

対流を伴う矩形ダクト流の数値シミュレーション

山 本 稀 義* 細 川 巖** 田 中 義 規**

Numerical Simulation of Thermal Convection in a Rectangular Duct Flow

by

Kiyoshi YAMAMOTO

National Aerospace Laboratory

Iwao HOSOKAWA and Yoshinori TANAKA

University of Electro-Communications

ABSTRACT

Numerical simulation of thermal convection in a horizontal rectangular duct flow heated from both bottom and sides is carried out using a method based on the Fourier spectral method. It is shown that the convective secondary flow is induced not only by the Rayleigh-Bénard instability but by the natural convection near the duct's side walls. As a result, we have almost stationary longitudinal convective rolls in the flow when the Reynolds numbers are rather larger values, 500 and 220. On the other hand, when the Reynolds number is a smaller value, 90, the rolls fluctuate chaotically in space and time; then the time-averaged secondary flow is almost vanishing and the fluid temperature widely constant in the central part of duct.

1. はじめに

矩形ダクト流は流体機械や装置の内部流を単純化した基本的剪断流として工学上重要であるが、その遷移機構はいまだ未知のところが多い。さらに温度場が加わると、ダクトの上下壁の温度差によるレイリー・ベナール対流と側壁温度場による自然対流が競合した複雑な2次流が発生する。本研究はこの様な矩形ダクト流中の主として対流による2次流の発生過程を数値シミュレーションによって明らかにすると共に、2次流の発生をダクトの側壁温度条件および流れのパラメータを用いて制御するための基礎的要件を明らかにすることを目的としている。この様な対流を伴う矩形ダク

ト流の研究としてはこれまでもCVD炉等に関連して小泉等の実験的研究^{1,2)}やMoffat and Jensen³⁾の数値計算等がある。

計算機の発達に伴って複雑な乱流の数値シミュレーションも可能になってきた。ナビエ・ストークス方程式の計算法の中で、スペクトル法は差分法に比べて計算精度が良いために最近乱流の数値シミュレーションによく用いられるようになってきたが⁴⁾、ここでは筆者等が先にチャンネル流の計算に用いたフーリエ・スペクトル法^{5,6)}をダクト流に応用した。

2. 数値計算の説明

流れの座標系を図1の様に、流れ方向に x 軸、鉛直方向に z 軸、これ等に垂直に y 軸をとる。計算領域を L_x, L_y, L_z と取り、 $y=\pm L_y/2, z=\pm L_z$

* 航空宇宙技術研究所

** 電気通信大学

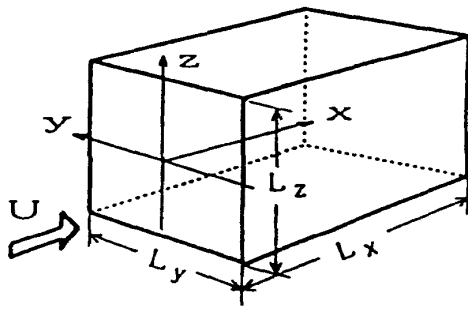


図1 流れの座標系と計算領域

$/2$ をダクト壁とする。流れの速度、圧力、温度をそれぞれ基本場 $U(y, z)$, $P(x)$, $\theta(y, z)$ と変動成分 $u(x, t)$, $p(x, t)$, $\theta(x, t)$ の和で表すと、 u , p , θ の方程式はナビエ・ストークス方程式とエネルギー方程式からブシネスク近似を用いて

$$\frac{\partial u_\alpha}{\partial t} = -U \frac{\partial u_\alpha}{\partial x} - \left(\frac{\partial U}{\partial y} + w \frac{\partial U}{\partial z} \right) \delta_{\alpha x} - u \cdot \nabla u_\alpha$$

$$\frac{\partial p}{\partial x_\alpha} + \frac{1}{R_e} \nabla^2 u_\alpha + \frac{Gr}{R_e^2} (\theta + \theta) \delta_{\alpha z} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \theta}{\partial t} = & -U \frac{\partial \theta}{\partial x} - v \frac{\partial \theta}{\partial y} - w \frac{\partial \theta}{\partial z} \\ & - u \cdot \nabla \theta + \frac{1}{R_e P_r} \nabla^2 \theta \end{aligned} \quad (2)$$

となる。また、非圧縮条件は次のようになる。

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (3)$$

ここで、 U は温度場がない矩形ダクト流の定常解⁷⁾、 θ は流れがない流体の温度場の定常解、 P は U と釣り合う圧力場を表す。また、 $\mathbf{u}=(u, v, w)$ で、 R_e , Gr , P_r はそれぞれレイノルズ数、グラスホフ数、プラントル数、 $\delta_{\alpha z}$ はクロネッカーのデルタである。

境界条件はダクトの側壁 $y=\pm L_y/2$, $z=\pm L_z/2$ で

$$u=\theta=0 \quad (4)$$

である。

数値計算にはフーリエ・スペクトル法を応用する。そのために u, θ をフーリエ級数で

$$u(\mathbf{x}, t) = \sum_{\mathbf{k}} u(\mathbf{k}, t) \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}) \quad (5)$$

$$\theta(\mathbf{x}, t) = \sum_{\mathbf{k}} \theta(\mathbf{k}, t) \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}) \quad (6)$$

と展開し、(1), (2)式から $u(\mathbf{k}, t)$, $\theta(\mathbf{k}, t)$ の基礎方程式を導いて、それを初期値問題として解く。

ここで、波数 \mathbf{k} は $k_\alpha = 2\pi n_\alpha / L_\alpha$; ($\alpha=x, y, z$) である。ただし、ここで重要なことは矩形ダクト流の境界条件(4)を満たす事で、(5), (6)式のままでこれを満たすことは出来ない。しかし、フーリエ成分の間に

$$\sum_{n_z} (-1)^{|n_z|} u(k_x, k_y, 2\pi n_z / L_z, t) = 0 \quad (7)$$

を課せば、 $z=\pm L_z/2$ で $u=0$ を満たす。これは $u(\mathbf{k}, t)$ についての束縛条件になるが、この様な線形の束縛条件は関数空間の簡単な直交変換によって満たす事が出来るので⁵⁾、ここではその方法を応用する。 $y=\pm L_y/2$ についても同様である。また、非圧縮条件(3)も同様に満たすことができる⁶⁾。

数値計算のいろいろなパラメータは次の様に定める。まず、計算領域は $L_x=\pi$, $L_y=1.5$, $L_z=L_y/2$ (ダクトの縦横比2)とする。また、グラスホフ数 Gr は480000, プラントル数 P_r は0.71と一定にして、レイノルズ数 R_e と側壁温度分布 $\theta_w(z)$ をパラメーターとしてその効果を調べる。さらに、(5), (6)式のフーリエ級数展開の個数は k_x, k_y, k_z 方向に21, 43, 21 (非線形項の計算に用いる高速フーリエ変換は32, 64, 32) 個使用する。

流れの初期条件は $u(\mathbf{k}, 0)$ に微小攪乱を乱数で与え、 $\theta(\mathbf{k}, 0)$ は零とする。この $u(\mathbf{k}, 0)$ の微小攪乱は速度変動を適切に誘起するために必要である。また、方程式の時間方向の積分はルンゲ・クッタ・ギル法を使用する。

対流はダクトの側壁の温度条件に依存する。すなわち、側壁近傍の自然対流は発生する対流ロールの回転方向を規定するだけでなく、ロールの不安定化をもたらすと考えられる¹⁾。この様な側壁温度条件の効果を明らかにするために、側壁温度分布 $\theta_w(z)$ を変えた計算を行う。図2に無次元化した側壁温度分布 $\theta_w(z)$ の6種類の型を示す。

3. 計算結果と検討

図3は $R_e=500$ で $\theta_w(z)$ が type-2 の場合に発生する対流速度場の流れに垂直な成分 v, w のベクトル表示と流体温度分布 (等高線) を示す。この場合側壁温度は0.2 (一定) と平均流体温度に比べて

低いので、側壁近傍では自然対流によって下降流が誘起され、これに対応して、ダクトの中央で上昇する比較的安定な対流ロールが実現している。

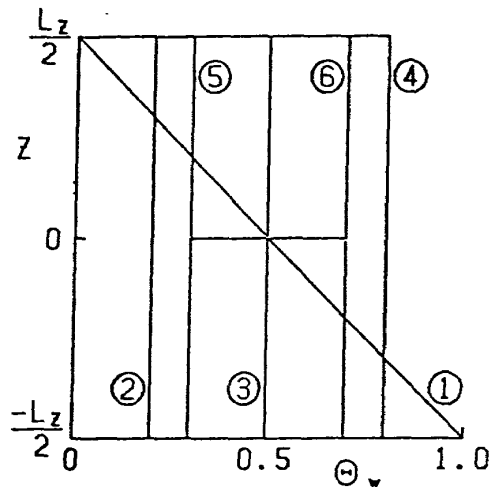


図2 ダクトの側壁温度分布 $\theta_w(z)$
type-1 ~ type-6

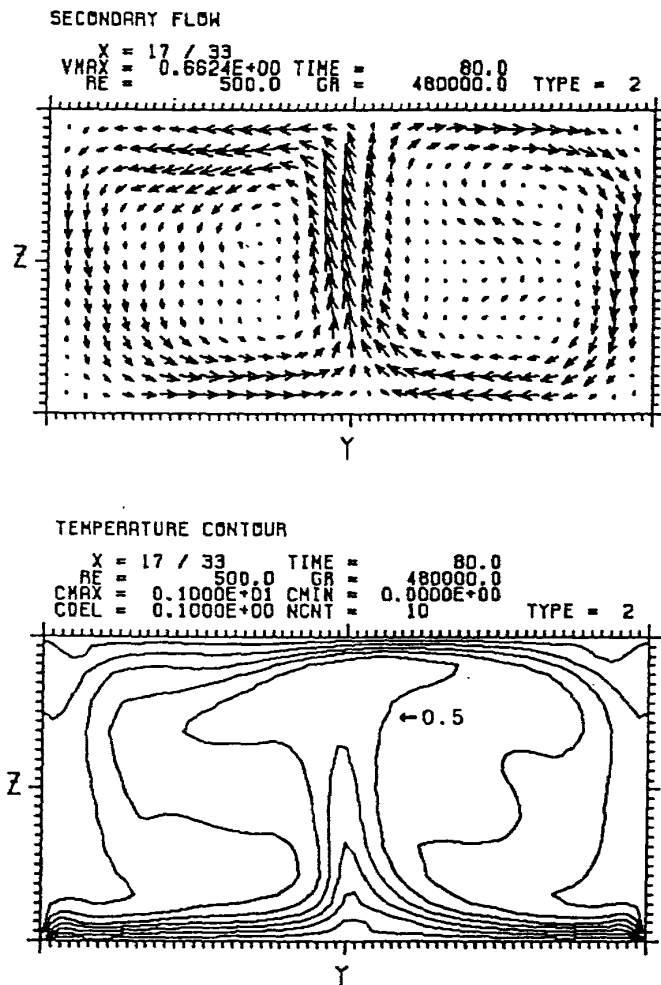


図3 2次流の流れに垂直な成分のベクトルと
流体温度分布
 $R_e=500$, θ_w は type-2, $t=80$

発生した2次流はほとんど2次元的で、かつ、定常的である。この2次流に対応して、流体温度分布はダクトの中央部分で高くなっているが、これはそこで下面近傍の高温流体が上昇しているためである。

図4は図3の2次流のいろいろなフーリエ成分のエネルギーの時間的発達を示し、 $E_u(k) = |u(k, t)|^2$ である。 u の初期値は $E_u(k) \sim 10^{-12}$ となる様にランダムに与えられ、温度場 θ の初期値は零としてある。速度場は時間と共に急激に成長するが、 $t \sim 10$ では個々のモードは変動するが、全体としてはほとんど平衡状態が実現している。また、成長したモードは $k_x=0$ の成分のみで、 $k_x \neq 0$ の成分は殆ど成長していない。これから発生した2次流は2次元的事が分かる。

図5は $R_e=220$ で $\theta_w(z)$ が type-1の2次流と流体温度分布を示す。この場合は θ_w の分布は下面から上面に直線的に変わり、かつ、 θ_w の平均が平均流体温度と等しくなるので、側壁近傍の自然対流は対流ロールの回転方向を決める事が出来ない。計算結果は3個のロールが実現するが、それらは大きさか同じではなく、右端のロールは他の2つに比べて小さくなっている。しかし、グラスホフ数を本図の480000から24000に小さくして計

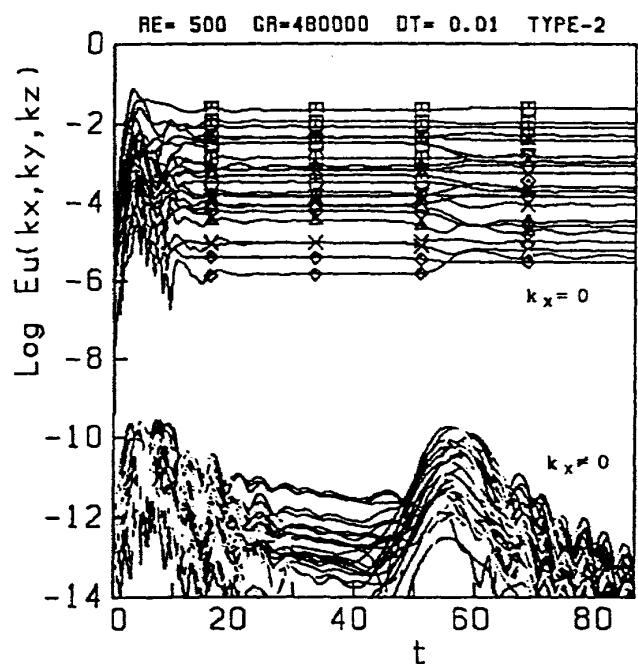


図4 2次流のフーリエ成分の発達
 $R_e=500$, θ_w は type-2

算してみると殆ど同じ大きさの3個のロールが実現するので(結果省略), 側壁温度分布がこの型の対流ロールは3個が標準となると考えられる。これはチャンネル流中のベナル渦からの類推とは一見異なっているが, Goldhirsch等⁸⁾の2次元の数値シミュレーションでも3個のロールが発生している事を考えると, 必ずしも奇異ではない。そして, 本図の非一様なロールの結果はグラスホフ数を変えた場合に流れが非定常解へ遷移する過程と考えられる。しかしながら, ここで実現した対流ロールの回転方向を決めているのは何かと言う事が問題である。

図6は図5と同じ境界条件で, 唯, 速度の初期攪乱の符号のみを反転して計算した2次流の結果である。計算結果はロールの大きさおよび配置は図5とはほぼ同じであるが, その回転方向は逆にな

っている(境界条件を反転してないので流れの微小部分は違っている)。この結果からロールの回転方向を決めるのは速度の初期攪乱である事が分かる。

図7は $Re=90$ で $\theta_w(z)$ がtype-1の2次流と流体温度分布を示す。時間は $t=80$ で, 流れ方向の位置は計算領域の最上流 $x=0$ である。計算結果は大きな2つのロールが見られるが, このロールは x の位置を変えると大きく変り, また, 時間的にも変動している。

図8は図7の計算結果ではほぼ平衡状態が成立してくる $t=60$ から80まで時間平均を取った結果を示す。計算結果はこれまで有ったロール状の2次流がなくなり, ダクトの中央の広範な部分に平均値がほぼ零に近い流れが実現している。また, この結果は x にも殆ど依存しないので, 図7の流れ

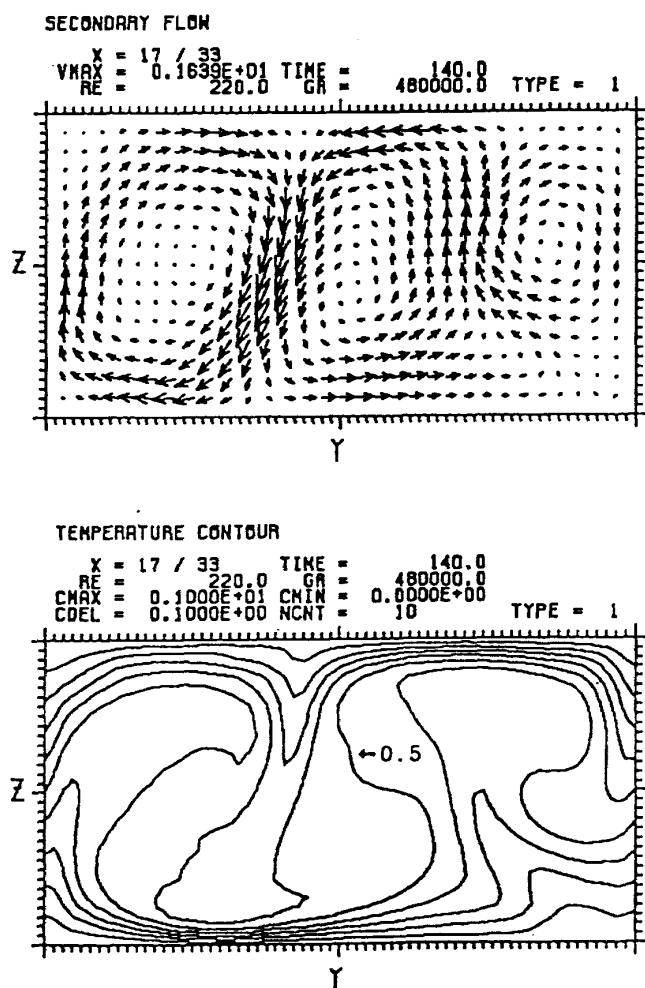


図5 2次流の流れに垂直な成分のベクトルと流体温度分布
 $Re=220$, θ_w はtype-1, $t=140$

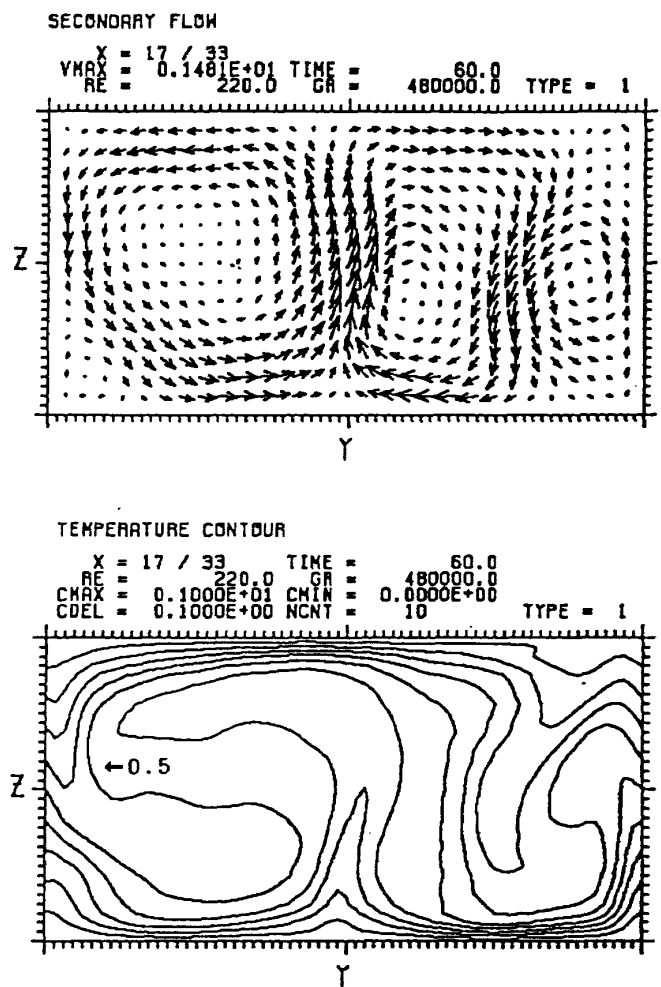


図6 2次流の流れに垂直な成分のベクトルと流体温度分布(図5の速度の初期値の符号を反転して計算した場合)

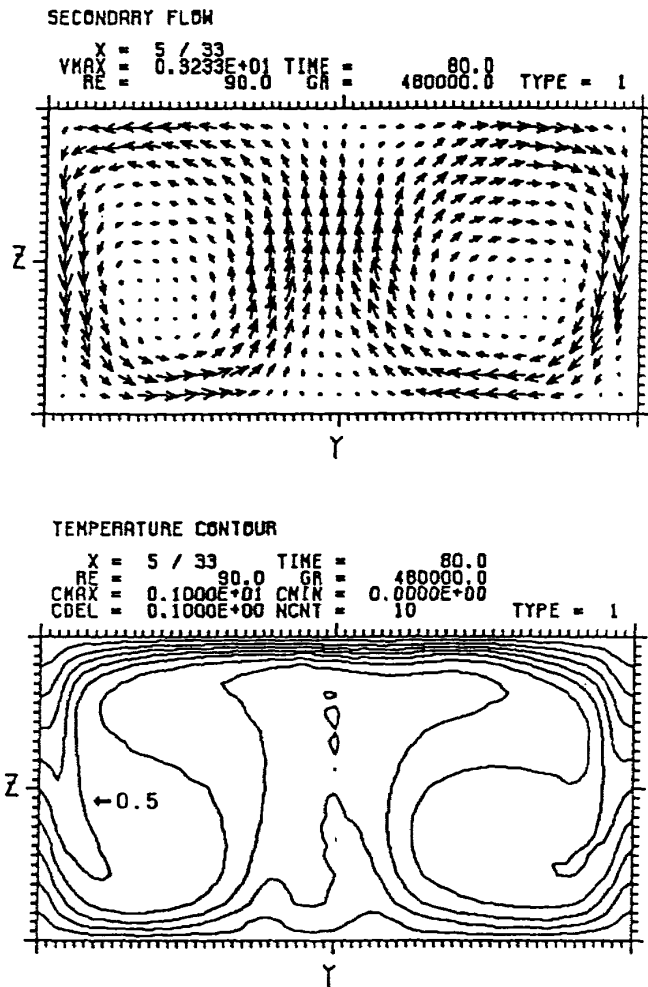


図7 2次流の流れに垂直な成分のベクトルと
流体温度分布

$Re=90$, θ_w はtype-1, $t=80$

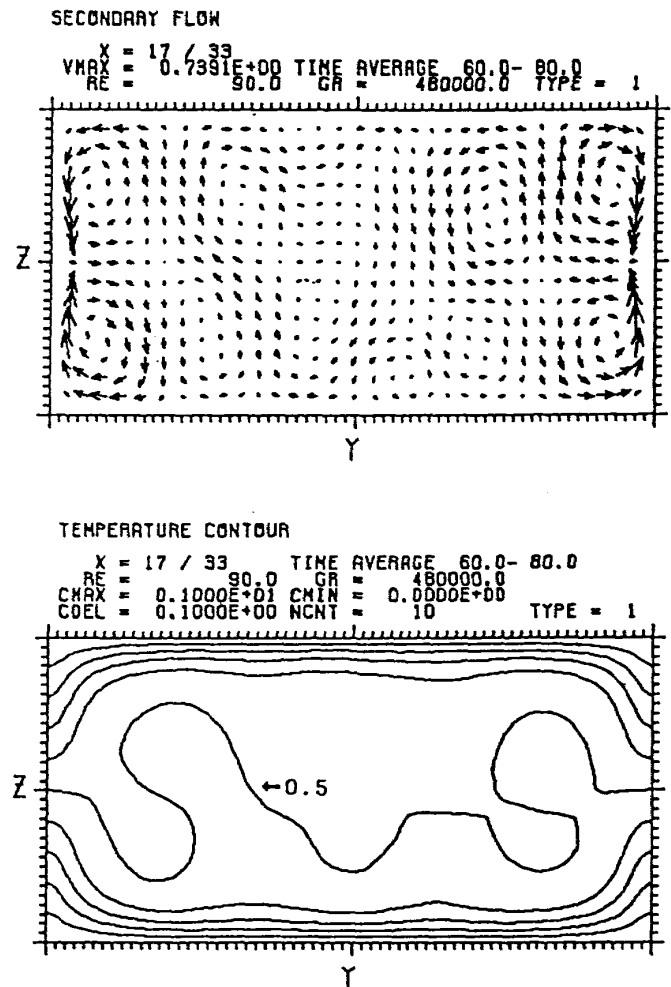


図8 2次流の流れに垂直な成分のベクトルと
流体温度分布 (図7の $t=60$ から 80 までの
時間平均した結果)

は時間的にも空間的にも周期的変動をしていると考えられる。図8の下図は流体温度分布で、この場合にも同様な傾向が見られる。即ち、温度が0.5の等高線がダクトの中央で大きく蛇行しているが、これは流体温度がほぼ0.5の領域がダクトの中央部に広範に実現している事を示している。また、それ以外の等高線も水平方向にほぼ平行になっている。平均的にしろ、この様に流れに垂直な2次流が零で、温度が水平方向に一定の流れ場の実現は、例えば、横型CVD等で重要である^{1,3)}。同様な非定常な流れはレイノルズ数が50でも得られている。

4. む す び

低レイノルズ数矩形ダクト流中の対流の発生過程を数値シミュレーションによって調べ、以下の結果が得られた。

- 1) ダクトの側壁温度の平均が平均流体温度と異なる場合は発生する対流ロールの回転方向を決めるのは側壁近傍の自然対流である。
- 2) ダクトの側壁温度の平均が平均流体温度と等しい場合は発生する対流ロールの回転方向は流れの初期条件に依存する。
- 3) レイノルズ数が500と220では2次流の非定常性は小さい。
- 4) レイノルズ数が90以下になると2次流は非定常に変動する。この流れの時間平均を取るとダクトの中央の広範な領域で、流れに垂直な2次流の平均が零で、平均流体温度一定の流れが実現する。

参 考 文 献

- 1) 小泉博義, 細川 巖: 第26回日本伝熱シンポジウム講演論文集, II (1985) 343; 日本機械

- 学会講演会熱工学（新方式）講演概要集[No. 890-63] (1989) 103.
- 2) 森 康夫, 小泉博義 : 日本機械学会論文集, 55巻, 511号 (1989) 820.
- 3) H. Moffat and K. F. Jensen : J. Growth **77** (1986) 108.
- 4) C. Canuto et al : *Spectral Methods in Fluid Dynamics*, Springer-Verlag, 1988.
- 5) I. Hosokawa and K. Yamamoto : J. Phys. Soc. Japan **55** (1986) 1030.
- 6) 山本稀義, 細川 巖 : 第18回乱流シンポジウム講演論文集ながれ 5 巻別冊 (1986) 220 ; 第1回数値流体力学シンポジウム講演論文集 (1987) 429 ; 村瀬丈夫, 山本稀義, 福田正大 : 第21回流体力学講演会講演集 (1989) 200.
- 7) F. M. White : *Viscous Fluid Flow*, McGraw-Hill, 1974.
- 8) I. Goldhirsch, R. B. Pelz and S. A. Orszag : J. F. M. **199** (1989) 1.