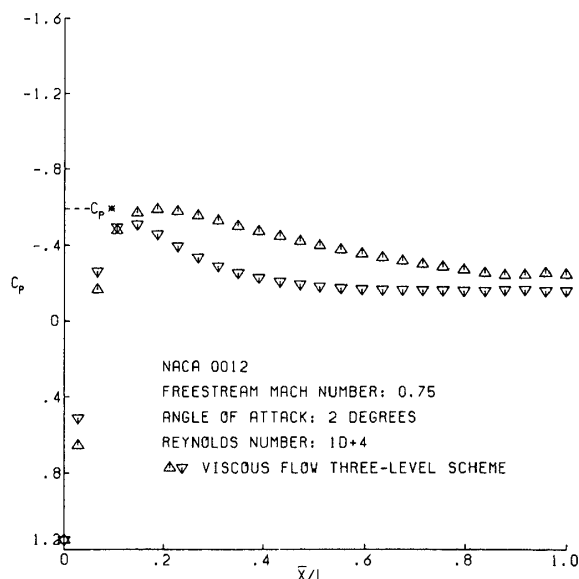


図 9 $M_\infty = 0.75$, $\alpha = 2^\circ$, $Re = 10^4$ に対する粘性流の圧力分布。差分スキームは 3 段。

より細かくする。境界層と想定される領域に10点が均一に分布され、その外部に35点が指数的に拡がりながら分布される。

計算結果は図7～10に示される。図7, 8に見られる様に, $\alpha = 0^\circ$ においても翼面下流部には剝離領域が発生している。図9に見られる圧力分布は, 非粘性の場合と大きく異なる。結果の検討は現在進行中である。

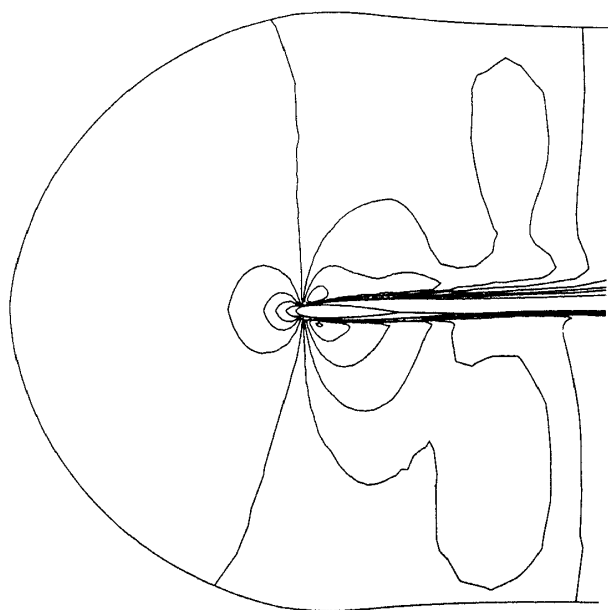


図10 図9に対応する等マッハ数線の分布。

参考文献

- 1) R.M. Beam and R.F. Warming; An Implicit Factored Scheme for the Compressible Navier-Stokes Equations, AIAA Journal 16, pp. 393-402 (1978).
- 2) J.L. Steger; Implicit Finite-Difference Simulation of Flow about Arbitrary Two-Dimensional Geometries, AIAA Journal 16, pp. 679-686 (1978).
- 3) Yi-Yun Wang and Toshi Fujiwara; The Numerical Analysis of Transonic Flow around a Circular Airfoil Using Hybrid Difference Scheme, Moemoirs of the Faculty of Engineering, Nagoya University, Vol. 36, No. 1, pp. 68-78 (1984).
- 4) Yi-Yun Wang and Toshi Fujiwara; Numerical Analysis of Transonic Flow around a Two-Dimensional Airfoil by Solving Navier-Stokes Equations, 第21回日本航空宇宙学会中部・関西支部合同秋期大会, 1984年11月16日, 名城大学.
- 5) Yi-Yun Wang and Toshi Fujiwara; Numerical Analysis of Transonic Flow around a Two-Dimensional Airfoil Using Full Navier-Stokes Equations, Memoirs of the Faculty of Engineering, Nagoya University, Vol. 36, No. 2, to appear (1985).

