NAL TR-66

UDC 534.12

航空宇宙技術研究所報告
TECHNICAL REPORT OF NATIONAL AEROSPACE LABORATORY

TR-66

変分法による平板翼の撓み，振動解における自然境界条件の数値的吟味（片持平板翼の場合）

川井忠彦・塙　武敏・越出慎一
戸川隼人・落合　薫

1964年6月

航空宇宙技術研究所
NATIONAL AEROSPACE LABORATORY

既 刊 報 告

TR-34	高速軸流圧縮機の研究（I） —翼型と翼列の検討— An Investigation of High Speed Axial Flow Compressor（I） —The Selection of Compressor Cascade—	1963年1月	松木正勝，大山耕一 宮地敏雄
TR-35	高速軸流圧縮機の研究（II） —単段試験装置の設計と全体性能— An Investigation of High Speed Axial Flow Compressor（II） —Design and Over-all Performance of a Single Stage Axial Flow Compressor—	1963年1月	松木正勝，宮地敏雄 大山耕一，吉田　晃 西脇英夫，岩部柱相
TR-3	衝撃波風胴による表面熱伝達の実験 Studies of Surface Heat Transfer Using a Hypersonic Shock Tunnel	1963年1月	和田　勇，松崎利一
TR-37T	Studies of the Flow in a Low Pressure Hypersonic Shock Tunnel Using an Electron-Beam Densitometer	January 1963	Isamu WADA
TR-38	鋳鉄のような脆性材料からなる円板の回転強度 Strength of Rotating Discs of Brittle Material like Cast Iron	1963年2月	佐藤和郎，永井文雄
TR-39	高負荷燃焼器の研究（第I報） —その性能におよぼす各種因子の影響の定性的考察— A Study of High Intensity Combustor（I） —Its Qualitative Analysis—	1963年2月	大塚貞吉，鈴木邦男
TR-40	胴体内圧繰返し荷重試験装置について Repeated Load Testing Facility for Full-Scale Aircraft Fuselage Structures	1963年2月	竹内和之，川島矩郎 野原利雄
TR-41	輻射熱量計の較正 Calibration of Radiometer	1963年2月	竹中幸彦，江川幸一 小川鉱一
TR-42	非定常境界層の相似解とその安定 A Similar Solution of Unsteady Laminar Boundary Layer and Its Stability Characteristics	1963年7月	小橋安次郎，恩地　瑛
TR-43	超音速における操縦面の効きについて On the Effectiveness of Control Surfaces in Supersonic Flow	1963年2月	河崎俊夫
TR-44	高速翼列の実験について （流入角の大きい減速翼列の予備実験） Some Notes about the Effect of Tunnel Configuration and Testing Technique on Compressor Cascade Performance	1963年2月	近藤　博，蓑田光弘 坂口　一，山崎紀雄
TR-45	固有値問題 $(\sum \lambda^k A_k)x=0$ の数値解法 A Numerical Method for the Eigenvalue Problem $(\sum \lambda^k A_k)x=0$	1963年4月	戸川隼人
TR-46	翼の固有振動数に関する一解析法 On the Vibration Analysis of Aircraft Wings	1963年6月	川井忠彦，泉日出夫 戸川隼人，林　洋一
TR-47	鋳鉄円板の回転破壊におけるコリオリの力の影響 Influence of Coriolis' Force on the Burst of Rotating Disc of Cast Iron	1963年8月	佐藤和郎，永井文雄
TR-48	曲面に沿う境界層 Effects of Surface Curvature on Laminar Boundary-Layer Flow	1963年8月	林　二識
TR-49	高速軸流圧縮機の研究（III） An Investigation of High Speed Axial Flow Compressor（III）	1963年9月	松木正勝，宮地敏雄 大山耕一，吉田　晃 西脇英夫，岩部柱相
TR-50	境界収縮法による偏微分方程式の境界値問題の数値解法 Numerical Method for Boundary Value Problems of Partial Differential Equations by Boundary Contraction	1963年9月	樋口一雄，能美　力
TR-51	人間の静的不安定系の制御能力 Human Control Ability of the Statically Unetable System	1963年9月	武田　峻

変分法による平板翼の撓み，振動解における自然境界条件の数値的吟味* （片持平板翼の場合）

川井忠彦**・塙　武敏***・越出慎一***
戸川隼人****・落合　薫***

Numerical Examination on the Fulfilment of Natural Boundary Conditions by the Approximate Solutions for Bending and Vibration of Thin Elastic Plates based on the Rayleigh-Ritz's Procedure (in Case of Cantilevered Wing Plates).

By Tadahiko KAWAI. Taketoshi HANAWA, Shinichi KOSHIDE,
Hayato TOGAWA, Kaoru OCHIAI

It is known that in direct method of variational calculus the natural boundary conditions may be satisfied mathematically by the trial function with infinite number of paramaters of appropriate choice.

In actual calculation, however, we must limit the number of parameters in the trial function and naturally we can not expect that the natural boundary conditions will be satisfied exactly.

Therfore, it is very important to know clearly of the relation between the degree of fulfiment of the natural boundary conditions by trial functions and the number of parameters appropriately selected in these test functions.

This is a report of such study on the approximate solutions which we have obtained in bending or vibration of thin cantilevered wing plates.

Besides the numerical examination on the fulfilment of natural boundary conditions, the convergency of approximation solutions and, etc., are also briefly discussed.

1. 緒　　言

さきに平板翼の撓みおよび振動について変分法の直接解法を用いて解析し，各種の形状についてその計算結果と実験結果との比較を行ない十分実用性のあることが確かめられた。

これらの解析では試験函数として羃級数を用い，自由辺の境界条件は自然境界条件として，系の

* 昭和 39 年 5 月 25 日受付
** 東京大学生産技術研究所
*** 機体第二部
**** 計測部

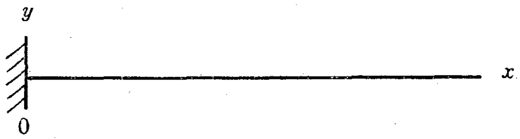
全ポテンシャルエネルギーを停留させることにより満足されるようにして解を求めたのであるが，この方法による一連の研究結果を発表している間に，この方法の妥当性の裏付けだけでなく，変分法的手法による近似解がどの程度に自然境界条件を満しているかという点につき，特に数値的吟味の必要性を痛感した。現在各種の場合の数値解析が一応完了したので，これらの解の精度について数値的吟味を行なった結果について報告する。また，変分法のごく基本的な問題の数値例も示して参考にしたい。

2. 解　　析

ここで取り扱った数値計算に関係する解析についてのべる。

（1） 片持梁の自由振動の場合。

時間の項を整理して空間座標に関する式とした時の汎函数としては



第 1 図　片持梁の振動解析に用いた座標

$$J(y)=\int_0^1(y''^2-\lambda^2y^2)dx \tag{1}$$

となりこの第一変分は次式で与えられる。

$$\delta J(y)=\int_0^1(y''''-\lambda^2y)\delta y dx+y''\delta y'\Big|_{x=1}-y'''\delta y\Big|_{x=1} \tag{2}$$

いま直接法で (2) 式を満すような解をうるため，試験函数として

$$y=\sum_{n=2}^{\infty}a_nx^n \tag{3}$$

をとる。

これを (1) 式に代入すると未定係数 a_n に関する二次形式が得られる。これを a_n で偏微分してその偏微分係数を零とすると固有値を与える特有方程式が得られる。解は (2) 式を考えれば $\delta y, (\delta y')_{x=1}, (\delta y)_{x=1}$ はそれぞれ任意な変化をすることができるわけであるから，得られた固有値および固有函数は

$0\leqslant x\leqslant 1$ で

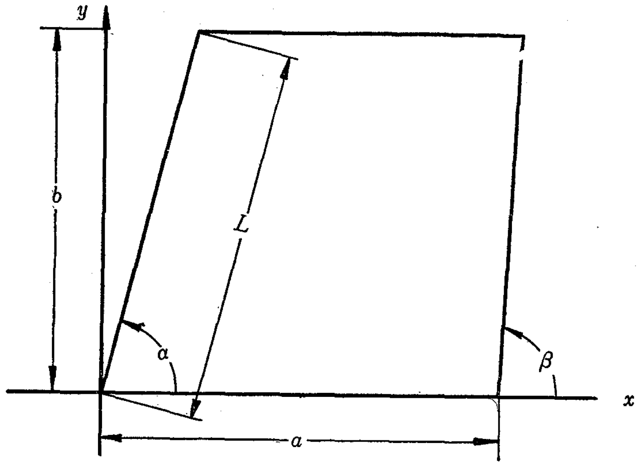
$$y''''-\lambda^2y=0 \tag{4}$$

$x=1$ で

$$y'''=0,\qquad y''=0$$

をおのおの満す解となるわけである。 (5)

（2） 梯形片持平板の自由振動の場合。



第 2 図 平板翼の振動解析に用いた座標

（1）と同様汎函数としては，

$$J(w)=\frac{D}{2}\left[\iint\{(\Delta w)^2-2(1-\nu)\,(w_{xx}w_{yy}-w_{xy}^2)-\lambda^2w^2\}\,dxdy\right] \tag{6}$$

変分をとれば，

$$\begin{aligned}\delta J(w)=&D\iint(\Delta\Delta w-\lambda^2 w)\delta w dxdy\\&+D\iint[(1-\nu)\,(w_{xx}\cos\alpha^2+2w_{xy}\sin\alpha\cos\alpha+w_{yy}\sin^2\alpha\\&+\nu\Delta w]\delta\left(\frac{\partial w}{\partial n}\right)dS\\&+D\iint\left\{(1-\nu)\frac{\partial}{\partial s}[(w_{xx}-w_{yy})\sin\alpha\cos\alpha-w_{xy}(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha)]\right.\\&\left.-(w_{xxx}+w_{xyy})\cos\alpha-(w_{yyy}+w_{xxy})\sin\alpha\right\}\delta w dS\\&+\sum_{i=1}^{2}\{-D(1-\nu)\,[(w_{xx}-w_{yy})\sin\alpha\cos\alpha-w_{xy}(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha)]\,\delta w\Big|_{si-0}^{si+0}\}\end{aligned} \tag{7}$$

試験函数として

$$w(x,y)=\sum_{\substack{m=0\\m=2}}^{\infty}a_{mn}x^m y^n \tag{8}$$

とおき，(1) と同様にして求めた固有値および固有函数は

$$\Delta\Delta w-\lambda^2 w=0 \tag{9}$$

$$(1-\nu)\,(w_{xx}\cos^2\alpha+2w_{xy}\sin\alpha\cos\alpha+w_{yy}\sin^2\alpha)+\nu\Delta w=0$$

$$(1-\nu)\frac{\partial}{\partial s}[(w_{xx}-w_{yy})\sin\alpha\cos\alpha-w_{xy}(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha)]$$

$$-(w_{xxx}+w_{xyy})\cos\alpha-(w_{yyy}+w_{xxy})\sin\alpha=0$$

$$(w_{xx}-w_{yy})\sin\alpha\cos\;-w_{xy}(\mathrm{cor}^2\alpha-\sin^2\alpha)\Big|_{si-0}^{si+0}=0 \tag{10}$$

をおのおの満たす解となる。

（3） 集中静荷重が梯形片持板にかかった場合。

振動の場合と同様であるが，この場合には静荷重であるので振動の時の慣性項の代りに外力のなす仕事の項が入る。汎函数としては

$$J(w)=\frac{D}{2}\iint\{(\Delta w)^2-2(1-\nu)\ (w_{xx}w_{yy}-x_{xy}^2)\}dxdy-\iint P(x,k)w(x,y)dxdy \tag{11}$$

となり，集中荷重の場合は δ 函数表示をすれば，

$$J(w)=\frac{D}{2}\iint\{\,\prime\prime\,\}dxdy-\iint P_0\delta(x-\xi,y-\eta)w(x,y)dxdy \tag{12}$$

となる。

この変分は (7) 式と同様に

$$\delta J(w)=D\iint\left\{\Delta\Delta w-\frac{2P_0}{D}\delta(x-\xi,y-\eta)\right\}\delta w dxdy+(7)\ \text{式の境界の項} \tag{13}$$

となる。(2) と同様に撓みの試験函数を

$$w(x,y)=\sum_{\substack{m=0\\n=2}}^{\infty}a_{mn}x^m y^n \tag{14}$$

ととる。

この場合には a_{mn} の係数が定まり撓み函数が求まる。この函数は

$$\Delta\Delta w=\begin{cases}2P_0/D & \text{at } x=\xi,\ y=\eta\\ 0 & \text{at } x\neq\xi,\ y\neq\eta\end{cases} \tag{15}$$

および (10) 式に対応する自然境界条件をそれぞれ満たす解となる。

以上のようにして求める方法と微分方程式を与えられた境界条件のもとで解く方法との対応は明瞭である。

微分方程式を境界条件を満すようにして解いた場合，もし解が求まれば，これが厳密解であることは間違いないが，解が求まることは問題が複雑になると困難になる。また，方程式そのものの立て方および境界条件の選定も変分原理に立脚して誘導するのが普通である。この点その適用法をしっかりのみ込めば変分法がより一般的である。

直接解法がオイラーの式と境界条件で解く方法と等価であるが，実際に解を求める場合には試験

函数の項数は無限にとれないので (3) (8) および (14) 式で与えられる函数の項数を有限項て似することになる。したがって，解の精度を解明しておくことが工学的応用上きわめて主要なこである。そこで有限項で近似解を求めるために必要な実際の解析式を述べ数値計算式を誘導するとにする。

3. 有限項級数による計算式

(3) (8) および (14) 式の試験函数を有限項に制限した場合には (1), (6) および (12) 式はそれぞれ有限個のパラメーター a_n または a_{mn} を含む二次形式として次のように表わされる。

片持梁の振動の場合の運動ポテンシャルは (1) 式より

$$J(y)=\sum_{n=2}^{n}\sum_{s=2}^{s}a_n a_s\left[\frac{n(n-1)s(s-1)}{(n+s-3)}-\lambda^2\frac{1}{(n+s+1)}\right] \tag{16}$$

平板翼の自由振動の場合の運動ポテンシャルは (6) 式より

$$\begin{aligned}J(w)=&\sum_{m}^{N}\sum_{n}^{N}\sum_{r}^{N}\sum_{s}^{N}a_{mn}a_{rs}\ [m(m-1)r(r-1)I_{\substack{m+r-4,\\ n+s}}\\ &+n(n-1)s(s-1)I_{\substack{m+r,\\ n+s-4}}+2\nu m(m-1)s(s-1)I_{\substack{m+r-2,\\ n+s-2}}\\ &+2(1-\nu)mnrsI_{\substack{m+r-2,\\ n+s-2,}}-\lambda^2 I_{\substack{m+r\\ n+s}}\ ]\\ I_{pq}=&\left\{\sum_{i=0}^{p+1}\frac{p!}{(p+1-i)!i!(p+q+2-i)}\left(\frac{\cot\beta}{k}\right)^{p+1-i}\right.\\ &\left.-\frac{1}{(p+1)(p+q+2)}\left(\frac{\cot\alpha}{k}\right)^{p+1}\right\}a^{p+1}b^{q+1}\end{aligned} \tag{17}$$

平板翼の撓みの場合の全ポテンシャルエネルギーは (12) 式より

$$\begin{aligned}J(w)=&\sum_{m}^{N}\sum_{n}^{N}\sum_{r}^{N}\sum_{s}^{N}a_{mn}a_{rs}[m(m-1)r(r-1)I_{\substack{m+r-4\\ n+s}}\\ &+n(n-1)s(s-1)I_{\substack{m+n\\ m+s-4}}+2\nu m(m-1)s(s-1)I_{\substack{m+r-2\\ n+s-2}}\\ &+2(1-\nu)mnrsI_{\substack{m+r-2\\ m+s-2}}]-\frac{2P_0}{D}\sum_{m}^{N}\sum_{n}^{N}a_{mn}\xi_0^m\eta_0^n\\ I_{pq}=&\left\{\sum_{\kappa=0}^{p+1}\frac{p!}{(p+1-\kappa)!\kappa!(p+q+2-\kappa)}\left(\frac{\cot\beta}{k}\right)^{p+1-\kappa}\right.\\ &\left.-\frac{1}{(p+1)(p+q+2)}\left(\frac{\cot\alpha}{k}\right)^{p+1}\right\}a^{p+1}b^{q+1}\end{aligned} \tag{18}$$

5), (17) および (18) 式が最小となるような値になるためには a_n または a_{mn} で微分した第
が零となる条件より次のような有限個の a_n または a_{mn} に関する連立方程式が得られる。

梁の自由振動の場合

$$\frac{\partial J}{\partial a_n}=\sum_{n=2}^{n}a_n\left[\frac{n(n-1)s(s-1)}{(n+s-3)}-\lambda^2\frac{1}{(n+s+1)}\right]=0 \tag{19}$$

平板翼の自由振動の場合

$$\frac{\partial J}{\partial a_{mn}}=\sum_{r}^{N}\sum_{s}^{N}a_{rs}A_{mnrs}=0$$

$$A_{mnrs}=[m(m-1)r(r-1)k^{-2}M_{\substack{m+r-4,\\ n+s}}$$

$$+n(n-1)s(s-1)\cdot M_{\substack{m+r,\\ n+s-4}}+\{m(m-1)s(s-1)+n(n-1)r(r-1)\}\nu k^{-2}M_{\substack{m+r-2\\ n+s-2}}$$

$$+2(1-\nu)mnrsk^{-2}M_{\substack{m+r-2\\ n+s-2}}-\lambda^2a^4k^{-4}M_{\substack{m+r\\ n+s}}]k^{m+r+1}b^{m+n+r+s-2}$$

$$M_{pq}=\frac{I_{pq}}{a^{p+1}b^{q+1}} \tag{20}$$

平板翼の撓みの場合（集中点荷重）

$$\frac{\partial J}{\partial a_{mn}}=\sum_{r}^{N}\sum_{s}^{N}b_{rs}B_{mnrs}-RX_0^mY_0^n=0$$

$$B_{mnrs}=[m(m-1)r(r-1)k^{-4}F_{\substack{m+r-4\\ n+s}}$$

$$+n(n-1)s(s-1)\cdot F_{\substack{m+r\\ n+s-4}}+\nu m(m-1)s(s-1)k^{-2}F_{\substack{m+r-2\\ n+s-2}}$$

$$+\nu n(n-1)r(r-1)k^{-2}F_{\substack{m+r-2\\ n+s-2}}+2(1-\nu)mnrsk^{-2}F_{\substack{m+r-2\\ n+s-2}}]$$

$$R=\frac{P_0}{abD}b^4$$

$$X_0=\frac{\xi_0}{a}$$

$$Y_0=\frac{\eta_0}{b}$$

$$F_{pq}=\frac{I_{pq}}{a^{p+1}b^{q+1}} \tag{21}$$

ここに (19) 式および (20) 式は未知係数 a_n または a_{mn} に関する斉次の連立方程式，(21) 式は非斉次の連立方程式で，振動の場合は (19) 式または (20) 式より未知係数を消去して振動数方程式が得られ，これを解くことにより振動数および振動モードが決定される。平板翼の撓みの場合は (21) 式を a_{mn} について解くと撓み函数が決定される。

本論で行なった試験函数には，固定端の境界条件を満たすような束縛の入った函数を用いており，自由端または自由辺の境界条件は束縛条件として入れないで，自由境界条件として試験函数の項数を増すことにより満たさせるようにしている。これらの数値を吟味するために，有限項の函数を用いた時のオイラーの式および自然境界条件を表わして置くことにする。

片持梁の場合はオイラーの式として (4) 式より

$$\sum_{n=2} n(n-1)(n-2)(n-3)a_n x^{n-4} - \lambda^2 \sum_{n=2} a_n x^n = 0 \tag{22}$$

また，自由端の境界条件としては (15) 式より

$$\left.\begin{aligned} y'' &= \sum_{n=2} n(n-1)a_n x^{n-2} \\ y''' &= \sum_{n=2} n(n-1)(n-2)a_n x^{n-3} \end{aligned}\right\} \text{より}$$

$$y''|_{x=1} = \sum_{n=2} n(n-1)a_n \tag{23}$$

$$y'''|_{x=1} = \sum_{n=2} n(n-1)a_n \tag{24}$$

をうる。

また梯形板の場合にはオイラーの方程式は (9) 式より

$$\sum_{mn} a_{mn}[m(m-1)(m-2)(m-3)k^{-4}\xi^{m-4}\eta^n + n(n-1)(n-2)(n-3)\xi^m\eta^{n-4}$$
$$+2m(m-1)n(n-1)\,k^{-2}\xi^{m-2}\eta^{n-2} - \lambda^2 a^4 k^{-4}\xi^m\eta^n] = 0 \tag{25}$$

自由辺の境界条件としては (10) 式よりコーナー部をのぞいて

$$M_n = -\frac{D}{a^2}[\cos^2\theta \sum P_{mn} + \sin^2\theta \sum Q_{mn} + 2(1-\nu)k\sin\theta\cos\theta \sum R_{mn}]$$

ここに

$$\begin{aligned} P_{mn} &= a_{mn}\{m(m-1)\eta^2 + k^2\nu n(n-1)\xi^2\}\xi^{m-2}\eta^{n-2} \\ Q_{mn} &= a_{mn}\{k^2 n(n-1)\xi^2 + \nu m(m-1)\eta^2\}\xi^{m-2}\eta^{n-2} \\ R_{mn} &= a_{mn}mn\xi^{m-1}\eta^{n-1} \end{aligned} \tag{26}$$

$$V_n = \frac{D}{a^3}[\cos\theta \sum S_{mn} + \sin\theta \sum T_{mn}$$
$$+(1-\nu)\sin\theta\{\sin\theta\cos\theta \sum U_{mn} - (\cos^2\theta - \sin^2\theta)\sum V_{mn}\}]$$

ここに

$$\begin{aligned} S_{mn} &= a_{mn}\{m(m-1)(m-2)\xi^{m-3}\eta^n + mn(n-1)k^2\xi^{m-1}\eta^{-2}\} \\ T_{mn} &= a_{mn}\{n(n-1)(n-2)k^3\xi^m\eta^{n-3} + mn(m-1)k\xi^{m-2}\eta^{n-1}\} \\ U_{mn} &= a_{mn}\{m(m-1)(m-2)\xi^{m-3}\eta^n - mn(n-1)k^2\xi^{m-1}\eta^{n-2}\} \\ V_{mn} &= a_{mn}\{mn(m-1)k\xi^{m-2}\eta^{n-1}\} \end{aligned} \tag{27}$$

となる。

撓みの場合には集中荷重点を除けば振動の場合の λ^2 の項がなくなるだけなので省略した。

実際の計算は項数または計算式の種類により手計算と Datatron 205 とを併用し，用いた最高項数は 10 項までとした。

4. 計　算　結　果

（1）　片持梁の自由振動（第3図～第6図）

（2）　平板片持翼の自由振動（第7図～第 10 図）

（3）　平板片持翼の集中荷重による撓み（第 11 図～第 13 図）を示す。

5. 実　験　結　果

実験方法の詳細についてはそのつど前論文に記したので省略する。実験結果は第3図～第 13 図におのおの計算値と併記した。

6. 計算および実験結果の吟味

（1）　オイラーの微分方程式による解と直接法による解との対応。

変分法の直接解法によって求めた解を用い，実際にオイラーの式，自然境界条件の式を計算した値を第4図，第5図，第8図，第9図および第 11 図に示す。

この時厳密解が求まったとすればオイラーの式では積分全域において零，または境界条件は境界において零となっているわけであるが，計算結果によると，オイラーの式に関しては零点が梁の場合は近似項数 $N=4$ の時中央部に二点，平板翼の場合には $N=10$ 項近似では領域の中央部にある一つの曲線上においてのみ零となり全領域において零とはならないことがわかる。

また，境界での値に関しても同様な結果であって，自由辺境界で有限の値として残り，境界条件の満されるのは数点のみである。

（2）　自由辺の境界条件の値

自由辺境界の値を示す前記計算式を用いた計算結果を見ると，第4図，第8図および第 11 図における M_n, V_n の値は自由端でいたるところ零とはならず，ある有限な値が残留している。したがってその残留値の大きさが問題になるわけであるから，それを固定辺上の値と比較することにする。（第5図，第9図）この場合基準とする固定辺の M_n, V_n の値は当然近似の程度によって変化し，さらに平板翼の場合には，x 軸にそってある分布をなしている。そのために基準をどの点にするかという問題も生ずるが，ここでは平板翼の場合は固定辺の最高値（後縁の付け根を取ったが厳密解ではその絶対値は $\beta<90°$ の時無限大となるはずである。）と自由辺の M_n, V_n の値を比較することにした。

図からわかるように，だいたいこの程度の近似計算をすれば，どの程度境界条件が満されるものであるかわかると思う。 M_n と V_n とを比較してみると一般に M_n の方が V_n に比して近似が

よい。これは求めた函数の項数は M_n より V_n の方が少なくなっているので一応予想されることである。

（3） 求めた近似函数と求める解との対応

この種の変分計算で問題になるのは求めた近似函数の近似度で，この数学的な吟味はいろいろ問題のある点なのでここでは除くことにした。

実際に求めた近似函数を計算して図に示したものが第6図，第2表である。

片持梁の場合は厳密解があるのでその値と比較し，また自由端の境界条件を満すような函数の組合せを用いて計算した文献(2) の結果とも比較しておいた。

平板翼の場合は，厳密解がないため実験によるモードの測定結果との比較をすることによって計算結果の解の対応を吟味するにとどめ，これを第2表に示した。

片持梁の場合をみると領域内の一二点において厳密解と一致するような解である。

平板翼の場合はモードの零点位置は正方形板以外では，低次のモードにおいてはほぼ求めているモードの近傍にあることがわかる。ただ問題は正方形板の場合で，これは変厚板の振動モードを計算した場合にも同様な結果が得られているが(6) $N=10$ 項の場合に，求めるモードと異なったものが比較的低次の振動モードにおいて生じていることである。

片持梁の場合からの推定にすぎないが厳密な解と比較して本計算のような場合には，領域内の二三の曲線上で厳密解と一致する函数となり，これはオイラーの式の場合も同様な傾向であろう。

（4） 収束の問題

i） 振動の場合

固有値の値の収束の様子を第3図，第7図に示した。振動の固有値の場合は，これが停留値であるから数学的には試験函数の項数を増せば厳密解に高い方から収束していく。この様子は図に示したとおりで一応問題はないとみられる。問題は得られた固有値に対応する函数，すなわち固有函数の精度で，これは慎重に吟味する必要がある。

(イ) 片持梁の場合

前記したように片持梁の厳密解はあるので，この場合についてできるだけ正確な計算を行なってみた。近似項数を $N=2,3,4$ とあげた場合の振動モードで第1モードのみを扱った。第1表，第6図。この場合自由端での変位が1となるように正規化して比較した。

厳密解との差，$y_{approx.}-y_{exact.}$ の値を近似項数 $N=3$ および $N=4$ の場合について示したものが第6図で文献(2) の計算値も合わせて比較した。第6図より片持梁の場合，この計算法による近似函数はこの程度の近似で実用的な利用ができることがわかる。

(ロ) 平板翼の場合

この場合には厳密解の代りに実験値を利用したので定量的な吟味をしていないわけであるが，10

項近似で求めた振動モードは前に第2表に記し，一応そのモードに対応する解がでているので定性的には利用できることがわかっている。一般に高次の振動モードまで必要とする時には，項数を増す必要があることは固有値の場合と同様であろう。ただ正方形板の場合比較的低次のモードで特異なモードがでるので，この場合に限り近似項数を増した場合の振動数およびモードの変化を吟味した。第 10 図。この場合問題となるのは，項数を上げた場合に必ずしもモードの近似が良くなっていない例があることである。また，任意の験試函数をとった時にこの函数にはなんの束縛もないわけであるが，正方形の場合のように $x=a/2$ に対してある種の対称性があるような時には近似が落ちることも考えられる。これは y 座標軸を $a/2$ 移動すれば対称，非対称に振動モードが分けられ解の精度が非常に向上すると思われる。また，近似計算を行なった場合，この種の計算法による時に，求める解が自由辺でなく固定辺の解になっていることはないかという点であるが，近似計算では項数が有限なので問題となろう。ここでは実験モードと比較するにとどめた。また，先端自由辺に2種の束縛（中央支持，3点支持）を支えた場合について実験を行ない，計算で求めた振動数近辺に相当する振動があるか否かを試みた。計算による解は自由辺の解を一応与えていると見られる。

ii） 静荷重の場合

静荷重が平板翼にかかった場合で集中荷重が加わった場合の撓みを与える函数の値を吟味した。

振動の場合に示したように求める近似函数に関しては，その収束は固有値のようなわけにはいかないが数値的にみると第 12 図に示したように，試験函数の項数を増すことにより収束している様子がわかる。また撓み曲面全体の様子を第 13 図に示したが 6 項近似，10 項近似および実測値を比較してみると収束はおとなしいように思われる。

この場合付根鈍角部の応力集中の問題とか荷重点近傍の撓みの問題など，この計算では前者はある程度でているが，特異点の問題として別に論ずべき点であろう[7]。

以上近似函数として振動モードまたは撓みについて論じてきたが，この函数から誘導される自然境界条件およびオイラーの式の収束の様子も併記しておいた。

7. む す び

今までに報告した論文の計算結果[4][5] の締めくくりとして，変分法直接解法を利用する時の基本的な問題について数値的な実例を上げて吟味したものである。

片持梁の自由振動，片持平板翼の自由振動および点荷重下の撓みの解析実例を用いて次のような点を数値計算結果によって確認することができた。

（1） 普通の境界値問題の解法と比較して，変分法直接解法が近似計算において有効であること。

（2） 自然境界条件として自由辺の境界条件が手軽に処理できて，その近似も試験函数の項数を増すことにより十分実用的な函数まで求められること。

（3） 試験函数の項数を増した時の停留値の収束は素直であるが，函数そのものの精度には問題点もあり，この函数を利用して工学上の問頭を処理する場合には慎重な吟味が必要であろう。

今後に残された問題として，近似函数の問題，停留値の下限の問題等についてもできるなら実例をあげて吟味をしたいと思っている。

最後に本論を草するにあたって，種々御指導を賜わった機体部上山部長をはじめ CAS 研究会の方々また終始御討議の労をわずらわした空力弾性研究室の中村技官等の皆様に心から感謝の意を表します。

文　　献

(1) 林　毅，村　外志夫：変分法，コロナ社

(2) 寺沢寛一：数学概論，応用編，p. 439～441 岩波書店

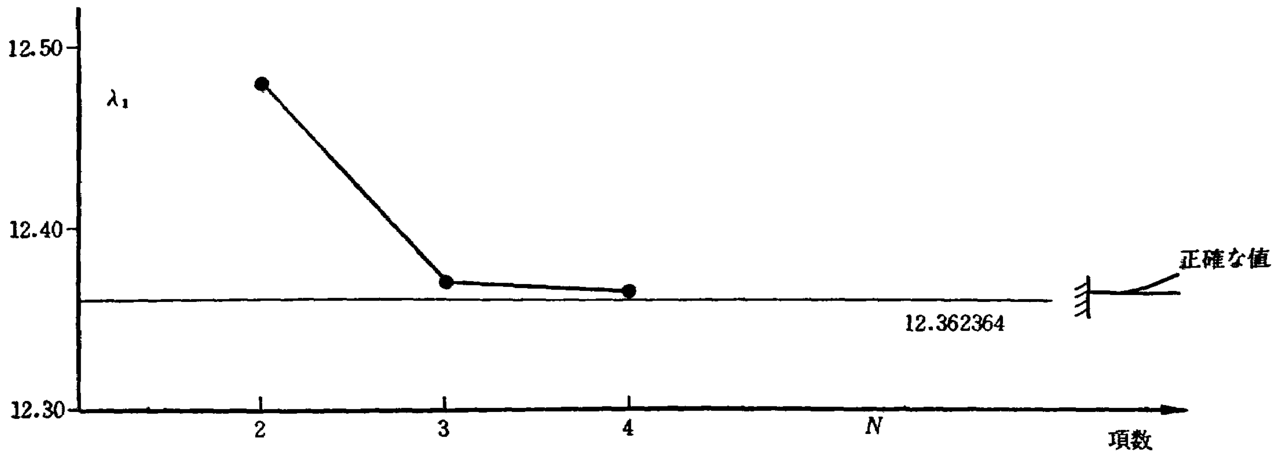
(3) M.V. Barton: Vibration of Rectangular and Skew Cantilever Plates, Jour Applied Mechanics, June 1951.

(4) 川井，塙，戸川，高橋，越出：平板翼の振動について，航技研報告 TR-30. 1962, 10.

(5) 川井，塙，戸川，越出，落合：平板翼の撓み，第 13 回応用連合講演会前刷 1963. 11.

(6) 塙，越出，戸川，川井：変厚板翼の振動について，航技研報告 TR-60 1964. 1.

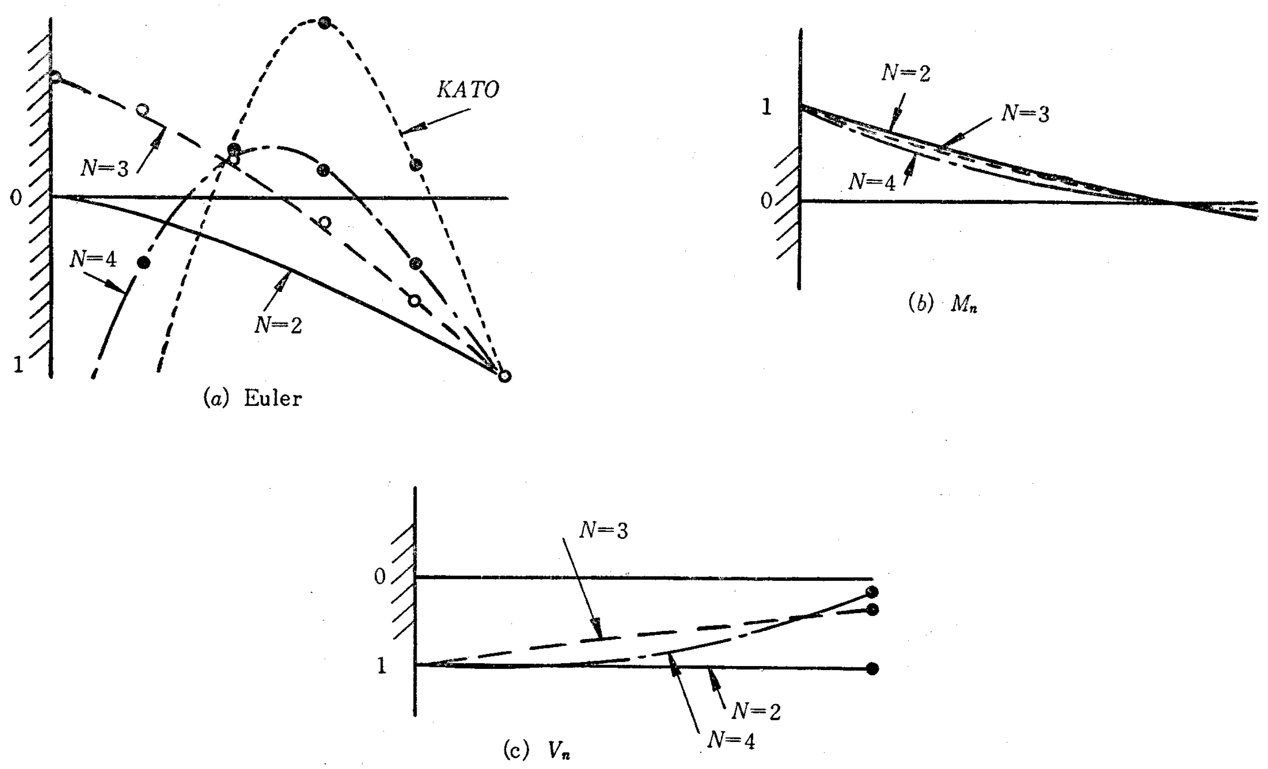
(7) S. Timoshenko. and S. Woinowsky-Krieger: Theory of Plates and Shells, p. 346. McCRAW-HILL. Book Co.



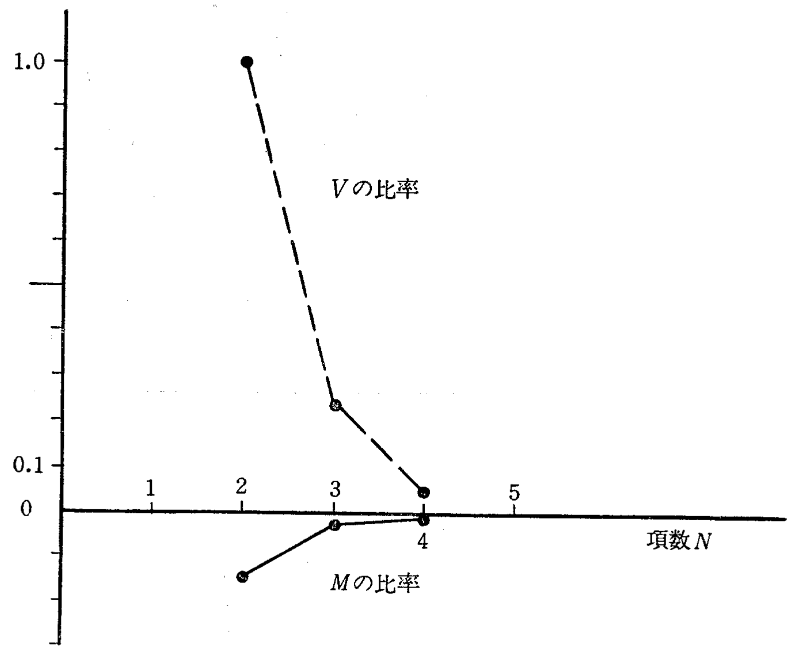
第 3 図 片持梁の第 1 固有値の収束の様子

第 1 表 片持梁の固有函の値の項数による変化の様子
$y_1(1)=1$ と正規化したもの

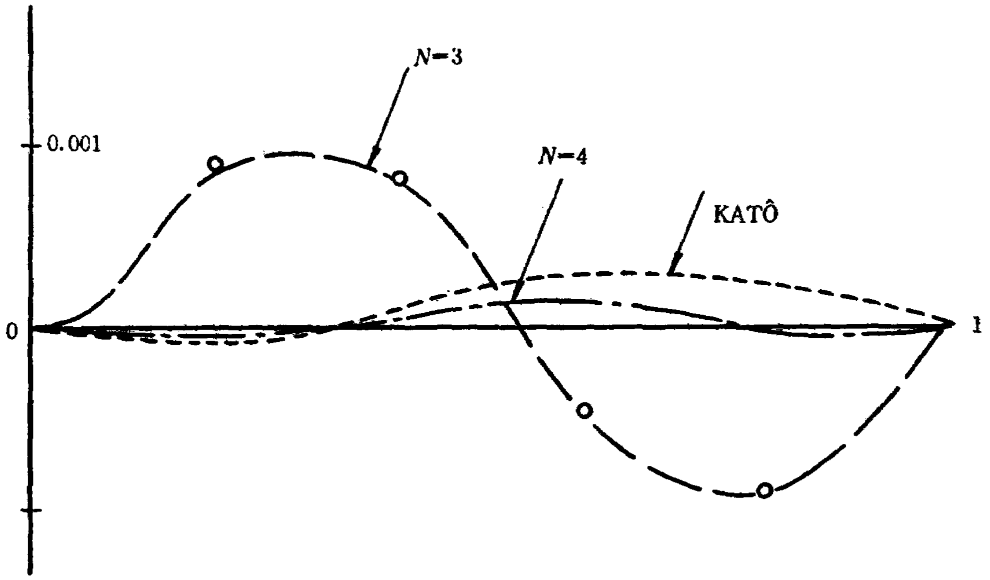
$N=2.$	$y_1=1.622586\,x^2-0.622586\,x^3$
	$\lambda_1^2=12.48$
$N=3.$	$y_1=1.812840\,x^2-1.00229\,x^3+0.189442\,x^4$
	$\lambda_1^2=12.368$
$N=4.$	$y_1=1.752680\,x^2-0.767947\,x^3-0.098664\,x^4+0.113926\,x^5$
	$\lambda_1^2=12.3624$
文献[2]	
	$\left\{\begin{array}{l} y_1=0.291350\,x^2(6-4\,x+x^2)+0.041983\,x^3(10-10\,x+3\,x^2) \\ \lambda_1^2=12.36250 \end{array}\right\}$



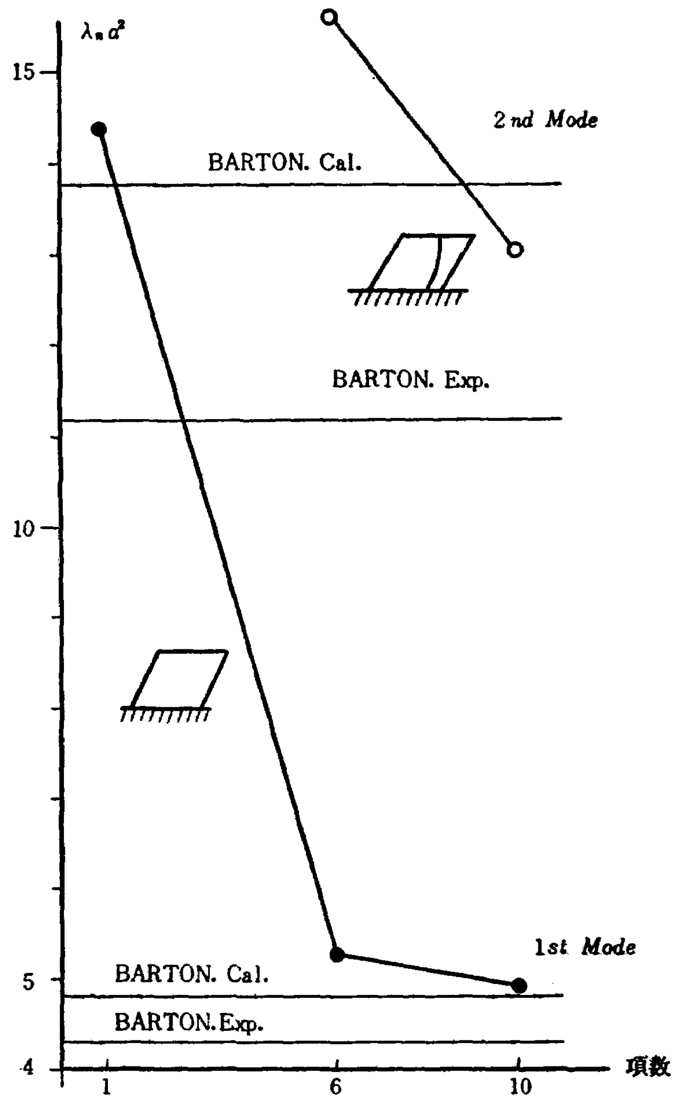
第 4 図　片持梁の Euler の式, M_n, V_n の値の項数による変化の様子



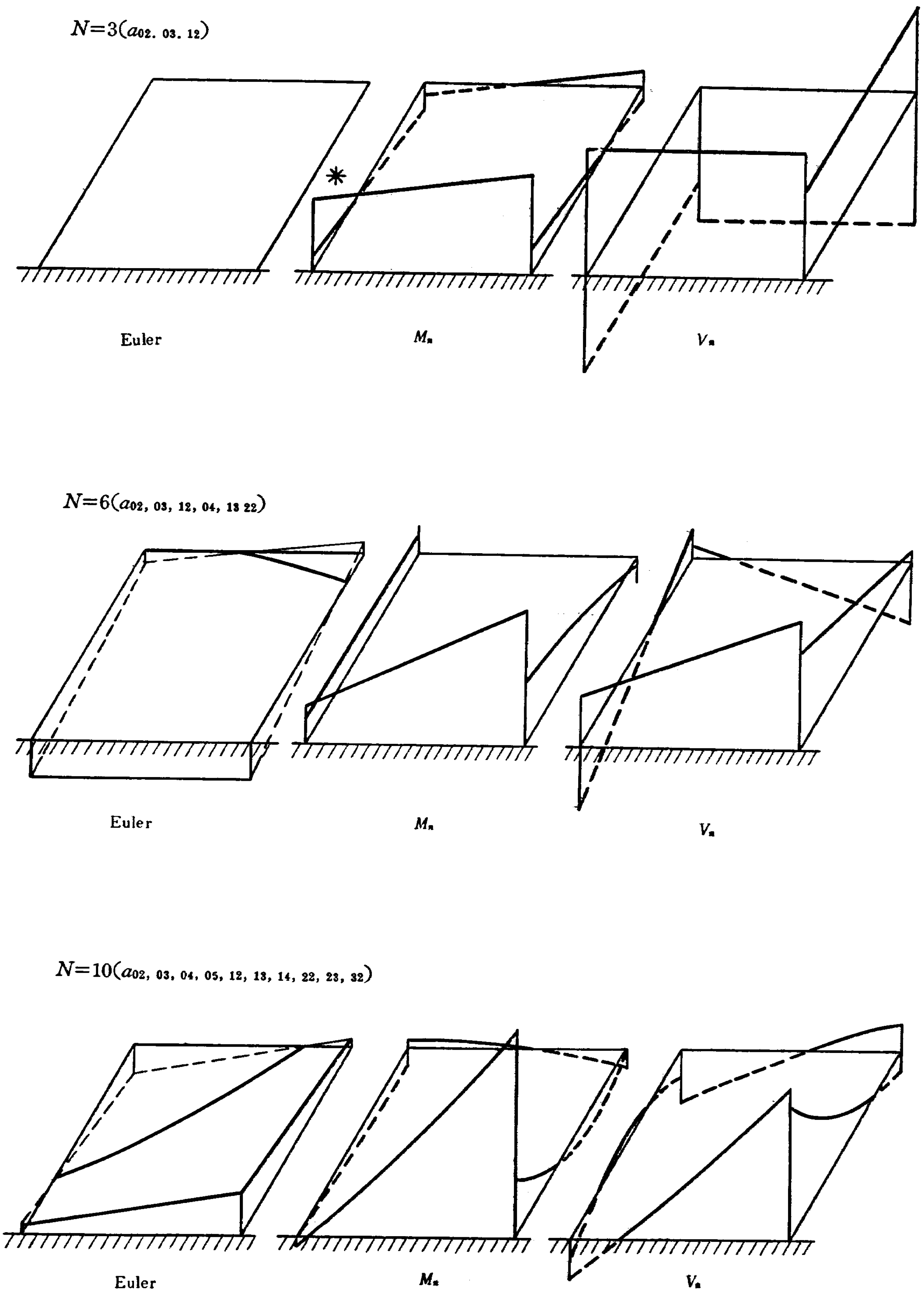
第 5 図　片持梁, 自由端と付根部との M_n, V_nの比率の項数による変化 (1 st Mode)



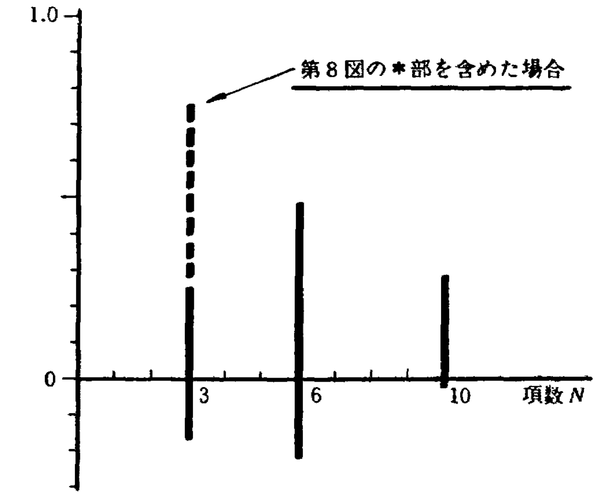
第 6 図 片持梁の固有函数で $y^{(x)}_{approx.}-y^{(x)}_{exact.}$ の値の比較



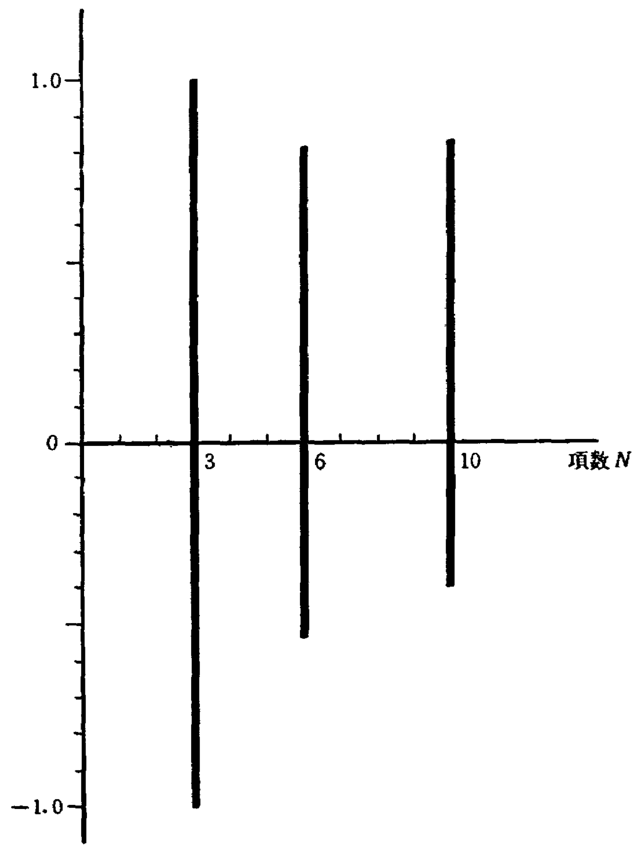
第 7 図 $\alpha=\beta=60°$ 平行四辺形板で試験函数の項数を変えた時の固有値の収束の様子



第 8 図 $\alpha=\beta=60°$ 片持板の振動解で Euler, の式 M_n, V_n の値の近似項数による変化,（1 *st Mode* の場合）

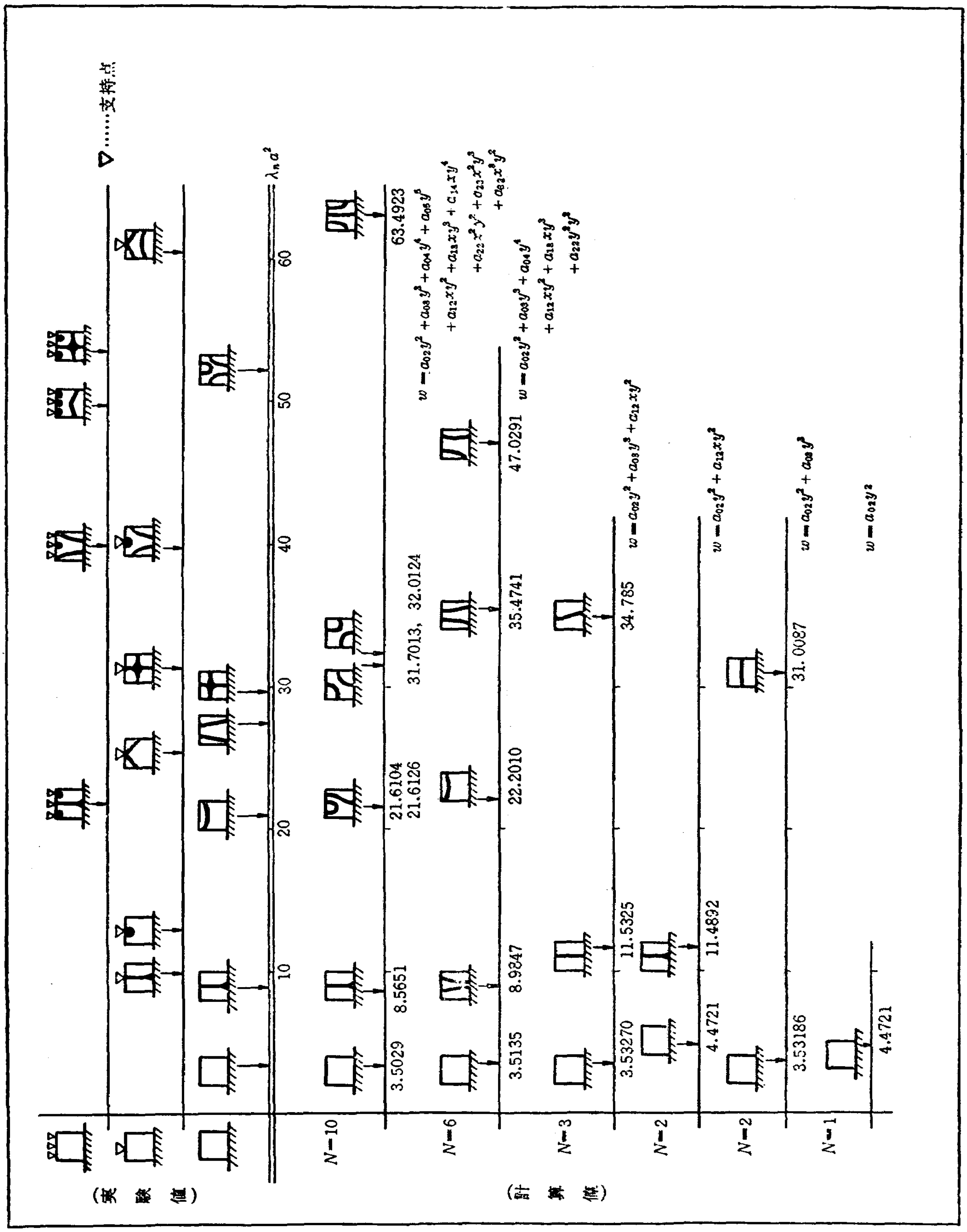


（a） M_n の比率

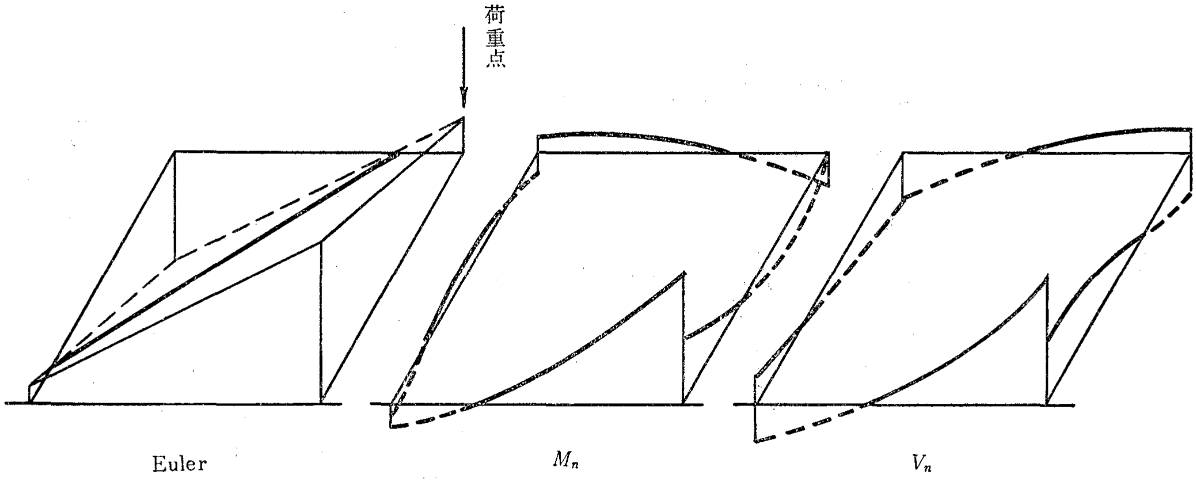


（b） V_n の比率

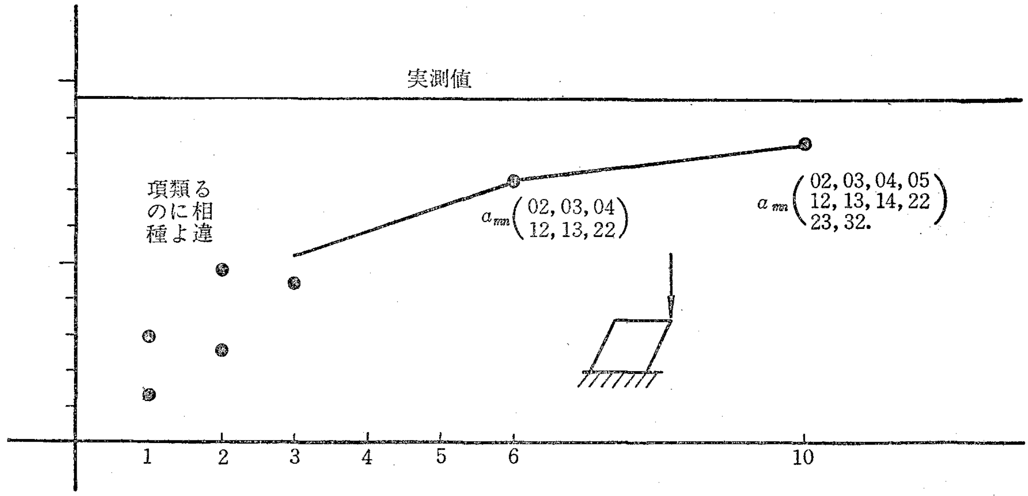
第 9 図 $\alpha=\beta=60°$, $R=1$, 平行四辺形板, 自由振動 1 *st Mode* に於ける自由辺の M_n, V_n の値と鈍角部付根の値との比率の項数による変化（分布は第8図参照）



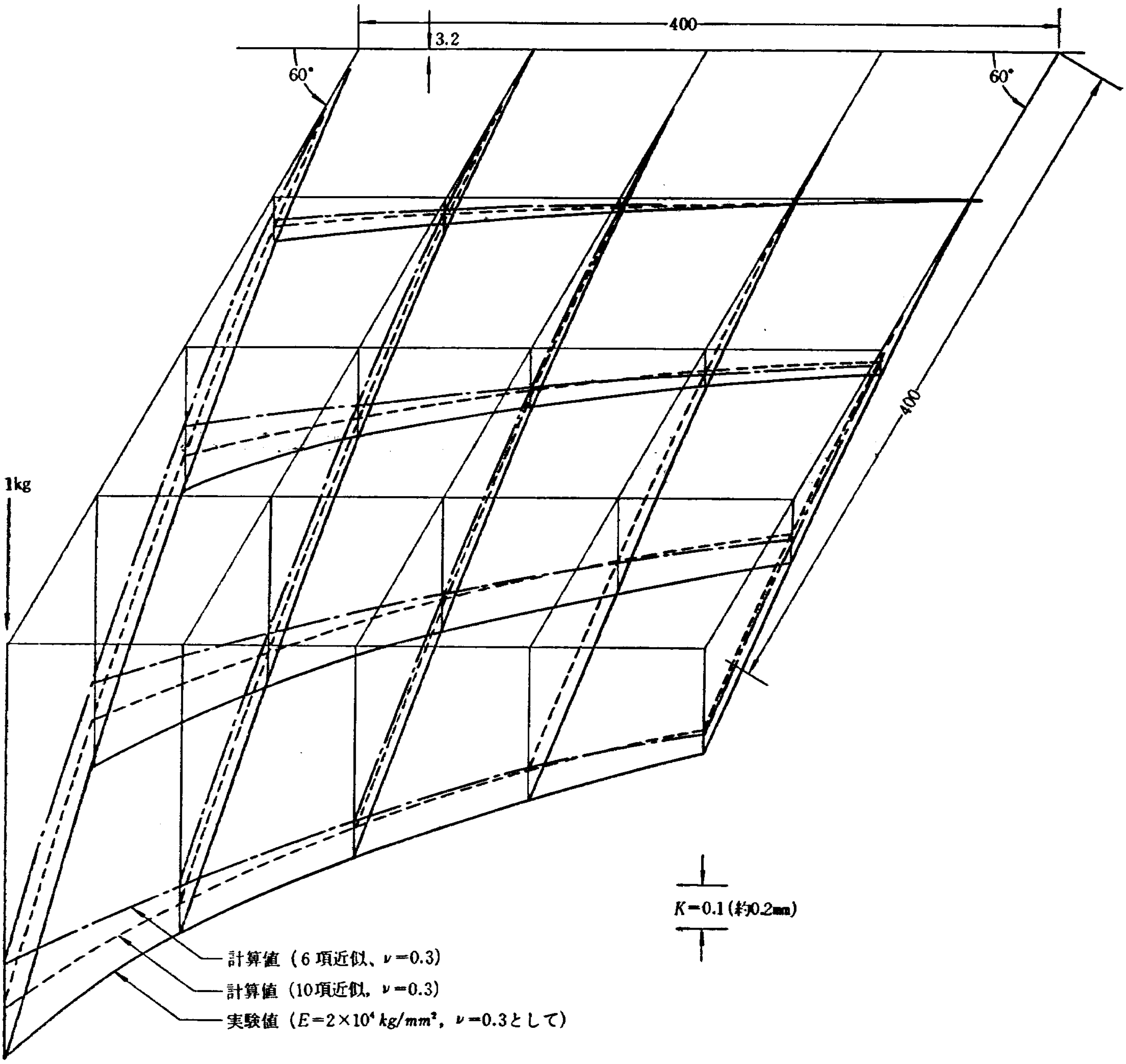
第 10 図 正方形板の項数による振動数およびモードの変化と実験値の比較



第 11 図　$\alpha=\beta=60°$，片持板の静荷重の時の Euler，の式 M_n, V_n の値，
$N=10$，集中荷重の場合



第 12 図　$\alpha=\beta=60°$，平行四辺形片持板，先端集中荷重でのその点
の撓みの値の近似項数による収束の様子



第 13 図 $\alpha=60°$, $\beta=60°$, $R=1$, 撓みの計算値と実測値の比較

第 2 表 1-1 片持板（板厚一定）固有函数の係数比

$\alpha=90°$ $\beta=90°$ $R=1$

	1	2	3
a_{02}	− 1.0000000	− 1.0000000	− 1.0000000
03	+ 4.3998622	+ 1.1315891	+ 1.1924633
04	− 3.8808200	− 0.40308228	− 0.27559310
05	− 0.039716102	+ 0.000030443	+ 0.015645080
12	− 16.373631	+ 1.9592638	+ 3.7528829
13	− 8.1188531	− 2.2630367	− 2.0351861
14	+ 7.8227222	+ 0.80600580	+ 0.33663411
22	+ 50.929574	+ 0.12208882	− 5.7435596
23	− 0.14234471	− 0.0000098631	+ 0.045443740
32	− 33.842263	− 0.081385923	+ 3.7890845
$\lambda_n a^2$	3.5029386	8.5650831	21.610356

	4	5	6
a_{02}	− 1.0000000	− 1.0000000	− 1.0000000
03	+ 2.0218756	+ 1.9923223	+ 3.5597253
04	− 0.94878080	− 0.90879600	− 1.7782883
05	+ 0.015465721	− 0.000171222	− 0.4174634
12	+ 1.9899777	+ 2.0858211	− 1.7695989
13	− 3.8386426	− 3.9909580	− 8.9119413
14	+ 1.7803590	+ 1.8200421	+ 5.7441023
22	− 0.27095777	− 0.24691028	+ 12.668785
23	− 0.10486428	+ 0.003924422	− 0.008346833
32	+ 0.28528969	+ 0.16063932	− 8.4366381
$\lambda_n a^2$	31.701295	32.012379	63.492270

第 2 表 1-2 片持板振動モード (板厚一定)

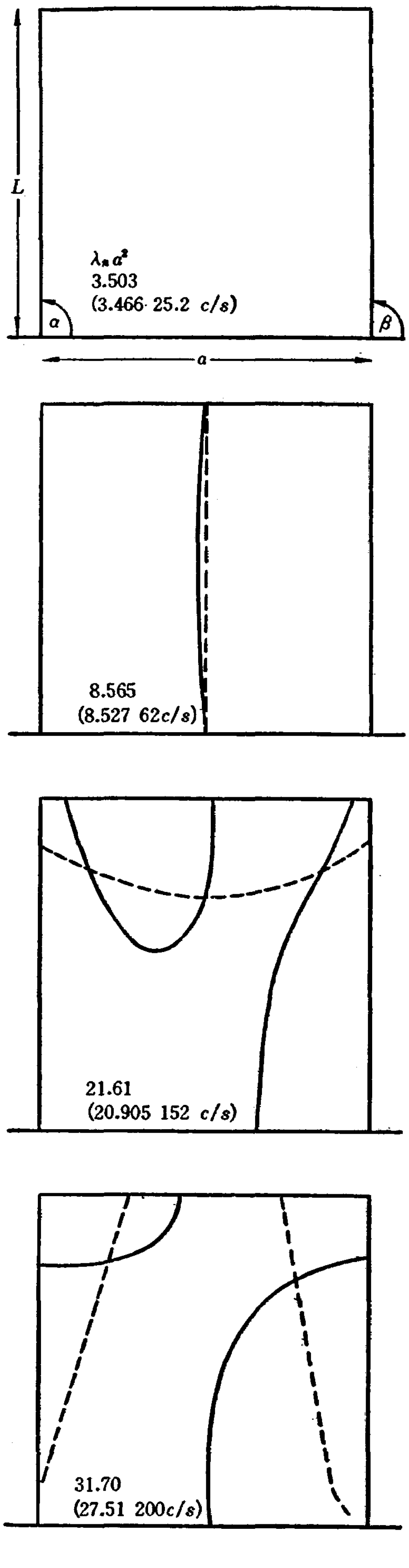
$\alpha=90°$

$\beta=90°$

$a/L=1$

$a=L=260\ mm$

$h=2\ mm$



------ 計算モード

——— 実測モード

(　　) 実測振動数

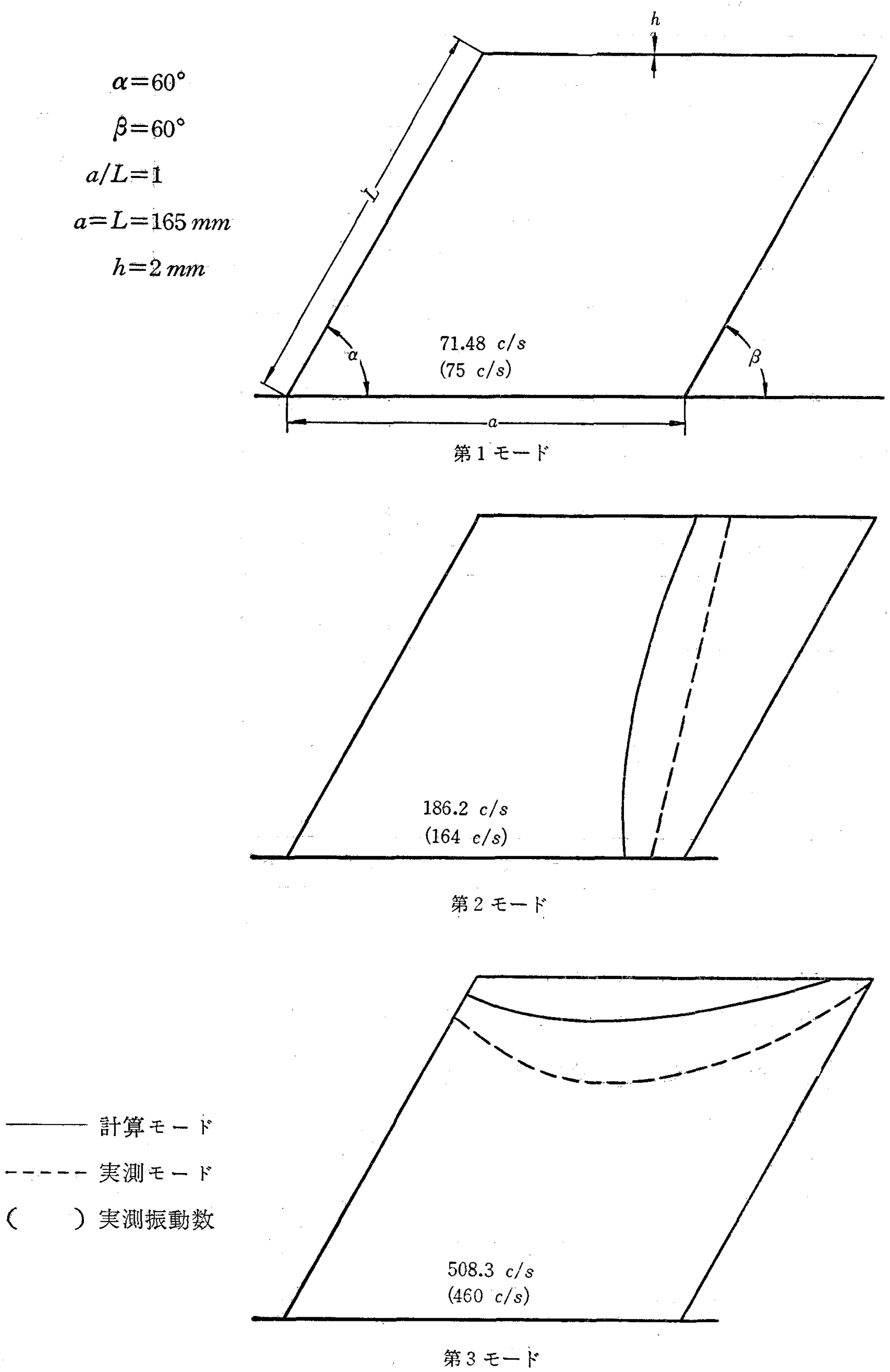
第 2 表 2-1 片持板（板厚一定）固有函数の係数比

$\alpha=60°$ $\beta=60°$ $R=1$

	1	2	3
a_{02}	− 1.000000	− 1.0000000	− 1.0000000
$_{03}$	+ 16.198762	+ 1.0012026	+ 1.6358533
$_{04}$	+ 0.94255660	− 0.24098950	− 1.4173167
$_{05}$	− 7.3206306	− 0.24697586	+ 0.64892977
$_{12}$	+ 54.168157	− 0.44313880	+ 0.069707830
$_{13}$	− 71.685918	− 0.91387284	+ 2.2229065
$_{14}$	+ 82.821886	+ 1.1860505	− 1.6325871
$_{22}$	+ 5.3361713	+ 2.1010010	− 1.0985237
$_{23}$	− 7.0418173	− 1.2661271	+ 0.65596066
$_{32}$	+ 0.68121860	− 0.19669020	+ 0.065439870
$\lambda_n a^2$	3.9901654	10.249039	27.982799

	4	5	6
a_{02}	− 1.0000000	− 1.0000000	− 1.0000000
$_{03}$	+ 0.87735364	+ 2.1827955	− 3.8428211
$_{04}$	+ 0.13194071	− 1.0239116	+ 5.4640751
$_{05}$	− 0.19652092	− 0.080296440	− 1.3889794
$_{12}$	+ 2.1837222	+ 1.1158095	+ 8.4929087
$_{13}$	− 2.3954567	− 2.0902350	− 3.0498279
$_{14}$	+ 0.58839885	+ 1.3481690	− 1.9757404
$_{22}$	− 0.62101727	− 0.40420640	− 8.5727011
$_{23}$	+ 0.61444670	− 0.54044603	+ 3.8707494
$_{32}$	− 0.15477184	+ 0.45193916	+ 1.9382362
$\lambda_n a^2$	30.332197	47.556748	76.483025

第 2 表 2-2 片持板振動モード（板厚一定）



第 2 表 3-1 片持板（板厚一定）固有函数の係数比

$\alpha=45°$　　$\beta=45°$　　$R=1$

	1*	2*	3
a_{02}			− 1.0000000
03			+ 0.86122648
03			+ 0.26425295
05			− 0.17792441
12			+ 1.2757631
13			− 2.2966828
14			+ 0.32097083
22			+ 0.70306355
23			+ 0.75451458
32			− 0.66187841
$\lambda_n a^2$	(4.94961)	(12.9976)	35.292050

* 1*st*, 2*nd Mode* は計算機で直接零点部を計算したので係数を出してない

	4	5	6
a_{02}	− 1.0000000	− 1.0000000	− 1.0000000
03	+ 1.4950409	+ 1.2787051	− 3.0900568
04	− 3.3349378	− 0.45651800	+ 3.3621211
05	+ 2.2888097	− 0.14912272	− 0.31072580
12	− 1.0772487	+ 1.8234884	+ 6.4880875
13	+ 7.8947034	− 1.2462503	− 1.0647597
14	− 5.1139446	+ 0.82942763	− 2.3544721
22	− 2.3526172	− 1.3020992	− 5.8986825
23	+ 1.3900929	− 0.31756470	+ 2.8639112
32	+ 0.12929817	+ 0.54345741	+ 0.98602800
$\lambda_n a^2$	40.561958	64.486714	93.291236

第 2 表 3-2 片持板振動モード（板厚一定）

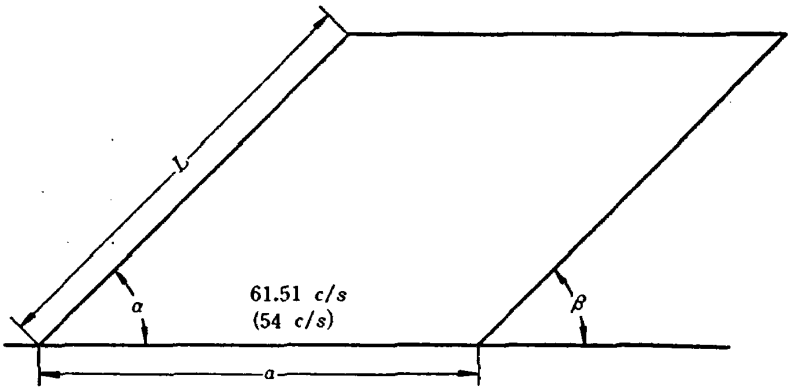
$\alpha=45°$

$\beta=45°$

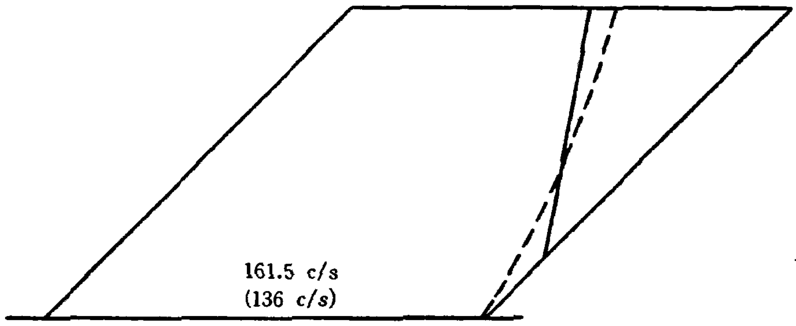
$a/L=1$

$a=L=199.5\,mm$

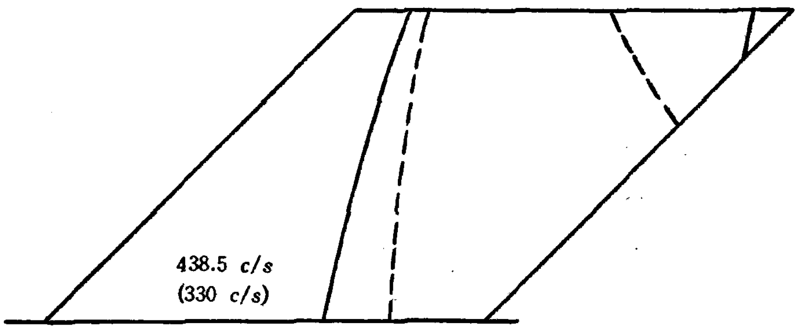
$h=2\,mm$



第1モード



第2モード



第3モード

——— 計算モード

- - - - - 実測モード

(　　) 実測振動数

第 2 表 4-1 片持板（板厚一定）固有函数の係数比

$\alpha=30°$　$\beta=30°$　$R=1$

	1	2	3
a_{02}	− 1.0000000	− 1.0000000	− 1.0000000
03	+ 3.2784321	− 0.93327335	+ 3.5008935
04	+ 0.44283272	+ 1.7776129	+ 1.2188898
05	− 3.1248802	+ 0.37309523	− 0.17516590
12	− 0.34783340	+ 7.8570272	− 6.4767836
13	− 8.1243339	− 3.6916982	− 8.6976610
14	+ 8.9472243	− 2.3813355	− 0.35836146
22	+ 8.2031062	− 5.0301603	+ 13.857471
23	− 6.0168656	+ 4.1484331	+ 3.9137624
32	− 0.24525260	− 0.32894050	− 5.9044146
$\lambda_n a^2$	7.3822992	20.128166	45.048840

	4	5	6
a_{02}	− 1.0000000	− 1.0000000	− 1.0000000
03	− 0.072541680	+ 0.77759530	− 2.3797123
04	− 7.9118367	− 0.29253357	+ 2.7315338
05	+ 6.9677963	− 0.17653304	+ 0.10959454
12	− 1.9482755	+ 1.9681098	+ 5.1780492
13	+ 20.829210	− 0.60094964	− 1.4359619
14	− 14.234428	+ 0.68052349	− 2.5441869
22	− 6.3189636	− 1.4511594	− 3.9233946
23	+ 4.0980030	− 0.39254033	+ 2.9237414
32	+ 0.22371008	+ 0.51395322	+ 0.30150165
$\lambda_n a^2$	77.776524	113.15558	162.80256

第 2 表 4-2 片持板振動モード (板厚一定)

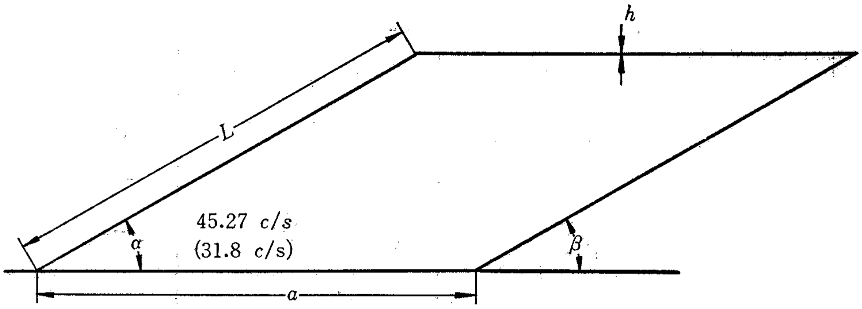
$\alpha=30°$

$\beta=30°$

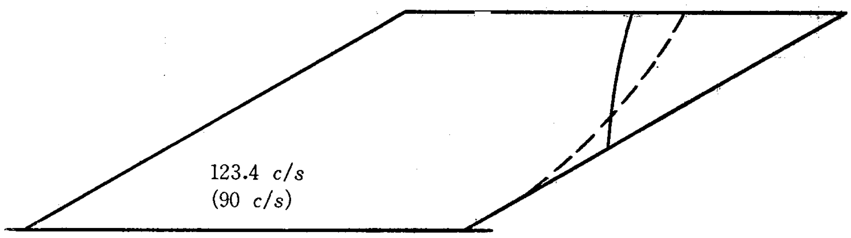
$a/L=1$

$a=L=28\,mm$

$h=2\,mm$



第 1 モード

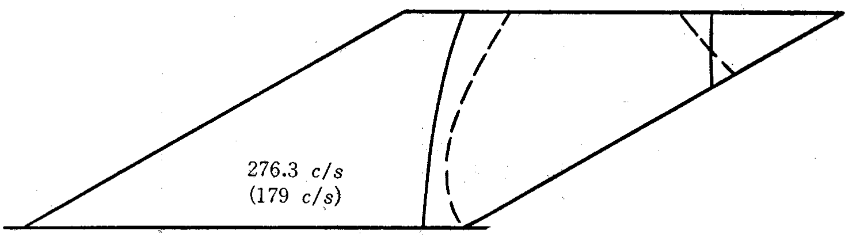


第 2 モード

——— 計算モード

- - - - - 実測モード

(　) 実測振動数



第 3 モード

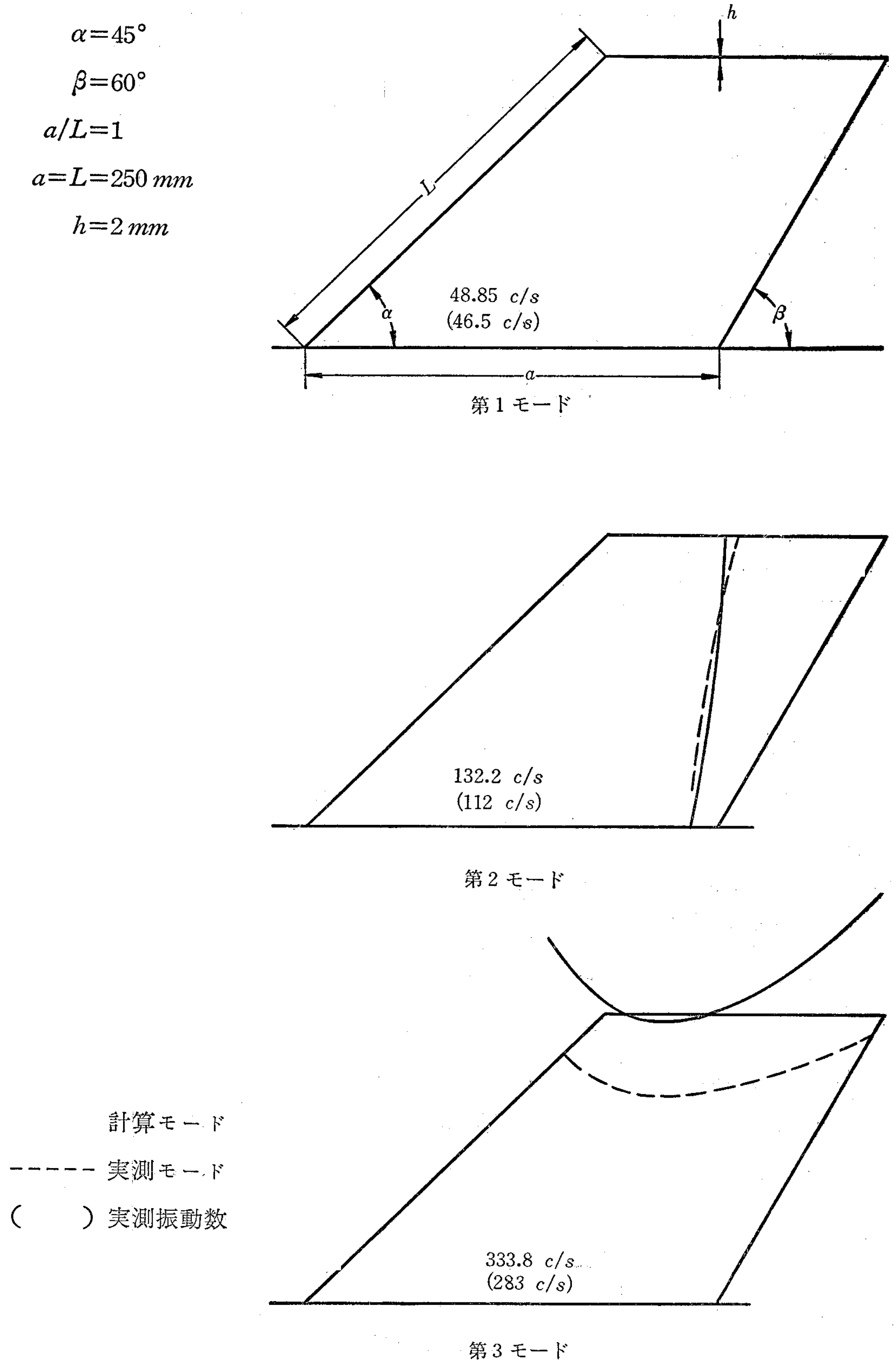
第 2 表 5-1 片持板（板厚一定）固有函数の係数比

$\alpha=45^\circ$ $\beta=60^\circ$ $R=1$

	1	2	3
a_{02}	− 1.0000000	− 1.0000000	− 1.0000000
03	+ 12.715135	+ 2.6871086	+ 1.3583978
04	+ 1.3939247	− 1.8548348	− 1.3406689
05	− 3.2965467	− 0.90410513	+ 1.4529611
12	+ 0.35873900	− 9.7449400	− 1.5520441
13	− 40.607300	+ 1.5952582	+ 4.3127706
14	+ 12.604797	+ 5.0303408	− 4.9517121
22	+ 36.798555	+ 13.227759	+ 0.60988170
23	+ 3.9803610	− 7.8811979	+ 3.2691452
32	− 14.963726	− 1.3138816	− 1.8219672
$\lambda_n a^2$	6.1734350	16.7086686	42.191804

	4	5	6
a_{02}	− 1.0000000	− 1.0000000	− 1.0000000
03	+ 1.0630500	+ 1.9159242	− 0.13548512
04	+ 0.006053178	− 1.2308104	+ 1.0375571
05	− 0.18279709	+ 0.0075421900	− 0.034976970
12	+ 1.6074039	+ 1.6149888	+ 4.0370657
13	− 2.2943762	− 1.0363435	− 2.3111075
64	+ 0.61937363	+ 1.2377731	− 0.99671656
22	+ 0.12553211	− 1.6481385	− 3.5301989
23	+ 0.50927473	− 0.94666400	+ 2.3694628
32	− 0.42563103	+ 1.0548187	+ 0.54251963
$\lambda_n a^2$	49.913976	82.272202	115.505008

第 2 表 5-2 片持板振動モード (板厚一定



第 2 表 6-1 片持板（板厚一定）固有函数の係数比

$\alpha=30°$　$\beta=60°$　$R=1$

	1	2	3
a_{02}	− 1.0000000	− 1.0000000	− 1.0000000
03	+ 3.0915561	− 1.0899819	− 7.3858729
04	− 2.6490855	+ 1.9732197	− 0.74717206
05	− 1.7844986	+ 0.52481291	+ 12.169107
12	+ 0.60363780	+ 10.539119	− 13.842827
13	− 2.9476329	− 4.4031622	+ 42.007221
14	+ 9.8346140	− 3.6692137	− 47.779269
22	+ 9.9024695	− 10.762332	+ 6.6751482
23	− 11.768004	+ 7.2763567	+ 30.986848
32	+ 0.46169640	+ 0.69776050	− 18.798220
$\lambda_n a^2$	12.679512	34.309130	85.312820

	4	5	6
a_{02}	− 1.0000000	− 1.0000000	− 1.0000000
03	+ 2.1820986	+ 1.4792039	+ 0.56121440
04	− 0.10518659	− 1.8552270	+ 0.63738380
05	− 0.44614607	+ 0.099511530	+ 0.10428490
12	− 1.0554564	+ 2.1787976	+ 3.2135838
13	− 4.7086980	+ 1.1972637	− 2.9025112
14	+ 1.7015829	+ 1.5836951	− 0.93498310
22	+ 5.9283160	− 3.4490425	− 2.3478065
23	+ 0.62143518	− 2.4490090	+ 2.5698068
32	− 3.0737898	+ 2.1961205	+ 0.086154270
$\lambda_n a^2$	95.612470	182.73224	219.87798

第 2 表 6-2 片持板振動モード（板厚一定）

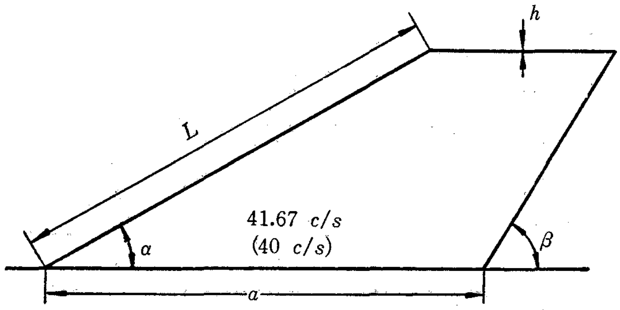
$\alpha=30°$

$\beta=60°$

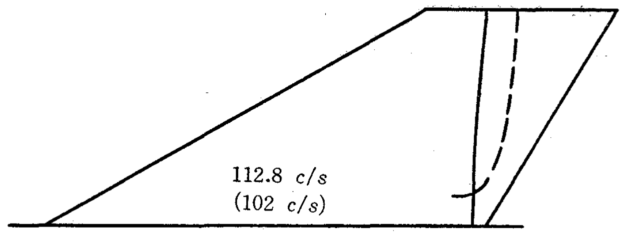
$a/L=1$

$a=L=388\,mm$

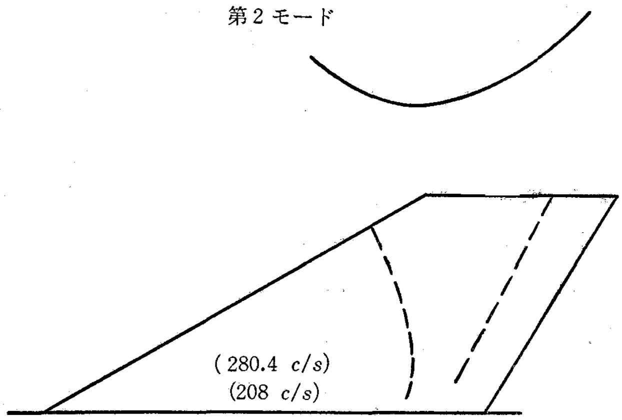
$h=2\,mm$



第 1 モード



第 2 モード



第 3 モード

——— 計算モード

- - - - - 実測モード

(　　) 実測振動数

第 2 表 7-1 片持板（板厚一定）固有函数の係数比

$\alpha=30^\circ$ $\beta=45^\circ$ $R=1$

	1	2	3
a_{02}	− 1.0000000	− 1.0000000	− 1.0000000
03	+ 3.7827619	− 1.0467952	+ 2.4700236
04	− 1.7851318	+ 1.7639487	+ 0.38682028
05	− 2.7944979	+ 0.56875577	− 0.15206153
12	− 0.80036790	+ 9.3098966	− 3.1188349
13	− 5.6210450	− 3.7251187	− 5.5829072
14	+ 11.262114	− 3.3015947	− 0.10517226
22	+ 10.430520	− 8.1325800	+ 9.1025755
23	− 10.815415	+ 5.8410225	+ 2.5864609
32	+ 0.39794910	+ 0.12509600	− 4.6732766
$\lambda_n a^2$	10.076568	26.928037	69.465360

	4	5	6
a_{02}	− 1.0000000	− 1.0000000	− 1.0000000
03	+ 6.0155324	+ 1.0784750	+ 0.21762210
04	+ 4.8458467	− 0.87016514	+ 0.89279270
05	− 7.9721361	− 0.10447796	+ 0.063238410
12	+ 2.6575957	+ 2.1087968	+ 3.2397334
13	− 32.284860	− 0.036571630	− 2.5047207
14	+ 23.217419	+ 1.0962224	− 1.0093513
22	+ 12.950351	− 2.2428844	− 2.2634916
23	− 8.1566057	− 1.1541444	+ 2.2411730
32	− 1.1633299	+ 1.1317281	+ 0.10631798
$\lambda_n a^2$	81.711760	145.85736	194.78292

第 2 表 7-2 片持板振動モード（板厚一定）

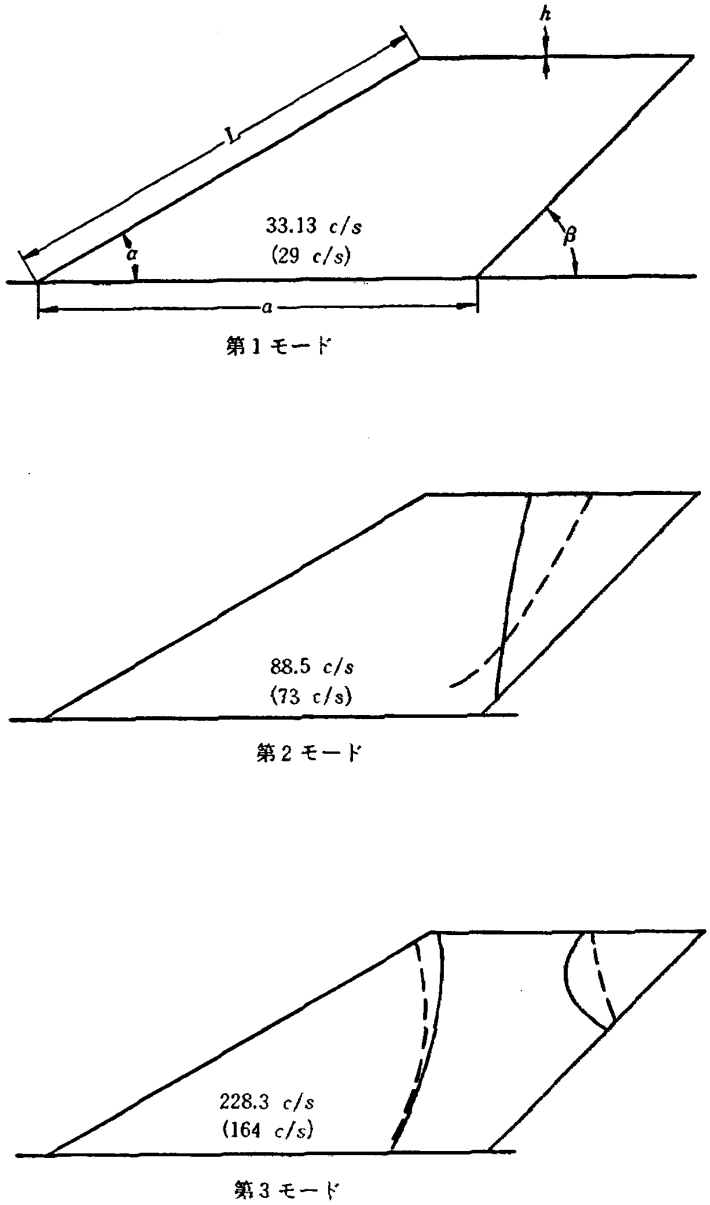
$\alpha=30°$

$\beta=45°$

$a/L=1$

$a=L=388\,mm$

$h=2\,mm$



——— 計算モード

- - - - - 実測モード

(　　) 実測振動数

第 2 表 8-1 片持板（板厚一定）固有函数の係数比

$\alpha=60°$ $\beta=90°$ $R=1$

	1	2	3
a_{02}	− 1.0000000	− 1.0000000	− 1.0000000
03	− 1.6932996	+ 1.0191663	+ 1.3047319
04	+ 0.46971950	− 0.30850938	− 0.48456979
05	− 0.099242990	− 0.092280320	+ 0.15845731
12	− 10.410774	+ 0.23217440	+ 0.019000110
13	+ 9.4603812	− 1.1038075	+ 2.2972118
14	− 1.1831587	+ 0.88931181	− 1.7283268
22	+ 5.0852118	+ 2.2274246	− 1.3244174
23	− 3.8400608	− 1.1827673	+ 0.87423080
32	− 0.37474330	− 0.46952873	+ 0.022658100
$\lambda_n a^2$	5.4129491	17.482083	30.225891

	4	5	6
a_{02}	− 1.0000000	− 1.0000000	− 1.0000000
03	+ 1.6244435	+ 8.7175297	+ 2.7487955
04	− 0.56043600	− 10.213932	− 3.3069088
05	− 0.099780250	+ 2.9647921	+ 1.5953259
12	+ 2.1574055	− 5.8038610	+ 1.6881399
13	− 2.9984532	+ 2.5253954	− 0.94023740
14	+ 1.2360832	+ 2.7270138	− 1.1471953
22	− 0.93201020	+ 4.7539756	− 1.7174431
23	+ 0.30544750	− 6.0652835	+ 2.3043999
32	+ 0.21282570	+ 1.3877117	− 0.22934127
$\lambda_n a^2$	51.001777	79.459627	88.229834

第 2 表 8- 片持板振動モード（板厚一定）

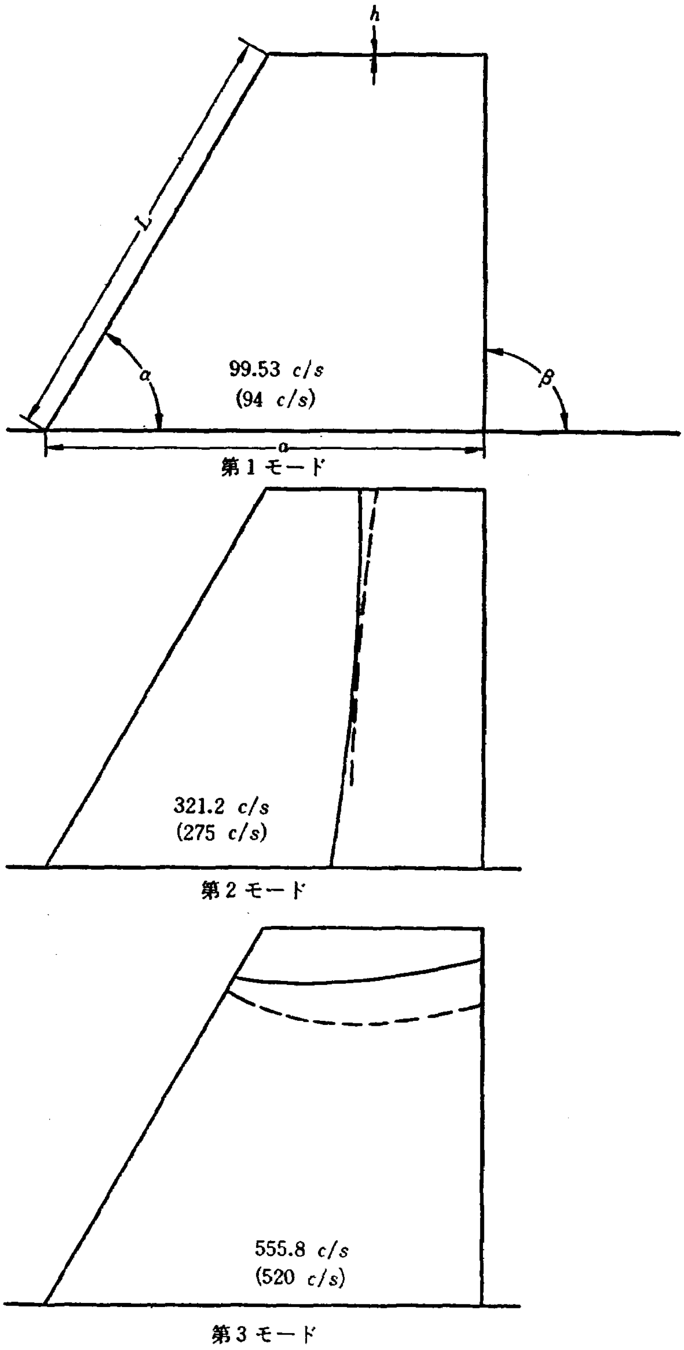
$\alpha=60°$

$\beta=90°$

$a/L=1$

$a=L=164\,mm$

$h=2\,mm$



——— 計算モード

- - - - - 実測モード

（　　）実測振動数

第 2 表 9-1 片持板（板厚一定）固有函数の係数比

$\alpha=45°$ $\beta=90°$ $R=1$

	1	2	3
α_{02}	− 1.0000000	− 1.0000000	− 1.0000000
03	+ 1.7302832	+ 1.9720877	− 2.9564329
04	+ 0.50686697	− 1.3817632	+ 1.1775800
05	+ 0.065143930	− 0.21520182	+ 1.8647028
12	+ 13.613560	− 7.4766234	− 3.2102149
13	− 10.012918	+ 2.0544472	+ 25.511160
14	+ 0.21313751	+ 2.5949827	− 16.835887
22	− 6.0928590	+ 13.670858	− 9.9526702
23	+ 4.2188810	− 6.6900616	+ 6.3150200
32	+ 0.39782300	− 3.0284559	− 0.15760330
$\lambda_n a^2$	8.7602686	28.657174	46.915358

	4	5	6
α_{02}	− 1.0000000	− 1.0000000	− 1.0000000
03	+ 1.5079767	+ 5.7108132	+ 0.79968890
04	− 0.57256917	− 7.7287726	− 0.00373220
05	− 0.080365555	+ 2.9551727	+ 0.95282520
12	+ 2.0399597	− 1.3024014	+ 3.6481729
13	− 2.4086390	+ 2.8705991	− 3.5857814
14	+ 1.0404414	− 0.26452780	− 29783056
22	− 0.93712954	− 1.1274239	− 2.6172447
23	+ 0.20201605	− 2.0356980	+ 5.9851297
32	+ 0.16259090	+ 1.8982830	− 1.1714043
$\lambda_n a^2$	82.198784	128.89826	138.74903

第 2 表 9-2 片持板振動モード（板厚一定）

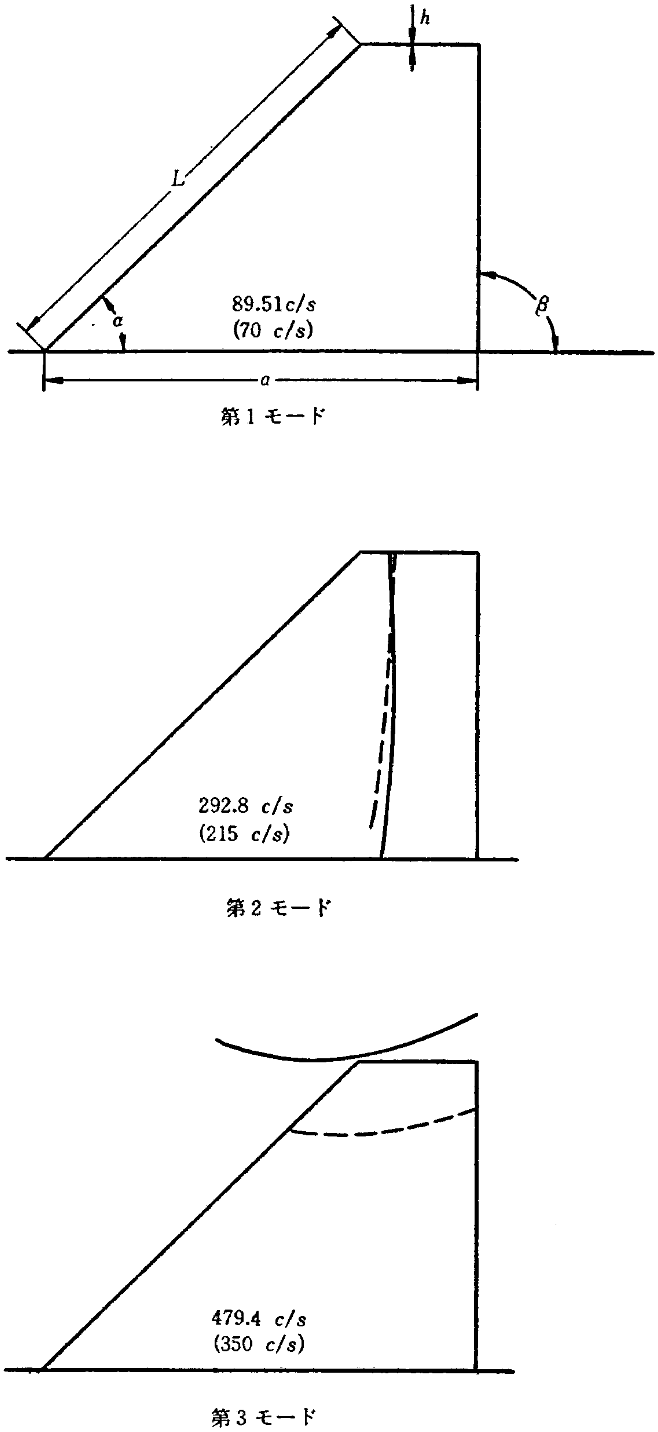
$\alpha=45°$

$\beta=90°$

$a/L=1$

$a=L=209\,mm$

$h=2\,mm$



——— 計算モード

- - - - - 実測モード

(　　) 実測振動数

第 2 表 10-1 片持板（板厚一定）固有函数の係数比

$\alpha=30°$　　$\beta=90°$　　$R=1$

	1	2	3
a_{02}	− 1.0000000	− 1.0000000	− 1.0000000
03	+ 0.71397115	− 1.0592659	+ 6.3444258
04	+ 0.24576392	+ 1.9206330	− 3.8259260
05	+ 0.29267417	+ 0.13864519	− 2.4305679
12	+ 5.7573897	+ 12.974800	+ 2.0573880
13	− 4.4644583	− 5.3214727	− 16.179322
14	− 0.084778870	− 2.7066123	+ 18.390242
22	+ 3.8311716	− 17.084198	+ 4.4445243
23	+ 0.41989101	+ 8.0578863	− 14.754004
32	− 2.7102847	+ 3.7270714	+ 6.3382076
$\lambda_n a^2$	18.706641	53.199870	99.234580

	4	5	6
a_{02}	− 1.0000000	− 1.0000000	− 1.0000000
03	+ 1.7331173	+ 14.854008	+ 1.2739366
04	− 0.68026329	− 56.530200	− 0.14744020
05	− 0.072573601	+ 9.1255773	+ 1.3057958
12	+ 0.88432440	− 7.0381690	+ 3.1206194
13	− 2.6453422	+101.82246	− 3.4698100
14	+ 1.1059329	+ 35.209060	− 3.6709914
22	+ 1.8065361	− 55.787383	− 2.5862238
23	+ 0.29766527	−105.85203	+ 5.7940654
32	− 1.5033780	+ 64.642130	− 0.60440280
$\lambda_n a^2$	158.58274	243.98747	279.13784

第 2 表 10-2 片持板振動モード（板厚一定）

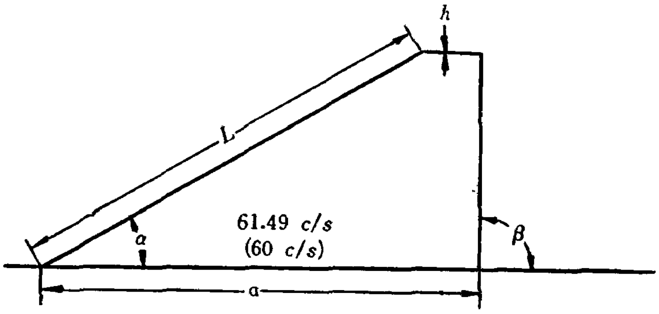
$\alpha=30^\circ$

$\beta=90^\circ$

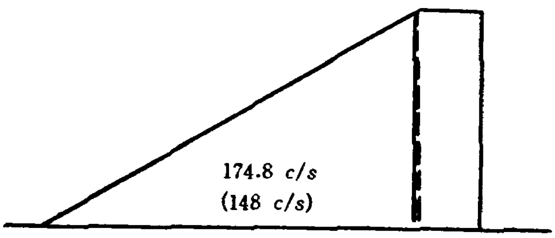
$a/L=1$

$a=L=388\,mm$

$h=2\,mm$



第1モード

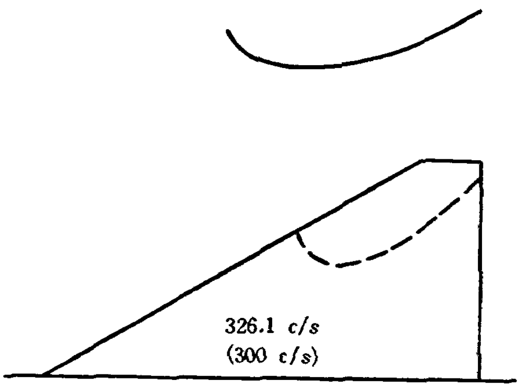


第2モード

——— 計算モード

- - - - - 実測モード

(　　) 実測振動数



第3モード

NAL TR-66
航空宇宙技術研究所
変分法による平板翼の撓み，振動解における自然境界条件の数値的吟味

1964 年 6 月　　　40 ページ

さきに，各種形状の片持平板翼の振動および撓みに関するエネルギー法による解析結果を発表したが，これらの数値計算結果を用いて変分法直接解法の基本的な問題，特に，自由辺の境界条件の問題を中心にして Euler の式との関係，求めた解の精度および収束の問題等について数値的な吟味を行なった。試験函数として最高 10 ケのパラメーターを含む x, g の冪級数を用いて吟味したもので変分法の基本的な問題の実例と先に発表した数値計算結果の実用上の有効性を明確にすることができた。

I．川井忠彦
　 塙　武敏
　 越出慎一
　 戸川隼人
　 落合　薫

II．NAL TR-66
III．534.12

NAL TR-66
航空宇宙技術研究所
変分法による平板翼の撓み，振動解における自然境界条件の数値的吟味

1964 年 6 月　　　40 ページ

さきに，各種形状の片持平板翼の振動および撓みに関するエネルギー法による解析結果を発表したが，これらの数値計算結果を用いて変分法直接解法の基本的な問題，特に，自由辺の境界条件の問題を中心にして Euler の式との関係，求めた解の精度および収束の問題等について数値的な吟味を行なった。試験函数として最高 10 ケのパラメーターを含む x, y の冪級数を用いて吟味したもので変分法の基本的な問題の実例と先に発表した数値計算結果の実用上の有効性を明確にすることができた。

I．川井忠彦
　 塙　武敏
　 越出慎一
　 戸川隼人
　 落合　薫
II．NAL TR-66
III．534.12

NAL TR-66
航空宇宙技術研究所
変分法による平板翼の撓み，振動解における自然境界条件の数値的吟味

1964 年 6 月　　　40 ページ

さきに，各種形状の片持平板翼の振動および撓みに関するエネルギー法による解析結果を発表したが，これらの数値計算結果を用いて変分法直接解法の基本的な問題，特に，自由辺の境界条件の問題を中心にして Euler の式との関係，求めた解の精度および収束の問題等について数値的な吟味を行なった。試験函数として最高 10 ケのパラメーターを含む x, y の冪級数を用いて吟味したもので変分法の基本的な問題の実例と先に発表した数値計算結果の実用上の有効性を明確にすることができた。

I．川井忠彦
　 塙　武敏
　 越出慎一
　 戸川隼人
　 落合　薫
II．NAL TR-66
III．534.12

NAL TR-66
航空宇宙技術研究所
変分法による平板翼の撓み，振動解における自然境界条件の数値的吟味

1964 年 6 月　　　40 ページ

さきに，各種形状の片持平板翼の振動および撓みに関するエネルギー法による解析結果を発表したが，これらの数値計算結果を用いて変分法直接解法の基本的な問題，特に，自由辺の境界条件の問題を中心にして Euler の式との関係，求めた解の精度および収束の問題等について数値的な吟味を行なった。試験函数として最高 10 ケのパラメーターを含む x, y の冪級数を用いて吟味したもので変分法の基本的な問題の実例と先に発表した数値計算結果の実用上の有効性を明確にすることができた。

I．川井忠彦
　 塙　武敏
　 越出慎一
　 戸川隼人
　 落合　薫
II．NAL TR-66
III．534.12

TR-52	粒状加熱器の熱特性 Thermal Characteristics of a Pabble-Bed Heater	1963年9月	林　二識
TR-53	円管流の非定常熱伝達（第Ⅰ報） —壁温が時間と流向距離のみによる場合— Thermal Characteristics of the Unsteady Flow through a Circular Pipe whose Temperature depends on Time and Flow-Directional Distance only	1963年10月	林　二識
TR-54	偏微分方程式の混合境界値問題の差分法による数値解法 Difference Method for the Mixed Boundary Value Problems	1963年10月	三好　甫
TR-55	ボスをもった車盤の回転強度 Rotating Strength of Rotor Which Has a Boss	1963年11月	佐藤和郎, 永井文雄
TR-56	亜音速および遷音速における二次元非定常空気力の測定（第Ⅰ報） Measurements of the Unsteady Airloads for Two-Dimensional Flow at Subsonic and Transonic Speed Range（Ⅰ）	1963年11月	中村泰治, 田辺義一
TR-57T	Measurements of the Aerodynamic Derivatives of a Biconvex-Flat Airfoil in Supersonic Flow at Mach Number 2 to 3	January 1964	Takao ISHII Mitsunori YANAGISAWA
TR-58	高度500フィートないし10,000フィートにおける上下突風の測定および解析 Measurements and Analyses of gust Velocities from 500 to 10,000 feet altilude	1964年1月	竹内和之, 小野幸一 山根晧三郎
TR-59	磁気テープデータ処理設備とその特性 The Magnetic Tape Date Reduction System and Its Performance	1964年1月	田畑浄治, 中　正夫 山本芳樹, 三浦雅男
TR-60	変厚平板翼の振動について On the Natural Vibration of Platc-Like Wings of Variable Thickness	1964年1月	塙　武敏, 越出慎一 戸川隼人, 川井忠彦
TR-61	後退角45°, テーパ比0.6の薄い片持翼の遷音速におけるフラッタ特性におよぼすマッハ数の影響の実験的研究 Some Effects of Mach Number on the Transonic Flutter Characteristics of Thin Cantilever Wings Having a Taper Ratio 0.6 and a Sweptback Angle of 45°	1964年2月	中井暎一, 小原　瑛
TR-62	超音速における翼端板効果 The Effects of End-plates at Supersonic Speeds	1964年2月	尾形吉和
TR-63	非定常流中の円柱に作用する空気力について Aerodynamic Forces Acting on a Circular Cylinder in Unsteady Flow	1964年3月	小橋安次郎, 遠藤　浩 北村清美
TR-64	航空力学における磁わい計器の応用 Some Developements of the Magnetostriction Type Measuring Instruments for the Study of Aircraft Dynamics	1964年3月	幸尾治朗
TR-65	非定常境界層の安定に関する実験 An Experimental Investigation of the Stability Characteristics of the Unsteady Laminar Boundary Layer	1964年7月	小橋安次郎, 恩地　瑛

航空宇宙技術研究所報告66号

昭和39年6月　発行

発行所　航空宇宙技術研究所
東京都調布市深大寺町1880
電話武蔵野(0422)(3)5171(代表)

印刷所　笠井出版印刷社
東京都港区芝南佐久間町1の53