

UDC 519.2:  
53.087:  
65.012.1

# 航空宇宙技術研究所資料

TECHNICAL MEMORANDUM OF NATIONAL AEROSPACE LABORATORY

TM-367

3次元ベクトル量計測における最適  
観測軸配置について

木村武雄

1978年10月

航空宇宙技術研究所  
NATIONAL AEROSPACE LABORATORY

# 目 次

1	まえがき	1
2	ベクトル量計測	2
2.1	余弦成分を測る方法	2
2.2	正弦成分を測る方法	3
2.3	余弦成分と正弦成分の混合した量を測る方法	3
2.4	一般の場合	4
3	観測誤差	4
3.1	系統誤差と偶発誤差	4
3.2	偶発誤差の確率分布	4
4	観測方程式および観測誤差	4
5	観測方程式の解および観測誤差の伝播	5
6	多変量誤差および観測系の評価	6
6.1	多変量誤差の評価	6
6.2	観測系の評価	6
7	最適観測軸配置	7
7.1	観測軸配置の一般的性質	7
7.2	最適観測軸配置の解	7
7.3	最適観測軸配置の具体解	10
8	観測方程式の解	18
8.1	未知所求量の解	18
8.2	精 度	18
8.3	観測効率	19
9	故障の考慮	19
9.1	1個故障の場合	19
9.2	2個故障の場合	20
10	配置誤差の考慮	22
10.1	配置誤差	22
10.2	配置誤差を考慮した観測方程式	22
11	結 言	23
12	あとがき	23
	引用文献および参考文献	23
付 録		
A	行列 $F$ への諸変換に対する行列式 $\det(\tilde{F}F)$ の不変性について	24
B	行列式 $\det(\tilde{F}F)$ の最大解	25
C	矢円錐の定義およびその性質	32
D	正弦および余弦の零和の規則	35
	公 式	35

# 3次元ベクトル量計測における最適 観測軸配置について\*

木 村 武 雄\*\*

## Optimum orientations of the Observation Axes for 3-Dimensional Vector Sensing

By Takeo KIMURA

In the previous investigation, it was shown that the determinant of a covariance matrix should be recognized as a reasonable criterion for comparing the quality of observation systems.

In the present investigation, the determinant method is applied to find the optimum orientations of the observation axes for 3-dimensional vector sensing, that is, the most effective configurations of such measuring instruments as gyros, accelerometers, etc., in cases where the observation errors are uncorrelated with each other and normally distributed with zero means and equal variances.

The general properties of the optimum orientations are also discussed. Furthermore the investigation is extended to include the case where some of the measuring instruments are out of order, as well as the case where there are misalignment errors in the configuration of the measuring system.

### 1 まえがき

本報告において筆者は「観測系の評価に関するひとつの数学的理論」<sup>3), 4)</sup>を3次元ベクトル量計測に適用して、最適な計測方法を見出すことを試みた。ここでいう3次元ベクトル量とは3次元空間における速度、加速度、力、角速度、角運動量などをさす。これらの量を計測するには、それぞれに応じた計測機器が用いられるが、計測する量が3次元ベクトル量なので、どの量を測るにしても3個以上の計測器が必要になる。3個以上であれば、いくつでもよいが、ある個数に決めたとして、それらの計器をどのような位置関係に配置したら最も適当かという問題が出て来る。これに解答すること、及びこの配置に関する一般的性質を明らかにすることが本報告の主要な目的である。また、実用上の観点から、観測系の信頼性の向上を図るため、少数の計器が故障した場合についても考察し、製作技術上の観点からは、計器の据え付け誤差による影響についても検討を加える。

従来、このような問題を解く場合には、誤差の評価関数として、2次形式評価関数（traceを含む）が多く用いられてきた。事実、この方法によって、上述の問題に解答している論文もある<sup>1)</sup>。しかし、筆者は、「観測系の評価に関するひとつの数学的理論」<sup>3), 4)</sup>において報告しているように、誤差の評価関数としては二次形式評価関数を用いるよりも、行列式評価関数を用いる方がより妥当であることを理論的に証明したと判断されるので、行列式評価関数を用いた場合の、この問題に関する検討結果を、できるだけ解りやすく報告する。

本報告の第2章・ベクトル量計測、では標題にある「ベクトル量計測」の意味について説明し、同時にベクトル量計測を観測系のひとつとしてどのようにとらえるかを示しながら、本報告の標題にある「観測軸」の意味についても記述した。第3章・観測誤差、第4章・観測方程式および観測誤差、第5章・観測方程式の解および観測誤差の伝播、は、それぞれの章題に関する従来の一般的考え方の解説であり、第6章・多変量誤差および観測系の評価、は筆者の評価に関する従来の一般的考え方の解説である。第7章・最適観測軸配置、が本報告の主要部分で、他の章はこの章のため

\* 昭和53年8月16日受付

\*\* 計測部

に書かれているといっても過言ではない。この章では筆者の考え方による問題の設定とそれの解答および解法を示す。ただし、そのうちの解法あるいは解であることの証明等の詳細は最も根幹になる部分ともいえるが、本報告の全体の流れを考え、また、煩雑さを避ける意味で付録に廻してある。筆者は本報告で、解法を報告するよりむしろ解答そのものを報告したいと考える。

さて第7章での問題の設定とは

$l_i^2 + m_i^2 + n_i^2 = 1$  ( $i = 1, 2, \dots, p$ ) なる条件下で

$$\det \begin{pmatrix} l^2 & lm & ln \\ nl & m^2 & mn \\ nl & nm & n^2 \end{pmatrix}$$

を最大ならしめる  $l, m, n$  を求めよ

ただし

$l = (l_1 \ l_2 \ \dots \ l_p)$ ;  $l_i$ : 実数値

$m = (m_1 \ m_2 \ \dots \ m_p)$ ;  $m_i$ : 実数値

$n = (n_1 \ n_2 \ \dots \ n_p)$ ;  $n_i$ : 実数値

$l^2, lm, ln, \dots$  等はベクトルの内積を示す。

ということで、このような設問は従来なされていなかったと思われる。というのは、このような問題に物理的意味があるとは考えられていなかったからである。しかし筆者はこの解こそが3次元ベクトル量計測における「最適観測軸配置」を表わすと考える。何故そう考えるかについては第2章から第6章までの間に説明する。

第8章・観測方程式の解、では最適観測系において得られたデータから未知所求量を求める計算式およびその精度、観測効率について述べ、第9章・故障の考慮では最適観測系において、いくつかの計器が故障した場合の未知所求量を求める計算式およびその精度、観測効率などについて述べる。また第10章・配置誤差の考慮、では製作上生じる計器の据え付け誤差の影響について考察する。

## 記号

文字の用法

$a, b, c \dots$  スカラー量

$\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \dots$  ベクトル量

$A, B, C \dots$  行列

演算記号

$\tilde{\mathbf{a}}$  ベクトル  $\mathbf{a}$  の転置ベクトル

$\tilde{A}$  行列  $A$  の転置行列

$|\mathbf{a}|$  ベクトル  $\mathbf{a}$  の大きさ (絶対値)

$|A|$  行列式

添字等

' " \* °

添記号 (例えば  $\mathbf{a}', \mathbf{a}^\circ, \mathbf{a}', \mathbf{a}^\circ, A', A', A^*$  など) 何らかの意味での類似性、関連性を示す。

$i, j, k \dots$  添字 (例えば  $a_i, a_j, i_a, i_j, i_a, i_j, A_i$  など) ベクトル, 行列の成分等を示す。

注1.  $\mathbf{a}^i \mathbf{a}^i$  等はベキ乗を意味する。誤解の恐れがあるときは  $(a)^i (a)^i$  としてベキ乗を示す。

注2.  $\delta_{ij}$  は通常クロネッカーのデルタを意味する。

注3.  $e^{i\alpha}$  の  $i$  (立体) は虚数を意味する。

## 2 ベクトル量計測

3次元の未知ベクトルを求めるには、前後・左右・上下の3軸について各成分を測定すれば充分であるが、これについては本章の2.1で述べるとして、現実にはこれ以外にも色々な測定形態があるので、いくつかの種類に分けて順次のべてゆく。

### 2.1 余弦成文を測る方法

この方法は、図1に示すように、未知ベクトル  $\mathbf{v}$  の  $f_i$  方向の余弦成分  $\lambda_i$  を測定する方法である。これを数式で示すならば

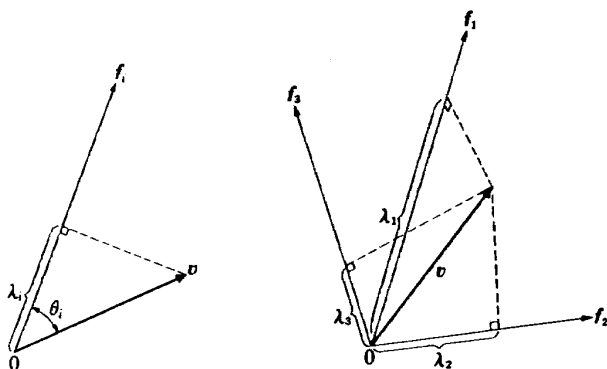


図 1

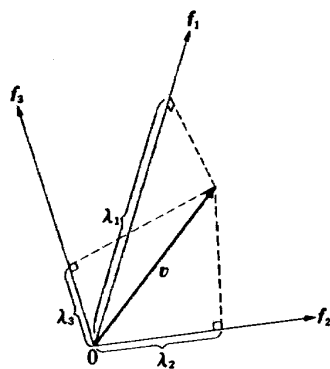


図 2

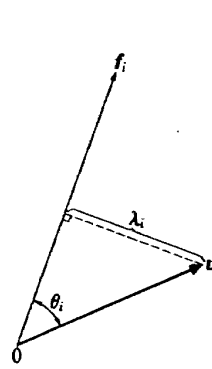


図 3

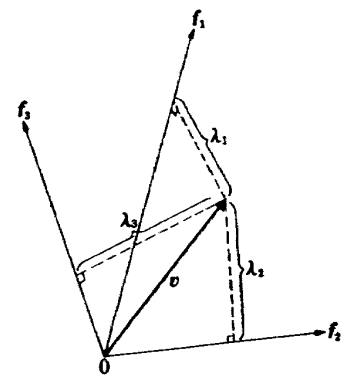


図 4

$$\lambda_i = \mathbf{f}_i \cdot \mathbf{v} (= |\mathbf{v}| \cos \theta_i) \quad (2.1)$$

$$(i = 1, 2, \dots, p)$$

となる。ここに

$\lambda_i$  : 測定量, 未知ベクトル  $\mathbf{v}$  の  $\mathbf{f}_i$  方向に対する余弦成分

$\mathbf{f}_i$  : 単位方向ベクトル, 本報告では観測軸と呼ぶ。  
また  $p$  個の観測軸  $(\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \dots, \mathbf{f}_p)$  をまとめて,  
その意味を汲んで, 観測系と呼ぶ。

$\mathbf{v}$  : 未知ベクトル

$p$  : 観測軸の個数

$\theta_i$  : ベクトル  $\mathbf{f}_i$  と  $\mathbf{v}$  とのなす角

未知ベクトル  $\mathbf{v}$  が3次元の場合, 観測軸  $\mathbf{f}_i$  は, 図-2に示すように少くとも, 線形独立な3つの方向があれば, 未知ベクトル  $\mathbf{v}$  は求まる。すなわち

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 = \mathbf{f}_1 \cdot \mathbf{v} \\ \lambda_2 = \mathbf{f}_2 \cdot \mathbf{v} \\ \lambda_3 = \mathbf{f}_3 \cdot \mathbf{v} \end{pmatrix} \rightarrow \mathbf{v} \quad (2.2)$$

観測軸  $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3$  が既知であるなら (普通は既知である) 測定値  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  を用いて未知ベクトル  $\mathbf{v}$  を求めることができる。

この方法の具体例としては, 振子型加速度計による加速度の測定, ジャイロによる角速度の測定等がある。

## 2.2 正弦成分を測る方法

この方法は, 図-3に示すように, 未知ベクトル  $\mathbf{v}$  の  $\mathbf{f}_i$  方向に対する正弦成分を測定する方法である。これを数式で示すならば

$$\lambda_i = \{(\mathbf{f}_i \times \mathbf{v})^2\}^{\frac{1}{2}} (= |\mathbf{v}| \sin \theta_i) \quad (2.3)$$

$$(i = 1, 2, \dots, p)$$

となる。ここに

$\lambda_i$  : 測定量, 未知ベクトル  $\mathbf{v}$  の  $\mathbf{f}_i$  方向に対する正

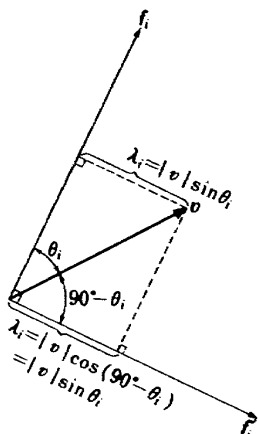


図 5

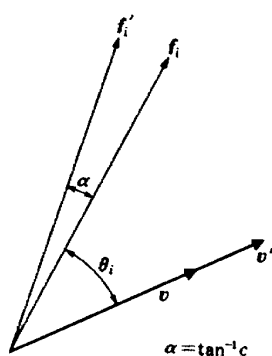


図 6

## 弦成分

その他の記号は (2.1) 式と同じ

未知ベクトル  $\mathbf{v}$  が3次元の場合, 観測軸  $\mathbf{f}_i$  は, 図-4に示すように少くとも線形独立な3つの方向があれば, 未知ベクトル  $\mathbf{v}$  は求まる。すなわち

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 = \{(\mathbf{f}_1 \times \mathbf{v})^2\}^{\frac{1}{2}} \\ \lambda_2 = \{(\mathbf{f}_2 \times \mathbf{v})^2\}^{\frac{1}{2}} \\ \lambda_3 = \{(\mathbf{f}_3 \times \mathbf{v})^2\}^{\frac{1}{2}} \end{pmatrix} \rightarrow \mathbf{v} \quad (2.4)$$

観測軸  $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3$  が既知であるなら, 測定値  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  を用いて, 未知ベクトル  $\mathbf{v}$  を求めることができる。

また, 観測軸を  $\mathbf{f}_i$  ではなく, 図-5に示す  $\mathbf{f}'_i$  すなわち, 観測軸  $\mathbf{f}_i$  と未知ベクトル  $\mathbf{v}$  とによって張られる平面上にあり且つ  $\mathbf{f}_i$  に直交する単位方向ベクトル, について考えれば

$$\lambda_i = \mathbf{f}'_i \cdot \mathbf{v} (= |\mathbf{v}| \cos \theta'_i) \quad (2.5)$$

$$\text{但し } \theta'_i = \frac{\pi}{2} - \theta_i$$

となって, 本章 2.1 の余弦成分を測る方法に形式的に一致する。

## 2.3 余弦成分と正弦成分の混合した量を測る方法

### (1) 線形結合の場合

この方法は, 余弦成分と正弦成分とが線形結合している量を測る方法で, これを数式で示すならば

$$\lambda_i = \mathbf{f}_i \cdot \mathbf{v} + c \{(\mathbf{f}_i \times \mathbf{v})^2\}^{\frac{1}{2}}$$

$$\left( \begin{aligned} &= |\mathbf{v}| \cos \theta_i + c |\mathbf{v}| \sin \theta_i \\ &= |\mathbf{v}| \sqrt{1+c^2} \cos(\theta_i + \tan^{-1} c) \end{aligned} \right) \quad (2.6)$$

となる。ただし最後の等式には, 公式  $a \cos \theta + b \sin \theta = \sqrt{a^2 + b^2} \cos(\theta + \tan^{-1} \frac{b}{a})$  を用いた。

また, 観測軸  $\mathbf{f}_i$  と未知ベクトル  $\mathbf{v}$  を各々図-6に示す  $\mathbf{f}'_i$  と  $\mathbf{v}'$  すなわち,  $\mathbf{f}'_i$  は二つのベクトル  $\mathbf{f}_i$  と  $\mathbf{v}$  とによって張られる平面上にあって, 且つ,  $\mathbf{f}_i$  と  $\mathbf{v}$  とのなす角が  $\theta_i + \alpha$  (ただし  $\alpha = \tan^{-1} c$ ) となるような単位ベクトルであり,  $\mathbf{v}'$  は  $\mathbf{v}$  と同じ方向で, 長さが  $\mathbf{v}$  の  $\sqrt{1+c^2}$  倍のベクトルである。に置き換えるならば,

$$\lambda_i = \mathbf{f}'_i \cdot \mathbf{v}' \quad (2.7)$$

ただし

$$\mathbf{v}' = \sqrt{1+c^2} \mathbf{v}$$

$$\mathbf{f}'_i \cdot \mathbf{f}_i = \cos \alpha$$

$$\alpha = \tan^{-1} c$$

となって、本章2.1の余弦成分を測る方法に帰着する。

#### (2) 非線形結合の場合の一例

この例は、余弦成分の2乗と正弦成分の2乗が線形結合して、その開平量を測定する方法で、これを数式で示すならば

$$\lambda_i = \left\{ (f_i \cdot v)^2 + c (f_i \times v)^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \\ \left( = \left\{ |v|^2 \cos^2 \theta_i + c |v|^2 \sin^2 \theta_i \right\}^{\frac{1}{2}} \right) \\ \left( = |v| \left\{ \cos^2 \theta_i + c \sin^2 \theta_i \right\}^{\frac{1}{2}} \right) \quad (2.8)$$

となる。この具体例としては、熱線による風速測定がある。

上式(2.8)で、もし $c$ の値が1と比較してかなり小さい場合( $c \ll 1$ )には、 $\theta_i$ が $\frac{\pi}{2}$ や $\frac{3}{2}\pi$ の近辺でない限り

$$\lambda_i \doteq f_i v$$

となって、本章2.1の方法にほぼ帰着できる。また、もし $c$ の値が1と比較してかなり大きい場合( $c \gg 1$ )には、 $\theta_i$ が0や $\pi$ の近辺でない限り

$$\lambda_i \doteq \left\{ (f_i \times v')^2 \right\}^{\frac{1}{2}}$$

$$\text{ここに } v' = c v$$

となって、本章2.2の正弦成分を測る方法にほぼ帰着できる。

上述のように近似できない場合は厳密に解かねばならないが、これについては本報告の範囲外である。

### 2.4 一般の場合

ベクトル量計測の一般式は

$$\lambda_i = f_i(v) \quad (2.9) \\ (i = 1, 2, \dots, p)$$

となる。

ここに $f_i$  : ベクトル $v$ を変数とするスカラー値関数、  
いろいろな関数形が考えられる。

これは、未知ベクトル $v$ の何らかの関数値 $\lambda_i$ を測定することにより未知ベクトル $v$ を求めるものである。この特殊な場合が前節2.1, 2.2, 2.3の方法である。

本報告では最も基本的で、かつ応用範囲も広いと思われる本章2.1の余弦成分を測る方法( $\lambda_i = f_i v$ )についてのみ述べることにする。

## 3 観測誤差

観測には誤差が免れないので、誤差に対する考え方を本章で述べる。

### 3.1 系統誤差と偶発誤差

「ある量の観測値とその真値との差が観測誤差であり、

これをその起因と性質とにより通常つぎのとうり分類する。

$$\begin{aligned} A. \text{系統誤差} & \begin{cases} a. \text{理論誤差} \\ b. \text{機械誤差} \\ c. \text{個人誤差} \end{cases} \\ B. \text{偶発誤差} & \begin{cases} d. \text{過失誤差} \\ e. \text{必然的偶発誤差} \end{cases} \end{aligned}$$

系統誤差とは、その分類内訳の名前が示すとうりの起因、すなわち根本理論における間違い、機械の狂い、あるいは観測者個人の一定の癖とかの原因により、ある定まった規則的な関係で導入される誤差をいう。この誤差はその原因を知れば、あらかじめこれを避けるとか後で補正するとかして、除き得ないものではない。これに対する偶発誤差とは全く偶然に不定な関係で起生する誤差をいい、その中の過失誤差は注意により、これを避けうるが、いかに注意しても人為によっては絶対に除き得ない誤差が最後の必然的偶発誤差である。たとえば、肉眼で1mm目の尺度を使って長さを読むとき、0.1mmないしその一つ下の桁のところで起きる誤差のごときがこれで、たとえ何かの測微尺を使うような場合でも、その測器の精度限界のところで必然的にかつ偶発的に起生する。』<sup>2)</sup>本報告では、このような必然的偶発誤差を観測誤差として考える。

### 3.2 偶発誤差の確率分布

前節で述べたような偶発的誤差でも、その確率分布は場合によって色々な型をとるが、中でも正規分布が最も自然だと一般に考えられている。その論拠は次に示すとうりである。

同じ量を同じ様に $n$ 回測定するとして、そのときの観測値を $^1\lambda, ^2\lambda, \dots, ^n\lambda$ とすると、ガウスの誤差論によれば、次の2つの仮定をおくだけで、誤差の確率分布は正規分布になることが示される。

仮定1

最確値は算術平均値に等しい。

$$(\text{最確値} = \frac{{}^1\lambda + {}^2\lambda + \dots + {}^n\lambda}{n})$$

仮定2

大きな誤差の起きる確率は零に等しい

この仮定1,2は普通の誤差にとって奇異なものではない。本報告で扱う観測誤差も慣例どおり、仮定1,2を満たし、正規分布をなすものとする。

## 4 観測方程式および観測誤差

不明の事柄は様々な角度からの観測によって明らかになる。不明の事柄とは数量的には未知所求量のことであり、様々な角度からの観測によってとは、様々な角度からの観

観測値によってということにほかならない。未知所求量と観測値との関係式を観測方程式と呼んでいる。2章の(2.1)式(2.2)式なども、未知所求量 $v$ と観測値 $\lambda_i$ との関係を示す観測方程式の一つである。ただ誤差の項が考慮されていないので、誤差を考慮した観測方程式を次のように設定する。

$$\lambda_i = f_i v + \varepsilon_i \quad (4.1)$$

$$(i = 1, 2, \dots, p)$$

ここに

$\lambda_i$  : 観測値

$f_i$  : 観測軸 これは方向ベクトルなので $x, y, z$ 軸の成分をそれぞれ $(l_i, m_i, n_i)$ とする。但し  $l_i^2 + m_i^2 + n_i^2 = 1$  (4.2)

$$\{f_i \equiv (l_i, m_i, n_i)\} \quad (4.3)$$

$v$  : 未知所求ベクトル,  $x, y, z$ 軸の各成分を $x, y, z$ とする。

$$\{v = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\} \quad (4.4)$$

$p$  : 観測の数 ( $p \geq 3$ )

$\varepsilon_i$  : 観測誤差。異なる観測番号の間では相関がないものとし、誤差の程度は観測番号によらず一定とする。すなわち

$$E(\varepsilon_i \varepsilon_j) = \varepsilon^2 \delta_{ij} \quad (4.5)$$

$E$  : 期待値を示す

と仮定する。(  $p = 3$  のときはこの仮定は不要 )

$$\text{ただし } \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & (i = j) \\ 0 & (i \neq j) \end{cases} \quad (4.6)$$

行列表示で(4.1)式を示せば

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ l_p & m_p & n_p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \vdots \\ \varepsilon_p \end{pmatrix} \quad (4.7)$$

略表示では

$$\lambda = Fv + \varepsilon \quad (4.8)$$

ここに

$$\lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_p \end{pmatrix} \quad (4.9) \quad F = \begin{pmatrix} l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ l_p & m_p & n_p \end{pmatrix} \quad (4.10)$$

$$\varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \vdots \\ \varepsilon_p \end{pmatrix} \quad (4.11)$$

ただし

$$E(\varepsilon \tilde{\varepsilon}) = \begin{pmatrix} \varepsilon^2 & 0 & \cdot & 0 \\ 0 & \varepsilon^2 & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdot & \varepsilon^2 \end{pmatrix} = \varepsilon^2 E(p) \equiv W^{-1} \quad (4.12)$$

ここに

$\tilde{\varepsilon}$  : ベクトル $\varepsilon$ の転置ベクトル

$E(p)$  :  $p \times p$ の大きさの単位行列

## 5 観測方程式の解および観測誤差の伝播

観測方程式(4.8)を解く一般的方法として、確率的に最も尤らしい値を推定する最尤法があるが、(4.8)式のように、観測誤差が正規分布で方程式が線形という特殊な場合には、最尤法は最小自乗法に一致する。最尤法または最小自乗法によれば、観測方程式(4.8)の解は観測誤差(4.12)を考慮して次のようになる。

$$v = (\tilde{F} \cdot W \cdot F)^{-1} \tilde{F} \cdot W \cdot \lambda = (\tilde{F} \cdot F)^{-1} \tilde{F} \cdot \lambda \quad (5.1)$$

これが未知ベクトル $v$ の確率的最尤推定値であるが、この値とベクトル $v$ の真値との差、つまり誤差、の程度は、同じく、最尤法または最小自乗法により、次のように見積もられる。

$$\Sigma = (\tilde{F} \cdot W \cdot F)^{-1} = \varepsilon^2 (\tilde{F} \cdot F)^{-1} \quad (5.2)$$

$$(W = \varepsilon^{-2} E(p))$$

但し $\Sigma$ とは、未知ベクトル $v$ の誤差の分散、共分散行列のことである。すなわち

$$\Sigma \equiv V(v) \equiv \begin{pmatrix} \sigma_x^2 & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{xy} & \sigma_y^2 & \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} & \sigma_{yz} & \sigma_z^2 \end{pmatrix} = \varepsilon^2 (\tilde{F} F)^{-1} \quad (5.3)$$

$V$  : 分散を示す記号

この誤差の分散・共分散行列 $\Sigma$ の拠って来るところは観測誤差 $\varepsilon^2$ にあり、この観測誤差が(5.2)式に示す形で未知所求量の推定値に伝播したということである。

## 6 多変量誤差および観測系の評価

### 6.1 多変量誤差の評価

観測誤差  $\varepsilon^2$  に対し,  $\varepsilon^2 (\tilde{F}F)^{-1}$  が未知ベクトル  $\mathbf{v}$  の推定誤差であることは前章でのべた。この推定誤差の程度が小さい程, 未知ベクトル  $\mathbf{v}$  は良く求まったことになる。従って, 推定誤差の程度が小さくなるよう種々方策をとるとよい。処が, 未知量が多次元ベクトルのように多変量である場合には, 誤差の程度が小さいとか大きいとかいうことの意味が必ずしも明瞭ではない。たとえば, 2変量の場合で, 誤差の分散・共分散行列が

$$\Sigma_1 = \begin{pmatrix} 0.9 & 0 \\ 0 & 0.7 \end{pmatrix}, \quad \Sigma_2 = \begin{pmatrix} 0.1 & 0 \\ 0 & 0.2 \end{pmatrix}$$

の二者では  $\Sigma_2$  の方が誤差の程度が小さいことは誰れの目にも明らかであるが,

$$\Sigma'_1 = \begin{pmatrix} 1.0 & 0 \\ 0 & 2.0 \end{pmatrix}, \quad \Sigma'_2 = \begin{pmatrix} 2.5 & 0 \\ 0 & 0.5 \end{pmatrix}$$

のようなときには, 判断に苦しむ。

このような場合, 誤差の程度を測る方法として, いくつか考えられているが, それらのうち代表的なものを挙げれば次のとおりである。

1. trace ( $\Sigma$ )
2. Max ( $\Sigma$ )
3. det ( $\Sigma$ )

1. trace ( $\Sigma$ ) は誤差の分散・共分散行列  $\Sigma$  の対角和であり, この値が小さい程よいとする。

2. Max ( $\Sigma$ ) は誤差の分散・共分散行列  $\Sigma$  の各要素のうちの最大の値 (対角要素のうちのいずれかとなる) を以て示すもので, この値が小さい程よいとする。

3. det ( $\Sigma$ ) は誤差の分散・共分散行列  $\Sigma$  の行列式の値を以て示すもので, この値が小さい程よいとする。

ちなみに, これらの評価方法を先ほどの例にあてはめてみると,  $\Sigma_1$ ,  $\Sigma_2$  については, どの評価方法でも  $\Sigma_2$  の方がよいとなるが,  $\Sigma'_1$ ,  $\Sigma'_2$  については

$$\text{trace}(\Sigma'_1) = \text{trace}(\Sigma'_2)$$

$$\text{Max}(\Sigma'_1) < \text{Max}(\Sigma'_2)$$

$$\det(\Sigma'_1) > \det(\Sigma'_2)$$

となり評価法の違いにより答は, まちまちとなる。このように評価方法によって答が違ってくのは問題であるが, 現在では trace (または trace の一般形である 2 次形式) を用いるのが普通である。これは, 誤差の評価関数として直感的によく納得できること, 計算が比較的容易なことによるものと思われる。しかし, 「観測系の評価に関するひとつの数学的理論」<sup>3), 4)</sup> においても述べてあるように,

理論的に考えてゆくと,  $\det(\Sigma)$  およびそれと同等のもの (たとえば, いうまでもないことかもしれないが  $\log(\det(\Sigma))$  など) 以外には: 評価関数はいりえないという結論に達する。(詳しくは参考文献 3), 4) 参照)

従って本報告では, 評価関数としては,  $\det(\Sigma)$  を採用する。

### 6.2 観測系の評価

観測系とは, ある未知状態を知るための総合的な観測形態であるので, 未知状態を正確に知ることができればできる程よい観測系ということになる。つまり, 未知所求量の誤差の分散・共分散行列式 ( $\det(\Sigma)$ ) の値が小さければ小さい程よい観測系ということができる。しかし, 現実的には, よい観測系であるためには, 精度のよいことその他に, 観測系全体の価格が安いこと, 取り扱いが簡単であることなども要求される。このように観測系の良否の判定は色々な因子が絡らんでくるので, かなりむづかしい問題と思われる。しかし, 取り扱いやすさなどは, 経費として扱えるし, 価格はもちろん経費の中に入れることができるので, かなりの部分を経費として考えてよいと思われる。つまり観測系を評価するための因子として, できるだけ単純に考えるならば, 精度と経費が主要なものと考えられる。また, 精度と経費との関係は, 経費を多くとれば精度はよくなり, 経費を少くすると精度は下がるというのが一般則であるので, 下記のような効率の概念を, 観測系の評価関数として導入するのが都合よい。詳細は参考文献 5) を参照されたい。

$$\text{観測効率}(e) = \frac{\text{精度}(h)}{\text{経費}(g)} \quad (6.1)$$

ただし

$$\text{精度}(h) = \{\det(\Sigma)\}^{-\frac{1}{N}} \quad (6.2)$$

$N$ : 行列  $\Sigma$  の大きさ, 本報告では 3 次元ベクトルを扱う関係上  $N=3$

この観測効率( $e$ )の値が大きい程よい観測系であると考ええる。

本報告では, 経費( $g$ )は観測機器の個数  $p$  に比例すると単純に考える。すなわち, 観測機器 1 個あたりの経費を  $g$  と表わせれば

$$\text{経費}(g) = p \cdot g \quad (6.3)$$

従って

$$\text{観測効率}(e) = \frac{|\Sigma|^{-\frac{1}{3}}(\text{精度})}{p \cdot g(\text{経費})} \quad (6.4)$$

このように考えると, 同じ個数の観測機器の場合は, 経費は一定なので, 精度だけを問題にすればよいことになる。つまり, そのような条件下では, 精度がよければ, 観測効率がよいことであり, 良い観測系ということができる。



## 7 最適観測軸配置

観測系の評価関数として観測効率 $\epsilon$ を採用し、この値が大きい程よい観測系であるとした。また前述したように、同じ個数の範囲内では精度がよいということが観測効率 $\epsilon$ がよいということになる。精度がよいとは(6.2)式に示す $\{\det(\Sigma)\}^{-\frac{1}{N}}$ の値が大きいことであり、 $\det(\Sigma)$ の値が小さければ小さい程よい観測系ということになる。

上述の誤差の分散・共分散行列 $\Sigma$ は(5.2)式で表わされているので、その行列式 $\det(\Sigma)$ は

$$\begin{aligned}\det(\Sigma) &= \det\{\epsilon^2(\tilde{F}F)^{-1}\} \\ &= \frac{\det\begin{pmatrix} \epsilon^2 & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon^2 & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon^2 \end{pmatrix}}{\det(\tilde{F}F)} \\ &= \frac{\epsilon^6}{\det(\tilde{F}F)}\end{aligned}\quad (7.1)$$

となる。

ここに(4.10)式に示すように

$$F = \begin{pmatrix} l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ l_p & m_p & n_p \end{pmatrix} \equiv (l \ m \ n) \quad (7.2)$$

ただし

$$l = \begin{pmatrix} l_1 \\ l_2 \\ \vdots \\ l_p \end{pmatrix} \quad m = \begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \\ \vdots \\ m_p \end{pmatrix} \quad n = \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ \vdots \\ n_p \end{pmatrix} \quad (7.3)$$

従って

$$\begin{aligned}\det(\tilde{F}F) &= \det\left\{\begin{pmatrix} \tilde{l} \\ \tilde{m} \\ \tilde{n} \end{pmatrix} (l \ m \ n)\right\} \\ &= \det\begin{pmatrix} l^2 & lm & ln \\ ml & m^2 & mn \\ nl & nm & n^2 \end{pmatrix}\end{aligned}\quad (7.4)$$

ただし $lm$ 等はベクトルの内積を示す。

となる。

観測誤差 $\epsilon$ は完全な偶発誤差と考えているので、自己以外のどんな量にも相関しないということであり、且つ(7.

1)式)の分母には $\epsilon$ は含まれていないから、つまり、分母と分子は互いに無関係であるから、 $\det(\Sigma)$ を最小にするということは(7.1)式について

イ. 分子 $\epsilon^6$ を最小にする。

ロ. 分母 $\det(\tilde{F}F)$ を最大にする。

の2項に分離できる。ここで、イ項については観測誤差 $\epsilon$ を小さくするという事で明白であり、それ以上付け加えるべきことはない。ロ項については(7.4)式を見れば、この値を最大にするような $(l \ m \ n)$ つまり観測軸の方向 $(l_i \ m_i \ n_i)$ の組 $(i = 1, 2, \dots, p)$ を見つければ、それが最適観測軸配置ということになる。もしこのような最適観測軸配置を見つけることができたならば、3次元ベクトル量計測の際の貴重な提言となる。

### 7.1 観測軸配置の一般的性質

最適観測軸配置を見つける前に、観測軸配置に関する一般的性質を明らかにしておく。

観測軸配置は既に述べたとおり行列 $F$ で表わされ観測系のよさは $\det(\tilde{F}F)$ で表わされる。これに関連して付録Aでは $F$ への諸変換に対する $\det(\tilde{F}F)$ の不変性について述べている。 $F$ への諸変換とは観測軸の配置を変換することであり、 $\det(\tilde{F}F)$ の不変性とはそのような変換に対して観測系の良さは変わらないということを意味する。従って、付録Aにあげられているいくつかの不変変換を言葉で説明すれば、

① 空間内において観測系をそのまま任意に回転しても観測系のよさは変わらない。(付録A 2(1))

② 観測系をそのまま鏡映変換しても観測系のよさは変わらない。(付録A 2(2))

③ 観測系のなかの任意の観測軸について、その向きを逆にしても観測系のよさは変わらない。(付録A 1(2))ということになる。

### 7.2 最適観測軸配置の解

最適観測軸配置を求めるには $\det(\tilde{F}F)$ を最大ならしめる $F$ すなわち $(l \ m \ n)$ を求めればよいことは既に述べた。この問題は初等的に解くことができたが少し長くなるので、この解法の詳細については付録Bに廻し、本文では付録Bに書かれている内容のあらすじを追ってゆく。

#### 7.2.1 最適解であるための必要充分条件

まず最初に $(l \ m \ n)$ が下記拘束条件①のもとで、 $\det(\tilde{F}F)$ を最大ならしめる最適解であるための必要充分条件を明らかにする。その条件とは下記の②③項であるが、これはアダマールの定理を用いて解かれる。(付録B

2)

$$\text{① } l_i^2 + m_i^2 + n_i^2 = 1 \quad (i=1, 2, \dots, p; p \geq 3) \quad (7.5)$$

$$\text{② } lm = mn = nl = 0 \quad (7.6)$$

$$\text{③ } l^2 = m^2 = n^2 \quad (7.7)$$

この3条件を満たす  $(l, m, n)$  があれば、それは最適解のひとつである。このような最適解が果して存在するかどうかについては計算の結果、全ての  $p \geq 3$  の場合について存在することが分っている。従って上記3条件を満たさないものは最適解ではない。

### 7.2.2 最適解同志の和の規則

さて次に上記3条件の下における最適解同志の和の規則を明らかにする。それは

④  $l_1, m_1, n_1$  (次元数すなわち観測軸の個数  $p_1$ ) が上記3条件を満たし、 $l_2, m_2, n_2$  (次元数すなわち観測軸の個数  $p_2$ ) が上記3条件を満たすならば、

$$l = \begin{pmatrix} l_1 \\ l_2 \end{pmatrix} \quad m = \begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \end{pmatrix} \quad n = \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \end{pmatrix} \quad (7.8)$$

なる  $l, m, n$  (次元数すなわち観測軸の個数  $p = p_1 + p_2$ ) も上記3条件を満たす。

ということで、これは簡単な計算により証明される(付録B 3)。この物理的意味は、 $p_1$  個からなる最適観測軸配置と  $p_2$  個からなる最適観測軸配置とを任意の位置関係に合わせたものは  $p_1 + p_2$  からなる最適観測軸配置のひとつであるということである。このことは必然的に複合解および基本解の概念を生ずる。すなわち複合解とは二つ以上の解の結合したものであり、基本解とは他の解の結合によって表わされない解のことである。

### 7.2.3 最適解の概観

さて最後に前記3条件①②③を満たす最適解を求める。その方法は一種の未定係数法による。(付録B 4)それは、解のおそらくとるであろう形を想定し、それにおける未定係数を解の条件に合うように決めるという方法である。本節では解の形の想定について述べ、未定係数の値の決定については次節で述べる。

1) まず  $l, m, n$  のうちどれかひとつ、例えば  $n$  の全ての成分が同一の値(値そのものは未定、後に決める)をとるものを考える。すなわち  $n_i = c$  ( $i = 1, 2, \dots, p$ ) なるもの考える。これを  $(l, m, c)$  とおく。正弦・余弦の零和の規則(付録D)から、このように限定された形  $(l, m, c)$  が解となりうることは充分予想される。実際、

計算の結果、上述の3条件を満たす  $(l, m, c)$  が存在することがわかり、その具体的値を決めることができる(付録B. 4.1)。このような形  $(l, m, c)$  の幾何学的意味は、まず前提条件①  $l_i^2 + m_i^2 + c^2 = 1$  ( $i = 1, 2, \dots, p$ ) より、各観測軸  $(l_i, m_i, c)$  が単位ベクトルであり、単位球面内に限定されることを意味するが、更に、Z成分  $n_i$  が  $i$  によらず一定 ( $n_i = c, i = 1, 2, \dots, p$ ) ということから、その全てのベクトルの先端が  $Z = c$  なる平面上になければならないことを示す。これは図-7に示すように、いずれの観測軸(単位ベクトル)もひとつの円錐面上にあることを意味する。このような解を円錐解と名づける。

2) 前節の結果から、次の様な形も基本解となりうるであろうことが予想される。

$$(l, m, n) = \begin{pmatrix} {}^1l & {}^1m & {}^1c \\ {}^2l & {}^2m & {}^2c \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ {}^ql & {}^qm & {}^qc \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ p_q \end{pmatrix} \quad (7.9)$$

ここに

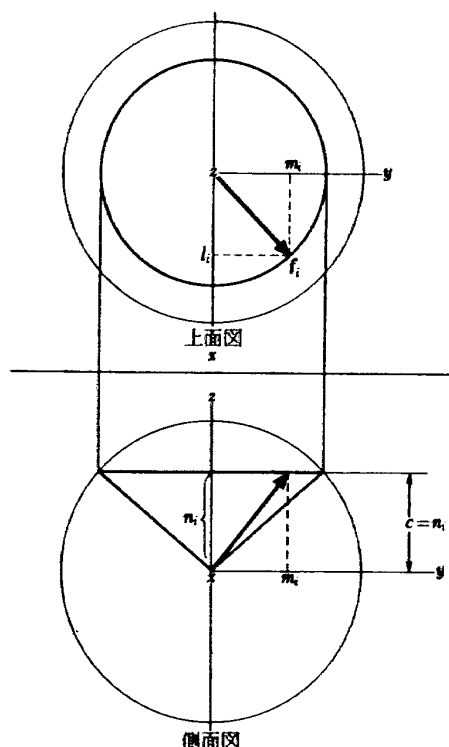


図 7

$$\begin{aligned}
 {}^1\mathbf{c} &= \begin{pmatrix} {}^1c \\ {}^1c \\ \vdots \\ {}^1c \end{pmatrix} \quad p_1 \text{次元} & {}^2\mathbf{c} &= \begin{pmatrix} {}^2c \\ {}^2c \\ \vdots \\ {}^2c \end{pmatrix} \quad p_2 \text{次元} \\
 {}^q\mathbf{c} &= \begin{pmatrix} {}^qc \\ {}^qc \\ \vdots \\ {}^qc \end{pmatrix} \quad p_q \text{次元}
 \end{aligned}
 \tag{7.10}$$

これは図-8に示すように、円錐軸を同じくする多数の円錐よりなる形で、いずれの観測軸も、この円錐群の中のどれかひとつの円錐面上になければならない。このような形の解が、もし存在するならばその幾何学的意味を汲んで多重円錐解と名づける。前節の「円錐解」は本節の多重円錐解の特殊な場合（ $q=1$ の場合）で、いい換えればそれは一（重）円錐解ということになる。

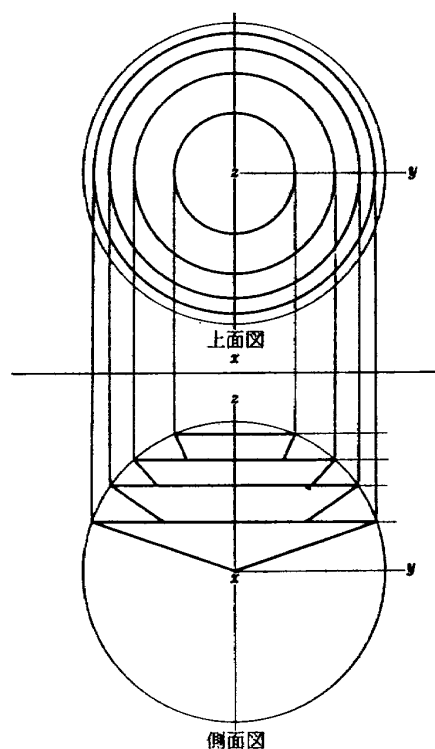


図 8

実際、計算によれば、上記の形が解となりうる事が分り、 ${}^i\mathbf{l}$ ,  ${}^i\mathbf{m}$ ,  ${}^i\mathbf{c}$  ( $i=1, 2, \dots, q$ )の具体的な値を定めることができる。（付録B. 4. 2）

3) 以上の結果から、前節の円錐群を3次元的に重ね合わせたものも基本解となりうるであろうことが予想される。

$$\begin{aligned}
 (\mathbf{l}, \mathbf{m}, \mathbf{n}) &= \begin{pmatrix} {}^{11}\mathbf{l} & {}^{11}\mathbf{m} & {}^{11}\mathbf{c} \\ {}^{12}\mathbf{l} & {}^{12}\mathbf{m} & {}^{12}\mathbf{c} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ {}^{1q_1}\mathbf{l} & {}^{1q_1}\mathbf{m} & {}^{1q_1}\mathbf{c} \\ {}^{21}\mathbf{l} & {}^{21}\mathbf{c} & {}^{21}\mathbf{n} \\ {}^{22}\mathbf{l} & {}^{22}\mathbf{c} & {}^{22}\mathbf{n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ {}^{2q_2}\mathbf{l} & {}^{2q_2}\mathbf{c} & {}^{2q_2}\mathbf{n} \\ {}^{31}\mathbf{c} & {}^{31}\mathbf{m} & {}^{31}\mathbf{n} \\ {}^{32}\mathbf{c} & {}^{32}\mathbf{m} & {}^{32}\mathbf{n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ {}^{3q_3}\mathbf{c} & {}^{3q_3}\mathbf{m} & {}^{3q_3}\mathbf{n} \end{pmatrix} \begin{matrix} {}^1p_1 \\ {}^1p_2 \\ \vdots \\ {}^1p_{q_1} \\ {}^2p_1 \\ {}^2p_2 \\ \vdots \\ {}^2p_{q_2} \\ {}^3p_1 \\ {}^3p_2 \\ \vdots \\ {}^3p_{q_3} \end{matrix} \\
 p &= \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^{q_i} {}^ip_j
 \end{aligned}
 \tag{7.11}$$

ここに

$${}^{ij}\mathbf{c} = \begin{pmatrix} {}^{ij}c \\ {}^{ij}c \\ \vdots \\ {}^{ij}c \end{pmatrix} {}^ip_j \quad \begin{matrix} (i=1, 2, 3, \\ j=1, 2, \dots, q_i) \end{matrix}
 \tag{7.12}$$

これは図-9に示すように、前節で述べた円錐群を直交3軸に結合させたもので、いずれの観測軸も、これらの円錐群の中のどれかひとつの円錐面上になければならない。このような形の解がもし存在するならば、その幾何学的意味を汲んで3極多重円錐解と名づける。3極とは直交3軸の意味である。従って前節の多重円錐解とは、3極多重円錐解の特殊な場合（ $q_2 = q_3 = 0$ ）で、いい換えれば1極多重円錐解ということになる。また前々節の円錐解とは1極1（重）円錐解ということになる。実際の計算によれば、上記3極多重円錐解が存在することが証明され、各観測軸の具体的な値を決めることができる。（付録B. 4. 3）

4) 以上の結果から、 $n$ 極解も存在するであろうことが予想される。実際、計算によれば、 $n$ 個の観測軸からなる最適観測軸配置の $n$ 個の観測軸の方向を $n$ 極とし、各極には等価な（付録C. 3）多重円錐を配置すれば、それが最適観測軸配置のひとつであることが証明される。（付録B. 4. 4）および図-10を参照されたい。

### 7.3 最適解の具体例

ここでは前節で述べた各種の解すなわち1極解(1(重)円錐解, 多重円錐解), 3極解,  $n$ 極解の具体的姿を明ら

かにする。これらが確かに最適解であるとの証明は付録Bに示してあるので, ここではその結果だけを述べる。

#### 1) 1極解

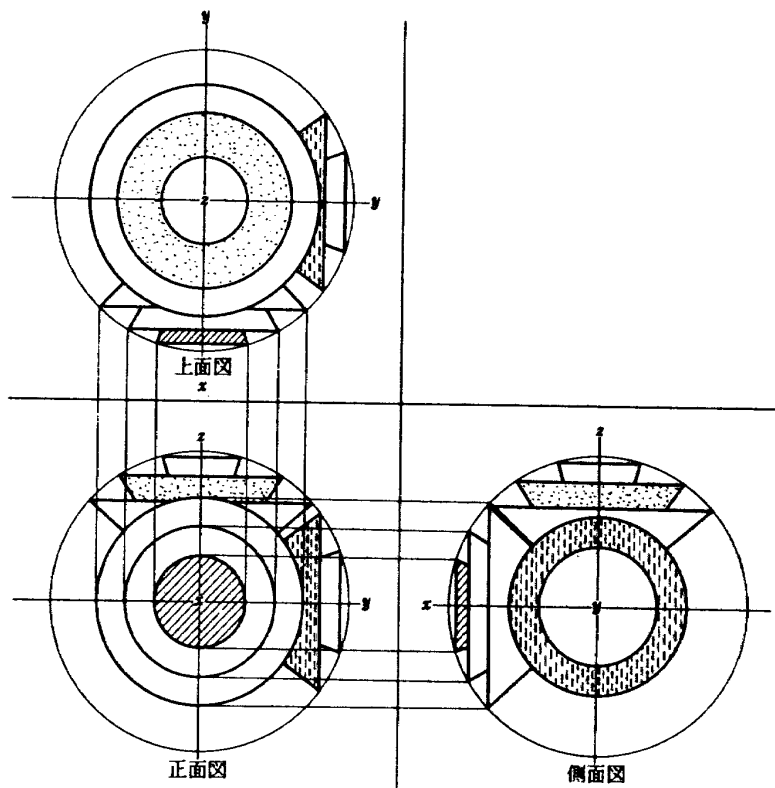


図 9

$p$ 個の観測軸

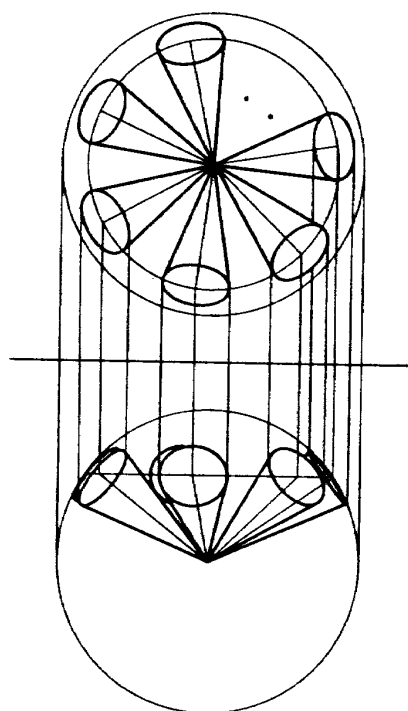


図 10  $n$  極解

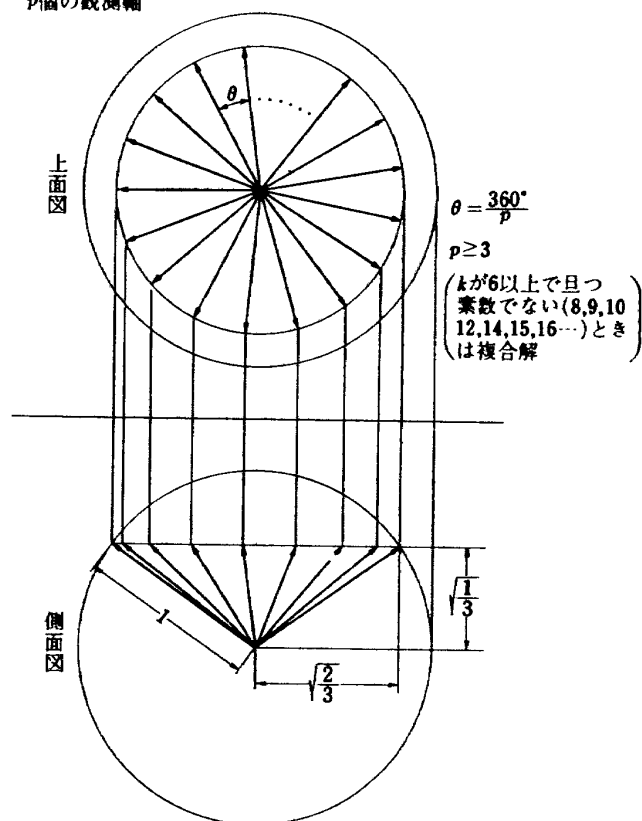


図 11 1極1重円錐解

## (a) 1(重)円錐解(付録B. 4. 1))

図-11に示すとおり円錐上に等間隔に観測軸を配置したものである。このような形のものを矢円錐と定義する

## (付録C)

観測軸の数 $p$ が3のときは図-12に示すとおりで、これは3軸直交系となる。 $p=4$ のときが図-13で、図-

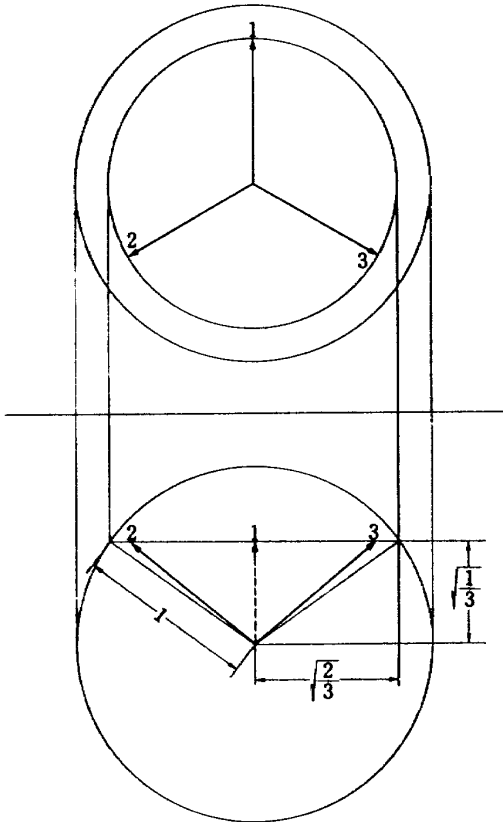
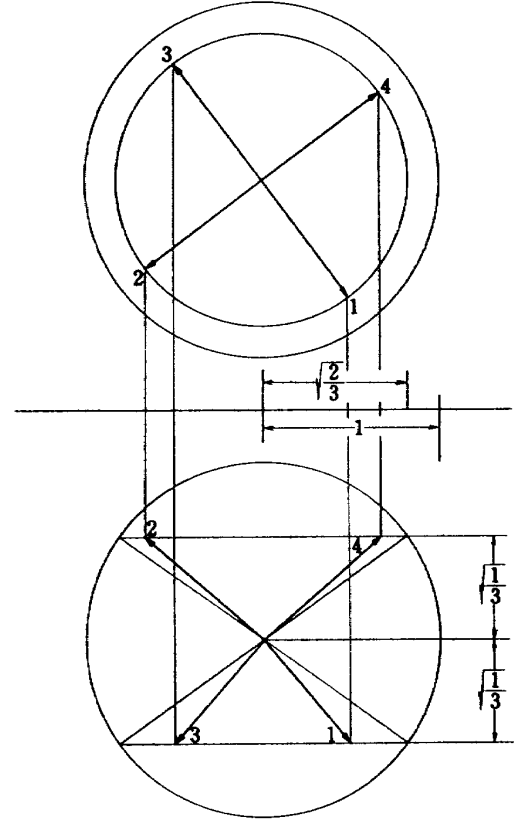
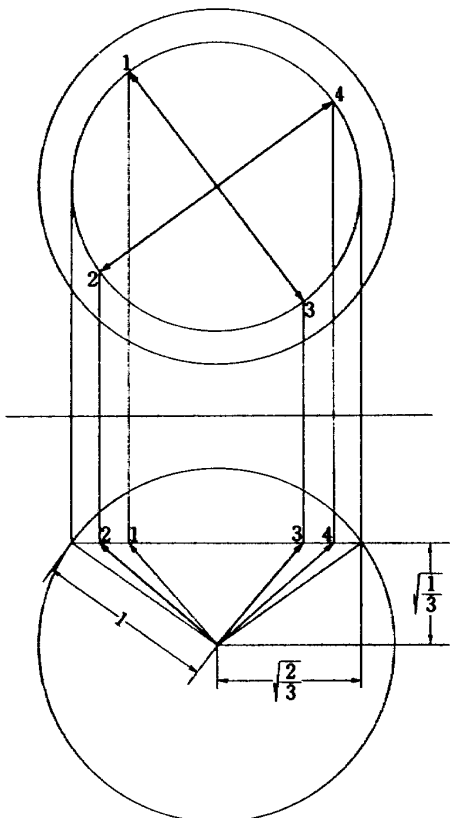
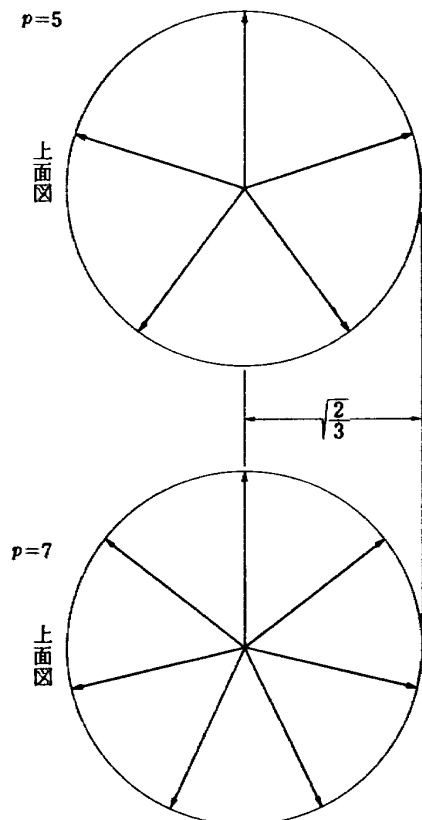
図 12  $p=3$  の場合

図 14 テトラポッド

図 13  $p=4$  の場合図 15  $p=5, 7$  の場合

14は、図-13の場合と同じく $p=4$ であるが、解の一般的性質③に従って、図-13における観測軸1および3を逆向きにした場合である。これはいわゆるテトラポッド

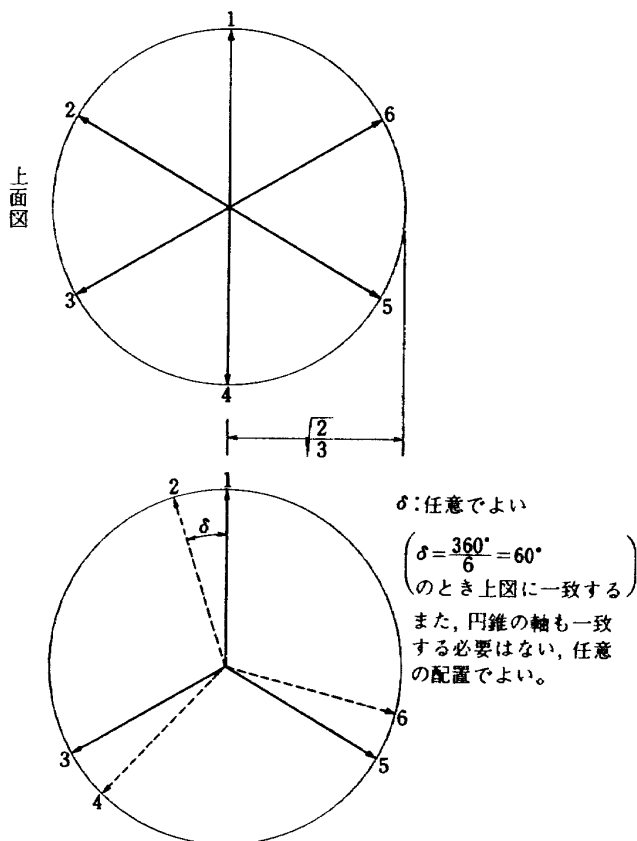


図 16  $p=6$  の場合

といわれている形である。 $p=5$ ,  $p=7$  の場合は図-15に示す。ただしこの図は上面図だけで、側面図は省略してある。

$p=6$  の場合は図-16に示すが、これは基本解ではない。その理由は図から分るように、3つの観測軸1. 3. 5で3軸直交系(3軸の場合の最適解)を形成し、残りの2. 4. 6の3つの観測軸でやはり3軸直交系を形成する。つまり3軸のときの最適解が2つ極めて特殊な位置に複合したもので基本解ではない。

図-17に示す解は $p=12$ の場合であるが、これは4

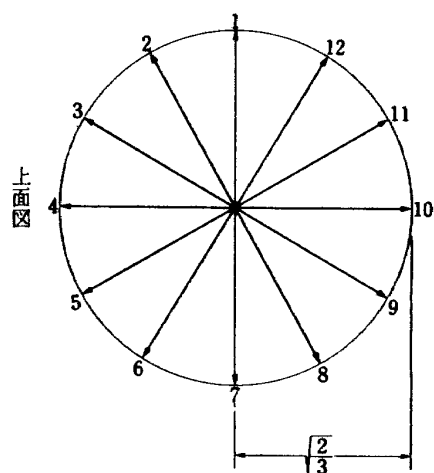
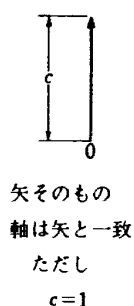
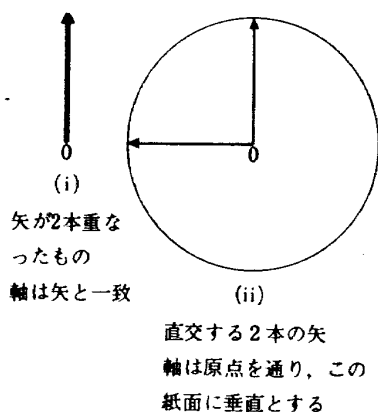


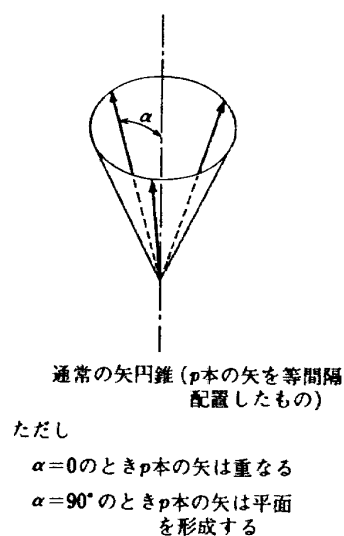
図 17  $p=12$  の場合



(a)  $p=1$



(b)  $p=2$



(c)  $p \geq 3$

図 18 矢円錐の定義

個の3軸直交系(1,5,9), (2,6,10), (3,7,11), (4,10,12)の極めて特殊な和と考えられるし, 3個の4軸最適系(1,4,7,10), (2,5,8,11), (3,6,9,12)

のやはり極めて特殊な和とも考えられる。いずれにせよ, より低次の基本解の複合で表わされるので基本解ではない。なお $p=12 (=5+7)$ の場合の解としては, これ以外に,  $p=5$ のときの最適解と $p=7$ のときの最適解の任意の空間的關係の和も解であることは最適解同志の和の規則④により明らかである。

(b) 多重円錐解(付録B. 4. 2))

多数の矢円錐からなり, 全ての矢円錐軸が同一軸に集中している形のものである。ここでいう矢円錐とは, 通常の間接の矢円錐の他に, 図-18で示す特殊な形も矢円錐の仲間として考える。詳しくは付録Cを参照されたい。この考え方は次項②3極多重円錐解の場合にも③ $n$ 極解の場合にもそのまま踏襲される。図-19に多重円錐解の一般形を示す。

円錐の高さ ${}^1c {}^2c \dots {}^qc$ は一般には確定せず, 次式によって拘束される範囲内なら任意の値をとってよい。

$$\sum_{i=1}^q p_i \left( \frac{1}{3} - {}^ic^2 \right) = 0 \quad (7.13)$$

$$\sum_{i=1}^q p_i \geq 3 \quad (7.14)$$

ここに $p_i$ とは各矢円錐における矢(観測軸)の個数である。ただし

$$p_i = 1 \text{ のときは必ず } {}^ic = 1$$

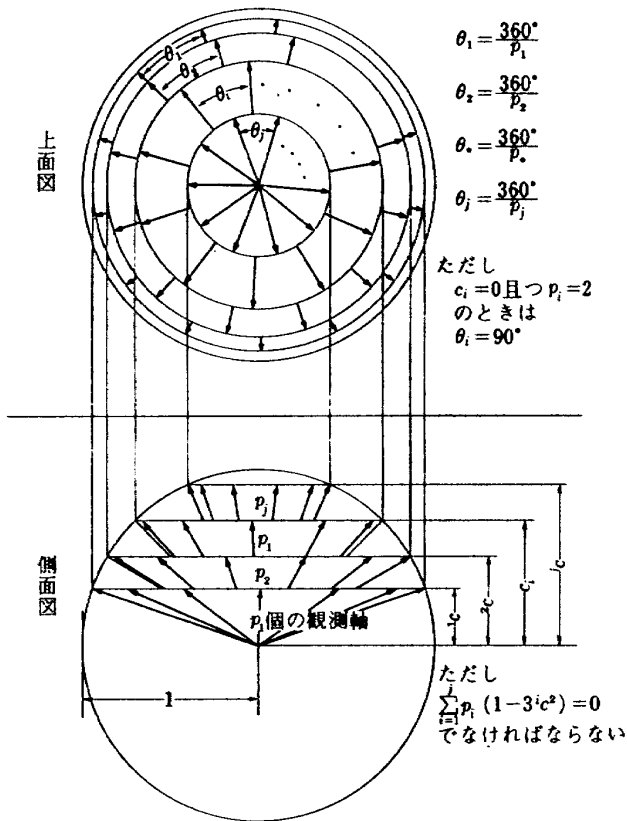


図 19 1極多重円錐解

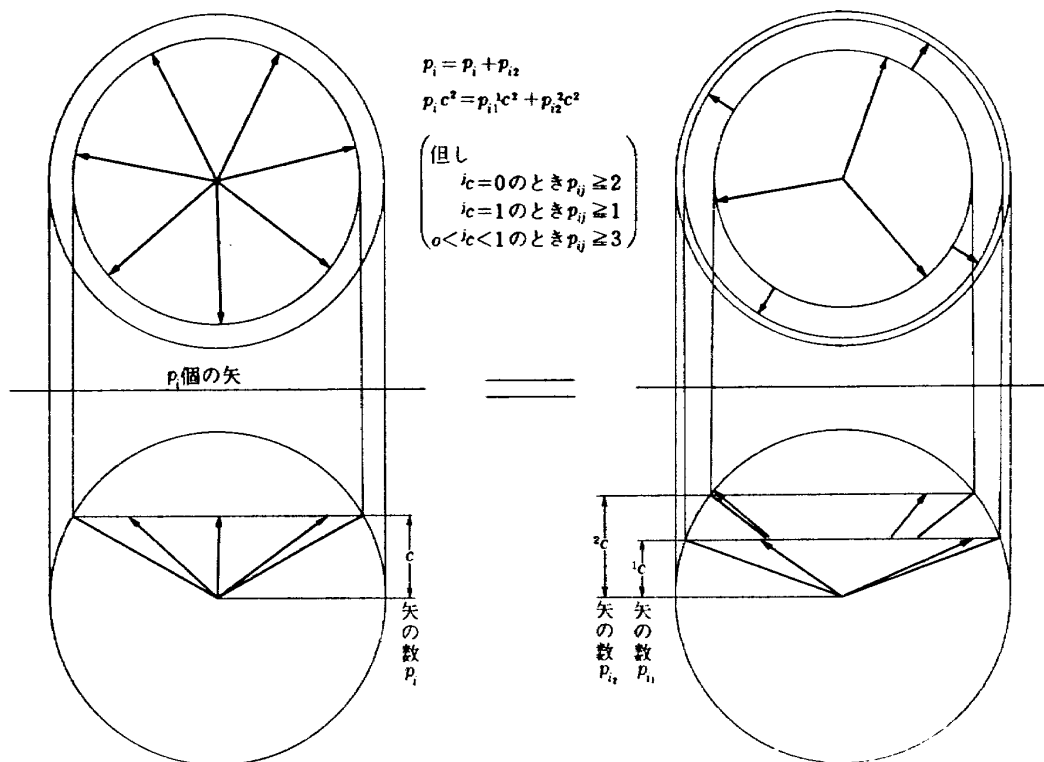


図 20 等価矢円錐

$p_i = 2$  のときは  ${}^i c = 1$  または  ${}^i c = 0$  のいずれかでなければならない (付録 C)。

また次のような大切な性質をもつ。

⑤ 任意の矢円錐について、その円錐軸の回りに、他の矢円錐と無関係に、任意に回転してよい。

⑥ 各矢円錐について、ある矢円錐上に  $p_i$  個の矢 (観測軸) があるとき、 $p_i$  を  $p_{i1}$  と  $p_{i2}$  との和に分解し ( $p_{i1} + p_{i2} = p_i$ ) 図-20 に示すように、 $p_{i1}$  個の矢 (観測軸) からなる矢円錐および  $p_{i2}$  個の矢 (観測軸) からなる矢円錐の和として考えてよい (但し  $p_{i1}^2 c^2 + p_{i2}^2 c^2 = p_i^2 c^2$ ) このように分解した後の矢円錐も従来の矢円錐と同じ性質を持つことは言うまでもない。すなわち上記⑤および⑥の性質を再び持つ。

矢円錐に関する上記の二つの性質⑤⑥は前節で述べた 1 極解の場合にもあてはまるし、次節以後で述べる 3 極解、 $n$  極解の場合にも成り立つ。特に 1 極解の場合には、1 極 1 (重) 円錐解と 1 極多重円錐解とは⑥の性質を通じて等価 (付録 C) であるといえる。

図-21~図-26 は  $j = 2$  の場合、つまり 2 重円錐の場合で、その一般形は図-21 に示される。図-22 は  $p_1 = 2, p_2 = 1$  の特殊な場合で、この場合は 3 軸直交系に一致する。図-23 は  $p_1 = 3, p_2 = 1$  の場合で、これ

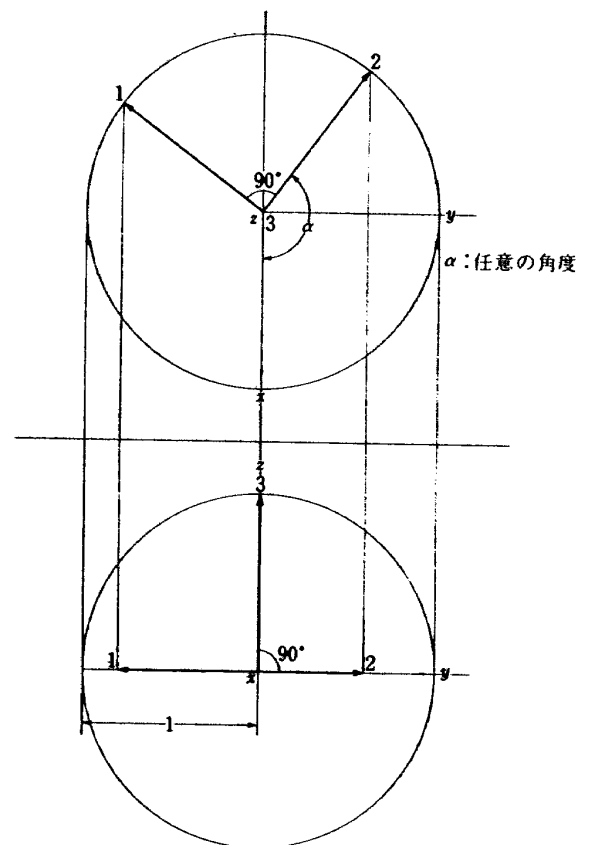


図 22  $p_1 = 2, p_2 = 1$  の場合

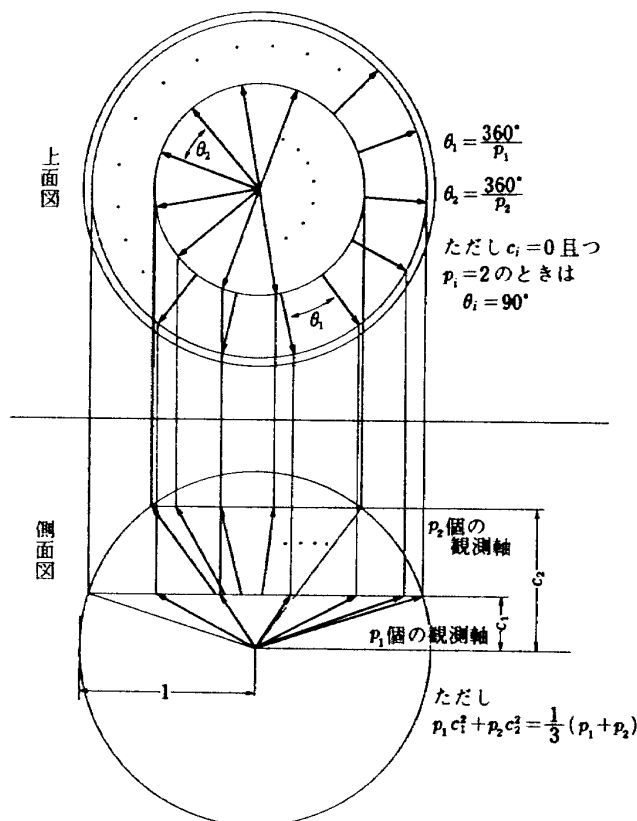


図 21 1 極 2 重円錐解

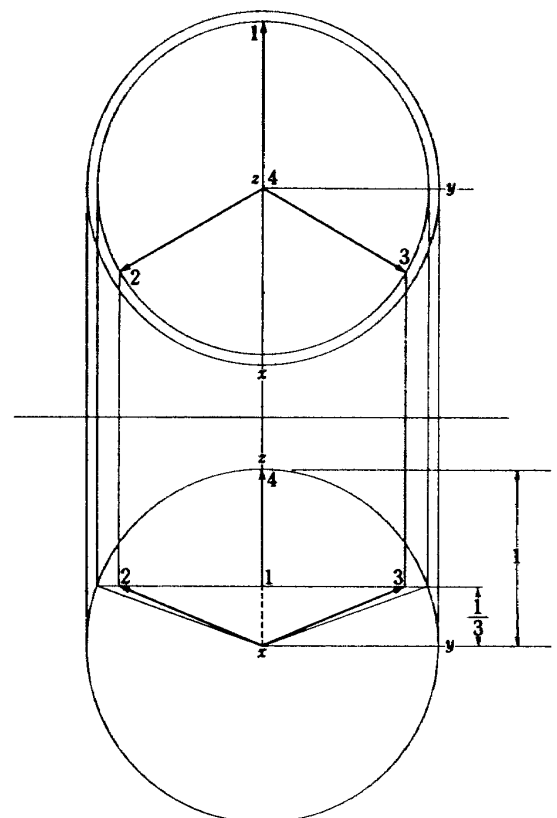
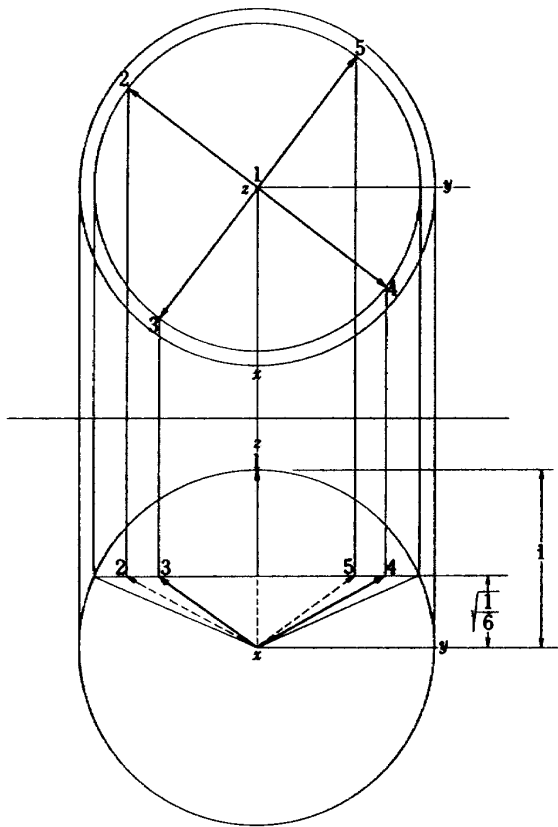


図 23  $p_1 = 3, p_2 = 1$  の場合



図 24  $p_1 = 4, p_2 = 1$  の場合

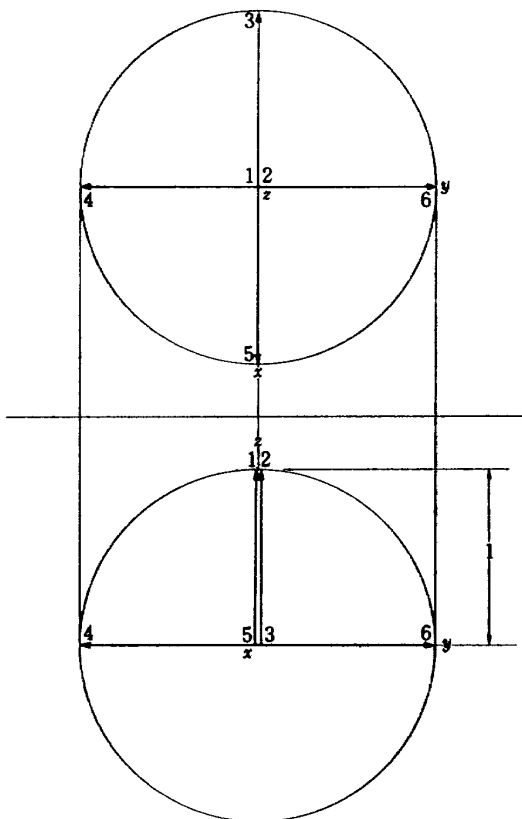
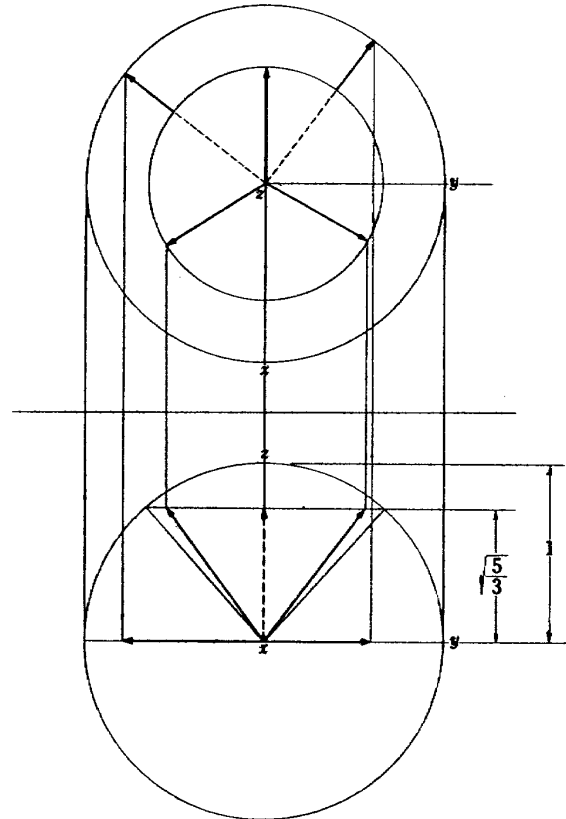
は4軸最適系のひとつであるテトラポッドの変形である。観測軸4を逆向きにするとテトラポッドとなる。図-24は $p_1 = 4, p_2 = 1$ の場合で、図-22, 23と比べて $p_1$ の値が2, 3, 4と大きくなるに連れて、円錐角がだんだん小さくなってきていることが分る。図-25は $p_1 = 4, p_2 = 2, c_2 = 1$ の場合で、これは2つの3軸最適系(1, 3, 4), (2, 5, 6)の特殊な複合解であり基本解ではない。図-26は $p_1 = 2, c_1 = 0, p_2 = 3$ の場合で重心が円錐上に来ない特殊な形である。

## 2) 3極多重円錐解(付録B. 4.3))

この解の一般形は図-27に示す。これは矢円錐が直交3軸のみに集中する形のものであり、そのときの円錐の高さに対する拘束条件は次に示すとおりである。

$xyz$ 軸に集中する円錐の高さをそれぞれ ${}^1i c (i = 1, 2 \dots q_1)$ ,  ${}^2i c (i = 1, 2 \dots q_2)$ ,  ${}^3i c (i = 1, 2 \dots q_3)$ とし、その円錐上の観測軸の数をそれぞれ ${}^1p_i (i = 1, 2 \dots q_1)$ ,  ${}^2p_i (i = 1, 2 \dots q_2)$ ,  ${}^3p_i (i = 1, 2 \dots q_3)$ とするととき

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^{q_1} {}^1p_i \left( \frac{1}{3} - {}^1i c^2 \right) \\ &= \sum_{i=1}^{q_2} {}^2p_i \left( \frac{1}{3} - {}^2i c^2 \right) \\ &= \sum_{i=1}^{q_3} {}^3p_i \left( \frac{1}{3} - {}^3i c^2 \right) \end{aligned} \quad (7.15)$$

図 25  $p_1 = 4, p_2 = 2, c_2 = 1$  の場合図 26  $p_1 = 2, c_1 = 0, p_2 = 3$  の場合

$$\sum_{i=1}^3 \sum_{k=1}^{q_k} {}^k p_i \geq 3 \quad (7.16)$$

でなければならない。

図-28～図-31はこの解のうちの、それぞれ図に示すとおりの特定な場合の図である。図-28は3軸直交系と一致する。

### 3) $n$ 極多重円錐解(付録B.4.4))

これは矢円錐が $n$ 個の最適観測軸に集中したもので $n=4$ の場合が図-32に示され、更にその特定な場合が図-33に示されている。 $n$ 極に集中する矢円錐の満たさなければならない条件は次の通りである。

$i$  極に配置する矢円錐を  $({}^i l \ {}^i m \ {}^i c)$  とし、矢(観測軸)の個数を  ${}^i p$  とするとき

$${}^1 p = {}^2 p = \dots = {}^n p \quad (7.17)$$

$${}^1 c = {}^2 c = \dots = {}^n c \quad (7.18)$$

でなければならない。

この矢円錐も矢円錐の性質⑤⑥を持つことは言うまでもない。従って性質⑥を適用すれば、この矢円錐は等価な複数個の矢円錐に分解することも出来る。

$$\begin{aligned} q_1 &= q_2 = q_3 = 1 \\ {}^1 c_1 &= {}^2 c_1 = {}^3 c_1 = 1 \\ {}^1 p_1 &= {}^2 p_1 = {}^3 p_1 = 1 \end{aligned}$$

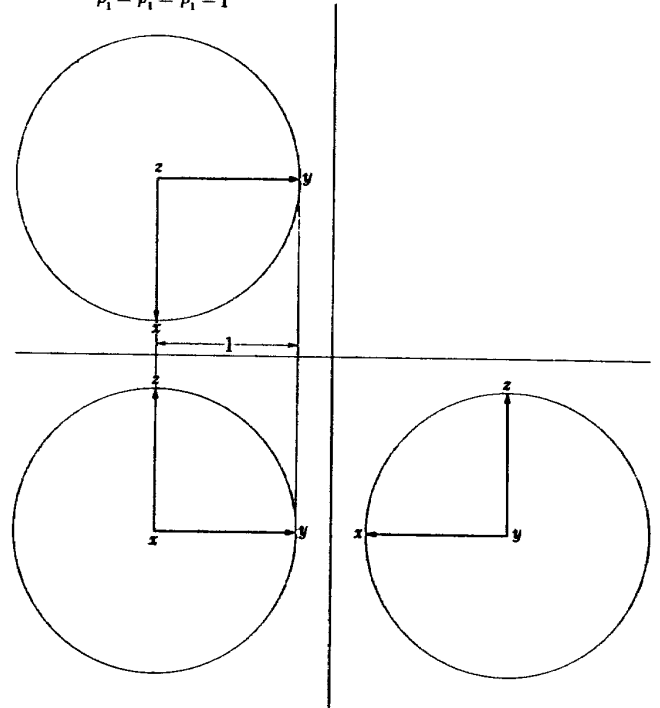


図 28

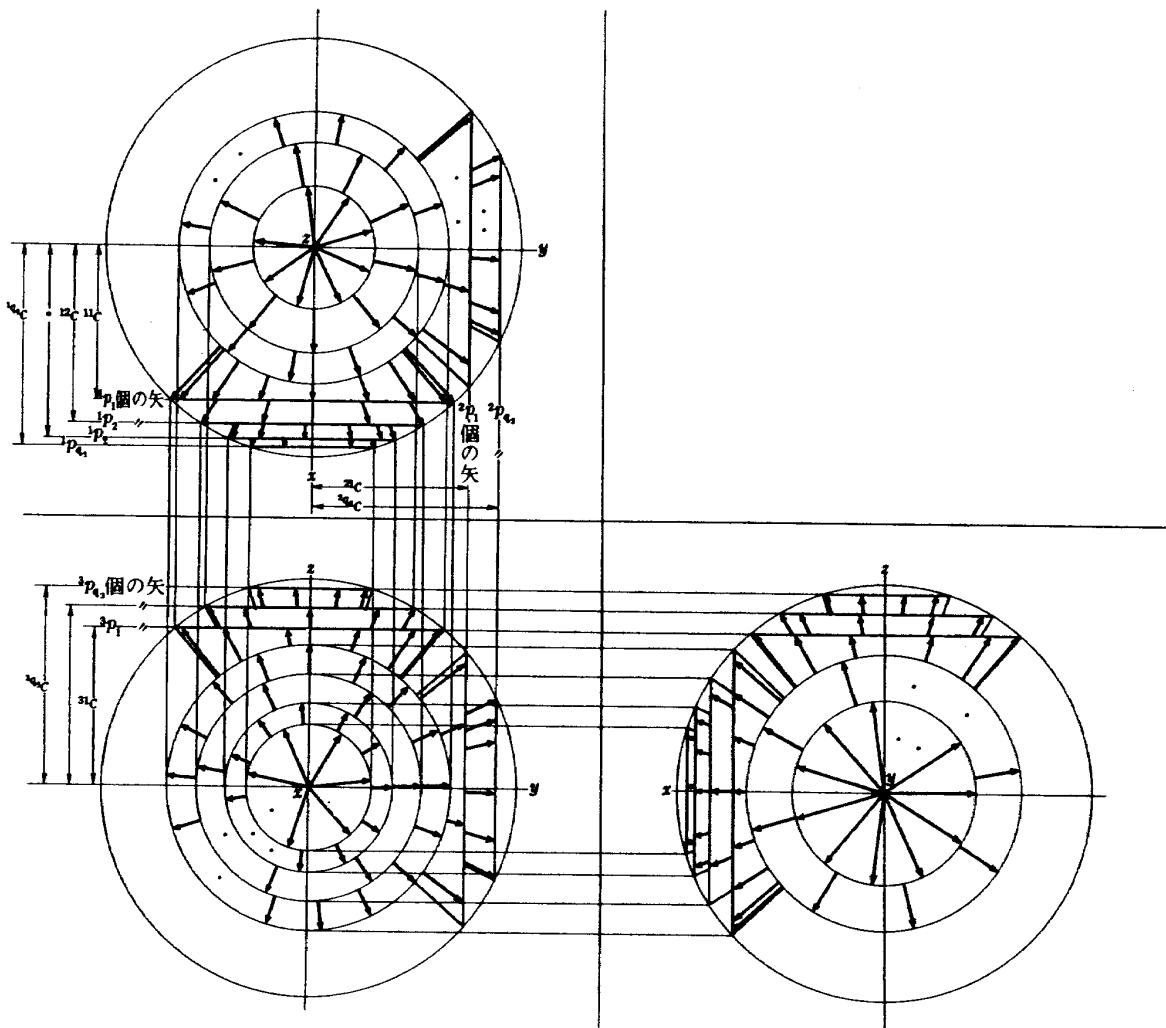


図 27 3極多重円錐解

$$q_1 = q_2 = q_3 = 1$$

$${}^1c_1 = {}^2c_1 = {}^3c_1 = 0$$

$${}^1p_1 = {}^2p_1 = {}^3p_1 = 2$$

$\alpha, \beta, \gamma$  : 任意の角度でよい

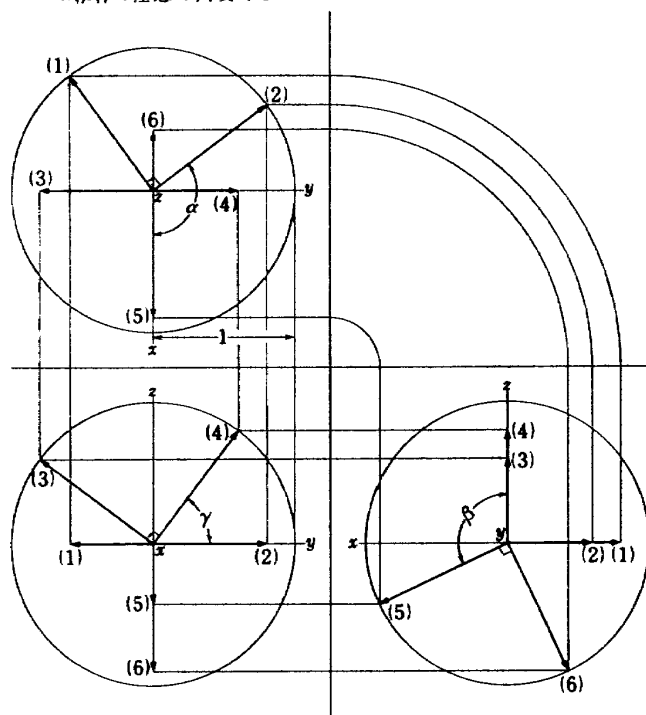


図 29

$$q_1 = q_2 = q_3 = 1$$

$${}^1p_1 = {}^2p_1 = {}^3p_1 = 3$$

$\delta_1, \delta_2, \delta_3$  : 任意の角度でよい

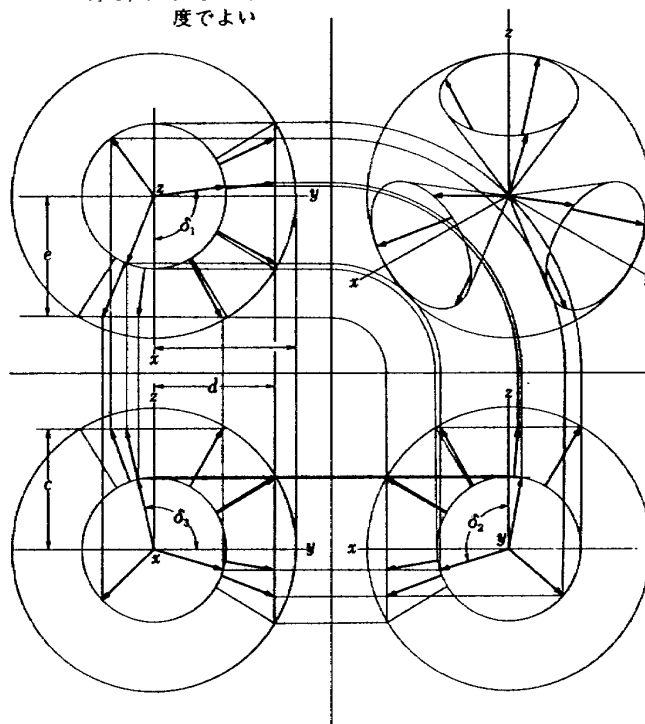


図 31

$$q_1 = q_2 = q_3 = 1$$

$${}^1c_1 = {}^2c_1 = {}^3c_1 = 0$$

$${}^1p_1 = {}^2p_1 = {}^3p_1 = 3$$

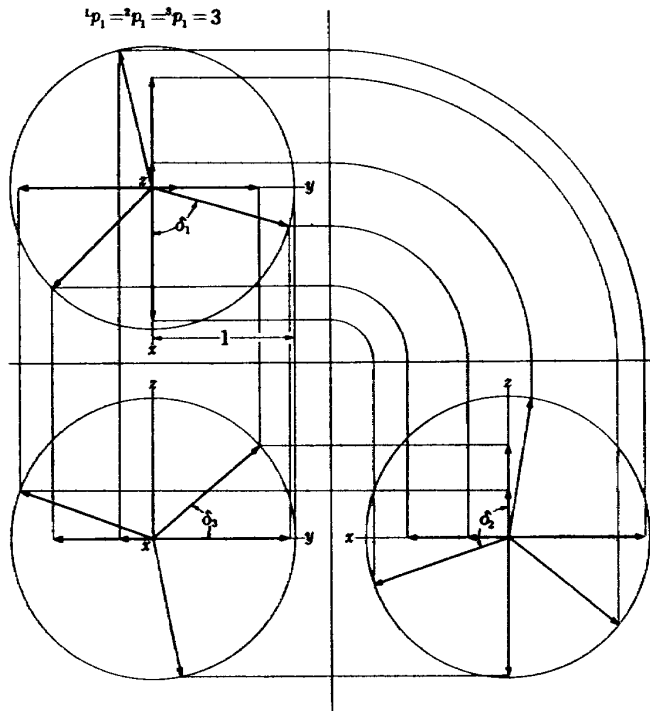


図 30

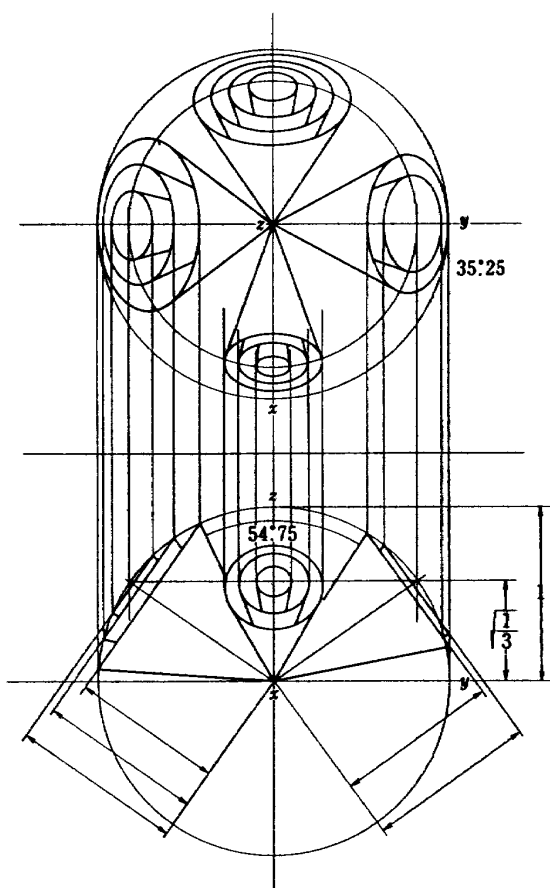


図 32 4極多重円解

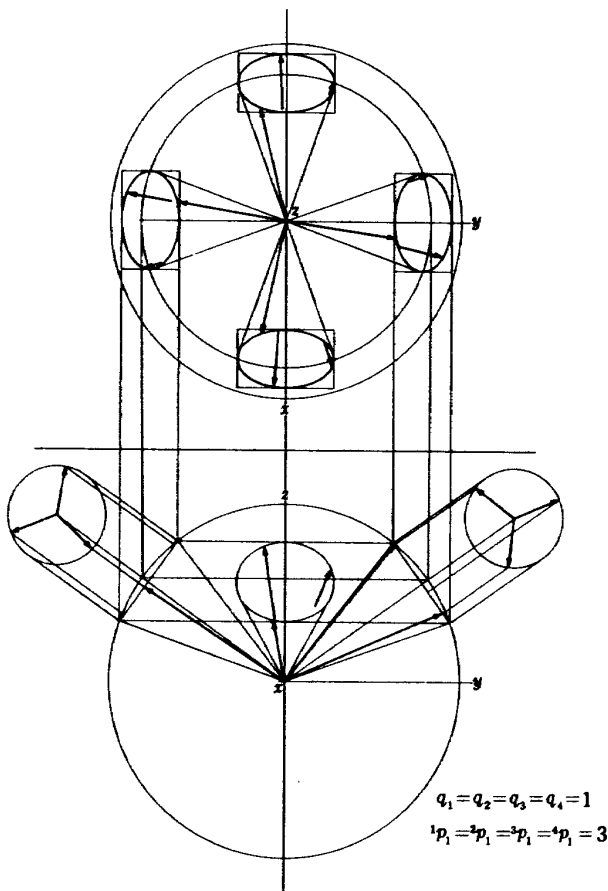


図 33 4 極解

## 8 観測方程式の解

前章では最適観測軸配置を求めたが本章では最適観測軸配置すなわち最適観測系によって得られた観測値から未知所求量を求め、同時にその精度および観測効率を明らかにする。

### 8.1 未知所求量の解

未知所求量  $v$  の解は一般的には既に (5.1) 式で与えられている。ここでは最適系における解をもう少し具体的に示す。

(5.1) 式をもう一度ここに記す。

$$v = (\tilde{F}F)^{-1}\tilde{F}\lambda \quad (5.1)(8.1)$$

ここに

$$F = (\mathbf{l} \quad \mathbf{m} \quad \mathbf{n}) = \begin{pmatrix} l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ l_p & m_p & n_p \end{pmatrix} \quad (8.2)$$

ただし最適系においては付録 B に示してあるように

$$lm = mn = nl = 0 \quad (8.3)$$

$$l^2 = m^2 = n^2 = \frac{p}{3} \quad (8.4)$$

従って

$$(\tilde{F}F) = \begin{pmatrix} l^2 & lm & ln \\ ml & m^2 & mn \\ nl & nm & n^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{p}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{p}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{p}{3} \end{pmatrix} \quad (8.5)$$

ゆえに (8.1) 式は

$$v = \begin{pmatrix} \frac{p}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{p}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{p}{3} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \tilde{l} \\ \tilde{m} \\ \tilde{n} \end{pmatrix} \lambda$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{3}{p} \tilde{l} \lambda \\ \frac{3}{p} \tilde{m} \lambda \\ \frac{3}{p} \tilde{n} \lambda \end{pmatrix} = \frac{3}{p} \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^p l_i \lambda_i \\ \sum_{i=1}^p m_i \lambda_i \\ \sum_{i=1}^p n_i \lambda_i \end{pmatrix} \quad (8.6)$$

これが最適系における未知所求量の解であり、この式に従って未知所求量を算出することができる。またこれに伴う誤差の分散・共分散行列については (5.2) 式より (8.5) 式を考慮して

$$\Sigma = \epsilon^2 (\tilde{F}F)^{-1} \quad (5.2)$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{3}{p} \epsilon^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{p} \epsilon^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{p} \epsilon^2 \end{pmatrix} \quad (8.7)$$

となる。

### 8.2 精 度

前節で誤差の分散・共分散行列を求めてあるので、精度  $h$  は (6.2) 式に従って簡単に求まる。(6.2) 式を次に再び掲げる。

$$h = \{ \det(\Sigma) \}^{-\frac{1}{3}} \quad (6.2)(8.8)$$

従って上式に (8.7) 式を代入すれば

$$h = \left\{ \left( \frac{3}{p} \epsilon^2 \right)^3 \right\}^{-\frac{1}{3}} = \frac{p}{3 \epsilon^2} \quad (8.9)$$

となる。

上式は精度 $h$ が観測器の個数 $p$ に比例することを示している。

### 8.3 観測効率

観測効率 $e$ は(6.1)式から

$$e = \frac{h}{p\epsilon^2} \quad (8.10)$$

と表わされる。

特に、観測軸の個数 $p$ のときの最適観測系における観測効率を $e(p)$ と表わせば、上式に(8.9)式を代入することにより

$$\begin{aligned} e(p) &= \frac{p}{3\epsilon^2} \cdot \frac{1}{p\epsilon^2} \\ &= \frac{1}{3\epsilon^2} \end{aligned} \quad (8.11)$$

が得られる。この場合、 $\epsilon$ の値は既に述べたように、計器1個あたりの経費であり、定数と考えているので、観測効率 $e(p)$ は(8.11)式に見られる通り、計測器の個数 $p$ に無関係となる。つまり、最適観測系の場合には、観測効率すなわち経費あたりの精度もしくは、精度と経費両方を考えた場合の観測系のよさは、観測器の個数を増減させても、最適観測系に編成する限り、変らない。

## 9 故障の考慮

冗長度のある観測系において計器が故障し、その故障計器が摘出された場合には、

イ. 故障計器のデータを除外する。(計器の位置はそのまま)

ロ. 故障計器を除外して、残った計器を最適系に再編成する。

等の方法により精度を向上させることができる。たとえば図-13において番号4の計器が故障した場合、その計器のデータを用いず、残りの1, 2, 3の計器より得られるデータから未知所求量を求めるとするのが上記イの方法で、ロの方法とは残りの計器1, 2, 3を図-12に示す3軸の場合の最適系に編成しなおして、それより得られるデータを基に未知所求量を求めるという方法である。

言うまでもなくロの方法の方が精度がよくなるけれども再編成の手間がかかる。しかし図-11に示すような観測系にしておけば、いずれの個数の観測系も同一の円錐面上にあるので再編成を自動的に行うことが比較的容易である。またロの方法の方が計算上のメリット(未知所求量等を求める計算が容易)もあり将来のびる可能性がある。イの方法は、計器の自動的再編成の技術が確立されていない現在

の最も現実的な方法である。本報告ではイの場合の未知所求量の解とその精度および観測効率について述べる。

### 9.1 1個故障の場合

1) 未知所求量の解およびその分散・共分散

4個以上の観測軸からなる最適観測軸配置において、あるひとつの観測軸のデータを使わない場合を考える。そのときの観測系を $F'$ , 同じく観測データを $\lambda'$ とする。すなわち

$$F' \equiv \begin{pmatrix} l_1 & m_1 & n_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ l_{i-1} & m_{i-1} & n_{i-1} \\ l_{i+1} & m_{i+1} & n_{i+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ l_p & m_p & n_p \end{pmatrix}, \quad \lambda \equiv \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_{i-1} \\ \lambda_{i+1} \\ \vdots \\ \lambda_p \end{pmatrix} \quad (9.1) \quad (9.2)$$

このときの未知所求量 $v$ およびその分散 $\Sigma$ は(5.1)式および(5.2)式の $F$ および $\lambda$ を $F'$ および $\lambda'$ 入れ替えて次の様に表わされる。

$$v = (\tilde{F}'F')^{-1}\tilde{F}'\lambda' \quad (9.3)$$

$$\Sigma = \epsilon^2 (\tilde{F}'F')^{-1} \quad (9.4)$$

ただし、 $(\tilde{F}'F')^{-1}$ はこの場合、簡単な形で陽に解ける。すなわち

$$(\tilde{F}'F') = \tilde{F}' \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & \ddots \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} F \quad (9.5)$$

$$\begin{aligned} &= \left\{ \tilde{F}'F - \begin{pmatrix} l_i \\ m_i \\ n_i \end{pmatrix} (l_i \ m_i \ n_i) \right\} \\ &= \left\{ \frac{p}{3} E_3 - \begin{pmatrix} l_i \\ m_i \\ n_i \end{pmatrix} (l_i \ m_i \ n_i) \right\} \end{aligned} \quad (9.6)$$

$$\therefore \tilde{F}'F = \frac{p}{3} E_3 \quad (8.5 \text{ 式}) \quad (9.7)$$

従って、公式1を用いることにより

$$(\tilde{F}'F')^{-1} = \frac{3}{p} \begin{pmatrix} 1 + \frac{3l_i^2}{p-3} & \frac{3l_i m_i}{p-3} & \frac{3l_i n_i}{p-3} \\ \cdot & 1 + \frac{3m_i^2}{p-3} & \frac{m_i n_i}{p-3} \\ \cdot & \cdot & 1 + \frac{3n_i^2}{p-3} \end{pmatrix} \quad (9.8)$$

となる。なお、この行列は対称行列なので下三角行列の表現を省いた。

因みに  $(l_i, m_i, n_i) = (1, 0, 0; x \text{ 軸そのもの})$  の場合を考えると (9.8) 式は

$$(\tilde{F}'F')^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{3}{p} + \frac{3}{p} \frac{3}{p-3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{p} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{p} \end{pmatrix} \quad (9.9)$$

となる。これは (8.7) 式と比較してみれば、故障した観測軸の方向の精度だけが悪くなることを示している。

## 2) 精 度

精度  $h$  は (6.2) 式から

$$h = \{ \det(\Sigma) \}^{-\frac{1}{3}} \quad (9.10)$$

と表わされる。 $p$  個の観測軸のうち、観測軸  $i$  を用いないときの精度を  $h(p)_i$  と表わせば、上式 (9.10) に (9.4) 式を代入して

$$h(p)_i = \varepsilon^{-2} |\tilde{F}'F'|^{\frac{1}{3}} \quad (9.11)$$

となる。

処で

$$\begin{aligned} |\tilde{F}'F'| &= \left| (\tilde{F}'F') - \begin{pmatrix} l_i \\ m_i \\ n_i \end{pmatrix} (l_i \ m_i \ n_i) \right| \\ &= \left| \frac{p}{3} E_{(3)} - \begin{pmatrix} l_i \\ m_i \\ n_i \end{pmatrix} (l_i \ m_i \ n_i) \right| \\ &= \left( \frac{p}{3} \right)^3 \left( \frac{p-3}{p} \right) \end{aligned} \quad (9.12)$$

ただし上式を導く際に公式 2 を用いた。

従って

$$h(p)_i = \varepsilon^{-2} \frac{p}{3} \left( \frac{p-3}{p} \right)^{\frac{1}{3}} \quad (9.13)$$

となる。

この式から分るように、この場合の精度  $h(p)_i$  では観測軸  $i$  に関係しない、つまり、最適観測軸配置での 1 個故障の場合は、どの観測軸が故障しても精度は同一であることを意味する。これは最適配置での 1 個故障の場合の特有の性質で、それ以外の場合には、一般に、同じ精度になることはない。

## 3) 観測効率

観測効率  $e$  は (6.1) 式から

$$e = \frac{h}{p^{\frac{1}{3}}} \quad (9.14)$$

と表わされる。特に、 $p$  個の観測軸より成る最適観測軸配置において、観測軸  $i$  が故障した場合の観測効率を  $e(p)_i$  とすれば (9.13) 式を (9.14) 式に代入して

$$e(p)_i = \frac{1}{3 \varepsilon^{\frac{2}{3}} p} \left( \frac{p-3}{p} \right)^{\frac{1}{3}} \quad (9.15)$$

となる。

この式 (9.15) は  $p$  が増大するにつれて、 $e(p)_i$  も増大することを示している。つまり、観測軸の個数  $p$  が大きければ大きい程、1 個故障の場合の観測効率はよくすることができることを示している。また、観測効率  $e(p)_i$  が、故障観測軸  $i$  によらないことは、精度  $h(p)_i$  の場合と同様である。

## 9.2 2 個故障の場合

### 1) 未知所求量の解およびその分散・共分散

5 個以上の観測軸からなる最適観測軸配置において 2 つの観測軸のデータを使わない場合を考える。そのときの観測系を  $F''$ 、同じく観測データを  $\lambda''$  とする。そうすると

$$F'' = \begin{pmatrix} l_1 & m_1 & n_1 \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ l_{i-1} & m_{i-1} & n_{i-1} \\ l_{i+1} & m_{i+1} & n_{i+1} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ l_{j-1} & m_{j-1} & n_{j-1} \\ l_{j+1} & m_{j+1} & n_{j+1} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ l_p & m_p & n_p \end{pmatrix}, \quad \lambda'' = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \cdot \\ \lambda_{i-1} \\ \lambda_{i+1} \\ \cdot \\ \lambda_{j-1} \\ \lambda_{j+1} \\ \cdot \\ \lambda_p \end{pmatrix} \quad (9.16) \quad (9.17)$$

となる。このような場合の未知所求量 およびその分散・共分散  $\Sigma$  は (5.1) 式および (5.2) 式により

$$v = (\tilde{F}'F'')^{-1} \tilde{F}'\lambda'' \quad (9.18)$$

$$\Sigma = \varepsilon^2 (\tilde{F}'F'')^{-1} \quad (9.19)$$

と表わされる。

上式(9.18), (9.19)における $(\tilde{F}''F'')^{-1}$ は以下の手順で陽に書き表わすことができる。

定義式(9.16)より

$$\begin{aligned} (\tilde{F}''F'') &= \tilde{F}''F'' - \begin{pmatrix} l_i & l_j \\ m_i & m_j \\ n_i & n_j \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l_i & m_i & n_i \\ l_j & m_j & n_j \end{pmatrix} \\ &= \frac{p}{3}E_{(3)} - \begin{pmatrix} l_i & l_j \\ m_i & m_j \\ n_i & n_j \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l_i & m_i & n_i \\ l_j & m_j & n_j \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (9.20)$$

上記行列の逆行列を公式1を用いて求めると

$$(\tilde{F}''F'')^{-1} = \frac{3}{p}E_{(3)} + \frac{3}{p}U(E_{(2)} - \frac{3}{p}\tilde{U}U)^{-1}\tilde{U}\frac{3}{p} \quad (9.21)$$

ただし

$$U = \begin{pmatrix} l_i & l_j \\ m_i & m_j \\ n_i & n_j \end{pmatrix} \quad (9.22)$$

上式(9.21)の中の $(E_{(2)} - \frac{3}{p}\tilde{U}U)$ の部分は次の様に表わされる。

$$\begin{aligned} (E_{(2)} - \frac{3}{p}\tilde{U}U) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &+ \frac{3}{p} \begin{pmatrix} l_i^2 + m_i^2 + n_i^2 & l_i l_j + m_i m_j + n_i n_j \\ l_j^2 + m_j^2 + n_j^2 & \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \frac{3}{p} \begin{pmatrix} 1 & \cos \theta_{ij} \\ \cos \theta_{ij} & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 - \frac{3}{p} & -\frac{3}{p} \cos \theta_{ij} \\ -\frac{3}{p} \cos \theta_{ij} & 1 - \frac{3}{p} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (9.23)$$

ただし $\theta_{ij}$ とはベクトル $(l_i \ m_i \ n_i)$ と $(l_j \ m_j \ n_j)$ とのなす角である。

従って(9.21)式の中の $(E_{(2)} - \frac{3}{p}\tilde{U}U)^{-1}$ は

$$(E_{(2)} - \frac{3}{p}\tilde{U}U)^{-1} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}^{-1}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{\alpha}{\alpha^2 - \beta^2} & \frac{-\beta}{\alpha^2 - \beta^2} \\ \frac{-\beta}{\alpha^2 - \beta^2} & \frac{\alpha}{\alpha^2 - \beta^2} \end{pmatrix} \quad (9.24)$$

と解かれる。ただし

$$\alpha \equiv 1 - \frac{3}{p} \quad (9.25)$$

$$\beta \equiv -\frac{3}{p} \cos \theta_{ij} \quad (9.26)$$

以上で、 $(\tilde{F}''F'')^{-1}$ ((9.21式))が陽に求まったことになる。

## 2) 精 度

$p$ 個の観測軸からなる最適観測軸において $i$ と $j$ の観測軸が故障してそのデータを用いない場合の精度を特に $h(p)_{ij}$ と表示する。そうすると(6.2)式より

$$\begin{aligned} h(p)_{ij} &= \{\det(\Sigma)\}^{-\frac{1}{2}} \\ &= \epsilon^{-2} |\tilde{F}''F''|^{-\frac{1}{2}} \end{aligned} \quad (9.27)$$

となる。

処で(9.20)式により

$$\tilde{F}''F'' = \frac{p}{3}E_{(3)} - \begin{pmatrix} l_i & l_j \\ m_i & m_j \\ n_i & n_j \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l_i & m_i & n_i \\ l_j & m_j & n_j \end{pmatrix} \quad (9.20)$$

と与えられているので、公式2を用いれば

$$\begin{aligned} |\tilde{F}''F''| &= \left(\frac{p}{3}\right)^3 \begin{vmatrix} 1 - \frac{3}{p} & -\frac{3}{p} \cos \theta_{ij} \\ -\frac{3}{p} \cos \theta_{ij} & 1 - \frac{3}{p} \end{vmatrix} \\ &= \left(\frac{p}{3}\right)^3 \left\{ \left(1 - \frac{3}{p}\right)^2 - \left(\frac{3}{p}\right)^2 \cos^2 \theta_{ij} \right\} \end{aligned} \quad (9.29)$$

となる。従って上式の値を(9.27)式に代入すれば

$$h(p)_{ij} = \epsilon^{-2} \left(\frac{p}{3}\right)^3 \left\{ \left(1 - \frac{3}{p}\right)^2 - \left(\frac{3}{p}\right)^2 \cos^2 \theta_{ij} \right\}^{\frac{1}{2}} \quad (9.30)$$

となる。

## 3) 観測効率

観測軸の個数が $p$ の場合の最適観測軸配置において観測軸 $i$ および $j$ が故障した場合の観測効率を $e(p)_{ij}$ と表わせば(6.1)式および(9.30)式により

$$e(p)_{ij} = \frac{h(p)_{ij}}{p^{\frac{1}{2}}} \\ = \frac{1}{3\epsilon^2 p^{\frac{1}{2}}} \left\{ \left(1 - \frac{3}{p}\right)^2 - \left(\frac{3}{p}\right)^2 \cos^2 \theta_{ij} \right\}^{\frac{1}{2}} \quad (9.31)$$

となる。

この式は、観測軸の個数  $p$  が大きければ大きい程、また観測軸  $i$  および  $j$  の成す角  $\theta_{ij}$  が  $90^\circ$  に近ければ近い程、観測効率  $e(p)_{ij}$  をよくすることができることを示している。

## 10 配置誤差の考慮

前章までは、誤差については、観測機器に起因する観測誤差のみを考慮している。しかし実際には、観測系を構成する計器の据え付けの際の位置誤差すなわち配置誤差も考慮しなければならないと思われる。というのは、配置誤差は製作技術上どうしても免がれることができない分けてあり、未知所求量に対する観測誤差の影響よりも、配置誤差の影響の方が大きいことがあるかもしれないし、また、その影響の仕方が観測誤差の場合と異なるかもしれないからである。このような場合、先の最適観測系が最適でなくなる可能性もある。

そこで、この配置誤差を偶発的誤差すなわち期待値（平均値）0 の正規分布をとる確率変数として扱い、次の2点について明らかにしておく必要があると考える。

ひとつは、偶発的配置誤差による影響の程度を算定し、且つ、それが先の観測誤差とどのような関係で結ばれているかということ、もうひとつは、偶発的配置誤差の影響で、前章までの最適観測系に修正を加える必要が生じないか、ということである。これらの事柄について、以下に、解析し説明する。

### 10.1 配置誤差

通常の観測方程式は(4.7)式に示すように

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ l_p & m_p & n_p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \vdots \\ \epsilon_p \end{pmatrix} \quad (10.1)$$

と表わされる。ここに  $\epsilon_i$  ( $i = 1, 2, \dots, p$ ) は観測機器に起因する観測誤差と考える。ただし  $(\epsilon_i, \epsilon_j) = \epsilon^2 \delta_{ij}$  とした((4.5)式)。従って上式には配置誤差は含まれていない。

観測機器の位置は、この場合、観測軸の方向を示す  $(l_i, m_i, n_i)$  ( $i = 1, 2, \dots, p$ ) によって表わされている。配置

誤差を考慮するには、上式における  $(l_i, m_i, n_i)$  を次のように変換して考えればよい。

$$\begin{aligned} l_i &\rightarrow l_i + \sigma_{li} \\ m_i &\rightarrow m_i + \sigma_{mi} \\ n_i &\rightarrow n_i + \sigma_{ni} \end{aligned} \quad i = 1, 2, \dots, p \quad (10.2)$$

ここに  $\sigma_{ki}$  ( $k = l, m, n; i = 1, 2, \dots, p$ ) は、それぞれ、観測軸の据え付け方向の偶発的誤差とし、期待値（平均値）0 の正規分布をとる確率変数と考える。ただし、それらは互いに無相関で、誤差の程度は等しいものとする。すなわち

$$E(\sigma_{ki} \cdot \sigma_{k'i'}) = \sigma^2 \delta_{kk'} \delta_{ii'} \\ = \begin{cases} \sigma^2 & (k = k' \text{ 且 } i = i') \\ 0 & \text{その他} \end{cases}$$

$$k, k' = l, m, n; i, i' = 1, 2, \dots, p$$

と仮定する。

### 10.2 配置誤差を考慮した観測方程式

配置誤差を考慮した観測方程式は(10.2)式における  $(l_i, m_i, n_i)$   $i = 1, 2, \dots, p$  に(10.2)式を代入したものである。すなわち

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l_1 + \sigma_{l1} & m_1 + \sigma_{m1} & n_1 + \sigma_{n1} \\ l_2 + \sigma_{l2} & m_2 + \sigma_{m2} & n_2 + \sigma_{n2} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ l_p + \sigma_{lp} & m_p + \sigma_{mp} & n_p + \sigma_{np} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \vdots \\ \epsilon_p \end{pmatrix} \quad (10.4)$$

である。上式を書き換えて誤差の部分に分ければ

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ l_p & m_p & n_p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x\sigma_{l1} + y\sigma_{m1} + z\sigma_{n1} + \epsilon_1 \\ x\sigma_{l2} + y\sigma_{m2} + z\sigma_{n2} + \epsilon_2 \\ \vdots \\ x\sigma_{lp} + y\sigma_{mp} + z\sigma_{np} + \epsilon_p \end{pmatrix} \quad (10.5)$$

となる。

ここで上式の誤差の部分まとめて次の様に表示する。

$$\epsilon'_i \equiv x\sigma_{li} + y\sigma_{mi} + z\sigma_{ni} + \epsilon_i \quad (i = 1, 2, \dots, p) \quad (10.6)$$

そうすると(10.5)式は

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ l_p & m_p & n_p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \epsilon'_1 \\ \epsilon'_2 \\ \vdots \\ \epsilon'_p \end{pmatrix} \quad (10.7)$$



と表わされる。ここに誤差  $\varepsilon'_i$  は定義式 (10.6) および (10.3) 式より次の性質を持つことが分る。

$$\begin{aligned} E(\varepsilon'_i \varepsilon'_j) &= (x^2 \sigma^2 + y^2 \sigma^2 + z^2 \sigma^2 + \varepsilon^2) \delta_{ij} \\ &= \{(x^2 + y^2 + z^2) \sigma^2 + \varepsilon^2\} \delta_{ij} \\ &= (v^2 \sigma^2 + \varepsilon^2) \delta_{ij} \end{aligned} \quad (10.8)$$

ここで  $x^2 + y^2 + z^2 = v^2 = v^2$  として

$$\varepsilon'^2 \equiv v^2 \sigma^2 + \varepsilon^2 \quad (10.10)$$

とおけば、(10.8) 式は

$$E(\varepsilon'_i \varepsilon'_j) = \varepsilon'^2 \delta_{ij} \quad (i, j = 1, 2 \dots p) \quad (10.11)$$

となる。この式 (10.11) の誤差の分散を示す  $\varepsilon'^2$  については (10.10) 式で定義されているが、この式 (10.10) の初項  $v^2 \sigma^2$  が配置誤差によって引き起こされた誤差の分散であり、第2項の  $\varepsilon^2$  は前章までの議論の観測誤差の分散を示す量である。この和 ( $v^2 \sigma^2 + \varepsilon^2$ ) が、配置誤差および観測誤差両方を考慮した場合の誤差の分散となる。

また、配置誤差を考慮した観測方程式は (10.7) 式で表わされ、観測誤差のみを考慮した観測方程式 (4.7) と比べて見ると、その違いは誤差の項だけであり、且つ (4.12) 式および (10.11) 式を見ると  $\varepsilon^2$  と  $\varepsilon'^2$  との違いであることが分る。従って、前章までの結論の全ての  $\varepsilon$  の部分に  $\varepsilon'$  ( $=\sqrt{v^2 \sigma^2 + \varepsilon^2}$ ) で入れ替えれば、それが配置誤差を考慮した場合の結論となる。最適配置については、(7.1) 式の分母の部分だけを議論するのであり、分子の  $\varepsilon$  の値については無関係に決まるので、配置誤差を考慮しても ( $\varepsilon$  を  $\varepsilon'$  として考えても) 観測誤差だけを考慮した場合の先の最適配置がやはり最適となる。

## 11 結 言

本報告に述べられている内容を箇条書きにまとめてみると、次のようになるとと思われる。

### 3次元ベクトル量計測に関し

#### 1. 工学的な内容について

- 最適観測系を見出す具体的手順を明示した。
- 少数の計器が故障した場合の計算式を与えた。
- 計器の据え付け誤差の影響の推定式を明らかにした。

#### 2. 数学的な内容について

- 行列式の持つ物理的意味を観測系に則して明らかにした。
- ある行列式の最大値解を系統的に求めた。

#### 3. 産業的な内容について

- いくつかの計器が故障してもなお可能な、且つ、計器の据え付け誤差の影響も最も少ないなどの付加的性質を持つ、

最も効率的な観測系の一例を提示した。

また、以上の事柄から、本報告の方法、すなわち、行列式評価法による観測系の解析が、2次形式評価法 (例えば文献1)) よりも、見透しがよく、有用であることが応用上でも示されたと考える。

## 12 あとがき

3次元ベクトル量計測における最適観測軸配置の研究を通じて、筆者は「観測系の評価に関するひとつの数学的理論」の有効性、有用性を一層明確に知ることができたと言える。が、次の3つの課題が未だ残されている。

1) 本報告に記載されている色々な種類の最適解は確かに解であるには違いないが、これら以外にも別の形の解が存在する可能性が依然として残る。本報告ではそれらが解であることの証明をしているだけで、解がそれしかないことの証明はなされていない。この究明は今後に残された課題である。

2) 計器の故障については本報告で少ししか触れていないが、これについては本報告を基礎にして展開することができると考えられる。

3) 観測誤差にバイアスエラーが含まれている場合の最適観測系の問題も興味あるものであるが、本報告では、主題が分散することを危惧して割愛した。

以上の課題については、後日、可能になれば報告したい。

## 引用文献および参考文献

- 1) Arthur J. Pejsa ; Optimum Orientation and Accuracy of Redundant Sensor Arrays  
AIAA Paper No.71-59
- 2) 一瀬正己；誤差論 (昭和28年) p5, 培風館
- 3) 木村武雄；観測系の評価に関するひとつの数学的理論, 航技研報告 TR301 (1972)
- 4) 木村武雄；最良の観測系について, 日本統計学会誌, 2巻1号 (1971)
- 5) 木村武雄；最適の観測系について, 第12回SICE No. 3509 (昭和48年)

付録A 行列 $F$ への諸変換に対する行列式 $\det(\tilde{F}F)$ の不変性について

ただし

$$F = \begin{pmatrix} l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ l_p & m_p & n_p \end{pmatrix} \quad (\text{A-1})$$

物理的には行列 $F$ とは観測系のことであり、行列式 $\det(\tilde{F}F)$ とは観測系の良さの尺度であった。(本文第6章, 評価を参照のこと)すなわち,  $F$ への変換とは観測系を変換(再構成)することであり,  $\det(\tilde{F}F)$ の不変性とはそのように変換しても観測系の良さは変わらないことを意味する。つまり, ここでは観測系の良さに変化を与えない変換とはどのようなものであるかを探求する。

次の様な変換 $V, U$ に対して $\det(\tilde{F}F)$ は不変である。

A1 変換 $V$ 

大きさ $p \times p$ の行列 $V$ , ただし $\tilde{V}V = E(p)$  ( $p \times p$ の単位行列)について,  $F$ への左からの変換( $F \rightarrow F^*$ )

$$F^* = VF \quad (\text{A-2})$$

この様な変換( $F \rightarrow F^*$ )に対して $\det(\tilde{F}F)$ は不変である。なぜなら

$$\tilde{F}^*F^* = \tilde{F}\tilde{V}VF = \tilde{F}EF = \tilde{F}F \quad (\text{A-3})$$

$$\text{従って} \quad \det(\tilde{F}^*F^*) = \det(\tilde{F}F) \quad (\text{A-4})$$

これは行列式 $\det(\tilde{F}F)$ の不変性を示している。

この様な変換の具体例として次の様なものがある。

## (1) 行と行の入れ替え

行列 $F$ は(4.1)式に示すように $k$ 行3列の行列である。この行列の $i$ 行目と $j$ 列目をそっくりそのまま相互に入れ替える変換を考える。たとえば1行目と2行目を入れ替える変換は次の様に表わされる。

$$V_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdot & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdot & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & 1 \end{pmatrix} \quad (\text{A-5})$$

このような $V_1$ に対して $F$ は次の様に変換される。

$$F = \begin{pmatrix} l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ l_p & m_p & n_p \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} l_2 & m_2 & n_2 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ l_p & m_p & n_p \end{pmatrix} = F^* = V_1 F \quad (\text{A-6})$$

この変換の物理的意味は単に観測軸の番号(付丁)を呼び替えるだけであり, 呼び替えるだけでは観測系の良さに変化をもたらすことはなく, 実際上の意味はない。

## (2) 負変換(本文③)

行列 $F$ のある行の全ての要素にマイナスを付ける変換で, たとえば1行目の負変換を考えれば次の様に表わされる。

$$V_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & \cdot & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdot & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & 1 \end{pmatrix} \quad (\text{A-7})$$

このような $V_2$ に対して $F$ は次の様に変換される。

$$F = \begin{pmatrix} l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ l_p & m_p & n_p \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -l_1 & -m_1 & -n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ l_p & m_p & n_p \end{pmatrix} = F^* = V_2 F \quad (\text{A-8})$$

この物理的意味は, 観測軸の向きを逆転させるということである。すなわち, 任意の観測軸の向きを逆転させても観測系の良さは変わらないことを意味する。

A2 変換 $U$ 

大きさ $3 \times 3$ の行列 $U$ , ただし $(\det U)^2 = 1$ について,  $F$ への右からの変換( $F \rightarrow F'$ )

$$F' = FU \quad (\text{A-9})$$

この様な変換( $F \rightarrow F'$ )に対して,  $\det(\tilde{F}F)$ は不変である。なぜなら

$$\tilde{F}'F' = \tilde{U}\tilde{F}FU \quad (\text{A-10})$$

$$\text{従って} \quad \det(\tilde{F}'F') = \det(\tilde{U}\tilde{F}FU)$$

$$= (\det U)^2 \cdot \det(\tilde{F}F)$$

$$= \det(\tilde{F}F) \quad (\text{A-11})$$

これは行列式 $\det(\tilde{F}F)$ の不変性を示している。

このような変換の具体例として次の様なものがある。

## (1) 回転変換(本文①)

行列 $F$ は観測系を意味し, それは多数の観測軸から構成されているものである。その観測系全体をそっくりそのまま, 観測軸同志の位置関係は変えずに, 3次元的に回転させる変換を考える。この変換は良く知られているように次の様に表わされる。

$$U_1 = \begin{pmatrix} \cos \gamma & \sin \gamma & 0 \\ -\sin \gamma & \cos \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \beta & \sin \beta \\ 0 & -\sin \beta & \cos \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (\text{A-12})$$

ここに $\alpha, \beta, \gamma$ は任意の角度

このような変換に対して、観測系の良さは不変である。

### (2) 列と列の入れ替え

行列 $F$ において、任意の列と列とをそっくりそのまま入れ替える変換で、例えば、1列目と2列目を入れ替える場合を考えると次の様に表わされる。

$$U_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (\text{A-13})$$

このような変換 $U_1$ に対して $F$ は次の様に変換される。

$$F = \begin{pmatrix} l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ l_k & m_k & n_k \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} m_1 & l_1 & n_1 \\ m_2 & l_2 & n_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ m_k & l_k & n_k \end{pmatrix} = F' = FU_2 \quad (\text{A-14})$$

この物理的意味は、 $x$ 軸と $y$ 軸とを入れ替えること、すなわち図A-1に示すように一種の鏡映変換である。前項の回転変換と合わせて考えれば、これは、観測系を任意の位置で(任意に回転変換した後)に鏡映変換しても(鏡に映っている方の形に変換しても)観測系の良さは変わらないことを意味する。(本文②)

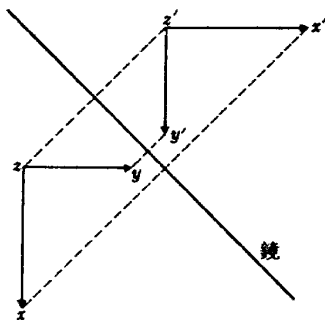
### (3) 負変換

行列 $F$ において任意の列の全ての成分にマイナスをつける変換で、例えば、1列目の負変換は次の様に表わされる。

$$U_3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (\text{A-15})$$

このような変換 $U_2$ に対して $F$ は次の様に変換される。

$$F = \begin{pmatrix} l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ l_k & m_k & n_k \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -l_1 & m_1 & n_1 \\ -l_2 & m_2 & n_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ -l_k & m_k & n_k \end{pmatrix} = F' = FU_3 \quad (\text{A-16})$$



図A-1

この物理的意味は、図A-2に示すように一種の鏡映変換で、前項(1)(2)によって既に表わされている。すなわち、鏡映変換しても観測系の良さは変らない。

## 付録B 行列式 $\det(\tilde{F}F)$ の最大解

ここに

$$F = \begin{pmatrix} l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ l_p & m_p & n_p \end{pmatrix} \quad (\text{B-1})$$

ただし

$$l_i^2 + m_i^2 + n_i^2 = 1 \quad (i = 1, 2, \dots, p) \quad (\text{B-2})$$

行列式 $\det(\tilde{F}F)$ とは観測系の良さを示す尺度であり、その値が大きければ大きい程、良い観測系であることは本文に述べた(本文第7章)。従って、 $\det(\tilde{F}F)$ の最大解を求めるということは最も良い観測系を求めるということとであり、解かなければならない興味ある課題である。

### B1 問題の設定

$$\det(\tilde{F}F) = \det \begin{pmatrix} l^2 & lm & ln \\ ml & m^2 & mn \\ nl & nm & n^2 \end{pmatrix} \quad (\text{B-3})$$

を最大ならしめる $(l \ m \ n)$ を求める。

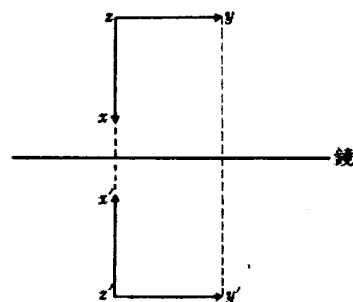
ここに

$$l = \begin{pmatrix} l_1 \\ l_2 \\ \vdots \\ l_p \end{pmatrix} \quad m = \begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \\ \vdots \\ m_p \end{pmatrix} \quad n = \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ \vdots \\ n_p \end{pmatrix} \quad (\text{B-4})$$

$l^2, lm, ln$ 等はベクトルの内積を示す。

ただし

$$l_i^2 + m_i^2 + n_i^2 = 1 \quad (i = 1, 2, \dots, p) \quad (\text{B-5})$$



図A-2

## B2 最大解であるための必要充分条件 (本文 7.2.1)

アダマールの定理によれば

$$\det \begin{pmatrix} l^2 & lm & ln \\ lm & m^2 & mn \\ ln & nm & n^2 \end{pmatrix} \leq l^2 \cdot m^2 \cdot n^2 \quad (\text{B-6})$$

$$(\because lm = mn = nl = 0) \quad (\text{B-7})$$

処で

$$l^2 + m^2 + n^2 = \sum_{i=1}^p (l_i^2 + m_i^2 + n_i^2) = \sum_{i=1}^p 1 \quad (\text{B-8})$$

つまり

$$l^2 + m^2 + n^2 = p \quad (\text{B-9})$$

このような条件下では

$$l^2 \cdot m^2 \cdot n^2 \leq \left(\frac{p}{3}\right)^3 \quad (\because l^2 = m^2 = n^2) \quad (\text{B-10})$$

従って

$$\det \begin{pmatrix} l^2 & lm & ln \\ ml & m^2 & mn \\ nl & nm & n^2 \end{pmatrix} \leq \left(\frac{p}{3}\right)^3 \quad (\text{B-11})$$

$$(\because lm = mn = nl = 0; l^2 = m^2 = n^2) \quad (\text{B-12})$$

すなわち

$$\text{① } l_i^2 + m_i^2 + n_i^2 = 1 \quad (i=1, 2, \dots, p) \quad (\text{B-13})$$

$$\text{② } lm = mn = nl = 0 \quad (\text{B-14})$$

$$\text{③ } l^2 = m^2 = n^2 \quad (\text{B-15})$$

を満たす  $l, m, n$  がもし存在するならば、それは上述の行列式を最大にするので解のひとつである。

たとえば  $p=3$  のとき、次のようなものは上述の3条件を満たす。

$$(l \ m \ n) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (\text{B-16})$$

従ってこれは解のひとつである。

計算の結果、全ての  $p \geq 3$  について ① ② ③ を満たす解が存在することが分っている。従って ① ② ③ を満たさないものは最大解にならない。

## B3 最大解における和の規則 (本文 7.2.2)

次の様な関係に注意したい。

④  ${}^1l, {}^1m, {}^1n$  (次元数  $p_1$ ) が上述の3条件 ① ② ③ を満たし、 ${}^2l, {}^2m, {}^2n$  (次元数  $p_2$ ) がやはり上述の3条件 ① ② ③ を満たすなら、 ${}^1l, {}^1m, {}^1n$  と  ${}^2l, {}^2m, {}^2n$  との和  $l, m, n$  すなわち

$$(l \ m \ n) \equiv \begin{pmatrix} {}^1l & {}^1m & {}^1n \\ {}^2l & {}^2m & {}^2n \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} p_1 \\ p_2 \end{matrix}$$

次元数  $p =$

$$p_1 + p_2 \equiv \begin{pmatrix} {}^1l_1 & {}^1m_1 & {}^1n_1 \\ {}^1l_2 & {}^1m_2 & {}^1n_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ {}^1l_{p_1} & {}^1m_{p_1} & {}^1n_{p_1} \\ {}^2l_1 & {}^2m_1 & {}^2n_1 \\ {}^2l_2 & {}^2m_2 & {}^2n_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ {}^2l_{p_2} & {}^2m_{p_2} & {}^2n_{p_2} \end{pmatrix} \quad (\text{B-17})$$

も上述の3条件 ① ② ③ を満たす。

証明 上記和の規則を証明する。

$({}^1l, {}^1m, {}^1n)$  および  $({}^2l, {}^2m, {}^2n)$  が3条件 ① ② ③ を満たすとは次の条件式が成り立つことを言う。

$$\text{①}' \quad ({}^j l_i)^2 + ({}^j m_i)^2 + ({}^j n_i)^2 = 1 \quad (i=1, 2, \dots, p, j=1, 2) \quad (\text{B-18})$$

$$\text{②}' \quad {}^j l {}^j m = {}^j m {}^j n = {}^j n {}^j l = 0 \quad (j=1, 2) \quad (\text{B-19})$$

$$\text{③}' \quad ({}^j l)^2 = ({}^j m)^2 = ({}^j n)^2 \quad (j=1, 2) \quad (\text{B-20})$$

このような条件下で、(B-17)式により定義されている  $(l \ m \ n)$  が3条件 ① ② ③ を満たすことを証明する。

○条件 ① について

上記条件式 ①' が成り立つということは、即、条件 ① が成り立つことを意味する。

○条件 ② について

$(l \ m \ n)$  の定義より

$$l \cdot m = {}^1l \cdot {}^1m + {}^2l \cdot {}^2m \quad (\text{B-21})$$

$$m \cdot n = {}^1m \cdot {}^1n + {}^2m \cdot {}^2n \quad (\text{B-22})$$

$$n \cdot l = {}^1n \cdot {}^1l + {}^2n \cdot {}^2l \quad (\text{B-23})$$

条件式 ②' によれば上式の右辺は毎く0となる。つまり

$$lm = mn = nl = 0 \quad (\text{B-24})$$

ということであり、これは条件 ② が成り立つことを示している。

○条件 ③ について

$(l \ m \ n)$  の定義より

$$l^2 = ({}^1l)^2 + ({}^2l)^2 \quad (\text{B-25})$$

$$m^2 = ({}^1m)^2 + ({}^2m)^2 \quad (\text{B-26})$$

$$n^2 = ({}^1n)^2 + ({}^2n)^2 \quad (\text{B-27})$$

条件式[3]'により

$$l^2 = m^2 = n^2 \quad (B-28)$$

となる。

すなわち条件[3]が成り立つことを示す。

以上によって、(B-17)式によって定義された( $l, m, n$ )が条件[1][2][3]を満たすことが証明された。

#### B4 具体解 (本文7.2.3.および7.3)

具体解の求め方は、解のとり得るであろう形を想定し、その不定係数を解の条件に合うように決めるといふ一種の不定係数法による。解の形の想定はこれまでの経験と知識とにより容易になされる。ここでは、既にそのような方法で解けることが分っているので、それが確かに解であるとの証明をするという形式をとる。

1) 1極1(重)円錐解(本文7.2.3(1), および7.3(1))  
次の( $l, m, n$ )は前述の条件[1][2][3]を満たす。

$$(l, m, n) = (l, m, c) \\ = \begin{pmatrix} l_1 & m_1 & c \\ l_2 & m_2 & c \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ l_p & m_p & c \end{pmatrix} \text{ 観測軸の個数 } p \quad (B-29)$$

ここに

$$(1) \quad l_i^2 + m_i^2 + c^2 = 1 \quad (i=1, 2, \dots, p) \quad (B-30)$$

$$(2) \quad lm = mc = lc = 0 \quad (B-31)$$

$$(3) \quad l^2 = m^2 \quad (B-32)$$

上記の3つの条件式は付録Cに示されている矢円錐の条件(1), (2), (3)と全く同じであることを注意する。

ただし

$$c^2 = 1/3, \quad p \geq 3 \quad (B-33)$$

とする。

証明

上記( $l, m, n$ )が解であるための条件[1][2][3]を満たしていることを証明する。

○条件[1][2]についてはそもそも満たしている(上記条件(1)(2)に該当)

○[3]について

条件式(1)により

$$l^2 + m^2 + n^2 = \sum_{i=1}^p (l_i^2 + m_i^2 + n_i^2) = p \quad (B-34)$$

$m = c$ であり、且つ、 $c^2 = 1/3$ なので

$$m^2 = pc^2 = p/3 \quad (B-35)$$

従って

$$l^2 + m^2 = p - m^2 = p - p/3 = \frac{2}{3}p \quad (B-36)$$

処で条件式(3)より  $l^2 = m^2$

従って

$$l^2 + m^2 = 2l^2 = \frac{2}{3}p \quad (B-37)$$

$$\therefore l^2 = \frac{1}{3}p \quad (B-38)$$

$$\text{ゆえに } l^2 = m^2 = n^2 \quad (B-39)$$

これによって条件[3]が成り立つことが証明された。すなわち上記( $l, m, n$ )は条件[1][2][3]を満たす解である。

この解を付録Cを参照しながら、もう少し具体的に表わすならば次の様になる。

$$(l, m, c) = \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{2}{3}} \sin \theta_1, \sqrt{\frac{2}{3}} \cos \theta_1, \sqrt{\frac{1}{3}} \\ \sqrt{\frac{2}{3}} \sin \theta_2, \sqrt{\frac{2}{3}} \cos \theta_2, \sqrt{\frac{1}{3}} \\ \vdots \\ \sqrt{\frac{2}{3}} \sin \theta_p, \sqrt{\frac{2}{3}} \cos \theta_p, \sqrt{\frac{1}{3}} \end{pmatrix} \quad (B-40)$$

$$\theta_i = \frac{2\pi}{p}(i-1) + \delta \quad (B-41)$$

$\delta$ : 任意の角度

この解については図-11および図-12~図-15を参照されたい。

2) 1極多重円錐解(本文7.2.3(2)および7.3(1)(b))  
次のものは前述の条件[1][2][3]を満たす。

$$(l, m, n) = \begin{pmatrix} {}^1l & {}^1m & {}^1c \\ {}^2l & {}^2m & {}^2c \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ {}^ql & {}^qm & {}^qc \end{pmatrix} \begin{matrix} p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ p_q \end{matrix} \text{ 観測軸の個数 } \quad (B-42)$$

ここに

( ${}^jl, {}^jm, {}^jc$ )( $j=1, 2, \dots, q$ )は各々、付録Cに示す矢円錐の条件を満たしているものとする。すなわち

$$(1) \quad ({}^jl_i)^2 + ({}^jm_i)^2 + ({}^jc)^2 = 1 \quad (i=1, 2, \dots, p_j) \\ (j=1, 2, \dots, q) \quad (B-43)$$

$$(2) \quad {}^jl {}^jm = {}^jm {}^jc = {}^jl {}^jc = 0 \quad (j=1, 2, \dots, q) \quad (B-44)$$

$$(3) \quad ({}^jl)^2 = ({}^jm)^2 \quad (j=1, 2, \dots, q) \quad (B-45)$$

ただし

$$\sum_{i=1}^q p_i (1 - 3({}^i c)^2) = 0 \quad (\text{B-46})$$

$$\sum_{i=1}^q p_i \geq 3 \quad (\text{B-47})$$

$p_i$  : 各矢円錐における矢(観測軸の個数)

解であることの証明

上記( $l$ ,  $m$ ,  $n$ )が条件①②③を満たすことを証明する。

○①②の条件はそもそも満たしている。

○③について

付録Cの(C-42)式より

$$({}^i l)^2 = \frac{p_i}{2} (1 - ({}^i c)^2) \quad (i = 1, 2 \dots q) \quad (\text{B-48})$$

従って

$$l^2 = \sum_{i=1}^q ({}^i l)^2 = \sum_{i=1}^q \frac{p_i}{2} (1 - ({}^i c)^2) \quad (\text{B-49})$$

処で

$$n^2 = \sum_{i=1}^q ({}^i c)^2 = \sum_{i=1}^q p_i ({}^i c)^2 \quad (\text{B-50})$$

従って

$$l^2 - n^2 = \sum_{i=1}^q \frac{p_i}{2} (1 - ({}^i c)^2) - \sum_{i=1}^q p_i ({}^i c)^2 \quad (\text{B-51})$$

$$= \sum_{i=1}^q \frac{p_i}{2} (1 - 3({}^i c)^2) = 0 \quad (\text{B-52})$$

また

$$m^2 = \sum_{i=1}^q ({}^i m)^2 = \sum_{i=1}^q ({}^i l)^2 = l^2 \quad (\text{B-53})$$

ゆえに

$$l^2 = m^2 = n^2 \quad (\text{B-54})$$

これによって条件③を満たすことが証明された。すなわち上記( $l$ ,  $m$ ,  $n$ )は条件①②③を満たす解である。

例えば  $q = 2$ , つまり1極2重円錐解の場合, 次に掲げるものは解の具体例である。

$$(l \ m \ n) = \begin{pmatrix} {}^1 l & {}^1 m & {}^1 c \\ {}^2 l & {}^2 m & {}^2 c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} \text{ とおく。}$$

㉑  $p_1 = 2, p_2 = 1$  のとき, 付録C-4を参照して

$$\begin{pmatrix} {}^1 l & {}^1 m & {}^1 c \\ {}^2 l & {}^2 m & {}^2 c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 \end{pmatrix} \quad \text{図-22}$$

$$\begin{pmatrix} {}^2 l & {}^2 m & {}^2 c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

これが上記3条件(1)(2)(3)を満たしていることは明らかである。

㉒  $p_1 = 3, p_2 = 1$  のとき

$$\begin{pmatrix} {}^1 l & {}^1 m & {}^1 c \\ {}^2 l & {}^2 m & {}^2 c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \sin \theta_1 & b \cos \theta_1 & c \\ b \sin \theta_2 & b \cos \theta_2 & c \\ b \sin \theta_3 & b \cos \theta_3 & c \end{pmatrix} \quad \text{図-23}$$

$$b^2 = 1 - c^2$$

$$\theta_i = \frac{2\pi}{3} (i-1) + \delta$$

$$\begin{pmatrix} {}^2 l & {}^2 m & {}^2 c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

但し

$$\sum_{i=1}^q p_i (1 - 3({}^i c)^2) = 0$$

$p_1 = 3, p_2 = 1$  なので

$$3(1 - 3c^2) + (1 - 3 \cdot 1^2) = 0$$

$$3 - 9c^2 + 1 - 3 = 0$$

$$1 = 9c^2 \quad \therefore c = \frac{1}{3}$$

㉓  $p_1 = 4, p_2 = 1$  のとき

$$\begin{pmatrix} {}^1 l & {}^1 m & {}^1 c \\ {}^2 l & {}^2 m & {}^2 n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \sin \theta_1 & b \cos \theta_1 & c \\ b \sin \theta_2 & b \cos \theta_2 & c \\ b \sin \theta_3 & b \cos \theta_3 & c \\ b \sin \theta_4 & b \cos \theta_4 & c \end{pmatrix} \quad \text{図-24}$$

$$b^2 = 1 - c^2$$

$$\theta_i = \frac{2\pi}{4} (i-1) + \delta$$

$$\begin{pmatrix} {}^2 l & {}^2 m & {}^2 n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

但し

$$\sum_{i=1}^q p_i (1 - 3({}^i c)^2) = 0$$

$p_1 = 4, p_2 = 1$  なので

$$4(1 - 3c^2) + (1 - 3 \cdot 1^2) = 0$$

$$4 - 12c^2 + 1 - 3 = 0$$

$$2 = 12c^2 \quad \therefore c = \sqrt{\frac{1}{6}}$$

㉔  $p_1 = 4, p_2 = 2$

$$\begin{pmatrix} {}^1 l & {}^1 m & {}^1 c \\ {}^2 l & {}^2 m & {}^2 c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \sin \theta_1 & b \cos \theta_1 & c \\ b \sin \theta_2 & b \cos \theta_2 & c \\ b \sin \theta_3 & b \cos \theta_3 & c \\ b \sin \theta_4 & b \cos \theta_4 & c \end{pmatrix} \quad \text{図-25}$$

$$b^2 = 1 - c^2$$

$$\theta_i = \frac{2\pi}{4} (i-1) + \delta$$

$$\begin{pmatrix} {}^2 l & {}^2 m & {}^2 c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

但し

$$\sum_{i=1}^q p_i (1 - 3({}^i c)^2) = 0$$

この場合  $p_1 = 4$ ,  $p_2 = 2$  なので

$$4(1 - 3c^2) + 2(1 - 3 \cdot 1^2) = 0$$

$$4 - 12c^2 + 2 - 6 = 0$$

$$0 = 12c^2 \quad \therefore c = 0$$

⑥  $p_1 = 2$ ,  $p_2 = 3$  のとき, 但し  ${}^1c = 0$  とする

$$({}^1l \quad {}^1m \quad {}^1c) = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 \end{pmatrix} \quad \alpha: \text{任意} \quad \text{図-26}$$

$$({}^2l \quad {}^2m \quad {}^2c) = \begin{pmatrix} b \sin \theta_1 & b \cos \theta_1 & c \\ b \sin \theta_2 & b \cos \theta_2 & c \\ b \sin \theta_3 & b \cos \theta_3 & c \end{pmatrix}$$

$$b^2 = 1 - c^2$$

$$\theta_i = \frac{2\pi}{3}(i-1) + \delta$$

但し

$$\sum_{i=1}^q p_i (1 - 3 {}^i c^2) = 0$$

この場合  $p_1 = 2$ ,  $p_2 = 3$ ,  ${}^1c = 0$  なので

$$2(1 - 3 \cdot 0^2) + 3(1 - 3c^2) = 0$$

$$2 + 3 - 9c^2 = 0 \quad c = \frac{\sqrt{5}}{3}$$

3) 3極多重円錐解 (本文 7.2.3(3)および 7.3.3))

次の  $(l \quad m \quad n)$  は前述の条件 [1][2][3] を満たす。

$$(l \quad m \quad n) = \begin{pmatrix} {}^{11}l & {}^{11}m & {}^{11}c \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ {}^{1q_1}l & {}^{1q_1}m & {}^{1q_1}c \\ {}^{21}l & {}^{21}c & {}^{21}n \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ {}^{2q_2}l & {}^{2q_2}c & {}^{2q_2}n \\ {}^{31}c & {}^{31}m & {}^{31}n \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ {}^{3q_3}c & {}^{3q_3}m & {}^{3q_3}n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} {}^1p_1 \\ \cdot \\ {}^1p_{q_1} \\ {}^2p_1 \\ \cdot \\ {}^2p_{q_2} \\ {}^3p_1 \\ \cdot \\ {}^3p_{q_3} \end{pmatrix} \quad (\text{B-55})$$

ここに

$({}^1l \quad {}^1m \quad {}^1c)(i=1, 2 \dots q_1)$ ,  $({}^2l \quad {}^2c \quad {}^2n)(i=1, 2 \dots q_2)$ ,  $({}^3c \quad {}^3m \quad {}^3n)(i=1, 2 \dots q_3)$  は各々, 付録 C に示す矢円錐の条件を満たしているものとする。

すなわち

$$(1) \quad ({}^1l_k)^2 + ({}^1m_k)^2 + ({}^1c)^2 = 1 \quad (k=1, 2 \dots {}^1p_i; i=1, 2 \dots q_1) \quad (\text{B-56})$$

$$({}^2l_k)^2 + ({}^2c)^2 + ({}^2n_k)^2 = 1 \quad (k=1, 2 \dots {}^2p_i; i=1, 2 \dots q_2) \quad (\text{B-57})$$

$$({}^3c)^2 + ({}^3m_k)^2 + ({}^3n_k)^2 = 1 \quad (k=1, 2 \dots {}^3p_i; i=1, 2 \dots q_3) \quad (\text{B-58})$$

$$(2) \quad {}^1l \quad {}^1m = {}^1m \quad {}^1c = {}^1l \quad {}^1c = 0 \quad (i=1, 2 \dots q_1) \quad (\text{B-59})$$

$${}^2l \quad {}^2n = {}^2l \quad {}^2c = {}^2n \quad {}^2c = 0 \quad (i=1, 2 \dots q_2) \quad (\text{B-60})$$

$${}^3m \quad {}^3n = {}^3m \quad {}^3c = {}^3n \quad {}^3c = 0 \quad (i=1, 2 \dots q_3) \quad (\text{B-61})$$

$$(3) \quad ({}^1l)^2 = ({}^1m)^2 \quad (i=1, 2 \dots q_1) \quad (\text{B-62})$$

$$({}^2l)^2 = ({}^2n)^2 \quad (i=1, 2 \dots q_2) \quad (\text{B-63})$$

$$({}^3m)^2 = ({}^3n)^2 \quad (i=1, 2 \dots q_3) \quad (\text{B-64})$$

また各矢円錐における矢 (観測軸) の個数をそれぞれ  ${}^j p_i$  ( $i=1, 2 \dots q_j; j=1, 2, 3$ ) とする。

ただし

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^{q_1} {}^1 p_i \left( \frac{1}{3} - ({}^1c)^2 \right) \\ &= \sum_{i=1}^{q_2} {}^2 p_i \left( \frac{1}{3} - ({}^2c)^2 \right) \\ &= \sum_{i=1}^{q_3} {}^3 p_i \left( \frac{1}{3} - ({}^3c)^2 \right) \end{aligned} \quad (\text{B-65})$$

$$\sum_{j=1}^3 \sum_{i=1}^{q_j} {}^j p_i \geq 3 \quad (\text{B-66})$$

解であることの証明

上記  $(l \quad m \quad n)$  が条件 [1][2][3] を満たすことを証明する。

○ [1][2] の条件についてはそもそも満足している (上記条件式(1)(2))

○ [3] について

付録 C の (C-42) 式を考慮して

$$\begin{aligned} l^2 &= \sum_{i=1}^{q_1} ({}^1l)^2 + \sum_{i=1}^{q_2} ({}^2l)^2 + \sum_{i=1}^{q_3} ({}^3c)^2 \\ &= \sum_{i=1}^{q_1} \frac{{}^1 p_i}{2} (1 - ({}^1c)^2) + \sum_{i=1}^{q_2} \frac{{}^2 p_i}{2} (1 - ({}^2c)^2) \\ &\quad + \sum_{i=1}^{q_3} {}^3 p_i ({}^3c)^2 \end{aligned} \quad (\text{B-67})$$

$$\begin{aligned}
 m^2 &= \sum_{i=1}^{q_1} ({}^1i m)^2 + \sum_{i=1}^{q_2} ({}^2i c)^2 + \sum_{i=1}^{q_3} ({}^3i m)^2 \\
 &= \sum \frac{{}^1p_i}{2} (1 - ({}^1i c)^2) + \sum {}^2p_i ({}^2i c)^2 + \sum \frac{{}^3p_i}{2} (1 - ({}^3i c)^2)
 \end{aligned}
 \quad (B-68)$$

$$\begin{aligned}
 n^2 &= \sum ({}^1i c)^2 + \sum ({}^2i m)^2 + \sum ({}^3i n)^2 \\
 &= \sum {}^1p_i ({}^1i c)^2 + \sum \frac{{}^2p_i}{2} (1 - ({}^2i c)^2) + \sum \frac{{}^3p_i}{2} (1 - ({}^3i c)^2)
 \end{aligned}
 \quad (B-69)$$

従って

$$l^2 - m^2 = \sum \frac{{}^2p_i}{2} (1 - 3({}^2i c)^2) - \sum \frac{{}^3p_i}{2} (1 - 3({}^3i c)^2)
 \quad (B-70)$$

この式の右辺は、条件式 (B-65) により 0 となること  
が分る。すなわち  $l^2 = m^2$

同様に

$$\begin{aligned}
 l^2 - m^2 &= \sum \frac{{}^1p_i}{2} (1 - 3({}^1i c)^2) - \sum \frac{{}^3p_i}{2} (1 - 3({}^3i c)^2) \\
 &= 0
 \end{aligned}
 \quad (B-71)$$

ゆえに

$$l^2 = m^2 = n^2
 \quad (B-72)$$

これによって条件 [3] が満たされていることが証明された。  
すなわち上記 ( $l \ m \ n$ ) は条件 [1][2][3] を満たす解  
である。

例えば  $q_1 = q_2 = q_3 = 1$  の場合、次に掲げるものは解  
の具体例である。

$$\begin{aligned}
 \textcircled{a} \quad {}^1p_1 &= {}^2p_1 = {}^3p_1 = 1 \text{ のとき} \\
 ({}^{11}l \ {}^{11}m \ {}^{11}c) &= (0 \ 0 \ 1) \\
 ({}^{21}l \ {}^{21}c \ {}^{21}n) &= (0 \ 1 \ 0) \quad \text{図-28} \\
 ({}^{31}l \ {}^{31}m \ {}^{31}n) &= (1 \ 0 \ 0)
 \end{aligned}$$

これが [1][2][3] を満たす解であることは明らかである。

$$\begin{aligned}
 \textcircled{b} \quad {}^1p_1 &= {}^2p_1 = {}^3p_1 = 2, \quad {}^{11}c = {}^{21}c = {}^{31}c = 0 \text{ のとき} \\
 ({}^{11}l \ {}^{11}m \ {}^{11}c) &= \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 \end{pmatrix} \\
 ({}^{21}l \ {}^{21}c \ {}^{21}n) &= \begin{pmatrix} \cos \alpha & 0 & \sin \beta \\ -\sin \beta & 0 & \cos \beta \end{pmatrix} \quad \text{図-29} \\
 ({}^{31}c \ {}^{31}m \ {}^{31}n) &= \begin{pmatrix} 0 & \cos \gamma & \sin \gamma \\ 0 & -\sin \gamma & \cos \gamma \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

$\alpha, \beta, \gamma$  は任意の角度

$$\textcircled{c} \quad {}^1p_1 = {}^2p_1 = {}^3p_1 = 3, \quad {}^{11}c = {}^{21}c = {}^{31}c = 0 \text{ のとき}$$

$$\begin{aligned}
 ({}^{11}l \ {}^{11}m \ {}^{11}c) &= \begin{pmatrix} \sin \alpha_1 & \cos \alpha_1 & 0 \\ \sin \alpha_2 & \cos \alpha_2 & 0 \\ \sin \alpha_3 & \cos \alpha_3 & 0 \end{pmatrix} \\
 \alpha_i &= \frac{2\pi}{3} (i-1) + \delta_1 \\
 ({}^{21}l \ {}^{21}c \ {}^{21}n) &= \begin{pmatrix} \sin \beta_1 & 0 & \cos \beta_1 \\ \sin \beta_2 & 0 & \cos \beta_2 \\ \sin \beta_3 & 0 & \cos \beta_3 \end{pmatrix} \quad \text{図-30} \\
 B_i &= \frac{2\pi}{3} (i-1) + \delta_2 \\
 ({}^{31}c \ {}^{31}m \ {}^{31}n) &= \begin{pmatrix} 0 & \sin \gamma_1 & \cos \gamma_1 \\ 0 & \sin \gamma_2 & \cos \gamma_2 \\ 0 & \sin \gamma_3 & \cos \gamma_3 \end{pmatrix} \\
 \gamma_i &= \frac{2\pi}{3} (i-1) + \delta_2
 \end{aligned}$$

$\delta_1 \ \delta_2 \ \delta_3$  は任意の角度

$$\begin{aligned}
 \textcircled{d} \quad {}^1p_1 &= {}^2p_1 = {}^3p_1 = 3 \text{ のとき} \\
 ({}^{11}l \ {}^{11}m \ {}^{11}c) &= \begin{pmatrix} b_1 \sin \alpha_1 & b_1 \cos \alpha_1 & {}^{11}c \\ b_1^2 = 1 - c^2 & b_1 \sin \alpha_2 & b_1 \cos \alpha_2 & {}^{11}c \\ \alpha_i = \frac{2\pi}{3} (i-1) & b_1 \sin \alpha_3 & b_1 \cos \alpha_3 & {}^{11}c \end{pmatrix} \\
 &+ \delta_1 \\
 ({}^{21}l \ {}^{21}c \ {}^{21}n) &= \begin{pmatrix} b_2 \sin \beta_1 & {}^{21}c & b_2 \cos \beta_1 \\ b_2 = 1 - d^2 & b_2 \sin \beta_2 & {}^{21}c & b_2 \cos \beta_2 \\ \beta_i = \frac{2\pi}{3} (i-1) & b_2 \sin \beta_3 & {}^{21}c & b_2 \cos \beta_3 \end{pmatrix} \\
 &+ \delta_2 \\
 ({}^{31}c \ {}^{31}m \ {}^{31}n) &= \begin{pmatrix} {}^{31}c & b_3 \sin \gamma_1 & b_3 \cos \gamma_1 \\ b_3 = 1 - e^2 & {}^{31}c & b_3 \sin \gamma_2 & b_3 \cos \gamma_2 \\ \gamma_i = \frac{2\pi}{3} (i-1) & {}^{31}c & b_3 \sin \gamma_3 & b_3 \cos \gamma_3 \end{pmatrix} \\
 &+ \delta_3
 \end{aligned}$$

但し

$$\begin{aligned}
 \sum_{i=1}^{q_1} {}^1p_i (1 - 3({}^1i c)^2) &= \sum_{i=1}^{q_2} {}^2p_i (1 - 3({}^2i c)^2) \\
 &= \sum_{i=1}^{q_3} {}^3p_i (1 - 3({}^3i c)^2)
 \end{aligned}$$

この場合  $q_1 = q_2 = q_3 = 1, {}^1p_1 = {}^2p_1 = {}^3p_1 = 3$  な  
ので上式は

$$3(1 - 3({}^{11}c)^2) = 3(1 - 3({}^{21}c)^2) = 3(1 - 3({}^{31}c)^2)$$

$$\text{従って} \quad ({}^{11}c)^2 = ({}^{21}c)^2 = ({}^{31}c)^2$$

${}^{11}c = {}^{21}c = {}^{31}c > 0$  の場合が図-31 である。

${}^{11}c = {}^{21}c = {}^{31}c = 1$  の場合は、3 軸直交系が 3 つ重合  
したものとなり基本解ではなくなる。



${}^{11}c = {}^{21}c = {}^{31}c = \sqrt{\frac{1}{3}}$  の場合は、1極1重円錐解(3軸直交系であるが)が3つ複合したものであり基本解ではない。

4)  $n$ 極解(本文7.2.3(4)および7.3.4))

次の $F$ は前述の条件①②③を満たす。

$$(l, m, n) = F = \begin{matrix} (p \times 3) \\ \begin{pmatrix} F_1 \cdot U_1 \\ F_2 \cdot U_2 \\ \vdots \\ F_n \cdot U_n \end{pmatrix} \end{matrix} \quad (\text{B-73})$$

矢(観測軸の個数)

$$p = np_f$$

ただし  $F_i$  ( $i=1, 2 \dots n$ ) は  $p_f \times 3$  の大きさの行列で、

$$(F_{i1})^2 + (F_{i2})^2 + (F_{i3})^2 = 1 \quad (i=1, 2 \dots p) \quad (\text{B-74})$$

$$\tilde{F}_i F_i = \tilde{F}_j F_j \quad (i, j=1, 2 \dots n) \quad (\text{B-75})$$

且つ

$$\tilde{F}_i F_i = \begin{pmatrix} a^2 & 0 & 0 \\ 0 & a^2 & 0 \\ 0 & 0 & b^2 \end{pmatrix} \quad (i=1, 2 \dots n) \quad (\text{B-76})$$

ここに  $a, b$  は  $2a^2 + b^2 = p_f$  なる任意の実数 (B-77)

また  $U_i$  ( $i=1, 2 \dots n$ ) は  $3 \times 3$  の大きさの回転行列で次式によって示される(図B-1を参照のこと)。

$$U_i = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha_i & -\sin \alpha_i \\ 0 & \sin \alpha_i & \cos \alpha_i \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \cos \beta_i & -\sin \beta_i & 0 \\ \sin \beta_i & \cos \beta_i & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (\text{B-78})$$

ここに図(B-1)を参照にして

$$\cos \alpha_i = n_i^o \quad (\text{B-79})$$

$$\sin \alpha_i = \sqrt{\ell_i^2 + m_i^{o2}} \quad (\text{B-80})$$

$$\cos \beta_i = \frac{m_i^o}{\sqrt{\ell_i^2 + m_i^{o2}}} \quad (\text{B-81})$$

$$\sin \beta_i = \frac{\ell_i}{\sqrt{\ell_i^2 + m_i^{o2}}} \quad (\text{B-82})$$

処で、上記の  $(\ell_i^o, m_i^o, n_i^o)$  ( $i=1, 2 \dots n$ ) は、まさに最適観測軸の方向をとるので

$$l^o m^o = m^o n^o = n^o l^o = 0 \quad (\text{B-83})$$

$$l^{o2} = m^{o2} = n^{o2} \quad (\equiv \ell^{o2} \text{ とおく}) \quad (\text{B-84})$$

が成り立つ。また

$$\ell_i^2 + m_i^{o2} + n_i^{o2} = 1 \quad (\text{B-85})$$

であることはいうまでもない。

上記 $F$ が条件①②③を満たすことを証明する。

$F$ の定義(B-73)より

$$\tilde{F} F = \tilde{U}_1 \tilde{F}_1 F_1 U_1 + \tilde{U}_2 \tilde{F}_2 F_2 U_2 + \dots + \tilde{U}_n \tilde{F}_n F_n U_n \quad (\text{B-86})$$

処で(B-76), (B-78)によれば

$$\begin{aligned} & \tilde{U}_i \tilde{F}_i F_i U_i = \\ & \left( \begin{array}{ccc} a^2 (\cos^2 \beta_i + \cos^2 \alpha_i \sin^2 \beta_i) & a^2 (-\cos \beta_i \sin \beta_i + \cos^2 \alpha_i \sin \beta_i \cos \beta_i) & -a^2 \sin \alpha_i \cos \alpha_i \\ + b^2 \sin^2 \alpha_i \sin^2 \beta_i & + b^2 (-\sin^2 \alpha_i \sin \beta_i \cos \beta_i) & \times \sin \beta_i \\ \cdot & a^2 (\sin^2 \beta_i + \cos^2 \alpha_i \cos^2 \beta_i) & -a^2 \sin \alpha_i \cos \alpha_i \\ & + b^2 (\sin^2 \alpha_i \cos^2 \beta_i) & \times \cos \beta_i \\ \cdot & \cdot & a^2 \sin^2 \alpha_i \\ & \cdot & + b^2 \cos^2 \alpha_i \end{array} \right) \\ & = \left( \begin{array}{ccc} a^2 (m_i^{o2} + n_i^{o2}) + b^2 (\ell_i^{o2}) & a^2 (m_i^o \ell_i^o) - b^2 (m_i^o \ell_i^o) & -a^2 (\ell_i^o n_i^o) \\ \cdot & a^2 (\ell_i^{o2} + n_i^{o2}) + b^2 (m_i^{o2}) & -a^2 (m_i^o n_i^o) \\ \cdot & \cdot & a^2 (\ell_i^{o2} + m_i^{o2}) + b^2 (n_i^{o2}) \end{array} \right) \quad (\text{B-87}) \end{aligned}$$

(上記行列は対称行列ゆえ下三角行列は省略した。)

従って (B-86) 式は (B-87) より

$$\begin{aligned}\tilde{F}F &= \sum_{i=1}^n \tilde{U}_i \tilde{F}_i F_i U_i \\ &= \begin{pmatrix} c^2(2a^2 + b^2) & 0 & 0 \\ 0 & c^2(2a^2 + b^2) & 0 \\ 0 & 0 & c^2(2a^2 + b^2) \end{pmatrix} \quad (\text{B-88})\end{aligned}$$

以上によって上記  $F$  が条件 [2][3] を満たしていることが証明された。条件 [1] については、行列  $F$  に関する条件式 (B-74) によってそもそも満たされているので、上記  $F$  は条件 [1][2][3] を満たす解である。

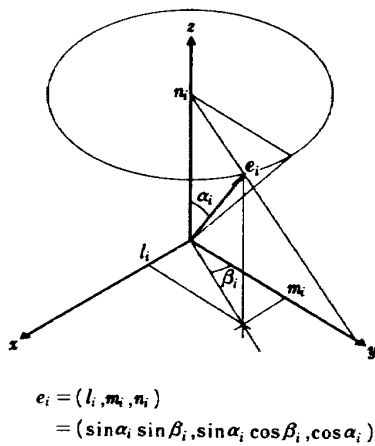


図 B-1

## 付録 C 矢円錐の定義およびその性質

本報告では、幾何学でいう円錐と関連して、叙述を簡明にするため次の様な方向ベクトルの組  $(l \ m \ n)$  を矢円錐と定義する。

$$G = (l \ m \ c) = \begin{pmatrix} l_1 & m_1 & c \\ l_2 & m_2 & c \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ l_p & m_p & c \end{pmatrix} \quad p \geq 1 \quad (\text{C-1})$$

ただし、下記 3 条件を満たすものとする。

$$(1) \quad l_i^2 + m_i^2 + c^2 = 1 \quad (i=1, 2 \dots p) \quad (\text{C-2})$$

$$(2) \quad l m = m c = l c = 0 \quad (\text{C-3})$$

$$(3) \quad l^2 = m^2 \quad (\text{C-4})$$

尚、次の様な関係に注意する。

### C1 回転に対する不変性

⑤  $(l \ m \ c)$  が上記の条件(1)(2)(3)を満たすなら、それを 軸 ( $z$  軸) の回りに任意に回転させたもの  $(l' \ m' \ c')$  も上記の条件(1)(2)(3)を満たす。

証明 上記の矢円錐に関する性質⑤を簡単なベクトル演算を用いて証明する。

○(1)について

これは矢 (観測軸) の長さが単位長 (= 1) であることを示しているが、この長さは、どのような回転によっても不変であるとはいうまでもない。しかし念のため数学的証明を与えておく。

$z$  軸回りの回転を次のように表示する。

$$R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (\text{C-5})$$

$$\text{従って } \tilde{R}(\theta)R(\theta) = E_{(3)} \text{ (単位行列)} \quad (\text{C-6})$$

であることに注意する。

さて、 $(l \ m \ c)$  を 軸 ( $z$  軸) 回りに角度  $\theta$  だけ回転したものを  $(l' \ m' \ c')$  と表わせば

$$(l' \ m' \ c') = (l \ m \ c) \tilde{R}(\theta) \quad (\text{C-7})$$

つまり

$$\begin{pmatrix} l'_1 & m'_1 & c' \\ l'_2 & m'_2 & c' \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ l'_p & m'_p & c' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l_1 & m_1 & c \\ l_2 & m_2 & c \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ l_p & m_p & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (\text{C-8})$$

このことから、 $c' = c$  であることがわかる。 (C-9)

さて上式より  $i$  番目の行を抜き出してみると

$$(l'_i \ m'_i \ c') = (l_i \ m_i \ c) \tilde{R}(\theta) \quad (\text{C-10})$$

となる。

従って

$$\begin{aligned}(l'_i)^2 + (m'_i)^2 + (c')^2 &= (l'_i \ m'_i \ c') \begin{pmatrix} l'_i \\ m'_i \\ c' \end{pmatrix} \\ &= (l_i \ m_i \ c) \tilde{R}(\theta) R(\theta) \begin{pmatrix} l_i \\ m_i \\ c \end{pmatrix} \quad (\text{C-11})\end{aligned}$$

処が (C-6) 式に示すように  $\tilde{R}(\theta)R(\theta) = E_{(3)}$  なので上式 (C-11) は

$$\begin{aligned}
 (l'_i)^2 + (m'_i)^2 + (c')^2 &= (l_i \ m_i \ c) \begin{pmatrix} l_i \\ m_i \\ c \end{pmatrix} \\
 &= l_i^2 + m_i^2 + c^2 \quad (C-12)
 \end{aligned}$$

となる。このことは、云うまでもなく、回転 $R(\theta)$ に対して(1)の性質が不変に保たれることを示す。

○(2)および(3)について

(C-7)式より

$$\begin{pmatrix} \tilde{l}' \\ \tilde{m}' \\ \tilde{c}' \end{pmatrix} (l' \ m' \ c') = R(\theta) \begin{pmatrix} \tilde{l} \\ \tilde{m} \\ \tilde{c} \end{pmatrix} (l \ m \ c) \tilde{R}(\theta) \quad (C-13)$$

つまり

$$\begin{pmatrix} (l')^2 & l'm' & l'c' \\ m'l' & (m')^2 & m'c' \\ c'l' & c'm' & (c')^2 \end{pmatrix} = R(\theta) \begin{pmatrix} l^2 & lm & lc \\ ml & m^2 & mc \\ cl & cm & c^2 \end{pmatrix} \tilde{R}(\theta) \quad (C-14)$$

となる。 $(l, m, c)$ が条件(1)(2)(3)を満たしているとするならば、

$$\begin{pmatrix} l^2 & lm & lc \\ ml & m^2 & mc \\ cl & cm & c^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l^2 & 0 & 0 \\ 0 & m^2 & 0 \\ 0 & 0 & c^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 & 0 & 0 \\ 0 & a^2 & 0 \\ 0 & 0 & pc^2 \end{pmatrix} \quad (C-15)$$

となる。但し  $l^2 = a^2$  とした。

従って(C-14)式の右辺は

$$\begin{aligned}
 R(\theta) \begin{pmatrix} a^2 & 0 & 0 \\ 0 & a^2 & 0 \\ 0 & 0 & pc^2 \end{pmatrix} \tilde{R}(\theta) \\
 = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a^2 & 0 & 0 \\ 0 & a^2 & 0 \\ 0 & 0 & pc^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (C-17)
 \end{aligned}$$

と表わされる。

更に公式(4)を使えば上式(C-17)は単に

$$= \begin{pmatrix} a^2 & 0 & 0 \\ 0 & a^2 & 0 \\ 0 & 0 & pc^2 \end{pmatrix} \quad (C-18)$$

であることが分る。

結局、(C-14)式は

$$\begin{pmatrix} (l')^2 & l'm' & l'c' \\ m'l' & (m')^2 & m'c' \\ c'l' & c'm' & (c')^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 & 0 & 0 \\ 0 & a^2 & 0 \\ 0 & 0 & pc^2 \end{pmatrix} \quad (C-19)$$

となることが分る。

上式(C-19)から

$$l'm' = l'c' = c'm' = 0 \quad (C-20)$$

$$(l')^2 = (m')^2 \quad (C-21)$$

であることがいえ、 $(l' \ m' \ c')$ が条件(2)(3)を満たすことをしめす。つまり、回転 $R(\theta)$ に対して(2)(3)の性質が不変であることを示す。

従って、回転 $R(\theta)$ に対して(1)(2)(3)の性質が不変であることが証明された。

以上のことは、 $(l \ m \ c)$ が矢円錐であるならば、それを $c$ 軸の回りに任意に回転させても、その性質は不変であることを示す。(本文7.3.1)(b)の⑤)

## C2 多重矢円錐

矢円錐がいくつか、円錐軸を同じにして重なり合ったものの(図-8)を多重矢円錐と名付ける。これを数式で表わすならば次の様になる。

$$G \equiv \begin{pmatrix} {}^1l & {}^1m & {}^1c \\ {}^2l & {}^2m & {}^2c \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ {}^ql & {}^qm & {}^qc \end{pmatrix} \begin{matrix} \text{矢の個数} \\ p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ p_q \end{matrix} \quad (C-22)$$

ただし

$$(1') \quad ({}^jl_i)^2 + ({}^jm_i)^2 + ({}^jc)^2 = 1 \quad (j=1, 2 \dots p_q) \quad (C-23)$$

$$(2') \quad {}^jl^j m = {}^jm^j c = {}^jc^j l = 0 \quad (j=1, 2 \dots q) \quad (C-24)$$

$$(3') \quad ({}^jl)^2 = ({}^jm)^2 \quad (j=1, 2 \dots q) \quad (C-25)$$

以上が多重矢円錐の定義である。この定義から次のことがいえる。

$$(\tilde{G} G) = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^q ({}^jl)^2 & 0 & 0 \\ 0 & \sum_{j=1}^q ({}^jm)^2 & 0 \\ 0 & 0 & \sum_{j=1}^q ({}^jc)^2 \end{pmatrix} \quad (C-26)$$

$$\sum_{j=1}^q ({}^jl)^2 = \sum_{j=1}^q ({}^jm)^2 \quad (C-27)$$

## C3 等価矢円錐

2種類の多重矢円錐(1(重)矢円錐も含めて考える) $G_1$

および  $G_2$  があって、たとえ  $G_1 \neq G_2$  であっても

$$\tilde{G}_1 G_1 = \tilde{G}_2 G_2 \quad (O-28)$$

であるならば、2つの多重矢円錐  $G_1, G_2$  は観測系の評価のうえでは等価である。なぜなら、 $G_1$  を含む観測系を  $F_1$  とし  $G_2$  を含む観測系を  $F_2$  とするとき

$$F_1 = \begin{pmatrix} G_1 \\ G_0 \end{pmatrix}, \quad F_2 = \begin{pmatrix} G_2 \\ G_0 \end{pmatrix} \quad (O-29)$$

であるならば

$$\tilde{F}_1 F_1 = \tilde{G}_1 G_1 + \tilde{G}_0 G_0 \quad (O-30)$$

$$\tilde{F}_2 F_2 = \tilde{G}_2 G_2 + \tilde{G}_0 G_0 \quad (O-31)$$

となり

$$\text{もし } \tilde{G}_1 G_1 = \tilde{G}_2 G_2 \text{ であるならば} \quad (O-32)$$

$$\tilde{F}_1 F_1 = \tilde{F}_2 F_2 \quad (O-33)$$

となって、観測系の評価に関しては等しくなる。つまり

$$\det(\tilde{F}_1 F_1) = \det(\tilde{F}_2 F_2) \text{ となる。従って} \quad (O-34)$$

$$\tilde{G}_1 G_1 = \tilde{G}_2 G_2 \quad (O-35)$$

であるならば  $G_1$  と  $G_2$  は等価であるといえる。

従って前節の多重矢円錐  $G'$  は次の矢円錐  $G''$  と等価である。

$$G'' = (l' \ m' \ c') \text{ 矢の個数 } p' \quad (O-36)$$

ただし

$$p' = \sum_{j=1}^q p_j \quad (O-37)$$

$$p'(c')^2 = \sum_{j=1}^q (l'_j)^2 = \sum_{j=1}^q p_j (l'_j)^2 \quad (O-38)$$

とする。

この  $G'$  が前節の  $G$  と等価であることを示す。

$$(l')^2 + (m')^2 + (c')^2 = \sum_{i=1}^p \{(l'_i)^2 + (m'_i)^2 + (c'_i)^2\}$$

$$= \sum_{i=1}^p 1 = p \quad (O-39)$$

$$\therefore (l')^2 + (m')^2 = p - (c')^2 = p - p(c')^2 \quad (O-40)$$

処で  $(l', m', c')$  は矢円錐であるので

$$(l'')^2 = (m')^2 \quad (O-41)$$

これを上式 (O-40) に代入して

$$(l')^2 = \frac{1}{2} (p - p(c')^2) \quad (O-42)$$

一方、 $G'$  については

$$\sum_{j=1}^q (l'_j)^2 + \sum_{j=1}^q (m'_j)^2 + \sum_{j=1}^q c'_j = \sum_{j=1}^q p_j = p' \quad (O-43)$$

$$\sum_{j=1}^q (l'_j)^2 = \sum_{j=1}^q (m'_j)^2 \quad (O-44)$$

従って

$$\sum (l')^2 = \frac{1}{2} (p' - \sum_{j=1}^q c'_j) = \frac{1}{2} (p' - p'(c')^2) \quad (O-45)$$

つまり

$$\tilde{G} G' = \tilde{G}' G' \quad (O-46)$$

以上によって、 $G'$  と  $G''$  が等価であることが示された。 $q = 2$  の場合の説明図が図-20である。また、本文 7.3.1)

(b) の⑥にも説明が載っている。

#### C4 矢円錐の具体例

既述の条件 (1) (2) (3) を満たせば矢円錐と定義されるが、その具体例を次に示してゆく。

1)  $p = 1$  のとき

$$(l, m, c)_{p=1} = (0, 0, 1)$$

これが先の条件 (1) (2) (3) を満たすことは自明である。且つ、 $p = 1$  の場合はこれ以外にない (証明は省略する)。図-18(a)にこれを示す。

2)  $p = 2$  のとき

$$(l, m, c)_{p=2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{または} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 \end{pmatrix}$$

これらが先の条件 (1) (2) (3) を満たすことは明らかである。且つ、 $p = 2$  の場合はこれら以外にはない。図-18(b)(i) および図-18(b)(ii)にこれらを図示する。

3)  $p \geq 3$  のとき

$$(l, m, c)_{p \geq 3} = \begin{pmatrix} b \sin \theta_1 & b \cos \theta_1 & c \\ b \sin \theta_2 & b \cos \theta_2 & c \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ b \sin \theta_p & b \cos \theta_p & c \end{pmatrix}$$

ただし

$$b^2 = 1 - c^2$$

$c : |c| \leq 1$  なる任意の実数

$$\theta_i = \frac{2\pi}{p} (i-1) + \delta \quad (i=1, 2, \dots, p)$$

図-18(c)にこれを図示する。これが先の条件(1)(2)(3)を満たしていることは次のように証明できる。

○条件(1)について

$$\begin{aligned} l_i^2 + m_i^2 + c^2 &= b^2 \sin^2 \theta_i + b^2 \cos^2 \theta_i + c^2 \\ &= b^2 + c^2 = (1 - c^2) + c^2 = 1 \end{aligned}$$

$$l c = b c \sum_{i=1}^p \sin \theta_i$$

付録Dによれば,  $\sum_{i=1}^p \sin \theta_i = 0$  従って

$$l c = 0$$

同様に, 付録Dによって  $\sum_{i=1}^p \cos \theta_i = 0$  なので

$$m c = b c \sum_{i=1}^p \cos \theta_i = 0$$

更に, 同じく付録Dによって  $\sum_{i=1}^p \sin 2\theta_i = 0$  なので

$$l m = b^2 \sum \cos \theta_i \sin \theta_i = \frac{1}{2} b^2 \sum \sin 2\theta_i = 0$$

○条件(3)について

$$l^2 = b^2 \sum_{i=1}^p \sin^2 \theta_i = b^2 \sum_{i=1}^p \frac{1}{2} (1 - \cos 2\theta_i)$$

付録Dによれば  $\sum_{i=1}^p \cos 2\theta_i = 0$  なので

$$l^2 = \frac{b^2}{2} p = \frac{p}{2} (1 - c^2)$$

同様に

$$\begin{aligned} m^2 &= b^2 \sum_{i=1}^p \cos^2 \theta_i = b^2 \sum_{i=1}^p \frac{1}{2} (1 + \cos 2\theta_i) \\ &= \frac{p}{2} b^2 = \frac{p}{2} (1 - c^2) \end{aligned}$$

$$\text{ゆえに } l^2 = m^2$$

以上で上記  $(l \ m \ c)_{p \geq 3}$  が先の条件(1)(2)(3)を満たしていることが証明された。

#### 付録D 正弦・余弦の零和の規則

$p$  を2以上の任意の正整数とし,  $n$  を  $p$  で割り切れない整数とするとき

$$\theta_j = \frac{2n\pi}{p} (j-1) \quad (j=1, 2 \dots p) \quad (\text{D-1})$$

なる  $\theta_j$  ( $j=1, 2 \dots p$ ) について

$$\sum_{j=1}^p \sin(\theta_j + \delta) = 0 \quad (\text{D-2})$$

$$\sum_{j=1}^p \cos(\theta_j + \delta) = 0 \quad (\text{D-3})$$

である。但し  $\delta$  は任意の角度

証明

指数関数の性質により

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^p e^{i(\theta_j + \delta)} &= e^{i\delta} \sum_{j=1}^p e^{i\theta_j} \\ &= e^{i\delta} \frac{1 - e^{i2n\pi}}{1 - e^{i\frac{2n\pi}{p}}} = 0 \end{aligned} \quad (\text{D-4})$$

なるとなれば

$$e^{i2n\pi} = e^{i0} = 1 \quad (\text{D-5})$$

$$e^{i\frac{2n\pi}{p}} \neq 1 \quad (\because n \text{ は } p \text{ で割り切れないので}) \quad (\text{D-6})$$

処で, 虚数の指数関数は次の様に分解できる。

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^p e^{i(\theta_j + \delta)} &= i \left\{ \sum \sin(\theta_j + \delta) \right\} \\ &\quad + \left\{ \sum \cos(\theta_j + \delta) \right\} \end{aligned} \quad (\text{D-7})$$

(D-4)式により, たれ(D-7)が0であるので, 上式の虚数部, 実数部とも0でなければならない。すなわち

$$\sum_{j=1}^p \sin(\theta_j + \delta) = 0 \quad (\text{D-8})$$

$$\sum_{j=1}^p \cos(\theta_j + \delta) = 0 \quad (\text{D-9})$$

これにより証明を終る

公式1 正則行列  $A(p \times p)$ ,  $B(q \times q)$ , 行列  $U(p \times q)$ ,  $V(q \times p)$  に対して

$$(A + UBV)^{-1} = A^{-1} - A^{-1}U(B^{-1} + VA^{-1}U)^{-1}VA^{-1}$$

公式2 行列  $A(p \times q)$ ,  $B(q \times p)$  に対して

$$|E_{(p)} + AB| = |E_{(q)} + BA|$$

但し  $E_{(p)}$ ,  $E_{(q)}$  とは各々  $p$  次元,  $q$  次元の単位行列

公式3

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & \sin \alpha \\ 0 & -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a^2 & 0 & 0 \\ 0 & b^2 & 0 \\ 0 & 0 & c^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & -\sin \alpha \\ 0 & \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & \sin \alpha \\ 0 & -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a^2 & 0 & 0 \\ 0 & b^2 \cos \alpha & -b^2 \sin \alpha \\ 0 & c^2 \sin \alpha & c^2 \cos \alpha \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} a^2 & 0 & 0 \\ 0 & b^2 \cos^2 \alpha + c^2 \sin^2 \alpha & -b^2 \cos \alpha \sin \alpha + c^2 \cos \alpha \sin \alpha \\ 0 & -b^2 \cos \alpha \sin \alpha + c^2 \cos \alpha \sin \alpha & b^2 \sin^2 \alpha + c^2 \cos^2 \alpha \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} a^2 & 0 & 0 \\ 0 & b^2 \cos^2 \alpha + c^2 \sin^2 \alpha & (c^2 - b^2) \cos \alpha \sin \alpha \\ 0 & (c^2 - b^2) \cos \alpha \sin \alpha & b^2 \sin^2 \alpha + c^2 \cos^2 \alpha \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

公式 4

$$\begin{pmatrix} \tilde{U} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} aE & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \tilde{U} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} aU & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} aE & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$$

但し  $\tilde{U}U = E$ 

公式 5

$$\begin{aligned}
&\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & -\sin \alpha \\ 0 & \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \beta & -\sin \beta & 0 \\ \sin \beta & \cos \beta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \cos \beta & -\sin \beta & 0 \\ \cos \alpha \sin \beta & \cos \alpha \cos \beta & -\sin \alpha \\ \sin \alpha \sin \beta & \sin \alpha \cos \beta & \cos \alpha \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

---

## 航空宇宙技術研究所資料367号

昭和53年10月発行

発行所 航空宇宙技術研究所  
東京都調布市深大寺町1889  
電話武蔵野三鷹(0422)47-5911(大代表)☎182  
印刷所 株式会社 東京プレス  
東京都板橋区桜川 2-27-12

---

Printed in Japan