

UDC 533.6.011.32:
533.695.12.

航空宇宙技術研究所報告

TECHNICAL REPORT OF NATIONAL AEROSPACE LABORATORY

TR-243

揚力をもつ物体のまわりのポテンシャル流れの計算法

I. その理論的基礎

海老原正夫

1971 年 7 月

航空宇宙技術研究所
NATIONAL AEROSPACE LABORATORY

既 刊 報 告

TR-221	先端のにおいフレヤつき物体の空力特性 Aerodynamic Characteristics of a Flared Body with Blunt Nose	1970年10月	谷 喬, 河 本 巖 榊 原 盛三, 野 田 順一 樋 口 博 (東京大学)
TR-222	東北地方太平洋沿岸航空路上における乱気流 観測 Measurements and Analysis of Atmospheric Turbulence on the Pacific Coast Air Route of the Tohoku District	1970年 9 月	竹 内 和 之, 山根暗三郎 矢 沢 健 司, 小 野 幸 一 外 崎 得 雄
TR-223	球の仮想質量の円筒境界干渉 Cylindrical Boundary Interference on Virtual Mass of a Sphere	1970年 9 月	河 野 長 正
TR-224	吹出しをともなう鈍頭物体の衝撃波離脱距離 Shock Stand-off-Distance with Mass Injection	1970年12月	吉 永 崇
TR-225	NAL-35 DT 型ロケットの構造試験 Results of Structural Experiments on NAL-35 DT Rocket Vehicle	1970年11月	ロケット構造研究グループ
TR-226	薄い片持後退角翼の遷音速フラッタ特性におよぼす集中質量の位置の影響について Some Effects of Systematically Varied Location of One Concentrated Mass on Transonic Flutter Characteristics of Sweptback Thin Cantilever Wings	1970年11月	中 井 暎 一, 森 田 甫 之 高 木 俊 朗
TR-227	高負荷燃焼器の空気孔からの流れについて(Ⅱ) —二孔の実験および簡単な解析方法— Investigation of Air Stream from Combustor-Liner Air-Entry Holes (Ⅱ) Experiments with Paired Air-Entry Holes and A Numerical Analysis—	1970年12月	相 波 哲 朗, 井 上 真 幸
TR-228	自由飛行模型 FFM-10 の運動特性と飛しょう試験におけるデータ処理法 Flight Dynamics of Free-Flight Model FFM-10 and Data Analysis Method for Free-Flight Tests	1970年12月	高 島 一 明
TR-229	単発 STOL 実験機 (FA-200 XS) について Development of the FA-200 XS Experimental Airplane	1970年12月	飛行実験部
TR-230	アナログトルク平衡方式による浮動振子型加速度計の研究 Study on the Analog Torque Rebalance Floated Pendulum Type Accelerometers for Guidance and Control Applications	1971年 1 月	大 月 正 男, 鈴 木 孝 雄 円 居 繁 治
TR-231	高温タービンノズル翼二次元翼列試験 (第1報 対流冷却翼の実験結果について) Two-Dimensional Cascade Test of an Air-Cooled Turbine Nozzle (Part 1 On the Experimental Results of a Convection-Cooled Blade)	1971年 1 月	吉 田 豊 明, 高 原 北 雄 能 瀬 弘 幸, 井 上 重 雄 三 村 富 嗣 雄, 白 井 弘
TR-232	高温タービンノズル翼二次元翼列試験 (第2報 対流冷却翼の数値計算およびアナログ法による翼表面温度分布について) Two-Dimensional Cascade Test of an Air-Cooled Turbine Nozzle (Part 2 On the Temperature Distributions of a Convection-Cooled Blade by Numerical Calculation and Analogue Simulation Test)	1971年 1 月	吉 田 豊 明, 高 原 北 雄 能 瀬 弘 幸, 井 上 重 雄 三 村 富 嗣 雄, 白 井 弘
TR-233	P S D法の大気乱れに対する航空機強度設計への応用とその問題点 Studies on PSD Method to Aircraft Structural Design for Atmospheric Turbulence	1971年 1 月	竹 内 和 之, 山根暗三郎

揚力をもつ物体のまわりのポテンシャル流れの計算法*

I. その理論的基礎

海 老 原 正 夫**

A formulation of lifting potential flow problems is worked out in terms of a doublet distribution over the body surface and the trailing vortex sheet.

In the course of analysis, it is shown that the velocity field due to a surface distribution of doublets is equivalent to that due to a surface distribution of vortices. This fact is utilized to derive a non-singular expression of surface derivatives of potential due to a doublet distribution.

In view of the significance of the Kutta's condition in controlling the lifting flow field, the behaviour of the potential and its derivatives is examined in the neighbourhood of the trailing-edge of a wing. Conditions on the strength of doublets are thus obtained with which the flow velocity remains finite at the trailing-edge. These conditions are incorporated in the final formulation of the lifting potential flow field.

1. 緒 言

揚力をもつ全機形態のまわりのポテンシャル流れを計算することは、依然として空気力学の目的の主要なものの一つとなっている。

考察を非圧縮性流れに限ると、この問題は、数学的には与えられた境界条件を満足する調和函数を見出すことに帰着するが、その厳密解の解析的表現を得ることはまず不可能なので、解析を可能ならしめるため従来から多くの近似解法が工夫された。それは、Lanchester の単一の渦線による表現¹⁾ から始まり、Küchemann, Weber そのほかの人々の研究に基づく一つの理論²⁾ に到達したとみることができる。一方、いわゆる揚力面理論に対して数値解法的なアプローチをとるゆき方は、Multhopp の方法³⁾ を基礎にして、近年の電子計算機の発達に裨益され大きく発展した^{4), 5)}。これらの解析的および数値的な解法は、しかしながら、線形化近似の下での問題の解を求めているに過ぎない。

後節において述べるように、ポテンシャル流に関する境界値問題は、これを積分方程式に変換することができる。近年の大型電子計算機の発達により、この積分方程式そのものを数値的に解くことが行なわれるようになった⁶⁾。その代表的な例は Hess および Smith

によるもの^{7), 8)} であって、その手法は物体をその表面に分布する吹出しによって置換え、この吹出しの強さを境界条件によって定めるものである。この方法の有用性は数多くの計算例によって実証されているが、大きな欠点は揚力をもつ翼の場合を扱えないことで、これは、吹出しによって trailing vortex sheet を表現することができないという事実に対応している。この点をやや詳しく述べると、一般に揚力を持つ三次元翼の下流には渦度の零でない領域が存在し、そこでは渦度は流れの方向に近い方向を持っている。この領域は流れの特性を定める上で大きな役割を果すので、揚力を持つ三次元翼のまわりの流れ場の定式化においてこれを無視することはできない。trailing vortex sheet というのはこの領域の数学的モデルであって、その意味は次のごとくである。揚力をもつ翼では一般に翼断面まわりの循環は零でなく、そのために速度ポテンシャルに多価性が生ずる。この多価性を避けるため、trailing vortex sheet を置き、それを横切る度に速度ポテンシャルが或る有限の値だけ不連続に増加するようにして、速度ポテンシャルの一価性を保持することができる。面に沿う吹出し分布では、それを横切ってもポテンシャルに不連続が生じないので、吹出しによって trailing vortex sheet を表現することができないのである。

Rubbert および Saaris は、複吹出し分布による trailing vortex sheet を付け加えることにより Hess

* 昭和 46 年 6 月 29 日受付

** 空気力学第二部

および Smith の方法の欠点を補なうことを試みた⁹⁾。計算上の便宜からと驅って彼等は複吹出し分布を後縁を越えて翼の内部にまで延長したが、この延長部分の sheet の形状およびその上の複吹出しの強さをきめる条件は無く、その決定は計算を行なう者の恣意に任されている。この非決定性、および、後縁における Kutta の条件の与え方が不正確であること、本来解の一部として定まるべき trailing vortex sheet の形状を予め指定すること、などが Rubbert および Saaris の方法の不満足な点である。

trailing vortex sheet の形状が第一義的な重要性をもつ例として、揚力をもつ翼のまわりの非定常流れ場の問題があるが、この問題に対して Djojodihardjo および Widnall は、翼および trailing vortex sheet を複吹出し分布で置換えるモデルを提案した¹⁰⁾。このモデルでは、trailing vortex sheet の形状は解の一部として求められるようになっている。複吹出しを用いるときに問題となるのは、それが分布している面上の一点でポテンシャルの微係数（即ち流れの速度）を求めることが、吹出し分布の場合に比べ著しく面倒になることである。これは、ポテンシャルを表示する積分の核の特異性が複吹出しの場合は吹出しの場合に比べ一階だけ強くなるという事実の原因とする。Djojodihardjo および Widnall は、この困難を克服する手段を与えていない。また、後縁における Kutta の条件については、Rubbert および Saaris と同様不十分な取扱いしか与えていない。

上記の三つの方法は、いずれもポテンシャル流れの厳密解を得ることを目的としたものであるが、Woodward そのほかによって発展させられた方法^{11), 12)}は、厳密さの点から言えば、これら三つの方法と、従来の揚力面理論との中間に来るものである。この方法では、翼の厚みおよび胴体単独による効果と、翼の迎角およびキャンバの効果ならびに翼と胴体との間の干渉の効果とを分離し、前者においては線形理論を用いてそれを求め、また、後者については、翼および胴体の表面を幾つかの平面要素の集合で置換え、各要素の上に強さ一定の vortex doublet を分布させてそれを表現せしめる。vortex doublet の強さは、平面要素内に適当に選ばれた点 (control point) において面に垂直な速度成分が零になるという条件から定められるが、この control point の位置は、Woodward によれば¹¹⁾、平面要素（一つの翼と考える）の面積中心を通る翼弦上、95% 弦長点という妙なものであり、文献¹³⁾によっては 75% とか 85% とかがよいという説もある。

このような曖昧さは、本方法に用いられた vortex doublet 分布の近似的な性格から来る帰結であろうと考えられる。この方法はしかしながら、本来超音速流中の翼胴体まわりの流れ場の計算法として開発されたものであり（したがって超音速流の場合の計算に適用できる）、物体表面上に渦分布を置く点に、他の方法にみられない特長がある。

以上述べたように、現存する計算法のいずれも満足し得るものとは考えられないので、それらの方法の持つ欠点を取除き、ポテンシャル流れの計算法を確立されたものとするための一つの試みを行なった。この試みは、基本的には、物体および trailing vortex sheet を複吹出しで表現する Djojodihardjo および Widnall のアプローチを採用するが、すでに述べた複吹出しの分布する面上でのポテンシャルの微係数の特異性に対処する手段として、この特異性を吹出し分布と同じ階数のものに帰着せしめる方法を見出す。これは 2. において、曲面上の部分積分を考察することにより達成された。なお、部分積分による変換の結果として、与えられた複吹出し分布と等価な‘渦’分布が常に存在することが示される。次に、後縁における Kutta の条件の重要性に鑑み、3. ではポテンシャルおよびその微係数の翼後縁附近における性質を調べ、その結果、後縁で流れの速度が有限に止まるためには、そこにおける複吹出しの強さが或る条件を満たさなければならないことを見出した。4. においては、このような条件を考慮に入れて、ポテンシャル流れの数学的表現を複吹出し分布によって行なうことを試み、また、5. では、2. で見出された複吹出し分布と渦分布との等価性を利用して、渦分布により流れの数学的定式化を行なうことを試みた。

記 号

A, \bar{A}	(4.5) および (5.16 a) 参照
B, \bar{B}	(4.6) および (5.16 b) 参照
D_μ	(2.16) 参照
$D_{\mu\epsilon}, D_{\mu\eta}, D_{\mu\zeta}$	D_μ の成分
F	計量テンソルの成分。(A.I.1)参照
G	
H	
l	単位法線ベクトル n の成分
m	
n	
n	(3.8) 参照
n	単位法線ベクトル

q	流れの速度
r	点 $P(x, y, z)$ と点 $Q(\xi, \eta, \zeta)$ との間の距離
S	特異点の分布する面
s	弧長
T_0	翼後縁上の点
t	(3.7) 参照
U_∞	一様流速度
$\left. \begin{matrix} u \\ v \end{matrix} \right\}$	曲面上の座標
v	渦分布により誘起された速度
$\left. \begin{matrix} x \\ y \\ z \end{matrix} \right\}$	直交座標
$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$	α -軸に沿う単位ベクトル
$\beta_1, \beta_2, \beta_3$	β -軸に沿う単位ベクトル
$\left. \begin{matrix} \alpha \\ \beta \\ r \end{matrix} \right\}$	面 S に対する切線ベクトルの成分
δ	符号に関する規約。(2.3) 以下の説明参照
δ_T	後縁角
$\delta\phi_S, \delta\phi_D$	$\delta\phi_S = \phi_{S_U} - \phi_{S_L}$ など。(3.33) 参照
ΔS	S の一部で T_0 の近傍にあるもの
$\Delta\phi_S, \Delta\phi_D$	ΔS 上の積分から来る ϕ_S, ϕ_D の部分
$\left. \begin{matrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{matrix} \right\}$	面 S 上の点の直交座標
θ	x - y 面から測った角度
λ	(2.17) 参照. 5. では渦ベクトル
$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$	λ の成分
λ_n	(5.9) 参照
μ	複吹出しの強さ
ν	法線 n に沿う座標
ρ	(3.12) 参照. 4. では流体の密度
σ	吹出しの強さ
ϕ	ポテンシャル
φ	擾乱ポテンシャル。又は(3.12)参照
ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3	ϕ の成分
ϕ	渦分布のベクトルポテンシャル
添字	
B	物体表面を表示
D	複吹出し分布を表示
L	翼の下面を表示

S	吹出し分布を表示
U	翼の上面を表示
W	trailing vortex sheet を表示
α	α -軸を表示
β	β -軸を表示
ν	ν -軸を表示

2. 吹出し及び複吹出しの分布に基づくポテンシャルおよびその導函数

2.1 吹出し分布に基づくポテンシャル

一つの曲面 S 上に分布する吹出し (強さ σ) によるポテンシャル ϕ_S を考える。

$$\phi_S = \frac{1}{4\pi} \int_S \frac{\sigma}{r} dS. \quad (2.1)$$

ここで r は流れ場の中にある点 $P(x, y, z)$ と S 上にある点 $Q(\xi, \eta, \zeta)$ との間の距離である。

$$r^2 = (x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + (z - \zeta)^2. \quad (2.2)$$

ϕ_S の導函数は、 P が S の外にあり、かつ σ および S が或る条件を満たすとき、積分記号下での微分を行なって得ることができる。このような事柄に関する数学的な議論は文献^{(14), (15)}に見出されるので、ここではそれに触れず、 σ および S は以下の議論の展開に必要なすべての条件を満たすと仮定して先に進むこととする。

積分記号下での微分を行なうことによって得られた ϕ_S の導函数は、 S 上の点 Q_0 において S に立てられた法線に沿って P が Q_0 に近づくとき特異積分となり、これを正しく評価するために Cauchy の主値をとらねばならない。 ϕ_S の点 Q_0 における微係数は結局次式で与えられる。

$$\left(\frac{\partial \phi_S}{\partial x} \right)_{Q_0} = -\frac{l}{2} \sigma(Q_0) \cdot \delta + \frac{1}{4\pi} \oint_S \sigma \frac{\xi - \xi_0}{r^3} dS \quad (2.3a)$$

$$\left(\frac{\partial \phi_S}{\partial y} \right)_{Q_0} = -\frac{m}{2} \sigma(Q_0) \cdot \delta + \frac{1}{4\pi} \oint_S \sigma \frac{\eta - \eta_0}{r^3} dS \quad (2.3b)$$

$$\left(\frac{\partial \phi_S}{\partial z} \right)_{Q_0} = -\frac{n}{2} \sigma(Q_0) \cdot \delta + \frac{1}{4\pi} \oint_S \sigma \frac{\zeta - \zeta_0}{r^3} dS \quad (2.3c)$$

ここで (ξ_0, η_0, ζ_0) は Q_0 の座標、 (l, m, n) は Q_0 における S の法線方向余弦、 δ は P が法線の正の向きから Q_0 に近づいたとき +1、負の向きから近づいたとき -1 をとるものである。また、記号 \oint は、積分を Cauchy の主値の意味で評価することを示す。

(2.3) が成立する条件として、 σ および S に関し

て次の二つがあれば十分である。

- (1) 吹出しの強さ σ は点 Q_0 で Hölder 連続である。すなわち、正の定数 ϵ , α および K が存在し、

$$|Q_0| < \epsilon$$

を満たす S 上の任意の点 Q に対して

$$|\sigma(Q) - \sigma(Q_0)| < K(|Q - Q_0|)^\alpha$$

が成立する。ここで $|Q - Q_0|$ は Q と Q_0 との距離である。

- (2) 面 S は点 Q_0 の近傍で連続な曲率をもつ。

空気力学において通常出会う問題においては、大体において上記二つの条件が満たされていると考えて差支えないものと思われる。

さて (α, β, γ) を Q_0 における S の接平面内にある単位ベクトルとし、演算子 $\partial/\partial s$ および $\partial/\partial n$ を次によって定義すると、

$$\left(\frac{\partial}{\partial n}\right)_{Q_0} = \left(l\frac{\partial}{\partial x} + m\frac{\partial}{\partial y} + n\frac{\partial}{\partial z}\right)_{P=Q_0} \quad (2.4)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial s}\right)_{Q_0} = \left(\alpha\frac{\partial}{\partial x} + \beta\frac{\partial}{\partial y} + \gamma\frac{\partial}{\partial z}\right)_{P=Q_0} \quad (2.5)$$

(2.3) から次の式を得る。

$$\left(\frac{\partial \phi_S}{\partial n}\right)_{Q_0} = -\frac{1}{2}\sigma(Q_0) \cdot \delta + \frac{1}{4\pi} \int \sigma \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r}\right) dS \quad (2.6)$$

$$\left(\frac{\partial \phi_S}{\partial s}\right)_{Q_0} = \frac{1}{4\pi} \int \sigma \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{1}{r}\right) dS. \quad (2.7)$$

通常、文献には (2.6) の表現しか与えられていないが、(2.3) したがって (2.7) などは (2.6) を求める方法と同一の考え方で容易に導かれる。

2.2 複吹出しに基づくポテンシャル

複吹出しによるポテンシャルは次式によって与えられる。

$$\phi_D(x, y, z) = \frac{1}{4\pi} \int_S \mu \frac{\partial}{\partial \nu} \left(\frac{1}{r}\right) dS \quad (2.8)$$

ただし

$$\frac{\partial}{\partial \nu} = l\frac{\partial}{\partial \xi} + m\frac{\partial}{\partial \eta} + n\frac{\partial}{\partial \zeta} \quad (2.9a)$$

であって、 r は (2.2) で与えられ、 μ は複吹出しの強さを表わす。

ϕ_D の核 $\partial(1/r)/\partial \nu$ は $r \rightarrow 0$ のとき r^{-2} の程度であって ϕ_S の核 $1/r$ に比べ一階だけ特異性が強い。この理由で ϕ_D の点 Q_0 における微係数を求めることは ϕ_S の場合に比べ遙かに困難となり、筆者の知る限りでは、その具体的な形を与えた例は未だないようである。

しかしながら、複吹出しの強さ μ が十分正則である (例えば、 μ が微分可能で、その微係数が Hölder 連続である、など) 場合には、 ϕ_D の S 上における微係数を次のようにして求めることができる。

まず

$$\partial(1/r)/\partial \xi = -\partial(1/r)/\partial x$$

などの関係から

$$\frac{\partial}{\partial \nu} \left(\frac{1}{r}\right) = -\left(l\frac{\partial}{\partial x} + m\frac{\partial}{\partial y} + n\frac{\partial}{\partial z}\right) \left(\frac{1}{r}\right) \quad (2.9b)$$

であるから

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial \phi_D}{\partial x}\right)_P &= \frac{1}{4\pi} \int_S \frac{\partial}{\partial x} \left[\mu \frac{\partial}{\partial \nu} \left(\frac{1}{r}\right) \right] dS \\ &= \frac{1}{4\pi} \int_S \left\{ -\mu \left(l\frac{\partial^2}{\partial x^2} + m\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + n\frac{\partial^2}{\partial x \partial z} \right) \right. \\ &\quad \times \left. \left(\frac{1}{r}\right) \right\} dS \\ &= \frac{1}{4\pi} \int_S \mu \left\{ l \left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) - m\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \right. \\ &\quad \left. - n\frac{\partial^2}{\partial x \partial z} \right\} \left(\frac{1}{r}\right) dS \\ &= \frac{1}{4\pi} \int_S \mu \left\{ \frac{\partial}{\partial y} \left(l\frac{\partial}{\partial y} - m\frac{\partial}{\partial x} \right) \right. \\ &\quad \left. - \frac{\partial}{\partial z} \left(n\frac{\partial}{\partial x} - l\frac{\partial}{\partial z} \right) \right\} \left(\frac{1}{r}\right) dS \\ &= \frac{1}{4\pi} \left\{ \frac{\partial}{\partial y} \int_S \mu \left(m\frac{\partial}{\partial \xi} - l\frac{\partial}{\partial \eta} \right) \left(\frac{1}{r}\right) dS \right. \\ &\quad \left. - \frac{\partial}{\partial z} \int_S \mu \left(l\frac{\partial}{\partial \xi} - n\frac{\partial}{\partial \eta} \right) \left(\frac{1}{r}\right) dS \right\} \quad (2.10a) \end{aligned}$$

と変形できる。ここで右辺二行目から三行目に移る際

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \left(\frac{1}{r}\right) = 0$$

という関係を利用している。

同様に

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial \phi_D}{\partial y}\right)_P &= \frac{1}{4\pi} \left\{ \frac{\partial}{\partial z} \int_S \mu \left(n\frac{\partial}{\partial \eta} - m\frac{\partial}{\partial \xi} \right) \left(\frac{1}{r}\right) dS \right. \\ &\quad \left. - \frac{\partial}{\partial x} \int_S \mu \left(m\frac{\partial}{\partial \xi} - l\frac{\partial}{\partial \eta} \right) \left(\frac{1}{r}\right) dS \right\} \quad (2.10b) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial \phi_D}{\partial z}\right)_P &= \frac{1}{4\pi} \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \int_S \mu \left(l\frac{\partial}{\partial \xi} - n\frac{\partial}{\partial \eta} \right) \left(\frac{1}{r}\right) dS \right. \\ &\quad \left. - \frac{\partial}{\partial y} \int_S \mu \left(n\frac{\partial}{\partial \eta} - m\frac{\partial}{\partial \xi} \right) \left(\frac{1}{r}\right) dS \right\} \quad (2.10c) \end{aligned}$$

を得るが、これらの式は簡潔に

$$\text{grad } \phi_D = \text{rot } \phi \quad (2.11)$$

と書くことができる。ここで $\phi = (\phi_1, \phi_2, \phi_3)$ は

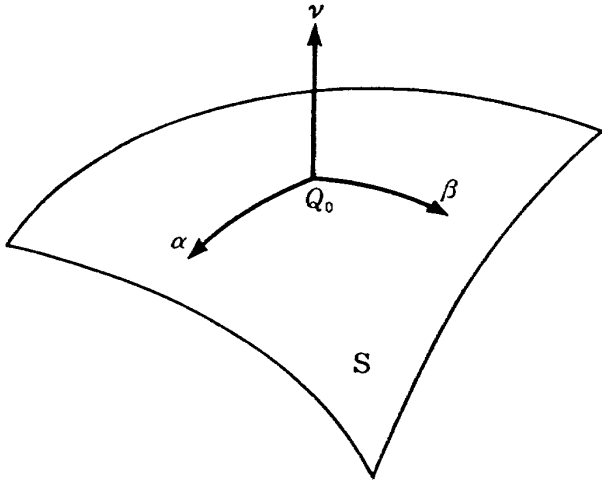
$$\phi_1(x, y, z) = \frac{1}{4\pi} \int_S \mu \left(n \frac{\partial}{\partial \eta} - m \frac{\partial}{\partial \zeta} \right) \left(\frac{1}{r} \right) dS \quad (2.12a)$$

$$\phi_2(x, y, z) = \frac{1}{4\pi} \int_S \mu \left(l \frac{\partial}{\partial \zeta} - n \frac{\partial}{\partial \xi} \right) \left(\frac{1}{r} \right) dS \quad (2.12b)$$

$$\phi_3(x, y, z) = \frac{1}{4\pi} \int_S \mu \left(m \frac{\partial}{\partial \xi} - l \frac{\partial}{\partial \eta} \right) \left(\frac{1}{r} \right) dS \quad (2.12c)$$

で与えられる。

次に (2.12) をさらに変形するため、面 S 内において直交曲線座標 (α, β) を定義し、これに S の法線に沿う座標を附加して直交曲線座標系 (α, β, ν) を構成する。



スケッチ (1)

ds_α , ds_β をそれぞれ α -軸および β -軸に沿う弧長要素とし、また $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ および $(\beta_1, \beta_2, \beta_3)$ を、直交座標系 (x, y, z) からみた α -軸および β -軸方向の単位ベクトルとする。(2.12) の積分記号下に現われた演算子は、 (α, β, ν) 系で表現すると、

$$n \frac{\partial}{\partial \eta} - m \frac{\partial}{\partial \zeta} = \alpha_1 \frac{\partial}{\partial s_\beta} - \beta_1 \frac{\partial}{\partial s_\alpha} \quad (2.13a)$$

$$l \frac{\partial}{\partial \zeta} - n \frac{\partial}{\partial \xi} = \alpha_2 \frac{\partial}{\partial s_\beta} - \beta_2 \frac{\partial}{\partial s_\alpha} \quad (2.13b)$$

$$m \frac{\partial}{\partial \xi} - l \frac{\partial}{\partial \eta} = \alpha_3 \frac{\partial}{\partial s_\beta} - \beta_3 \frac{\partial}{\partial s_\alpha} \quad (2.13c)$$

となり、面 S に関する内部演算子 (inner operators) であることがわかる。これらのことおよび以下に述べる事柄の導き方については、附録 I に詳細を与えてある。面積要素 dS は

$$dS = ds_\alpha ds_\beta$$

で与えられるから、(2.12) の右辺を部分積分するこ

とにより次の表現が得られる。

$$\phi_1 = \frac{1}{4\pi} \left\{ \int_S \frac{\lambda_1}{r} dS - \oint_{\partial S} \frac{\mu}{r} d\xi \right\} \quad (2.14a)$$

$$\phi_2 = \frac{1}{4\pi} \left\{ \int_S \frac{\lambda_2}{r} dS - \oint_{\partial S} \frac{\mu}{r} d\eta \right\} \quad (2.14b)$$

$$\phi_3 = \frac{1}{4\pi} \left\{ \int_S \frac{\lambda_3}{r} dS - \oint_{\partial S} \frac{\mu}{r} d\zeta \right\} \quad (2.14c)$$

ここに記号 $\oint_{\partial S}$ は、 S の境界 ∂S に沿う線積分を表わし、 S の裏表のうち、 ν -軸の正の側の方を常に左手に見るような向きに ∂S を辿って積分を行なうものとする。 S が閉曲面の場合は言うまでもなくこの線積分を行なう必要がない。

また $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ は

$$\lambda_1 = \beta_1 \frac{\partial \mu}{\partial s_\alpha} - \alpha_1 \frac{\partial \mu}{\partial s_\beta} \quad (2.15a)$$

$$\lambda_2 = \beta_2 \frac{\partial \mu}{\partial s_\alpha} - \alpha_2 \frac{\partial \mu}{\partial s_\beta} \quad (2.15b)$$

$$\lambda_3 = \beta_3 \frac{\partial \mu}{\partial s_\alpha} - \alpha_3 \frac{\partial \mu}{\partial s_\beta} \quad (2.15c)$$

によって定義される。

強さ μ は面 S 内で定義された函数であるが、その勾配 $D\mu$ を (α, β, ν) 系において

$$D\mu = \left(\frac{\partial \mu}{\partial s_\alpha}, \frac{\partial \mu}{\partial s_\beta}, 0 \right) \quad (2.16)$$

で与えられるベクトルとして定義すると、

$$\lambda = \nu \times D\mu \quad (2.17)$$

で定義されるベクトル λ の (x, y, z) 系における成分 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ は (2.15) で定義されたものと一致する。

すなわち

$$(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = (\nu \times D\mu)_{x-y-z \text{ system}} \quad (2.18)$$

ここで ν は ν -軸に沿う単位ベクトルである。

(2.16) および (2.18) から、 $D\mu$ および λ は面 S に接し、かつ互に直交することがわかる。

(2.14) のように変形された ϕ の核は ϕ_S におけると同様 $1/r$ であるから、(2.11) の関係に基いて ϕ_D の S 上における微係数を求める手続きは、 ϕ_S のそれを求める場合と同様にしてできる。以下に結果のみを与える。

$D\mu$ の (x, y, z) 系における表現を $(D\mu_\xi, D\mu_\eta, D\mu_\zeta)$ とする：

$$D\mu_\xi = \alpha_1 \frac{\partial \mu}{\partial s_\alpha} + \beta_2 \frac{\partial \mu}{\partial s_\beta} \quad (2.19a)$$

$$D\mu_\eta = \alpha_2 \frac{\partial \mu}{\partial s_\alpha} + \beta_3 \frac{\partial \mu}{\partial s_\beta} \quad (2.19b)$$

$$D\mu_\zeta = \alpha_3 \frac{\partial \mu}{\partial s_\alpha} + \beta_1 \frac{\partial \mu}{\partial s_\beta} \quad (2.19c)$$

$D\mu$ を (2.19) の意味で用い、また ν を (l, m, n) と解釈することにして、

$$\left(\frac{\partial\phi_D}{\partial x}\right)_{Q_0} = \frac{1}{2}D\mu_\xi(Q_0) \cdot \delta + \frac{1}{4\pi} \oint \left[(lD\mu - D\mu_\xi\nu) \cdot \text{grad}\left(\frac{1}{r}\right) \right]_{Q_0} dS + \frac{1}{4\pi} \left\{ \frac{\partial}{\partial z} \oint \frac{\mu}{r} d\eta - \frac{\partial}{\partial y} \oint \frac{\mu}{r} d\xi \right\}_{Q_0} \quad (2.20a)$$

$$\left(\frac{\partial\phi_D}{\partial y}\right)_{Q_0} = \frac{1}{2}D\mu_\eta(Q_0) \cdot \delta + \frac{1}{4\pi} \oint \left[(mD\mu - D\mu_\eta\nu) \cdot \text{grad}\left(\frac{1}{r}\right) \right]_{Q_0} dS + \frac{1}{4\pi} \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \oint \frac{\mu}{r} d\zeta - \frac{\partial}{\partial z} \oint \frac{\mu}{r} d\xi \right\}_{Q_0} \quad (2.20b)$$

$$\left(\frac{\partial\phi_D}{\partial z}\right)_{Q_0} = \frac{1}{2}D\mu_\zeta(Q_0) \cdot \delta + \frac{1}{4\pi} \oint \left[(nD\mu - D\mu_\zeta\nu) \cdot \text{grad}\left(\frac{1}{r}\right) \right]_{Q_0} dS + \frac{1}{4\pi} \left\{ \frac{\partial}{\partial y} \oint \frac{\mu}{r} d\xi - \frac{\partial}{\partial x} \oint \frac{\mu}{r} d\eta \right\}_{Q_0} \quad (2.20c)$$

となる。ここで

$$\text{grad}\left(\frac{1}{r}\right) = \left(\frac{\xi-x}{r^3}, \frac{\zeta-y}{r^3}, \frac{\xi-z}{r^3} \right) \quad (2.21)$$

であり、 δ の意味は (2.3) におけると同じである。

ϕ_S に対する (2.6) および (2.7) と同様に、

$$\left(\frac{\partial\phi_D}{\partial n}\right)_{Q_0} = \left(l\frac{\partial\phi_D}{\partial x} + m\frac{\partial\phi_D}{\partial y} + n\frac{\partial\phi_D}{\partial z} \right)_{Q_0} = l_0V_1 + m_0V_2 + n_0V_3 \quad (2.22a)$$

$$\left(\frac{\partial\phi_D}{\partial s_\alpha}\right)_{Q_0} = \left(\alpha_1\frac{\partial\phi_D}{\partial x} + \alpha_2\frac{\partial\phi_D}{\partial y} + \alpha_3\frac{\partial\phi_D}{\partial z} \right)_{Q_0} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial\mu}{\partial s_\alpha} \right)_{Q_0} \cdot \delta + \alpha_1V_1 + \alpha_2V_2 + \alpha_3V_3 \quad (2.22b)$$

$$\left(\frac{\partial\phi_D}{\partial s_\beta}\right)_{Q_0} = \left(\beta_1\frac{\partial\phi_D}{\partial x} + \beta_2\frac{\partial\phi_D}{\partial y} + \beta_3\frac{\partial\phi_D}{\partial z} \right)_{Q_0} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial\mu}{\partial s_\beta} \right)_{Q_0} \cdot \delta + \beta_1V_1 + \beta_2V_2 + \beta_3V_3 \quad (2.22c)$$

によって ϕ_D の接線および法線微分が与えられる。

(l_0, m_0, n_0) は Q_0 における (l, m, n) の値であり、また

$$V_1 = \frac{1}{4\pi} \left\{ \oint (lD\mu - D\mu_\xi\nu) \cdot \text{grad}\left(\frac{1}{r}\right) dS + \frac{\partial}{\partial z} \oint \frac{\mu}{r} d\eta - \frac{\partial}{\partial y} \oint \frac{\mu}{r} d\xi \right\}_{Q_0} \quad (2.23a)$$

$$V_2 = \frac{1}{4\pi} \left\{ \oint (mD\mu - D\mu_\eta\nu) \cdot \text{grad}\left(\frac{1}{r}\right) dS + \frac{\partial}{\partial x} \oint \frac{\mu}{r} d\zeta - \frac{\partial}{\partial z} \oint \frac{\mu}{r} d\xi \right\}_{Q_0} \quad (2.23b)$$

$$V_3 = \frac{1}{4\pi} \left\{ \oint (nD\mu - D\mu_\zeta\nu) \cdot \text{grad}\left(\frac{1}{r}\right) dS + \frac{\partial}{\partial y} \oint \frac{\mu}{r} d\xi - \frac{\partial}{\partial x} \oint \frac{\mu}{r} d\eta \right\}_{Q_0} \quad (2.23c)$$

(2.22) および (2.23) から、 ϕ_S の場合とは対照的に、 ϕ_D の法線微分は面 S を通して連続である一方、接線微分は不連続に変化し、その不連続量(jump)は、複吹出しの強さ μ の、考えている接線方向における変化率に等しいことがわかる。

本節で得られた結果のうち主要なるものは (2.11) と (2.14) であるが、これについて次のように考えることができる。式 (2.11) は、流れの速度が、スカラーポテンシャル ϕ_D の代りにベクトルポテンシャル ϕ を用いて表現され得ることを示している。一方、渦度(vorticity)の分布によって誘起される速度の場が或るベクトルポテンシャル A によって記述されることはよく知られている。(2.14) において、 λ を S という場所に分布する渦度(vortex sheet)とし、 μ を ∂S という場所に分布する渦度(vortex filament)と解釈すれば、(2.14) で与えられる ϕ は、すなわち渦度のベクトルポテンシャル A にほかならない。すなわち、(2.11) および (2.14) は、面 S 上に分布する複吹出しによる流れ場が、同じ S 上に分布する渦度による流れ場と等価であることを示している。もともと渦度(vorticity)という言葉は、運動する流体のもつ一つの性質を表現するもので、吹出し(source)とか複吹出し(doublet)などとは内容が稍異なるものである。それにもかかわらず、上記のような ϕ と A との数学的対応に示唆されて、(2.11) および (2.14) によって速度の場を表現するような特異点に対し、渦度の担い手である‘渦’(vortex)という言葉を用流することにする。固体表面上に分布する‘渦’なるものは、その面を通しての圧力差を許容し、しかも流体と共に流されることなく常にその面上に拘束されているという意味で、本来の渦とは別の、数学上の一虚構に過ぎない¹⁾。

渦分布については、5. でさらに詳しく議論する。

渦分布と複吹出し分布との間に等価性が存在することは、きわめて単純化された場合についてであるがすでに示されている¹⁶⁾。

3. 特異点の分布によるポテンシャルの翼の後縁における性質

緒言で概観した幾つかの方法⁷⁾⁻¹²⁾ において、翼の後縁における Kutta の条件を満たすための様々の方法が工夫されているが、いづれも、後縁における流れの

速度の有限なることすら保証しておらず、不満足なものである。そこでこの点を改善するため翼の後縁におけるポテンシャルおよびその微係数の性質を調べ、Kutta の条件を満たすためどのようにすべきかを考察する。

3.1 ϕ_S の性質

ϕ_S それ自体は、揚力をもつ流れ場を表現することはできないが、これについて得られた知識は ϕ_D を調べるに直接役立つので、まず ϕ_S について考察する。

直交座標系 (x, y, z) を次のように定義する。原点は後縁上の一点 T_0 に置き、 y 軸は T_0 における後縁の切線方向にとる。 x 軸は、 y 軸と、 T_0 から発する流線に対する切線とで決定される平面内にあるものとし、 z 軸は全体が右手系をなすように定める。

ϕ_S を次のように三つの部分に分ける。

$$\begin{aligned}\phi_S(x, y, z) &= \frac{1}{4\pi} \int_S \frac{\sigma}{r} dS \\ &= \frac{1}{4\pi} \int_{S-\Delta S} \frac{\sigma}{r} dS \\ &\quad + \frac{1}{4\pi} \int_{\Delta S-\Delta S_0} \frac{\sigma}{r} dS \\ &\quad + \frac{1}{4\pi} \sigma(T_0) \int_{\Delta S_0} \frac{dS}{r}\end{aligned}\quad (3.1)$$

ここで ΔS は S における T_0 の十分小さい近傍であり、 ΔS_0 は、 θ_U および θ_L を、翼と $x-z$ 平面との交線の T_0 における切線が x 軸となす角とすると、 y 軸に沿って上側は θ_U 、下側は θ_L だけ折り畳まれた平面の一部である (スケッチ (2) 参照)。

点 $P(x, y, z)$ が点 T_0 に近づくと、 ϕ_S およびその微係数がどうなるかを考える。(3.1) の第一項はこのとき明らかに何の特異性をも生じない。第二項の積分は、

$$\int_{\Delta S} \frac{\sigma}{r} dS - \sigma(T_0) \int_{\Delta S_0} \frac{dS}{r} \quad (3.2)$$

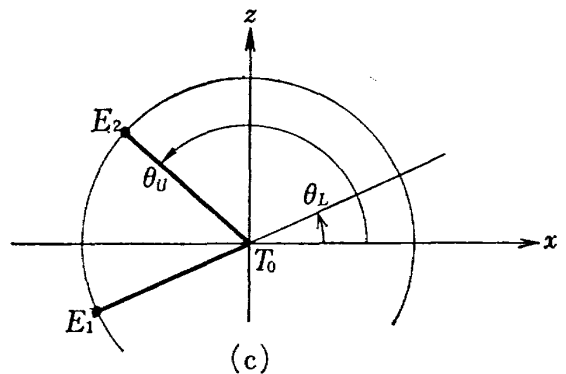
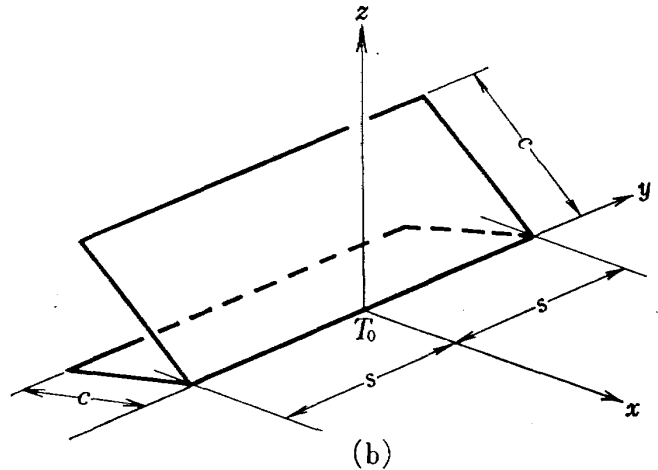
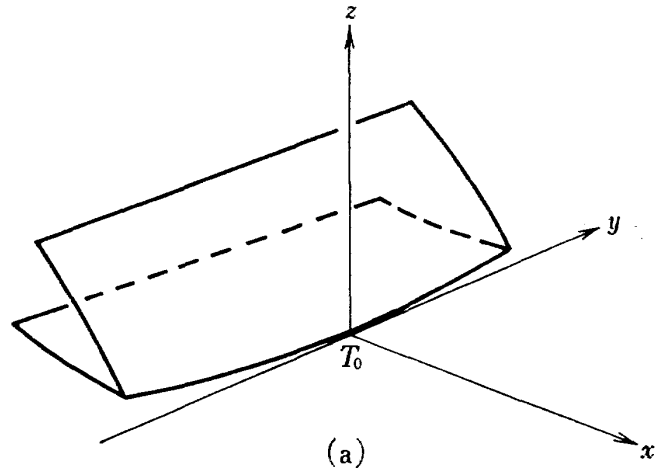
を略記したものであって、 σ および ΔS が或る条件を満たす場合には、やはり何の特異性も与えないことが証明できる。その証明については概略を附録 II に与えておいた。したがって ϕ_S およびその微係数の T_0 における特異性は、第三項からのみ生ずる。以下第三項による寄与を Δ を付け加えることにより表わす：

$$\Delta\phi_S = \frac{1}{4\pi} \sigma(T_0) \int_{\Delta S_0} \frac{dS}{r} \quad (3.3)$$

$$\Delta \frac{\partial \phi_S}{\partial x} \equiv \frac{\partial}{\partial x} \Delta\phi_S = \frac{1}{4\pi} \sigma(T_0) \frac{\partial}{\partial x} \int_{\Delta S_0} \frac{dS}{r} \quad (3.4)$$

など。

さて ΔS_0 上の点 $Q(\xi, \eta, \zeta)$ を、面内座標系 (u, v)



スケッチ (2)

を用いて次のように表わす。

$$\left. \begin{aligned}\xi &= u \cos \theta \\ \eta &= v \\ \zeta &= u \sin \theta\end{aligned}\right\} \quad (3.5)$$

ここで

$$\theta = \begin{cases} \theta_U & 0 < u < c \text{ のとき} \\ \theta_L & -c < u < 0 \text{ のとき} \end{cases} \quad (3.6)$$

とする。 u は、 ΔS_0 と、 y 軸に垂直な平面との交線 $E_1 T_0 E_2$ に沿う座標であり、 v は y 軸に平行な直線に沿う座標である。次に t および n を

$$t = x \cos \theta + z \sin \theta \quad (3.7)$$

$$n = x \sin \theta - z \cos \theta \quad (3.8)$$

で定義し、また、添字 U および L を、 ΔS_0 の上葉および下葉に関係した量を指示するものときめる。例えば t_U は、

$$t_U = x \cos \theta_U + z \sin \theta_U$$

の意味である。

吹出しの強さ σ が後縁で不連続である場合も考えられるので、 σ_U および σ_L を

$$\sigma_U = \lim_{P \rightarrow T_0} \sigma(P) : P \text{ が } \Delta S_0 \text{ の上葉にあるとき}$$

$$\sigma_L = \lim_{P \rightarrow T_0} \sigma(P) : P \text{ が } \Delta S_0 \text{ の下葉にあるとき}$$

と定義する。さらに

$$\begin{aligned} r^2 &= (x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2 \\ &= (u-t)^2 + n^2 + (v-y)^2 \end{aligned} \quad (3.9)$$

$$\begin{aligned} dS &= \left| \left(\frac{\partial \xi}{\partial u}, \frac{\partial \eta}{\partial u}, \frac{\partial \zeta}{\partial u} \right) \times \left(\frac{\partial \xi}{\partial v}, \frac{\partial \eta}{\partial v}, \frac{\partial \zeta}{\partial v} \right) \right| du dv \\ &= du dv \end{aligned}$$

であることを用い、(3.3)、(3.4) 等の積分を実行すると、次の関係が得られる。

$$\begin{aligned} 4\pi \Delta \phi_S &= \sigma(T_0) \int_{\Delta S_0} \frac{dS}{r} \\ &= \sigma_U \int_0^c du \int_{-s}^s \frac{dv}{\sqrt{(u-t)^2 + n^2 + (v-y)^2}} \\ &\quad + \sigma_L \int_{-c}^0 du \int_{-s}^s \frac{dv}{\sqrt{(u-t)^2 + n^2 + (v-y)^2}} \\ &= \sigma_U \left\{ (c-t_U) \log \frac{\sqrt{(c-t_U)^2 + n_U^2 + (s-y)^2} + s-y}{\sqrt{(c-t_U)^2 + n_U^2 + (s+y)^2} - s-y} \right. \\ &\quad + t_U \log \frac{\sqrt{t_U^2 + n_U^2 + (s-y)^2} + s-y}{\sqrt{t_U^2 + n_U^2 + (s+y)^2} - s-y} \\ &\quad + (s-y) \log \frac{\sqrt{(c-t_U)^2 + n_U^2 + (s-y)^2} + c-t_U}{\sqrt{t_U^2 + n_U^2 + (s-y)^2} - t_U} \\ &\quad + (s+y) \log \frac{\sqrt{(c-t_U)^2 + n_U^2 + (s+y)^2} + c-t_U}{\sqrt{t_U^2 + n_U^2 + (s+y)^2} - t_U} \\ &\quad - n_U \left[\tan^{-1} \frac{(s-y)(c-t_U)}{n_U \sqrt{(c-t_U)^2 + n_U^2 + (s-y)^2}} \right. \\ &\quad + \tan^{-1} \frac{(s-y)t_U}{n_U \sqrt{t_U^2 + n_U^2 + (s-y)^2}} \\ &\quad + \tan^{-1} \frac{(s+y)(c-t_U)}{n_U \sqrt{(c-t_U)^2 + n_U^2 + (s+y)^2}} \\ &\quad \left. + \tan^{-1} \frac{(s+y)t_U}{n_U \sqrt{t_U^2 + n_U^2 + (s+y)^2}} \right] \left. \right\} \\ &\quad + \sigma_L \left\{ (c+t_L) \log \frac{\sqrt{(c+t_L)^2 + n_L^2 + (s-y)^2} + s-y}{\sqrt{(c+t_L)^2 + n_L^2 + (s+y)^2} - s-y} \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &- t_L \log \frac{\sqrt{t_L^2 + n_L^2 + (s-y)^2} + s-y}{\sqrt{t_L^2 + n_L^2 + (s+y)^2} - s-y} \\ &- (s-y) \log \frac{\sqrt{(c+t_L)^2 + n_L^2 + (s-y)^2} - c-t_L}{\sqrt{t_L^2 + n_L^2 + (s-y)^2} - t_L} \\ &- (s+y) \log \frac{\sqrt{(c+t_L)^2 + n_L^2 + (s+y)^2} - c-t_L}{\sqrt{t_L^2 + n_L^2 + (s+y)^2} - t_L} \\ &- n_L \left[\tan^{-1} \frac{(s-y)(c+t_L)}{n_L \sqrt{(c+t_L)^2 + n_L^2 + (s-y)^2}} \right. \\ &- \tan^{-1} \frac{(s-y)t_L}{n_L \sqrt{t_L^2 + n_L^2 + (s-y)^2}} \\ &+ \tan^{-1} \frac{(s+y)(c+t_L)}{n_L \sqrt{(c+t_L)^2 + n_L^2 + (s+y)^2}} \\ &\left. - \tan^{-1} \frac{(s+y)t_L}{n_L \sqrt{t_L^2 + n_L^2 + (s+y)^2}} \right] \left. \right\}, \quad (3.10) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 4\pi \Delta \left(\frac{\partial \phi_S}{\partial x} \right) &= \sigma(T_0) \int_{\Delta S_0} \frac{\xi - x}{r^3} dS \\ &= \sigma_U \left\{ \frac{\cos \theta_U}{2} \left[\log \frac{\sqrt{(c-t_U)^2 + n_U^2 + (s-y)^2} - s+y}{\sqrt{(c-t_U)^2 + n_U^2 + (s-y)^2} + s-y} \right. \right. \\ &\quad - \log \frac{\sqrt{t_U^2 + n_U^2 + (s-y)^2} - s+y}{\sqrt{t_U^2 + n_U^2 + (s-y)^2} + s-y} \\ &\quad + \log \frac{\sqrt{(c-t_U)^2 + n_U^2 + (s+y)^2} - s-y}{\sqrt{(c-t_U)^2 + n_U^2 + (s+y)^2} + s+y} \\ &\quad \left. - \log \frac{\sqrt{t_U^2 + n_U^2 + (s+y)^2} - s-y}{\sqrt{t_U^2 + n_U^2 + (s+y)^2} + s+y} \right] \\ &\quad - \sin \theta_U \left[\tan^{-1} \frac{(s-y)(c-t_U)}{n_U \sqrt{(c-t_U)^2 + n_U^2 + (s-y)^2}} \right. \\ &\quad + \tan^{-1} \frac{(s-y)t_U}{n_U \sqrt{t_U^2 + n_U^2 + (s-y)^2}} \\ &\quad + \tan^{-1} \frac{(s+y)(c-t_U)}{n_U \sqrt{(c-t_U)^2 + n_U^2 + (s+y)^2}} \\ &\quad \left. + \tan^{-1} \frac{(s+y)t_U}{n_U \sqrt{t_U^2 + n_U^2 + (s+y)^2}} \right] \left. \right\} \\ &\quad + \sigma_L \left\{ \frac{\cos \theta_L}{2} \left[\log \frac{\sqrt{t_L^2 + n_L^2 + (s-y)^2} - s+y}{\sqrt{t_L^2 + n_L^2 + (s-y)^2} + s-y} \right. \right. \\ &\quad - \log \frac{\sqrt{(c+t_L)^2 + n_L^2 + (s-y)^2} - s+y}{\sqrt{(c+t_L)^2 + n_L^2 + (s-y)^2} + s-y} \\ &\quad + \log \frac{\sqrt{t_L^2 + n_L^2 + (s+y)^2} - s-y}{\sqrt{t_L^2 + n_L^2 + (s+y)^2} + s+y} \\ &\quad \left. - \log \frac{\sqrt{(c+t_L)^2 + n_L^2 + (s+y)^2} - s-y}{\sqrt{(c+t_L)^2 + n_L^2 + (s+y)^2} + s+y} \right] \\ &\quad - \sin \theta_L \left[\tan^{-1} \frac{(s-y)(c+t_L)}{n_L \sqrt{(c+t_L)^2 + n_L^2 + (s-y)^2}} \right. \\ &\quad - \tan^{-1} \frac{(s-y)t_L}{n_L \sqrt{t_L^2 + n_L^2 + (s-y)^2}} \\ &\quad + \tan^{-1} \frac{(s+y)(c+t_L)}{n_L \sqrt{(c+t_L)^2 + n_L^2 + (s+y)^2}} \\ &\quad \left. - \tan^{-1} \frac{(s+y)t_L}{n_L \sqrt{t_L^2 + n_L^2 + (s+y)^2}} \right] \left. \right\} \quad (3.11a) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
4\pi A \left(\frac{\partial \phi_S}{\partial y} \right) &= \sigma(T_0) \int_{AS_0} \frac{\eta - y}{r^3} dS \\
&= \sigma_U \left\{ \log \frac{\sqrt{(c-t_U)^2 + n_U^2 + (s+y)^2} + c - t_U}{\sqrt{(c-t_U)^2 + n_U^2 + (s-y)^2} + c - t_U} \right. \\
&\quad \left. - \log \frac{\sqrt{t_U^2 + n_U^2 + (s+y)^2} - t_U}{\sqrt{t_U^2 + n_U^2 + (s-y)^2} - t_U} \right\} \\
&\quad - \sigma_L \left\{ \log \frac{\sqrt{(c+t_L)^2 + n_L^2 + (s+y)^2} - c - t_L}{\sqrt{(c+t_L)^2 + n_L^2 + (s-y)^2} - c - t_L} \right. \\
&\quad \left. - \log \frac{\sqrt{t_L^2 + n_L^2 + (s+y)^2} - t_L}{\sqrt{t_L^2 + n_L^2 + (s-y)^2} - t_L} \right\} \quad (3.11b)
\end{aligned}$$

$\Delta(\partial \phi_S / \partial z)$ は, $\Delta(\partial \phi_S / \partial x)$ において, θ_U および θ_L の代りにそれぞれ $\theta_U - \pi/2$ および $\theta_L - \pi/2$ とおけば得られる。

点 $P(x, y, z)$ が, T_0 で y 軸に接することのないような道筋に沿って T_0 に近づくとき, 量 A に特異性をもつ部分があるとしてそれを $R(A)$ で表わすものとする。(3.10) および (3.11) に

$$\begin{cases} x = \rho \cos \varphi \\ y = 0 \\ z = \rho \sin \varphi \end{cases} \quad (3.12)$$

を代入して $\rho \rightarrow 0$ とすることにより次の結果が得られる。

$$R \left(\frac{\partial \phi_S}{\partial x} \right) = \frac{1}{4\pi} (\sigma_L \cos \theta_L - \sigma_U \cos \theta_U) \log \rho^2 \quad (3.13a)$$

$$R \left(\frac{\partial \phi_S}{\partial y} \right) = 0 \quad (3.13b)$$

$$R \left(\frac{\partial \phi_S}{\partial z} \right) = \frac{1}{4\pi} (\sigma_L \sin \theta_L - \sigma_U \sin \theta_U) \log \rho^2. \quad (3.13c)$$

この結果から, 次の条件が満たされない限り, 点 P が後縁に近づくにつれて速度は対数的に無限大となることがわかる。

$$(\sigma_U \cos \theta_U - \sigma_L \cos \theta_L)^2 + (\sigma_U \sin \theta_U - \sigma_L \sin \theta_L)^2 = 0. \quad (3.14)$$

次式で定義される後縁角 δ_T を導入すると,

$$\delta_T = \pi - (\theta_U - \theta_L) \quad (3.15)$$

(3.14) は次のようになる。

$$\sigma_U^2 + \sigma_L^2 + 2\sigma_U \sigma_L \cos \delta_T = 0. \quad (3.16)$$

物理的な立場からすれば δ_T は

$$0 \leq \delta_T < \pi$$

の範囲にあるから (3.16) は結局

$$\delta_T = 0 \quad \text{ならば} \quad \sigma_U + \sigma_L = 0 \quad (3.17)$$

$$\text{そのほかの場合は} \quad \sigma_U = \sigma_L = 0 \quad (3.18)$$

すなわち, 翼上に分布された吹出しで流れ場を表現

する場合, Kutta の条件を満たすために, 後縁における吹出しの強さは, 後縁が尖点 (cusp) でないときは零にならなければならない, また, 後縁が尖点の場合は, 翼上下面の吹出しの強さの和は, 後縁で零とならなければならない。(3.11) において, (3.13) に寄与するもの以外は T_0 で連続であるから, (3.1) における第一項および第二項に基づくものの連続性 (附録Ⅱ) と合わせて, (3.16) が成立する限り流れの速度は後縁で連続となり, 後縁に垂直な面内の速度成分は後縁で零となることがわかる。

3.2 ϕ_D の性質

緒言で述べたように, 揚力をもつ翼のまわりの流れ場の数学的モデルには必らず trailing vortex sheet が含まれなければならないから, 翼面上に分布する吹出しに, trailing vortex sheet 上に分布する複吹出しを付け加えることによって, 揚力をもつ場合を表現することが考えられる。しかしながらこのモデルには, 後に述べるような欠陥が存在するので, 本報告では, 翼面上および trailing vortex sheet 上に分布する複吹出しによって流れ場を表現するという立場を採ることにする。

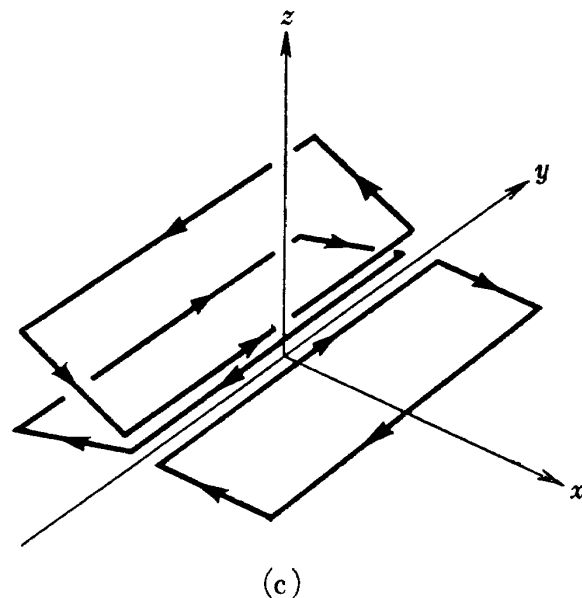
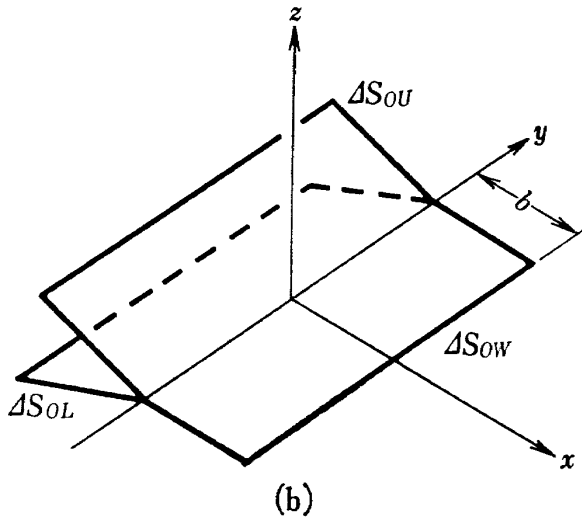
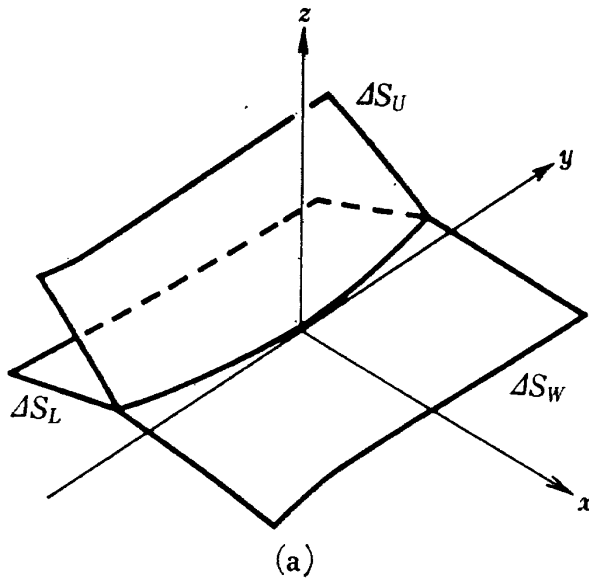
ϕ_S の場合と同様 ϕ_D を三つの部分に分ける。

$$\begin{aligned}
\phi_D(x, y, z) &= \frac{1}{4\pi} \int_S \mu \frac{\partial}{\partial \nu} \left(\frac{1}{r} \right) dS \\
&= \frac{1}{4\pi} \int_{S-AS} \mu \frac{\partial}{\partial \nu} \left(\frac{1}{r} \right) dS \\
&\quad + \frac{1}{4\pi} \int_{AS-AS_0} \mu \frac{\partial}{\partial \nu} \left(\frac{1}{r} \right) dS \\
&\quad + \frac{1}{4\pi} \int_{AS_0} \mu \frac{\partial}{\partial \nu} \left(\frac{1}{r} \right) dS \quad (3.19)
\end{aligned}$$

今度の場合 ϕ_S と異なるのは, S , したがって ΔS には, trailing vortex sheet が含まれることであって, それはスケッチ (3) において ΔS_W , ΔS_{0W} などによって表わされている。前と同様 ΔS 上の積分は ΔS_0 上の積分によって置換えられ, この両者の差, すなわち (3.19) における右辺第二項は, ϕ_D およびその微係数に対し何らの特異性をも与えないことが証明できる (附録Ⅱ参照)。 ϕ_S におけると同様 ΔS のうち翼の上面に対応するものを ΔS_U , 下面に対応するものを ΔS_L とし, また, trailing vortex sheet に対応するものを ΔS_W とする。 μ_U , μ_L および μ_W を次のように定義する。

$$\mu_U = \lim_{P \rightarrow T_0} \mu(P) \quad \text{for } P \in \Delta S_U$$

$$\mu_L = \lim_{P \rightarrow T_0} \mu(P) \quad \text{for } P \in \Delta S_L$$



スケッチ 3

$$\mu_W = \lim_{P \rightarrow T_0} \mu(P) \quad \text{for } P \in \Delta S_W.$$

ΔS_0 に対する法線方向 ν は

$$(\sin \theta, 0, -\cos \theta),$$

$$\theta = \begin{cases} \theta_U: \Delta S_{OU} \text{ の場合} \\ \theta_L: \Delta S_{OL} \text{ の場合} \\ \pi: \Delta S_{OW} \text{ の場合} \end{cases}$$

で与えられるから

$$\frac{\partial}{\partial \nu} \left(\frac{1}{r} \right) = \frac{n}{r^3} \quad (3.20)$$

となる。 n は (3.8) で与えられるものである。したがって、

$$\begin{aligned} 4\pi\phi_D &= \int_{\Delta S_0} \mu \frac{\partial}{\partial \nu} \left(\frac{1}{r} \right) dS \\ &= \left\{ \mu_U \int_0^c du \int_{-s}^s dv + \mu_L \int_{-c}^0 du \int_{-s}^s dv + \mu_W \int_0^b du \int_{-s}^s dv \right\} \\ &\quad \times \frac{n}{\sqrt{(u-t)^2 + n^2 + (v-y)^2}} \\ &= \mu_U \left\{ \text{Tan}^{-1} \frac{(s-y)(c-t_U)}{n_U \sqrt{(c-t_U)^2 + n_U^2 + (s-y)^2}} \right. \\ &\quad + \text{Tan}^{-1} \frac{(s-y)t_U}{n_U \sqrt{t_U^2 + n_U^2 + (s-y)^2}} \\ &\quad + \text{Tan}^{-1} \frac{(s+y)(c-t_U)}{n_U \sqrt{(c-t_U)^2 + n_U^2 + (s+y)^2}} \\ &\quad \left. + \text{Tan}^{-1} \frac{(s+y)t_U}{n_U \sqrt{t_U^2 + n_U^2 + (s+y)^2}} \right\} \\ &\quad + \mu_L \left\{ \text{Tan}^{-1} \frac{(s-y)(c+t_L)}{n_L \sqrt{(c+t_L)^2 + n_L^2 + (s-y)^2}} \right. \\ &\quad - \text{Tan}^{-1} \frac{(s-y)t_L}{n_L \sqrt{t_L^2 + n_L^2 + (s-y)^2}} \\ &\quad + \text{Tan}^{-1} \frac{(s+y)(c+t_L)}{n_L \sqrt{(c+t_L)^2 + n_L^2 + (s+y)^2}} \\ &\quad \left. - \text{Tan}^{-1} \frac{(s+y)t_L}{n_L \sqrt{t_L^2 + n_L^2 + (s+y)^2}} \right\} \\ &\quad - \mu_W \left\{ \text{Tan}^{-1} \frac{(s-y)(b-x)}{z \sqrt{(b-x)^2 + (s-y)^2 + z^2}} \right. \\ &\quad + \text{Tan}^{-1} \frac{(s-y)x}{z \sqrt{x^2 + (s-y)^2 + z^2}} \\ &\quad + \text{Tan}^{-1} \frac{(s+y)(b-x)}{z \sqrt{(b-x)^2 + (s+y)^2 + z^2}} \\ &\quad \left. + \text{Tan}^{-1} \frac{(s+y)x}{z \sqrt{x^2 + (s+y)^2 + z^2}} \right\}. \quad (3.21) \end{aligned}$$

ここで特に注意したいのは、 ΔS_{OW} に対する法線は z 軸の負の方向にとっていることである。すなわち、 ΔS_{OW} 上の複吹出しの軸を downward にとっている。

(3.21) から、点 $P(x, y, z)$ が T_0 に近づくとき ϕ_D は有限に止まることが見てとれる。しかしながら、この場合の ϕ_D の極限值は P が T_0 に近づく道筋に依

存する。例えば、道筋が (3.12) である場合には

$$\begin{aligned} \lim_{P \rightarrow T_0} \Delta\phi_D \\ = \frac{1}{2\pi} \{ \mu_U(\pi - \theta_U + \varphi) + \mu_L(\theta_L - \varphi) - \mu_W(\pi - \varphi) \} \end{aligned} \quad (3.22)$$

となる。ただし

$$0 < \theta_U - \varphi < 2\pi, \quad -\pi < \theta_L - \varphi < \pi, \quad 0 < \varphi < 2\pi$$

と仮定する。実際のところ、後でみるように

$$\mu_W = \mu_L - \mu_U$$

でなければならないので、(3.22) は φ に対して無関係であるかのようにみえるが、 φ が $-2\pi < \theta_U - \varphi < 0$ を満す場合には、(3.22) の右辺括弧内第一項 $\mu_U(\pi - \theta_U + \varphi)$ の代りに $\mu_U(-\pi - \theta_U + \varphi)$ を用いねばならず、また、 φ が $-3\pi < \theta_L - \varphi < -\pi$ の範囲にあるときは、第二項 $\mu_L(\theta_L - \varphi)$ を $\mu_L(2\pi + \theta_L - \varphi)$ で置換えなければならないので、極限值は確かに P の T_0 に近づく道筋に依存してきまるのである。

次に $\Delta(\partial\phi_D/\partial x)$ などの計算であるが、翼面の曲率は一般に後縁に沿って連続であるとは言えないし、また、複吹出しの強さ μ やその微係数が後縁において連続であるとは必ずしも言えないので、 $\Delta(\partial\phi_D/\partial x)$ などを求めるため (2.14) を直ちに援用する訳にはいかない。実際、(2.14) は後縁に沿っては一般に成立たず、また、(2.11) を導く際頻繁に用いた微分と積分との交換は、考えている点 P が後縁に限りなく近づく過程においては、やはり妥当でなくなる可能性がある。

このような困難さは、しかしながら、後縁に沿って切れ目を入れ、 S を、後縁をその境界の一部に持つような幾つかの開曲面のつながりに帰着せしめることによって回避することができる。

かくして、 ΔS_0 はスケッチ (3), c に示したように、三つの平面から構成されることになる。

さて $\Delta(\partial\phi_D/\partial x)$ などは次式によって与えられる。

$$\Delta\left(\frac{\partial\phi_D}{\partial x}\right) = \frac{1}{4\pi} \left\{ \frac{\partial}{\partial y} \left(\int \frac{\lambda_3}{r} dS - \oint \frac{\mu}{r} d\zeta \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left(\int \frac{\lambda_2}{r} dS - \oint \frac{\mu}{r} d\eta \right) \right\} \quad (3.23a)$$

$$\Delta\left(\frac{\partial\phi_D}{\partial y}\right) = \frac{1}{4\pi} \left\{ \frac{\partial}{\partial z} \left(\int \frac{\lambda_1}{r} dS - \oint \frac{\mu}{r} d\zeta \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left(\int \frac{\lambda_3}{r} dS - \oint \frac{\mu}{r} d\zeta \right) \right\} \quad (3.23b)$$

$$\Delta\left(\frac{\partial\phi_D}{\partial z}\right) = \frac{1}{4\pi} \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left(\int \frac{\lambda_2}{r} dS - \oint \frac{\mu}{r} d\eta \right) \right.$$

$$\left. - \frac{\partial}{\partial y} \left(\int \frac{\lambda_1}{r} dS - \oint \frac{\mu}{r} d\zeta \right) \right\} \quad (3.23c)$$

ここで面積分は ΔS_0 に亘り、また、線積分は ΔS_0 の境界 $\partial\Delta S_0$ 、すなわち ΔS_{0U} 、 ΔS_{0L} および ΔS_{0W} の周について行なうものとする。

まず線積分を考えると、 $\oint (\mu/r) d\zeta$ および $\oint (\mu/r) d\eta$ は、積分路が T_0 から常に或る距離だけ離れているから、 P が T_0 に近づいても正則である。残るものは

$$\begin{aligned} \oint \frac{\mu}{r} d\eta = & \int_{-s}^s \frac{\mu_U dv}{\sqrt{t_U^2 + n_U^2 + (v-y)^2}} \\ & + \int_s^{-s} \frac{\mu_U dv}{\sqrt{(c-t_U)^2 + n_U^2 + (v-y)^2}} \\ & + \int_{-s}^s \frac{\mu_L dv}{\sqrt{(c+t_L)^2 + n_L^2 + (v-y)^2}} \\ & + \int_s^{-s} \frac{\mu_L dv}{\sqrt{t_L^2 + n_L^2 + (v-y)^2}} \\ & + \int_{-s}^s \frac{\mu_W d\eta}{\sqrt{x^2 + (y-\eta)^2 + z^2}} \\ & + \int_s^{-s} \frac{\mu_W d\eta}{\sqrt{(x-b)^2 + (y-\eta)^2 + z^2}} \end{aligned} \quad (3.24)$$

であるが、この右辺の第二、第三、第六の積分は、前記と同じ理由で正則である。他の積分を実行して

$$\begin{aligned} \oint \frac{\mu}{r} d\eta = & (\mu_U - \mu_L + \mu_W) \\ & \times \log \left[\frac{\sqrt{x^2 + (s-y)^2 + z^2} + s - y}{\sqrt{x^2 + (s+y)^2 + z^2} - s - y} \right] \\ & + (x^2 + z^2 \rightarrow 0 \text{ において正則の項}) \end{aligned} \quad (3.25)$$

を得る。これから、(3.23)における線積分は、(3.12)により (x, y, z) を (ρ, φ) で表わすとき、 $\Delta(\partial\phi_D/\partial x)$ などに対し $1/\rho$ の特異性を与えることがわかる。

以上の結果を得る過程で、積分路上で μ が一定であることを暗黙の裡に仮定したが、もし μ がいわゆる Lipschitz の条件

$$|\mu(x) - \mu(a)| < K|x - a|$$

を満す場合には、 μ が v または η の函数であるとしても結果は変わらない。何故ならば、例えば、

$$\begin{aligned} & \left| \frac{\partial}{\partial x} \int_{-s}^s \frac{\mu(v) dv}{\sqrt{x^2 + (v-y)^2 + z^2}} - \frac{\partial}{\partial x} \int_{-s}^s \frac{\mu(y) dv}{\sqrt{x^2 + (v-y)^2 + z^2}} \right| \\ & < K \int_{-s}^s \frac{|x(v-y)| dv}{\sqrt{x^2 + (v-y)^2 + z^2}^3} \\ & = K \left\{ \frac{2|x|}{\sqrt{x^2 + z^2}} - \frac{|x|}{\sqrt{x^2 + (s-y)^2 + z^2}} \right. \\ & \quad \left. - \frac{|x|}{\sqrt{x^2 + (s+y)^2 + z^2}} \right\} \end{aligned} \quad (3.26)$$

であり, これは $\rho \rightarrow 0$ のとき何ら特異性を現わさない。
次に面積分について考える。

$\Delta(\partial\phi_S/\partial x)$ などの場合から, $\int (\alpha/r) dS$ の形の積分からは, $(\partial/\partial x) \int (\alpha/r) dS$, $(\partial/\partial z) \int (\alpha/r) dS$ に対し, それぞれ, $\alpha(T_0) \cos \theta \cdot \log \rho^2$, $\alpha(T_0) \sin \theta \cdot \log \rho^2$ なる特異部分が与えられることがわかる。ここに θ は, 面 S と x - z 平面との交線の切線が T_0 に向って x 軸と作る角度の T_0 における値である。このことから, 例えば

$$\frac{\partial}{\partial z} \int_{AS_0} \frac{\lambda_1}{r} dS - \frac{\partial}{\partial x} \int_{AS_0} \frac{\lambda_3}{r} dS$$

の $P \rightarrow T_0$ における特異部分は

$$\{(-\lambda_{1U} \sin \theta_U + \lambda_{1L} \sin \theta_L) - (-\lambda_{3U} \cos \theta_U + \lambda_{3L} \cos \theta_L - \lambda_{3W})\} \log \rho^2$$

で与えられることになる。ここで前と同様,

$$\left. \begin{aligned} \lambda_{kU} &= \lim_{P \rightarrow T_0} \lambda_k \quad \text{for } P \in AS_U \\ \lambda_{kL} &= \lim_{P \rightarrow T_0} \lambda_k \quad \text{for } P \in AS_L \\ \lambda_{kW} &= \lim_{P \rightarrow T_0} \lambda_k \quad \text{for } P \in AS_W \end{aligned} \right\} k=1, 2, 3$$

と定義している。

特異部分を全て集めることにより, 結局次の結果を得る。

$$R\left(\frac{\partial\phi_D}{\partial x}\right) = -\frac{1}{2\pi} \left\{ (\mu_U - \mu_L + \mu_W) \frac{z}{\rho^2} + (-\lambda_{2U} \sin \theta_U + \lambda_{2L} \sin \theta_L) \log \rho \right\} \quad (3.27a)$$

$$R\left(\frac{\partial\phi_D}{\partial y}\right) = \frac{1}{2\pi} \left\{ (-\lambda_{1U} \sin \theta_U + \lambda_{1L} \sin \theta_L) - (-\lambda_{3U} \cos \theta_U + \lambda_{3L} \cos \theta_L - \lambda_{3W}) \right\} \log \rho \quad (3.27b)$$

$$R\left(\frac{\partial\phi_D}{\partial z}\right) = -\frac{1}{2\pi} \left\{ (\mu_U - \mu_L + \mu_W) \frac{x}{\rho^2} + (-\lambda_{2U} \cos \theta_U + \lambda_{2L} \cos \theta_L - \lambda_{2W}) \log \rho \right\}. \quad (3.27c)$$

これに Kutta の条件を適用すると, まず $1/\rho$ の項がなくなるべき条件から

$$\mu_U - \mu_L + \mu_W = 0 \quad (3.28)$$

となるが, これは, 複吹出しの強さの後縁における保存法則とも言うべきものである。この条件は, Djojodihardjo および Widnall によってすでに得られている¹⁰⁾。

次に $\log \rho$ の特異性に対して

$$-\lambda_{2U} \sin \theta_U + \lambda_{2L} \sin \theta_L = 0 \quad (3.29a)$$

$$(-\lambda_{1U} \sin \theta_U + \lambda_{1L} \sin \theta_L) - (-\lambda_{3U} \cos \theta_U + \lambda_{3L} \cos \theta_L - \lambda_{3W}) = 0 \quad (3.29b)$$

$$-\lambda_{2U} \cos \theta_U + \lambda_{2L} \cos \theta_L - \lambda_{2W} = 0 \quad (3.29c)$$

が得られるが (2.18) および (2.19) によれば

$$\lambda_1 = D\mu_\gamma \cos \theta \quad (3.30a)$$

$$\lambda_2 = -(D\mu_\xi \cos \theta + D\mu_\zeta \sin \theta) \quad (3.30b)$$

$$\lambda_3 = D\mu_\eta \sin \theta \quad (3.30c)$$

であるから, これを (3.29b) に代入することによって, $\partial\phi_D/\partial y$ における特異性が消滅することがわかる。(3.29a) および (3.29c) から, λ_2 は, 次のような関係を満さねばならない。

$$\lambda_{2U} = k \sin \theta_L$$

$$\lambda_{2L} = k \sin \theta_U$$

$$\lambda_{2W} = k \sin(\theta_U - \theta_L)$$

$$= k \sin \delta_T$$

ただし, δ_T は後縁角で, k は任意の定数である。 k は別として, λ_{2U} は θ_L に依存し, 一方 λ_{2L} は θ_U に依存してきまるという訳であるが, これは, どちらかというとき奇妙な事柄なので, $k=0$ とおくことにしよう。このとき

$$\lambda_{2U} = \lambda_{2L} = \lambda_{2W} = 0 \quad (3.31)$$

となる。ただし, 後縁が尖点のときは $\theta_U - \theta_L = \pi$ であるから, k の如何にかかわらず, 次の関係が成立する。

$$\left. \begin{aligned} \lambda_{2U} + \lambda_{2L} &= 0 \\ \lambda_{2W} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (3.32)$$

要約すると, Kutta の条件は, 次の関係が成立すべきことを要求する。

$$\mu_U - \mu_L + \mu_W = 0$$

$$\lambda_{2W} = 0$$

かつ後縁が尖点でないときは

$$\lambda_{2U} = \lambda_{2L} = 0$$

後縁が尖点のときは

$$\lambda_{2U} + \lambda_{2L} = 0$$

($\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$) を渦と解釈すれば, λ_2 は, この渦の後縁に沿う方向の成分であり, 後縁近傍において翼面を通しての圧力差を生ぜしめる主たる要因でもあるので, 後縁で $\lambda_2=0$ という条件は物理的にも肯けるものである。

3.3 後縁におけるポテンシャルの不連続量

前節までに, 点 P が, 翼の外から後縁に近づく場合のポテンシャルの性質を調べたが, 以下では, 点 P が翼面上にあって後縁に近づく場合を考える。(2.20)

の表現から, Kutta の条件については, $D\mu$ が後縁で有限である限り, 翼の外から近づく場合と何等変わりがなく直ちにわかるが, 或る翼断面のまわりの循環は, 翼の上下面に沿って後縁に近づくときのポテンシャルの現わす不連続量に等しいので, このような場合を考察することに意味があるのである。

まず始めに ϕ_S について考える。

ϕ_{SV} を, $P(x, y, z)$ が翼上面に沿って後縁上の一点 T_0 に近づく場合の ϕ_S の極限值とし, 同様に ϕ_{SL} を P が翼下面に沿って動くときの極限值とする。両者の差

$$\delta\phi_S = \phi_{SV} - \phi_{SL} \quad (3.33)$$

が求めるものである。

ϕ_S を (3.1) におけるように分割すると, 第一の積分は ϕ_{SV} および ϕ_{SL} において全く同じとなるから, $\delta\phi_S$ には寄与しない。また第二の積分も $\delta\phi_S$ に寄与しないことが証明できる (附録II参照)。

第三の積分は,

$$\begin{aligned} \int_{s_0}^s \frac{\sigma}{r} dS &= \int_{-c}^c \sigma du \int_{-s}^s \frac{dv}{\sqrt{(u-t)^2 + n^2 + (v-y)^2}} \\ &= \sigma_U \int_0^c du \log \frac{\sqrt{(u-t_U)^2 + n_U^2 + (s-y)^2} + s-y}{\sqrt{(u-t_U)^2 + n_U^2 + (s+y)^2} - (s+y)} \\ &\quad + \sigma_L \int_{-c}^0 du \log \frac{\sqrt{(u-t_L)^2 + n_L^2 + (s-y)^2} + s-y}{\sqrt{(u-t_L)^2 + n_L^2 + (s+y)^2} - (s+y)} \end{aligned}$$

となる。ここで P が翼上面にある, すなわち,

$$x = u_0 \cos \theta_U, \quad y = v_0, \quad z = u_0 \sin \theta_U, \quad u_0 > 0$$

の場合は

$$\left. \begin{aligned} t_U &= u_0, & n_U &= 0, \\ t_L &= u_0 \cos \Delta\theta, & n_L &= -u_0 \sin \Delta\theta \end{aligned} \right\} \quad (3.35a)$$

であり, P が翼下面にある場合, すなわち,

$$x = u_0 \cos \theta_L, \quad y = v_0, \quad z = u_0 \sin \theta_L, \quad u_0 < 0$$

の場合は

$$\left. \begin{aligned} t_U &= u_0 \cos \Delta\theta, & n_U &= u_0 \sin \Delta\theta, \\ t_L &= u_0, & n_L &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (3.35b)$$

ととらねばならない。ただし

$$\Delta\theta = \theta_U - \theta_L$$

である。

P を T_0 に近づけると, すなわち $u_0 \rightarrow 0$ とするとき, 上記第三の積分も ϕ_{SV} と ϕ_{SL} で同じ値をとることが示される。結局,

$$\delta\phi_S = 0 \quad (3.36)$$

となる。つまり, 翼面上に分布した吹出しによって翼のまわりの流れ場を表現しようとするとき, どんな翼断面まわりの循環も零である。したがってこのようなモデルでは, 揚力をもつ翼のまわりの流れ場を表現す

ることはできない。そこでこのような場合に成立するモデルの一つとして, 翼面上の吹出し分布に trailing vortex sheet 上の複吹出し分布を付け加えたものが考えられるが, 次に示すように, このモデルは役に立たない。まず, このモデルにつき, 上記と同様, 後縁におけるポテンシャルの不連続量を求めてみる。(3.36)によれば, 翼面上の吹出し分布からの寄与はない。複吹出し分布からの寄与は, (3.22) において, $\varphi = \theta_U$ とおいたものと, $\varphi = \pi + \theta_L$ とおいたものの差をとれば得られ,

$$\delta\phi(T_0) = -\mu_W \frac{\delta_T}{2\pi}$$

となる。(今の場合 $\mu_U \equiv 0, \mu_L \equiv 0$ である)

一方, trailing vortex sheet 上の一点 Q_0 において sheet を横切つてのポテンシャルの不連続量を, 後述の (3.37) によって求めると,

$$\delta\phi(Q_0) = -\mu(Q_0)$$

となり, $Q_0 \rightarrow T_0$ によって

$$\delta\phi(T_0) = -\mu_W$$

となる。これは前の結果と合わない。言い換えれば, ポテンシャルの不連続量 (したがって循環) は後縁で不連続という困った結果となる。この不都合は, 後縁が, 複吹出し分布をもつ sheet の境界をなすという事実由来しているもので, 例えば sheet を, 後縁を越えて翼の内部にまで延長し, 後縁の所で複吹出しの強さ μ が連続であるとすることによって解消することができる。これは Rubbert びおよ Saaris が採用した便法で, 彼等ははこの sheet の延長を数値計算上の便宜のため行なったと述べているが⁹⁾, 実はこのようなモデルが成立するため不可欠の要件なのである。

次に, Kutta の条件について考えてみる。後縁における流れの速度の特異項は, (3.13) および (3.27) の右辺の和で与えられ, Kutta の条件を適用すると, (3.28) に対応して

$$\mu_W = 0$$

が得られる。

$-\mu_W$ は後縁におけるポテンシャルの不連続量であるから, これは翼面上至るところ循環なしを意味し, 折角 trailing vortex sheet を複吹出しで与えたのに, 揚力のない場合しか扱えないことになる。この不都合も, sheet を翼面内にまで延長することにより解消される。何故ならば, この場合 Kutta の条件は, 強さ μ およびその微係数の後縁における連続性を要求するに過ぎないからである。

前に戻って今度は ϕ_D についてその不連続量を求めてみる。 ϕ_S の場合と同様 $\delta\phi_D$ を

$$\delta\phi_D = \phi_{DU} - \phi_{DL}$$

によって定義する。

(2.9b) と (2.4) とを比較することによって、点 $P(x, y, z)$ が翼面上の点 $Q_0(\xi_0, \eta_0, \zeta_0)$ に近づくと ϕ_D は (2.6) の右辺に対応する形をとることがわかる。

$$\phi_D(\xi_0, \eta_0, \zeta_0) = \frac{1}{2}\mu(Q_0) \cdot \delta + \frac{1}{4\pi} \oint_S \mu \frac{\partial}{\partial \nu} \left(\frac{1}{r} \right) dS \quad (3.37)$$

以下、法線 ν は、 P が存在する流れ場の方に向けてとられるものと考え、 $\delta = +1$ とおく。

(3.37) の右辺第一項は、 $\delta\phi_D$ に対し

$$\frac{1}{2}(\mu_U - \mu_L)$$

なる寄与を与える。右辺第二項の積分による寄与を考えるため、これを (3.19) におけると同様三つに分割すると、第一の積分は明らかに ϕ_{DU} と ϕ_{DL} において同じであり、また、第二の積分が $\delta\phi_D$ に寄与しないことも証明できる (附録Ⅱ参照)。第三の積分は Cauchy の主値の意味で求めなければならないが、計算の結果は (3.21) と同一となる。但し、次の二つの条件が附随する。

(1) (3.21) における t_U, n_U, t_L, n_L は、 ϕ_{DU} を求めるとき、すなわち、

$$(x, y, z) = (u_0 \cos \theta_U, v_0, u_0 \sin \theta_U), \quad u_0 > 0$$

のときは (3.35a) で与えられるものであり、 ϕ_{DL} を求めるとき、すなわち、

$$(x, y, z) = (u_0 \cos \theta_L, v_0, u_0 \sin \theta_L), \quad u_0 < 0$$

のときは (3.35b) で与えられるものとする。

(2) (3.21) において、 ϕ_{DU} に対応する値を求めるときは、 $n_U = 0$ であるから μ_U に比例する項を無視し、 ϕ_{DL} に対する値を求めるときは、 $n_L = 0$ であるから μ_L に比例する項を無視するものとする。

これらの条件下で、第三の積分の ϕ_{DU} および ϕ_{DL} に対する貢献は、(3.22) においてそれぞれ $\varphi = \theta_U$ および $\varphi = \pi + \theta_L$ において得られる：

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi} \{ [\mu_L(\theta_L - \theta_U) + \mu_W(\theta_U - \pi)] \\ & \quad - [\mu_U(\theta_L - \theta_U) + \mu_W\theta_L] \} \\ & = \frac{1}{2\pi} \{ (\mu_U - \mu_L + \mu_W)(\theta_U - \theta_L) - \pi\mu_W \}. \end{aligned}$$

(3.37) における第一項からの寄与を加えて、

$$\delta\phi_D = \left(\frac{1}{2} + \frac{\theta_U - \theta_L}{2\pi} \right) (\mu_U - \mu_L + \mu_W) - \mu_W \quad (3.38)$$

となるが、(3.28) の条件があるから結局、

$$\delta\phi_D = -\mu_W = \mu_U - \mu_L \quad (3.39)$$

を得る。このことから、Kutta の条件によって、翼上下面に沿って後縁に近づくと生ずるポテンシャルの不連続量が、trailing vortex sheet 上で生ずるポテンシャルの不連続量に、連続的に繋がっていくことがわかる。あるいはまた、ある翼断面まわりの循環を求めるのに $\mu_U - \mu_L$ を求めてもよいし、 μ_W を求めてもよいことを (3.39) は示している。さらにまた (3.39) は、揚力をもつ翼のまわりの流れ場を考えるとき、trailing vortex sheet は不可欠であることを示している。何故ならば、 $\mu_W \equiv 0$ のときは $\mu_U - \mu_L = 0$ で、(3.39) によれば循環が存在し得なくなるからである。

最後に、後縁以外の場所における ϕ_D およびその微係数の特異性について考察する。

(2.14) における線積分が、grad ϕ_D に対し $1/\rho$ の程度の特異性を与えることは、すでに (3.25) によって示された。ここに ρ は、考えている点 $P(x, y, z)$ と、積分路上の一点との距離である。線積分は、面 S の境界 ∂S に沿うものであるから、流れの速度が ∂S において有限であるためには、複吹出しの強さ μ が ∂S に沿って零とならなければならない。揚力をもった翼を含む物体のまわりの流れ場を考えるとき、 ∂S として次のものが考えられる。

(1) 翼の後縁

∂S の一部としての翼の後縁は、(2.11) および (2.14) を、その近傍でも成立するものとなすために人為的に導入されたものである。

(2) 物体表面上の曲線で、それに沿って曲率が不連続であるもの。

翼と胴体および翼と翼との接合部はその一例である。

これらの曲線に対しても、後縁に対すると同じ理由で切れ目を入れ、 ∂S の一部としなければならない。

(3) trailing vortex sheet の、翼幅方向の端末。

流れの速度が、trailing vortex sheet の側縁に沿って有限であることは明らかであるから、そこでは $\mu = 0$ であり、上記の三者のうち第三のものは (2.14) における線積分に対する何等の寄与をもたない。第一のものについては Kutta の条件によってやはり後縁に沿う線積分が零になる。物体表面上にある曲率の不連続線については、流れがその近傍でどのようなになるか

具体的にはわからないが、少くとも複吹出しの強さ μ がその両側で連続ならば、この不連続線に沿う線積分は消滅する。實際上、翼胴体接合部などに対しては、十分の fairing が行なわれるのが常であり、境界層の掩蔽効果も存在するから、このような不連続線に基づく線積分を (2.14) に対して考える必要はまずないものと思われる。

結論として、揚力をもつ翼を含む物体のまわりのポテンシャル流れを考察するとき、(2.14) における線積分は全てこれを無いものと見做すことができる。

4. 複吹出し分布によるポテンシャル流れの基礎方程式の表現

揚力をもつ翼のまわりの流れ場が、翼面 S_B および trailing vortex sheet S_W 上の複吹出し分布によって表わされるものと仮定する。すなわち、流れ場の擾乱ポテンシャル φ が、

$$\varphi(x, y, z) = \frac{1}{4\pi} \int_{S_B + S_W} \mu \frac{\partial}{\partial \nu} \left(\frac{1}{r} \right) dS \quad (4.1)$$

で与えられると仮定する。

grad φ によって φ の導関数を表わす。

$$\text{grad } \varphi = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right). \quad (4.2)$$

点 $P(x, y, z)$ が $S = S_B + S_W$ 上の一点 $Q_0(\xi_0, \eta_0, \zeta_0)$ に近づくと、grad φ は (2.20) で与えられる極限值に近づく。これを次のように簡単化して表わす。

$$\begin{aligned} (\text{grad } \varphi)_{Q_0} &= \frac{1}{2} D\mu(Q_0) \cdot \delta \\ &+ \frac{1}{4\pi} \oint_S (\nu Du - D\mu\nu) \cdot \text{grad} \left(\frac{1}{r} \right) dS \end{aligned} \quad (4.3)$$

ただし grad $(1/r)$ は (2.21) で与えられるものである。(2.20) に含まれていた線積分は、前節末尾の結論によって、ここでは全て省かれている。

簡単化のため、(4.3) を

$$(\text{grad } \varphi)_{Q_0} = A \cdot \delta + B \quad (4.4)$$

とおく。ただし、

$$A = \frac{1}{2} D\mu \quad (4.5)$$

$$B = \frac{1}{4\pi} \oint_S (\nu D\mu - D\mu\nu) \cdot \text{grad} \left(\frac{1}{r} \right) dS \quad (4.6)$$

である。

U_∞ を一様流速、 q を流れ場の中の一点における速度とする。 q_0 を Q_0 における q の値とすると

$$q_0 = U_\infty + A \cdot \delta + B. \quad (4.7)$$

q_0 の S に垂直な成分を q_n とすると、 $D\mu$ の定義

により

$$A \cdot n = 0 \quad (4.8)$$

であるから、

$$q_n = q_0 \cdot n = (U_\infty + B) \cdot n \quad (4.9)$$

となる。 n は S の法線ベクトルである。

(4.9) から、翼面 S_B における境界条件は、

$$(U_\infty + B) \cdot n = F \quad (4.10)$$

と書くことができる。ここに F は S_B 上で定義された既知関数であって、流れが定常であって S_B が固体表面であるときは恒等的に零となる。

次に trailing vortex sheet 上の条件を求める。 S_W の表側と裏側を、それぞれ添字 U と L を用いて区別することにする。(4.3) において、 Q_{0U} に対し $\delta = +1$ 、 Q_{0L} に対し $\delta = -1$ であるから、 Q_{0U} から Q_{0L} に移るに際し、 q は不連続に変化する。したがって Q_{0U} と Q_{0L} とは同一の流線の上に存在することはできない。すなわち、流線は trailing vortex sheet を横切ることができない。この意味で、trailing vortex sheet は、無限小の距離だけ離れた二つの stream surface を分離する不連続面 (surface of discontinuity) であると言うことができる。

q_{0U} および q_{0L} を

$$q_{0U} = U_\infty + A + B \quad (4.11a)$$

$$q_{0L} = U_\infty - A + B \quad (4.11b)$$

によって定義すると、以上のことから

$$q_{0U} \cdot n = q_{0L} \cdot n = 0$$

すなわち、(4.8) によって

$$(U_\infty + B) \cdot n = 0 \quad (4.12)$$

の関係が trailing vortex sheet 上で成立することがわかる。(4.12) は、ベクトル $U_\infty + B$ が sheet の上に横たわっていることを示している。

q_{0U} と q_{0L} との平均を q_{0m} とすると

$$\frac{1}{2} (q_{0U} + q_{0L}) \equiv q_{0m} = U_\infty + B \quad (4.13)$$

すなわち、trailing vortex sheet 上の速度成分 $U_\infty + B$ は、sheet の裏表における二つの速度の算術平均に等しい。

trailing vortex sheet は、流体中に考えられた仮想の面であるから、その表裏を通して圧力差があってはならない。

ベルヌーイの定理により、sheet を横切ったの圧力差 Δp は定常流の場合

$$\Delta p = -\frac{\rho}{2} (q_{0L}^2 - q_{0U}^2)$$

で与えられるから、(4.11) を用いると

$$\frac{4p}{\rho} = -2A \cdot (U_{\infty} + B) = -D\mu \cdot (U_{\infty} + B)$$

となる。 $4p=0$ であるから, sheet の上で

$$D\mu \cdot (U_{\infty} + B) = 0 \quad (4.14)$$

なる条件が成立たねばならぬことになる。

以上から, q_0 を構成する二つの成分 $D\mu$ と $U_{\infty} + B$ は, 共に sheet 上に横たわり, かつ互に直交していることがわかる。したがって, その上の各点で, $U_{\infty} + B$ すなわち平均速度 q_{0m} に接しているような trailing vortex sheet S_W 上の曲線 C に沿って, 複吹出しの強さ μ が一定に保たれる。

S_W と一点 Q_0 のみで交わる閉曲線に沿う循環 Γ は, Q_{0U} および Q_{0L} におけるポテンシャルの値の差に等しく, したがって Q_0 における複吹出しの強さ $\mu(Q_0)$ に等しい。

$$\Gamma = \varphi(Q_{0U}) - \varphi(Q_{0L}) = -\mu(Q_0) \quad (4.15)$$

このことから, 循環 Γ は, 上記曲線 C に沿って一定に保たれることになるが, これは, C が, 後縁上の一点 T から流れ出る渦度の軌跡であることを意味する。すなわち渦度の軌跡は, T から出発して, 常に平均速度 q_{0m} の方向を辿ることによって得られる。後縁の各点から出発してこのような軌跡を求めることにより, S_W を形成 (generate) する一つの曲線群が得られ, また, 各点で μ の勾配 $D\mu$ の方向に接するような曲線群を作ると, これも S_W を形成し, しかも前の曲線群に直交する曲線群となる。

以上までに得られた流れ場の基礎方程式をまとめると, $S = S_B + S_W$ の固体表面 S_B について

$$(U_{\infty} + B) \cdot n = 0 \quad (4.16)$$

trailing vortex sheet S_W について

$$\left. \begin{aligned} (U_{\infty} + B) \cdot n &= 0 \\ (U_{\infty} + B) \cdot A &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (4.17)$$

および

$$\begin{aligned} \mu_U - \mu_L + \mu_W &= 0 \\ \lambda_{2W} &= 0 \end{aligned}$$

および, 後縁が尖点でないときは

$$\lambda_{2U} = \lambda_{2L} = 0$$

尖点のときは

$$\lambda_{2U} + \lambda_{2L} = 0$$

となる。ここで n は S に対する法線ベクトルであり, A および B は, それぞれ (4.5) および (4.6) で与えられる。

上記の基礎方程式において, 未知量は, 複吹出しの強さ μ と, trailing vortex sheet S_W の位置である。これらの未知量に対して, 基礎方程式が解をもつか否

かは, にわかにはわからないが, 上記基礎方程式が, 少なくとも数学的には矛盾のないものであり, 揚力をもつ翼を含む物体のまわりのポテンシャル流れを記述する数学的モデルとしての有用性をもつことは予想される。

5. 渦分布による表現

2. および 3. において, 或る面上の複吹出し分布は, 同じ面上における或る渦分布と等価であることが示された。このことから, 揚力をもつ翼のまわりのポテンシャル流れを, 複吹出し分布の代りに渦分布を用いて表現する可能性が考えられる。

物体表面 S_B および trailing vortex sheet S_W 上に分布する渦の強さを $\lambda(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ とし,

$$\phi(x, y, z) = \frac{1}{4\pi} \int_S \frac{\lambda}{r} dS \quad (5.1)$$

とおく, ただし $S = S_B + S_W$ とする。渦 λ によって誘起される速度 v は,

$$v = \text{rot}(\phi) \quad (5.2)$$

によって与えられる。

5.1 適合条件式

定義によって, ϕ の三成分は, S の外の点でラプラスの方程式を満たすから, 次の関係が得られる。

$$\begin{aligned} \text{rot } v &= \text{rot}(\text{rot } \phi) \\ &= \text{grad}(\text{div } \phi) - \nabla^2 \phi \\ &= \text{grad}(\text{div } \phi). \end{aligned} \quad (5.3)$$

したがって, 誘起速度 v の場が非回転であるために,

$$\text{grad}(\text{div } \phi) = 0 \quad (5.4)$$

が成立せねばならない。

この条件を調べるため, 2 ですでに用いられた曲線座標系 (α, β, ν) を導入すると

$$\begin{aligned} \text{div } \phi &= \frac{1}{4\pi} \int_S \frac{\lambda_1(\xi - x) + \lambda_2(\eta - y) + \lambda_3(\zeta - z)}{r^3} dS \\ &= -\frac{1}{4\pi} \int_S \left(\lambda_1 \frac{\partial}{\partial \xi} + \lambda_2 \frac{\partial}{\partial \eta} + \lambda_3 \frac{\partial}{\partial \zeta} \right) \left(\frac{1}{r} \right) dS \\ &= -\frac{1}{4\pi} \int_S \left(\frac{\lambda_\alpha}{F} \frac{\partial}{\partial \alpha} + \frac{\lambda_\beta}{G} \frac{\partial}{\partial \beta} + \frac{\lambda_\nu}{H} \frac{\partial}{\partial \nu} \right) \\ &\quad \times \left(\frac{1}{r} \right) F \cdot G d\alpha d\beta \end{aligned} \quad (5.5)$$

と書くことができる。ここに $Q(\xi, \eta, \zeta)$ は S 上の点で, $\lambda_\alpha, \lambda_\beta$ および λ_ν は, それぞれ α 軸, β 軸および ν 軸方向の λ の成分であり, F, G, H および次式に用いられた ξ_α 等は 2. におけると同様である (附録 I 参照)。 λ_α そのほかは次によって与えられる。

$$\lambda_\alpha = \lambda_1 \frac{\xi_\alpha}{F} + \lambda_2 \frac{\eta_\alpha}{F} + \lambda_3 \frac{\zeta_\alpha}{F} \quad (5.6a)$$

$$\lambda_\rho = \lambda_1 \frac{\xi_\rho}{G} + \lambda_2 \frac{\eta_\rho}{G} + \lambda_3 \frac{\zeta_\rho}{G} \quad (5.6b)$$

$$\lambda_\nu = \lambda_1 \frac{\xi_\nu}{H} + \lambda_2 \frac{\eta_\nu}{H} + \lambda_3 \frac{\zeta_\nu}{H} \quad (5.6c)$$

(2.17) によって定義される λ は、面 S 内の成分しか持たない。そこで今の場合も、 λ は常に面内に拘束されるものと仮定する。言い換えれば

$$\lambda_\nu = 0 \quad (5.7)$$

である。これを適用し、かつ部分積分を行なうと、

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{4\pi} \int_S \left(\frac{\lambda_\alpha}{F} \frac{\partial}{\partial \alpha} + \frac{\lambda_\beta}{G} \frac{\partial}{\partial \beta} \right) \left(\frac{1}{r} \right) F \cdot G d\alpha d\beta \\ &= \frac{1}{4\pi} \left\{ \int_S \frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial \alpha} (\lambda_\alpha G) + \frac{\partial}{\partial \beta} (\lambda_\beta F) \right] d\alpha d\beta \right. \\ & \quad \left. - \oint_{\partial S} \frac{\lambda_n}{r} ds \right\} \quad (5.8) \end{aligned}$$

を得る。ただし

$$\lambda_n = \lambda_\alpha \frac{ds_\alpha}{ds} - \lambda_\beta \frac{ds_\beta}{ds} \quad (5.9)$$

は、 S の境界 ∂S に垂直な λ の成分を表わす。

(5.8) から、(5.4) が常に成立するために、

S の上で

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} (\lambda_\alpha G) + \frac{\partial}{\partial \beta} (\lambda_\beta F) = 0 \quad (5.10)$$

および S の境界 ∂S に沿って

$$\lambda_n = 0 \quad (5.11)$$

でなければならぬことが言える。この (5.10) および (5.11) を面 S 上に分布する渦 λ に対する適合条件と呼ぶことにする。

3. の末尾で述べたように、境界 ∂S として、(1) 後縁、(2) 曲率の不連続をもつような S 上の曲線、(3) trailing vortex sheet の側縁の三者が考えられたが、(5.11) をこれらに適用すると、次のようになる。

後縁に沿って

$$\lambda_{nU} + \lambda_{nL} + \lambda_{nW} = 0 \quad (5.12a)$$

不連続性曲線に沿って

$$\lambda_{n+} + \lambda_{n-} = 0 \quad (5.12b)$$

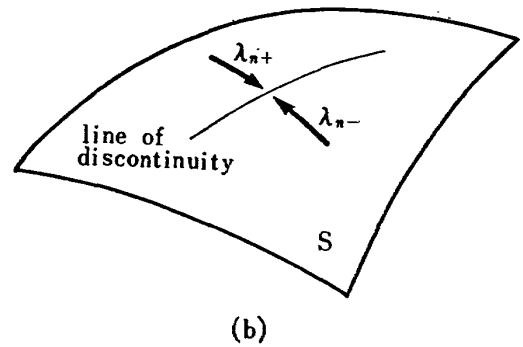
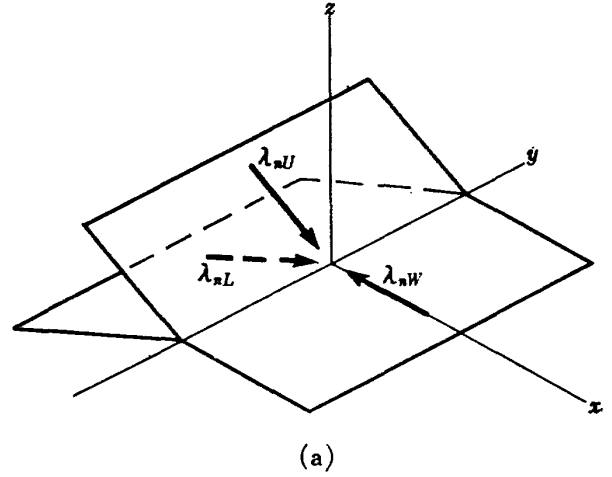
sheet の側縁に沿って

$$\lambda_n = 0 \quad (5.12c)$$

ただし λ_{nU} 等の向きは、スケッチ (4) に示すようなものである。

5.2 境界条件

(2.20) を得る際とった手続きと同様の手続きによって、 S 上の一点 $Q_0(\xi_0, \eta_0, \zeta_0)$ における v の表現を求めると、



スケッチ (4)

$$v(Q_0) = \frac{1}{2} (\lambda \times n) Q_0 \cdot \delta - \frac{1}{4\pi} \oint_S \lambda \times \text{grad} \left(\frac{1}{r} \right) dS \quad (5.13)$$

となる。ここに δ は (2.3) におけると同じ意味であり、 $\text{grad}(1/r)$ は (2.21) で与えられる。 n は S に対する法線ベクトルである。

(5.13) から、(4.16) および (4.17) を求めたと同様にして次の境界条件が得られる。

固体表面において

$$(U_\infty + \bar{B}) \cdot n = 0 \quad (5.14)$$

trailing vortex sheet に対して

$$(U_\infty + \bar{B}) \cdot \bar{A} = 0 \quad (5.15a)$$

および

$$(U_\infty + \bar{B}) \cdot n = 0 \quad (5.15b)$$

ただし

$$\bar{A} = \frac{1}{2} (\lambda \times n) \quad (5.16a)$$

$$\bar{B} = -\frac{1}{4\pi} \oint_S \lambda \times \text{grad} \left(\frac{1}{r} \right) dS \quad (5.16b)$$

とおいた。

(5.15) の物理的意味は、(4.14) に続いて説明したところと同様であって、繰返すと、trailing vortex

sheet 上の λ は、後縁から流れ出る vorticity として本来の意味を取戻し、その保存法則を示す (5.10) の条件は、 λ に接する曲線に沿って、ポテンシャルの不連続量、したがって循環の大きさが一定に保たれることを表わす。実際、(5.10) によれば、

$$\lambda_\alpha G = -\frac{\partial \mu}{\partial \beta}, \quad \lambda_\beta F = \frac{\partial \mu}{\partial \alpha}$$

すなわち

$$\lambda_\alpha = -\frac{\partial \mu}{\partial s_\beta}, \quad \lambda_\beta = \frac{\partial \mu}{\partial s_\alpha} \quad (5.17)$$

となるようなスカラー量 μ が存在することになるが、(5.7) と合わせれば、これは正しく (2.17) と同一であり、したがって (5.17) を満す μ を複吹出しの強さ、したがってまた、ポテンシャルの不連続量、と解釈し得る。(5.17) は $\mu = \text{const}$ なる曲線が λ の方向に沿っていることを示すのである。

以上によれば、複吹出し分布から渦分布が得られたと丁度逆の過程を辿って、渦分布から複吹出し分布が導かれることがわかるが、このことは、渦分布に基づく流れのポテンシャルを求めるための一つの方法を与えるものである。

一方、(5.10) と並ぶ適合条件式の一つ (5.11) は、(5.9) および (5.17) によって、 ∂S に沿って

$$\mu = \text{const} \quad (5.18)$$

なる条件に帰着し、したがって、(5.12) から

後縁で

$$\mu_U - \mu_L + \mu_W = \text{const.}$$

不連続性曲線の上で

$$\mu_+ - \mu_- = \text{const.}$$

trailing vortex sheet の側縁で

$$\mu = \text{const.}$$

となるが、これら右辺の定数が全て零であるべきことは 3. の末尾ですでに議論した。

5.3 Kutta の条件

渦分布 λ の表現を用いた場合の Kutta の条件について考える。そのために必要な、後縁における速度の特異性は、すでに (3.27) によって与えられていることが、(3.23) と (5.2) とを比較することによってわかる。(3.27) から (3.29) が導かれるが、(3.29b) の自動的消滅を保証した (3.30) は今の場合使うことができない。その代りを務めるのが (5.7) であって、

$$\lambda_{1U} \sin \theta_U - \lambda_{3U} \cos \theta_U = \lambda_{\nu U}$$

$$\lambda_{1L} \sin \theta_L - \lambda_{3L} \cos \theta_L = \lambda_{\nu L}$$

$$\lambda_{3W} = \lambda_{\nu W}$$

であるから、 $\lambda_{\nu U} = \lambda_{\nu L} = \lambda_{\nu W} = 0$ により (3.29b) は常

に満される。(3.29a, c) は今の場合も、後縁が尖点でないとき

$$\lambda_{2U} = \lambda_{2L} = \lambda_{2W} = 0$$

後縁が尖点のとき

$$\lambda_{2U} + \lambda_{2L} = \lambda_{2W} = 0$$

を意味する。

5.4 基礎方程式

渦分布 λ によってポテンシャル流れの基礎方程式を表現すると次のようになる。

$$\text{I. } S \text{ の上で} \quad \lambda_\nu \equiv \lambda \cdot \mathbf{n} = 0$$

$$\text{II. } S \text{ の上で}$$

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} (\lambda_\alpha G) + \frac{\partial}{\partial \beta} (\lambda_\beta F) = 0$$

$$\text{III. 境界条件}$$

S の部分 S_B (固体表面) 上で

$$(\mathbf{U}_\infty + \bar{\mathbf{B}}) \cdot \mathbf{n} = 0$$

S の部分 S_W (trailing vortex sheet) 上で

$$(\mathbf{U}_\infty + \bar{\mathbf{B}}) \cdot \mathbf{n} = 0,$$

$$(\mathbf{U}_\infty + \bar{\mathbf{B}}) \cdot \bar{\mathbf{A}} = 0$$

$$\text{IV 後縁に沿って}$$

$$\lambda_{nU} + \lambda_{nL} + \lambda_{nW} = 0,$$

かつ

$$\text{後縁が尖点ならば} \quad \lambda_{tU} + \lambda_{tL} = \lambda_{tW} = 0$$

$$\text{尖点でなければ} \quad \lambda_{tU} = \lambda_{tL} = \lambda_{tW} = 0$$

ただし λ_n は λ の後縁に垂直な成分、 λ_t は後縁に沿う方向の成分を示す。

条件 I は、 λ が二つの成分 λ_α および λ_β で規定され、この二つが条件 II および III によって決定されるべきであることを示す。条件 III における $\bar{\mathbf{A}}$ 及び $\bar{\mathbf{B}}$ は (5.16) によって与えられるものである。条件 IV は、 λ に対するいわば境界条件の役割をもつ。

流れ場を渦分布で表現する利点の一つは、従来の揚力面理論におけるいわゆる vortex lattice method が、このアプローチの一つの近似形態と考えられるところにある。渦分布による計算結果と、vortex lattice method によるそれとを比較することにより後者の精度を検討することができるし、また、後者による実際計算により得られた経験は、渦分布によるモデルにおける数値計算の手法の選択に寄与する可能性が大きい。

6. 結 論

物体上および trailing vortex sheet 上の複吹出し分布に基いて揚力をもつ翼を含む物体のまわりのポテンシャル流れの数学的定式化を試みることににより、次の

結果を得た。

(1) 複吹出しの表面分布に基づく速度の場合は、その表面上、およびその表面の境界に沿って分布する渦によって誘起される速度の場と等価である。

(2) 複吹出しの表面分布に基づくポテンシャルの、その表面上の一点における微係数は、従来‘発散積分の有限部分’なる手法により求めなければならなかったが、上記(1)に述べられた事実を利用すれば、Cauchyの主値積分を用いることによりこれが求められ、計算が簡単化される。

(3) (1)に述べた事実から、複吹出しの表面分布によって流れ場を表現する場合、その表面の端で流れの速度が有限なるためには、そこでの複吹出しの強さが零にならなければならぬことが示される。

(4) 揚力をもつ翼の後縁附近におけるポテンシャルの性質を調べることにより、翼の後縁で流れの速度が有限となるため複吹出しの強さが満さなければならぬ条件を見出した。

上記の結果を用い、揚力を持つ翼を含む物体のまわりのポテンシャル流れに対する基礎方程式を、複吹出し分布或は渦分布によって表現することができた。

本文において導かれた基礎方程式が、二次元流れの場合を一つの特別な例として包摂することは言うまでもないが、二次元流れに話を限れば、既に有力な数値解法が存在する¹⁹⁾。しかしながら Kutta の条件が意味するところのものを明瞭にした点において、本文の方法が独自の価値をもつことを主張できる。

本文の基礎方程式は、定常流を仮定して導かれたが、非圧縮性流体の場合は、流れの基礎方程式が定常・非定常によらず、非定常性は唯、境界条件を通して現われるのみであるので、本文における定式化を非定常流れの場合に拡張することは容易である。

本文の基礎方程式は、流れが非粘性・非圧縮性であることを仮定して求められた。粘性の効果は別として、圧縮性の効果を正確に評価することさえも、三次元流れの場合はきわめて困難である。圧縮性の効果を第一次近似で表現する Prandtl-Glauert 法則や Goethert 法則は、臨界マッハ数に近づくにつれて精度が悪くなることはよく知られており、したがって、このマッハ数の近傍で圧縮性の効果を精度よく評価するためには何らかの別の手段を講ずる必要がある。二次元流れの場合、圧縮性の効果を第二次近似まで評価するのに例えば Van Dyke の方法²⁰⁾があり、これをもとにして Wilby は精度のよい圧縮性修正係数を見出した²¹⁾。Labrujere, Loeve および Slooff はこの修正係

数を用いて、Subcritical な流れの中にある翼型上の速度分布を与える一つの方法を開発し、この二次元流れの方法を、三次元翼上の流れに局所的に適用して、三次元流における圧縮性の効果を評価することを試みた^{22), 23)}。このやり方が妥当なものであるかどうかは目下のところ不明で、したがってその精度を評価することもできない。そのような訳で、三次元流れに対する圧縮性の効果を評価する方法は、今後の発展にまつべきことが多々ある。

本文に与えた数学的モデルの妥当性は、究極的には、それによる計算結果と実際の現象との対照により判定されるべきものであるが、数学的モデル自身の近似性のほかに、それを解くに際して近似的な数値解法に頼らざるを得ないことから生ずる計算の誤差が存在するので、判定は容易ではない。

数値計算を行なう例として最も興味を惹かれるのは、揚力をもつ翼と胴体との組合せの場合であるが、この場合、翼および trailing vortex sheet は複吹出しまたは渦で表現すべきであろう。胴体については、これを複吹出しまたは渦で表現することはもちろん可能であるが、むしろ吹出しによって表現した方が実際計算では有利であると考えられる。その理由は、一つには、吹出しはスカラー量である一方渦はベクトル量であって未知量の数が多いことであり、また一つには、近似計算の過程で現われる連立一次方程式の係数行列が、吹出しの場合、渦に比べて遙かに扱い易い形をしていることである。このような理由からして、Rubbert および Saaris⁹⁾ によって採られたアプローチは、数値計算上では秀れたものであるということができよう。

本報告は、既に刊行された航空宇宙技術研究所報告 TR-240T の和文版であって、航空宇宙技術研究所文献委員会の要求により作製されたものである。

文 献

- 1) Thwaites, B. (ed.); Incompressible Aerodynamics, Oxford University Press, 1960.
- 2) Royal Aeronautical Society; Method for Predicting the Pressure Distribution on Swept Wings with Subsonic Attached Flow, Transonic Data Memorandum 6312, Dec. 1963
- 3) Multhopp, H.; Methods for Calculating the Lift Distribution of Wings (Subsonic Lifting-surface Theory), A.R.C. R & M No. 2884, 1955.
- 4) Zandbergen, P. J., Labrujere, Th. E. & Wouters, J. Y.; A New Approach to the

- Numerical Solution of the Equation of Subsonic Lifting-surface Theory, NLR-TR-G. 49, Nov. 1967
- 5) Garner, H.C., Hewitt, B.L. & Labrujere, Th. E.; Comparison of Three Methods for the Evaluation of Subsonic Lifting-surface Theory, A.R.C. R & M No. 3597, June 1968.
 - 6) Argyris, J.H.; The Impact of the Digital Computer on Engineering Sciences, The Aeronautical Journal, Vol. 74, No. 1, Jan. 1970.
 - 7) Hess, J.L. & Smith, A.M.O.; Calculation of Non-lifting Potential Flow about Arbitrary Three-dimensional Bodies, Douglas Report No. ES 40622, March 1962.
 - 8) Hess, J.L. & Smith, A.M.O.; Calculation of Potential Flow about Arbitrary Bodies, Progress in Aeronautical Sciences, Vol. 8, 1967.
 - 9) Rubbert, P.E. & Saaris, G.R.; A General Three-dimensional Potential Flow Method Applied to V/STOL Aerodynamics, SAE Paper No. 680304, April 1968.
 - 10) Djojodihardjo, R.H. & Widnall, Sheila E.; A Numerical Method for the Calculation of Nonlinear, Unsteady Lifting Potential Flow Problems, AIAA Journal, Vol. 7, No. 10, Oct. 1969.
 - 11) Woodward, F.A., Tinoco, E.N. & Larsen, J.W.; Analysis and Design of Supersonic Wing-body Combinations Including Flow Properties in the Near Field-Part I-Theory and Application, NASA CR-73106, Aug. 1967.
 - 12) Woodward, F.A.; Analysis and Design of Wing-body Combinations at Subsonic and Supersonic Speeds, Journal of Aircraft, Vol. 5, No. 6, Nov.-Dec. 1968.
 - 13) Carmichael, R.L.; The Use of Finite Element Methods for Predicting the Aerodynamics of Wing-body Combinations, NASA SP-228, 1970.
 - 14) Courant, R. & Hilbert, D.; Methods in Mathematical Physics, Interscience Publishers, Inc., New York, 1962.
 - 15) Kellogg, O.D.; Foundations of Potential Theory, Frederick Unger Publishing Company, New York.
 - 16) Lamb, H.; Hydrodynamics, Cambridge University Press, 1932 (Sixth Ed.)
 - 17) Hedman, S.V.; Vortex Lattice Method for Calculation of Quasi Steady State Loadings on Thin Elastic Wings in Subsonic Flow, FFA Rep. 105, 1966.
 - 18) Margason, R.J. & Lamar, J.E.; Vortex-lattice Fortran Program for Estimating Subsonic Aerodynamic Characteristics of Complex Planforms, NASA TN D-6142, Feb. 1971.
 - 19) Giesing, J. P.; Nonlinear Two-dimensional Unsteady Potential Flow with Lift, Journal of Aircraft, Vol. 5, No. 2, March-April 1968.
 - 20) Van Dyke, M.D.; Second-order Subsonic Airfoil Theory Including Edge Effects, NACA Report 1274, 1956.
 - 21) Wilby, P.G.; The Calculation of Sub-critical Pressure Distributions on Symmetric Aerofoils at Zero Incidence, NPL Aero Report 1208, 1967.
 - 22) Labrujere, Th.E., Loeve, W. & Slooff, J.W.; An Approximate Method for the Determination of the Pressure Distribution on Wings in the Lower Critical Speed Range, Paper No. 17 of AGARD C.P. No. 35, 1968.
 - 23) Loeve, W.; Computer Programmes in Use at NLR for the Calculation of Flow Details around Wing-body Combinations at Subsonic Speeds, NLR AT-69-02, 1969.

附録 I. 曲面上における積分

面 S 上の諸量の計算を行なうため、本文 2. の冒頭において直交曲線座標系 (α, β, ν) を導入した。点 P のデカルト座標を (ξ, η, ζ) とし、 (α, β, ν) 系における座標を (α, β, ν) とすると、この両者は或る函数関係で結ばれることになる。このとき、 (α, β, ν) 系の計量テンソルの成分 F, G, H は次式で与えられる。

$$\left. \begin{aligned} F &= \sqrt{\xi_\alpha^2 + \eta_\alpha^2 + \zeta_\alpha^2} \\ G &= \sqrt{\xi_\beta^2 + \eta_\beta^2 + \zeta_\beta^2} \\ H &= \sqrt{\xi_\nu^2 + \eta_\nu^2 + \zeta_\nu^2} \end{aligned} \right\} \quad (\text{A. I. 1})$$

ここで添字 α 等は、その量に関する微分を示す。

例えば

$$\xi_\alpha = \frac{\partial \xi}{\partial \alpha}$$

などである。

さて

$$\begin{pmatrix} \alpha_\xi & \beta_\xi & \nu_\xi \\ \alpha_\eta & \beta_\eta & \nu_\eta \\ \alpha_\zeta & \beta_\zeta & \nu_\zeta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\xi_\alpha}{F^2} & \frac{\xi_\beta}{G^2} & \frac{\xi_\nu}{H^2} \\ \frac{\eta_\alpha}{F^2} & \frac{\eta_\beta}{G^2} & \frac{\eta_\nu}{H^2} \\ \frac{\zeta_\alpha}{F^2} & \frac{\zeta_\beta}{G^2} & \frac{\zeta_\nu}{H^2} \end{pmatrix} \quad (\text{A. I. 2})$$

であるから

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \xi} &= \frac{\xi_\alpha}{F^2} \frac{\partial}{\partial \alpha} + \frac{\xi_\beta}{G^2} \frac{\partial}{\partial \beta} + \frac{\xi_\nu}{H^2} \frac{\partial}{\partial \nu} \\ \frac{\partial}{\partial \eta} &= \frac{\eta_\alpha}{F^2} \frac{\partial}{\partial \alpha} + \frac{\eta_\beta}{G^2} \frac{\partial}{\partial \beta} + \frac{\eta_\nu}{H^2} \frac{\partial}{\partial \nu} \\ \frac{\partial}{\partial \zeta} &= \frac{\zeta_\alpha}{F^2} \frac{\partial}{\partial \alpha} + \frac{\zeta_\beta}{G^2} \frac{\partial}{\partial \beta} + \frac{\zeta_\nu}{H^2} \frac{\partial}{\partial \nu} \end{aligned} \right\} \quad (\text{A. I. 3})$$

を得る。

$(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, $(\beta_1, \beta_2, \beta_3)$ 及び (l, m, n) をそれぞれ α 軸, β 軸および ν 軸方向の単位ベクトルとすると,

$$\left. \begin{aligned} (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) &= \frac{1}{F} (\xi_\alpha, \eta_\alpha, \zeta_\alpha) \\ (\beta_1, \beta_2, \beta_3) &= \frac{1}{G} (\xi_\beta, \eta_\beta, \zeta_\beta) \\ (l, m, n) &= \frac{1}{H} (\xi_\nu, \eta_\nu, \zeta_\nu) \end{aligned} \right\} \quad (\text{A. I. 4})$$

であり, また, ds_α , ds_β および ds_ν をそれぞれの軸に沿う弧長要素とすると,

$$\left. \begin{aligned} ds_\alpha &= F d\alpha \\ ds_\beta &= G d\beta \\ ds_\nu &= H d\nu \end{aligned} \right\} \quad (\text{A. I. 5})$$

である。

(A. I. 3), (A. I. 4) および (A. I. 5) から次の表現を得る。

$$\left. \begin{aligned} m \frac{\partial}{\partial \zeta} - n \frac{\partial}{\partial \eta} &= \beta_1 \frac{\partial}{\partial s_\alpha} - \alpha_1 \frac{\partial}{\partial s_\beta} \\ n \frac{\partial}{\partial \xi} - l \frac{\partial}{\partial \zeta} &= \beta_2 \frac{\partial}{\partial s_\alpha} - \alpha_2 \frac{\partial}{\partial s_\beta} \\ l \frac{\partial}{\partial \eta} - m \frac{\partial}{\partial \xi} &= \beta_3 \frac{\partial}{\partial s_\alpha} - \alpha_3 \frac{\partial}{\partial s_\beta} \end{aligned} \right\} \quad (\text{A. I. 6})$$

S の要素 dS は

$$\begin{aligned} dS &= |(\xi_\alpha, \eta_\alpha, \zeta_\alpha) d\alpha \times (\xi_\beta, \eta_\beta, \zeta_\beta) d\beta| \\ &= F \cdot G d\alpha d\beta \end{aligned}$$

で与えられる。

さて

$$\begin{aligned} \chi_1 &= \int_S \mu \left(n \frac{\partial}{\partial \eta} - m \frac{\partial}{\partial \zeta} \right) \left(\frac{1}{r} \right) dS \\ \chi_2 &= \int_S \mu \left(l \frac{\partial}{\partial \zeta} - n \frac{\partial}{\partial \xi} \right) \left(\frac{1}{r} \right) dS \\ \chi_3 &= \int_S \mu \left(m \frac{\partial}{\partial \xi} - l \frac{\partial}{\partial \eta} \right) \left(\frac{1}{r} \right) dS \end{aligned}$$

とおく。

まず χ_1 について考える。積分を, 面 S 内の座標 (α, β) 系で表現し, 部分積分を行なうことによって, これは次のように変形される。

$$\begin{aligned} \chi_1 &= \int_S \mu \left(\alpha_1 \frac{\partial}{\partial s_\beta} - \beta_1 \frac{\partial}{\partial s_\alpha} \right) \left(\frac{1}{r} \right) F \cdot G d\alpha d\beta \\ &= \int_S \mu \left(F \alpha_1 \frac{\partial}{\partial \beta} - G \beta_1 \frac{\partial}{\partial \alpha} \right) \left(\frac{1}{r} \right) d\alpha d\beta \\ &= \int_S \mu \left(\xi_\alpha \frac{\partial}{\partial \beta} - \xi_\beta \frac{\partial}{\partial \alpha} \right) \left(\frac{1}{r} \right) d\alpha d\beta \\ &= \int_S \frac{1}{r} \left(\xi_\beta \frac{\partial \mu}{\partial \alpha} - \xi_\alpha \frac{\partial \mu}{\partial \beta} \right) d\alpha d\beta \\ &\quad - \oint_{\partial S} \frac{\mu}{r} (\xi_\alpha d\alpha + \xi_\beta d\beta) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \int_S \frac{1}{r} \left(\beta_1 \frac{\partial \mu}{\partial s_\alpha} - \alpha_1 \frac{\partial \mu}{\partial s_\beta} \right) dS \\ &\quad - \oint_{\partial S} \frac{\mu}{r} (\alpha_1 ds_\alpha + \beta_1 ds_\beta). \end{aligned}$$

記号 $\oint_{\partial S}$ は, S の境界 ∂S に沿う線積分が, 常に S を左手に見るような向きに ∂S を一周して求められるものであることを示す。

単位ベクトル (α_1, β_1, l) は ξ 軸に沿っており, またベクトル $(ds_\alpha, ds_\beta, 0)$ は, 境界 ∂S に沿う弧長要素 ds の (α, β, ν) 系における表現であるから, その ξ 軸成分を $d\xi$ とすると,

$$\begin{aligned} \alpha_1 ds_\alpha + \beta_1 ds_\beta &= (\alpha_1, \beta_1, l) \cdot (ds_\alpha, ds_\beta, 0) \\ &= d\xi \end{aligned}$$

であることがわかる。

χ_2 および χ_3 についても同様な変形が可能であり, 結局, 次の表現に到達する。

$$\begin{aligned} \chi &= \left(\beta_1 \frac{\partial \mu}{\partial s_\alpha} - \alpha_1 \frac{\partial \mu}{\partial s_\beta}, \right. \\ &\quad \left. \beta_2 \frac{\partial \mu}{\partial s_\alpha} - \alpha_2 \frac{\partial \mu}{\partial s_\beta}, \beta_3 \frac{\partial \mu}{\partial s_\alpha} - \alpha_3 \frac{\partial \mu}{\partial s_\beta} \right) \\ ds &= (d\xi, d\eta, d\zeta) \end{aligned}$$

とおくと,

$$(\chi_1, \chi_2, \chi_3) = \int_S \frac{\lambda}{r} dS - \oint_{\partial S} \frac{\mu}{r} ds.$$

附録 II. 後縁の近傍における翼の形状の単純化

この附録では, 本文において屢々行なった $4S$ 上の積分の $4S_0$ 上の積分による置換えが, 事実適当な仮定の下で成立することを示す。

内容を次の三つに分ける。

- (1) 後縁上の一点 T_0 の近傍において S 上の曲線座標系の具体的な一つを構成する。
- (2) 点 P が $4S$ の外から T_0 に近づくとき, $\phi_S(P)$, $\phi_D(P)$ およびそれらの微係数に現われる特異性を計算するのに, $4S$ 上の積分を $4S_0$ 上の積分で置換えて差支えないこと。
- (3) P が $4S$ の上にあって T_0 に近づくとき, $4S$ 上の積分と $4S_0$ 上のそれとの差は連続であることを示す。

以下の議論は数学的厳密さを目指したものではなく, 単に, 上記の事柄を証明するための一つの考え方を示すに過ぎない。

- (1) 翼面 S 上における直交曲線座標と, 後縁上の一点 T_0 の近傍 $4S$ におけるその表現

$Q(\xi, \eta, \zeta)$ を S の一点とし、これが S 上の座標 (s, t) によって与えられるものとする:

$$\xi = \xi(s, t), \quad \eta = \eta(s, t), \quad \zeta = \zeta(s, t).$$

まず, s および t の函数で

$$Q_u \cdot Q_v = 0$$

となるような $u = u(s, t)$, $v = v(s, t)$ を見出すことを考える。ここに

$$Q_u = (\xi_u, \eta_u, \zeta_u)$$

$$Q_v = (\xi_v, \eta_v, \zeta_v)$$

である。

$$Q_u = Q_s \cdot s_u + Q_t \cdot t_u$$

$$Q_v = Q_s \cdot s_v + Q_t \cdot t_v$$

であるから

$$Q_u \cdot Q_v = (Q_s \cdot Q_s) s_u s_v + (Q_s \cdot Q_t) (s_u t_v + s_v t_u) + (Q_t \cdot Q_t) t_u t_v$$

であり、これは

$$J^2 Q_u \cdot Q_v = (Q_s \cdot Q_t) (u_s v_t + u_t v_s) - (Q_s \cdot Q_s) u_t v_t - (Q_t \cdot Q_t) u_s v_s$$

と書ける。ここに

$$J = u_s v_t - u_t v_s.$$

したがって, $Q_u \cdot Q_v = 0$ は

$$(Q_s \cdot Q_t) (u_s v_t + u_t v_s) = (Q_s \cdot Q_s) u_t v_t + (Q_t \cdot Q_t) u_s v_s \quad (\text{A. II. 1})$$

を意味する。

当然のことながら, 二つの変数 $u(s, t)$ および $v(s, t)$ を一つの条件 $Q_u \cdot Q_v = 0$ から定めることはできないので, 例えば, u または v を任意に定め, (A. II. 1) を残る一方について解くことができる。

ここでは v を

$$v(s, t) = t \quad (\text{A. II. 2})$$

と定めることにする。 u はそのとき

$$(Q_s \cdot Q_t) u_s = (Q_s \cdot Q_s) u_t \quad (\text{A. II. 3})$$

の解として与えられるが, 函数 $f(s, t)$ を, $f(s, t) = \text{const}$ が微分方程式

$$\frac{ds}{dt} = - \frac{(Q_s \cdot Q_t)}{(Q_s \cdot Q_s)} \quad (\text{A. II. 4})$$

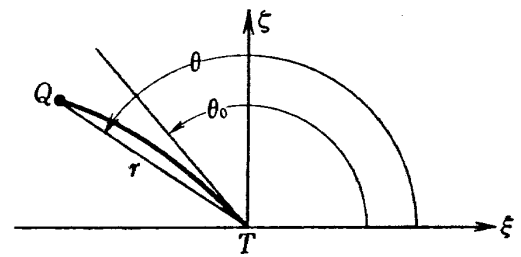
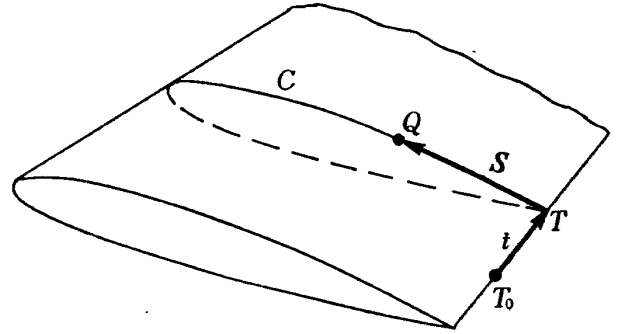
の第一積分であるようなものとするとき,

$$u = F(f(s, t)) \quad (\text{A. II. 5})$$

と書くことができる。 F は任意の函数である。

さて点 Q が, 後縁上の一点 T_0 の近傍 AS にあるものとし, 後縁は AS 内で直線であると仮定する。 Q を通り後縁に垂直な平面 N を考え, C を N と翼面 S との交線, T を N と後縁との交点, s を C に沿って計った T から Q までの距離, r を T と Q との間の直線距離, t を T と T_0 との距離, とする。

また, θ および θ_0 を, それぞれ直線 QT および C の T における切線が ξ 軸となす角度とする。 T_0 を原点にとって,



$$\left. \begin{aligned} \xi &= r(s, t) \cos \theta(s, t) \\ \eta &= t \\ \zeta &= r(s, t) \sin \theta(s, t) \end{aligned} \right\} \quad (\text{A. II. 6})$$

と表現すると,

$$Q_s \cdot Q_t = r_s r_t + r^2 \theta_s \theta_t$$

$$Q_s \cdot Q_s = r_s^2 + (r \theta_s)^2$$

となる。

今, 翼面 S は, AS において ξ_s および ζ_s が Hölder 連続であり, かつ後縁に近づくにつれて ξ_s および ζ_s が s^β , $\beta > 0$ の程度で小さくなっていくようなものであると仮定する。 AS は, その上での s および t の変化が同程度であるようなものとする, ξ および ζ の展開

$$\xi = (\xi_s)_{T_0} \cdot s + (\xi_t)_{T_0} \cdot t + O(s^{1+\alpha})$$

$$\zeta = (\zeta_s)_{T_0} \cdot s + (\zeta_t)_{T_0} \cdot t + O(s^{1+\alpha})$$

から, 次の表現が得られる。

$$\left. \begin{aligned} \xi &= s \cos \theta_0 + O(s^{1+\alpha}) \\ \zeta &= s \sin \theta_0 + O(s^{1+\alpha}) \end{aligned} \right\} \quad (\text{A. II. 7})$$

ここに α は Hölder 連続の条件における指数で或る正の定数, また, 記号 $O(s^{1+\alpha})$ は, s が零に近づくとき, 高々 $s^{1+\alpha}$ の程度で小さくなっていく項を示すものである。

(A. II. 6) と (A. II. 7) とを組合せて

$$\left. \begin{aligned} r_s &= \frac{\partial}{\partial s} \sqrt{\xi^2 + \zeta^2} = 1 + O(s^\alpha) \\ r \theta_s &= (\xi \zeta_s - \xi_s \zeta) / r = O(s^\alpha) \end{aligned} \right\} \quad (\text{A. II. 8})$$

を得る。

ここで

$$u=r+\varepsilon$$

とおくと, u は (A. II. 3) を満すから

$$\varepsilon_t - \frac{(Q_s \cdot Q_t)}{(Q_s \cdot Q_s)} \varepsilon_s = \frac{(r\theta_s)[r_s(r\theta_t) - r_t(r\theta_s)]}{r_s^2 + (r\theta_s)^2}$$

となるが, 左辺は, (A. II. 4) で与えられる曲線 $f(s, t) = \text{const}$ に沿う微分 $d\varepsilon/dt$ であるから

$$\varepsilon = \int_{f(s, t)=C} \frac{(r\theta_s)[r_s(r\theta_t) - r_t(r\theta_s)]}{r_s^2 + (r\theta_s)^2} dt$$

となる。これを評価するため, (A. II. 6) によって

$$r(r_s\theta_t - r_t\theta_s) = \xi_s\zeta_t - \xi_t\zeta_s$$

および仮定によって

$$\xi_s\zeta_t - \xi_t\zeta_s = 0(s^\beta)$$

であることを用いると, $t \sim 0(s)$ であることにより, ΔS の上で

$$\varepsilon \sim \int 0(s^{\alpha+\beta}) dt \sim 0(s^{1+\alpha+\beta})$$

であることがわかる。

(A. II. 8) により $r = s + 0(s^{1+\alpha})$ であるから, 結局次の評価に導かれた。

$$\begin{aligned} u &= r + 0(s^{1+\alpha+\beta}) \\ &= s + 0(s^{1+\alpha}) \end{aligned} \quad (\text{A. II. 9})$$

また, これと (A. II. 2) および (A. II. 7) により

$$\left. \begin{aligned} \xi &= u \cos \theta_0 + 0(u^{1+\alpha}) \\ \eta &= v \\ \zeta &= u \sin \theta_0 + 0(u^{1+\alpha}) \end{aligned} \right\}. \quad (\text{A. II. 10})$$

(u, v) は S 上の直交座標であるから, (A. II. 10) は一つの直交曲線座標系における ΔS の漸近表示を与えるものである。

最後に, 後の便宜のため, 点 $P(x, y, z)$ と点 $Q(\xi, \eta, \zeta)$ との距離 r の表現を与えておく。

$$x = D \cdot \cos \varphi, \quad z = D \cdot \sin \varphi \quad (\text{A. II. 11})$$

とおき (A. II. 10) を用いると

$$\begin{aligned} r^2 &= [D \cos \varphi - u \cos \theta_0 + 0(u^{1+\alpha})]^2 + (y-v)^2 \\ &\quad + [D \sin \varphi - u \sin \theta_0 + 0(u^{1+\alpha})]^2 \\ &= r_0^2 + 2[A(D \cos \varphi - u \cos \theta_0) \\ &\quad + B(D \sin \varphi - u \sin \theta_0)] \cdot 0(u^{1+\alpha}) \end{aligned} \quad (\text{A. II. 12})$$

ただし A および B は或る定数で

$$r_0^2 = u^2 - 2uD \cdot \cos(\varphi - \theta_0) + D^2 + (y-v)^2 \quad (\text{A. II. 13})$$

である。

$$\begin{aligned} [u \sin(\varphi - \theta_0)]^2 &\leq [u \sin(\varphi - \theta_0)]^2 \\ &\quad + [D - u \cos(\varphi - \theta_0)]^2 + (y-v)^2 = r_0^2 \end{aligned} \quad (\text{A. II. 14})$$

および

$$\begin{aligned} |A(D \cos \varphi - u \cos \theta_0) + B(D \sin \varphi - u \sin \theta_0)| \\ \leq \sqrt{A^2 + B^2} r_0 \end{aligned}$$

であるから,

$$\sin(\varphi - \theta_0) \neq 0 \quad (\text{A. II. 15})$$

のとき

$$r = r_0[1 + 0(u^\alpha)] \quad (\text{A. II. 16})$$

となるが, ΔS を十分小さくすることにより $1 + 0(u^\alpha)$ が常に正であるようにし得るから, 或る定数 κ によって次の評価が成立することになる。

$$\kappa \cdot r_0 \leq r. \quad (\text{A. II. 17})$$

(2) 後縁上の一点 T_0 における ϕ_D 等の特異性。

点 $P(x, y, z)$ が T_0 に近づくとき, 量 $A(x, y, z)$ に現われる特異性を $R(A)$ で表わすことにする。

本節の目的は, 次の関係が成立することを示すことにある。

$$R\left[\int_{\Delta S} \frac{\sigma}{r} dS\right] = R\left[\sigma(T_0) \int_{\Delta S_0} \frac{1}{r} dS\right] \quad (\text{A. II. 18})$$

$$R\left[\text{grad}\left(\int_{\Delta S} \frac{\sigma}{r} dS\right)\right] = R\left[\sigma(T_0) \text{grad}\left(\int_{\Delta S_0} \frac{1}{r} dS\right)\right] \quad (\text{A. II. 19})$$

$$R\left[\int_{\Delta S} \mu \frac{\partial}{\partial \nu} \left(\frac{1}{r}\right) dS\right] = R\left[\mu(T_0) \int_{\Delta S_0} \frac{\partial}{\partial \nu} \left(\frac{1}{r}\right) dS\right] \quad (\text{A. II. 20})$$

および

$$\begin{aligned} R\left[\text{grad}\left\{\int_{\Delta S} \mu \frac{\partial}{\partial \nu} \left(\frac{1}{r}\right) dS\right\}\right] \\ = R\left[\text{rot}\left\{\lambda(T_0) \int_{\Delta S_0} \frac{1}{r} dS\right\} \right. \\ \left. - \text{rot}\left\{\mu(T_0) \oint_{\partial \Delta S_0} \frac{1}{r} ds\right\}\right]. \end{aligned} \quad (\text{A. II. 21})$$

ΔS が, 前節に導入した座標 u, v によって,

$$0 < u < \varepsilon, \quad -\varepsilon < v < \varepsilon$$

と表わされるものとし, また ΔS_0 は

$$0 < u < \varepsilon, \quad -\varepsilon < v < \varepsilon$$

で表わされるものとする。ここに (u, v) は, ΔS_0 上の一点 $Q_0(\xi_0, \eta_0, \zeta_0)$ が

$$\left. \begin{aligned} \xi_0 &= u \cos \theta_0 \\ \eta_0 &= v \\ \zeta_0 &= u \sin \theta_0 \end{aligned} \right\}$$

で与えられるようなものとする。

本節では, $P(x, y, z)$ は ΔS および ΔS_0 の外にあるものとし, また, 一般性を失うことなく, $y=0$ とする。 (x, z) が (A. II. 11) で与えられるものとする

と、上記仮定から $\varphi \neq \theta_0$ である。

$$u = \rho \sin \omega, \quad v = \rho \cos \omega, \quad 0 < \omega < \pi$$

とおくと

$$\begin{aligned} r_0^2 &= u^2 + v^2 + D^2 - 2uD \cos(\varphi - \theta_0) \\ &= \rho^2 + D^2 - 2\rho D \sin \omega \cos(\varphi - \theta_0) \\ &= [\rho - D \sin \omega \cos(\varphi - \theta_0)]^2 \\ &\quad + D^2 [1 - \sin^2 \omega \cos^2(\varphi - \theta_0)]. \end{aligned}$$

$\varphi \neq \theta_0$ である限り、二つの定数 $C_0 > 0$, $0 < \phi < \pi$ が存在して

$$C_0 [(\rho - D \cos \phi)^2 + (D \sin \phi)^2] < r_0^2$$

であり、したがってまた、(A. II. 17) から

$$C_1 [(\rho - D \cos \phi)^2 + (D \sin \phi)^2] < r^2$$

が成立することは容易にわかる。

さて

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_{\Delta S} \frac{1}{r^n} dS - \int_{\Delta S_0} \frac{1}{r^n} dS \\ I_1 &= \int_{\Delta S} \frac{\lambda(u, v) - \lambda(0, 0)}{r^n} dS \end{aligned}$$

とおき

$$\begin{aligned} I &= \int_{\Delta S} \frac{\lambda(u, v)}{r^n} dS - \int_{\Delta S_0} \frac{\lambda(0, 0)}{r^n} dS \\ &= I_1 + \lambda(0, 0) I_2 \end{aligned}$$

なるものを考える。

密度 $\lambda(u, v)$ は、 ΔS で Hölder 連続 (指数 β) であることを仮定すると、 K を正の定数として

$$\begin{aligned} |I_1| &\leq \int_0^{\sqrt{2}\epsilon} du \int_{-\epsilon}^{\epsilon} dv \frac{K \sqrt{u^2 + v^2}^\beta}{r^n} \\ &\leq \frac{K}{C_1'} \int_0^{\sqrt{2}\epsilon} \rho d\rho \int_0^{\pi} d\omega \frac{\rho^\beta}{\sqrt{(\rho - D \cos \phi)^2 + (D \sin \phi)^2}^{2n}}. \end{aligned}$$

この最後の不等関係が成立することは、被積分関数が非負であり、かつ (ρ, ω) における積分領域が (u, v) におけるそれよりも広いことからして明らかである。

右辺の積分は、

$$\begin{aligned} \tan \chi &= \frac{\rho - D \cos \phi}{D \sin \phi} \\ \chi_0 &= \tan^{-1} \left(-\frac{\cos \phi}{\sin \phi} \right) = \phi - \frac{\pi}{2} \\ \chi_1 &= \tan^{-1} \left(\frac{\sqrt{2}\epsilon - D \cos \phi}{D \sin \phi} \right) \end{aligned}$$

とおいて

$$\begin{aligned} &\int_0^{\sqrt{2}\epsilon} \rho d\rho \int_0^{\pi} d\omega \frac{\rho^\beta}{\sqrt{(\rho - D \cos \phi)^2 + (D \sin \phi)^2}^{2n}} \\ &= \pi \frac{D^{2+\beta-n}}{(\sin \phi)^{n-1}} \int_{\chi_0}^{\chi_1} [\cos(\chi - \phi)]^{1+\beta} (\cos \chi)^{n-(3+\beta)} d\chi \end{aligned}$$

となり、 $-\pi/2 < \chi_0, \chi_1 < \pi/2$ であるから、この右辺の積分は、如何なる D に対しても零となることとな

い。したがって $2+\beta < n$ なる n に対しては、 $D \rightarrow 0$ のとき $|I_1|$ は発散する可能性をもつことが見てとれる。

考察を $n < 2+\beta$ なる n に限ることにして、

$$\begin{aligned} &(\rho - D \cos \phi)^2 + (D \sin \phi)^2 \\ &= (\rho \sin \phi)^2 + (D - \rho \cos \phi)^2 > (\rho \sin \phi)^2 \end{aligned}$$

であるから

$$\begin{aligned} &\int_0^{\sqrt{2}\epsilon} \frac{\rho^{1+\beta} d\rho}{\sqrt{(\rho - D \cos \phi)^2 + (D \sin \phi)^2}^{2n}} \\ &< \frac{1}{(\sin \phi)^n} \int_0^{\sqrt{2}\epsilon} \rho^{1+\beta-n} d\rho \\ &= \frac{1}{(\sin \phi)^n} \cdot \frac{1}{2+\beta-n} (\sqrt{2}\epsilon)^{2+\beta-n} \end{aligned}$$

を得、

したがって $\varphi \neq \theta_0$ かつ $n < 2+\beta$ のとき

$$|I_1| < C \cdot \epsilon^{2+\beta-n}$$

となり、同じ仮定の下で、

$$R \left[\int_{\Delta S} \frac{\lambda(u, v)}{r^n} dS \right] = R \left[\int_{\Delta S} \frac{\lambda(0, 0)}{r^n} dS \right]$$

の成立することがわかる。

次に I_2 であるが、 I_1 についての結果から、 $n=1$ および $n=2$ の場合のみについて考察する。

$n=1$ の場合、

$$\left| \int_{\Delta S} \frac{dS}{r} \right| < \frac{\pi}{\sqrt{C_1}} \int_0^{\sqrt{2}\epsilon} \frac{\rho d\rho}{\sqrt{(\rho - D \cos \phi)^2 + (D \sin \phi)^2}} \quad (\text{A. II. 22})$$

であって右辺の被積分関数は、 $D \rightarrow 0$ のとき積分領域内で一様に連続であるから、 I_2 に特異性は生じない。

一般に、

$$\begin{aligned} &\int_{\Delta S_0} \frac{1}{r^n} dS \\ &= \int_0^{\sqrt{2}\epsilon} du \int_{-\epsilon}^{\epsilon} dv \frac{1}{\sqrt{u^2 + v^2 + D^2 - 2uD \cos(\varphi - \theta_0)}^n} \end{aligned}$$

の右辺を

$$\int_0^{\sqrt{2}\epsilon} du \int_{-\epsilon}^{\epsilon} dv \frac{1}{\sqrt{u^2 + v^2 + D^2 - 2uD \cos(\varphi - \theta_0)}^n}$$

と書いても構わないが、これは、 ΔS_0 上の積分を、 ΔS 上における同じ変数 (u, v) で書くことができることを意味する。

さて $n=2$ の場合を考えるため、(A. II. 12) および (A. II. 13) で与えられる r および r_0 (ただし $y=0$ とおく) を用い、

$$E = r^2 - r_0^2$$

とおく。 r^2 は

$$r^2 = r_0^2 + D \cdot 0(u^{1+\alpha}) + 0(u^{2+\alpha})$$

と書くことができるから、(A. II. 17) によって

$$|E| \leq \frac{A \cdot D \cdot u^{1+\alpha} + B \cdot u^{2+\alpha}}{\kappa [(u-Dc)^2 + (Ds)^2 + v^2]^2}$$

を得る。ただし、 A および B は正の定数、 c および s は、

$$c = \cos(\varphi - \theta_0), \quad s = |\sin(\varphi - \theta_0)| > 0$$

である。

I_2 はしたがって

$$|I_2| < \frac{A}{\kappa} \int_0^s du \int_{-c}^c dv \frac{D \cdot u^{1+\alpha}}{[(u-Dc)^2 + (Ds)^2 + v^2]^2} \\ + \frac{B}{\kappa} \int_0^s du \int_{-c}^c dv \frac{u^{2+\alpha}}{[(u-Dc)^2 + (Ds)^2 + v^2]^2}$$

と抑えられる。

$$s^2(u^2 + v^2) \leq (u-Dc)^2 + (Ds)^2 + v^2$$

であるから、この第二の積分は、

$$\int_0^s du \int_{-c}^c dv \frac{u^{2+\alpha}}{[(u-Dc)^2 + (Ds)^2 + v^2]^2} \\ < \frac{2\pi}{s^2} \int_0^{\sqrt{2}s} \rho^{\alpha-1} d\rho < C\epsilon^\alpha$$

と評価できる。

第一の積分は、 $\alpha > 1$ の場合は第二の積分と D との積の形になり、 $\alpha = 1$ のときは、積分を実行することにより $D \rightarrow 0$ のとき D の程度で小さくなることが示される。 $\alpha < 1$ の場合は、

$$\theta_0 = \tan^{-1}\left(-\frac{c}{s}\right), \quad \theta_1 = \tan^{-1}\left(\frac{\epsilon - Dc}{Ds}\right), \\ \phi_0 = \tan^{-1}\left(\frac{s}{c}\right), \quad \delta = \frac{Ds}{\epsilon}$$

において

$$\int_0^s du \int_{-c}^c dv \frac{Du^{1+\alpha}}{[(u-Dc)^2 + (Ds)^2 + v^2]^2} \\ < \frac{D^\alpha}{s^2} \int_{\theta_0}^{\theta_1} [\cos(\theta - \phi_0)]^{1+\alpha} \left[\frac{\delta \cos^{1-\alpha}\theta}{\delta^2 + \cos^2\theta} \right. \\ \left. + \frac{\pi}{2} (\cos\theta)^{-\alpha} \right] d\theta$$

となり、 $D \rightarrow 0$ のとき D^α と同じ程度で小さくなることがわかる。

このように、正数 α の値如何にかかわらず、第一の積分について

$$\lim_{D \rightarrow 0} \left\{ D \int_0^s du \int_{-c}^c dv \frac{u^{1+\alpha}}{[(u-Dc)^2 + (Ds)^2 + v^2]^2} \right\} = 0$$

が成立する。したがって、第二の積分に対する評価と合わせて

$$|I_2| < C\epsilon^\alpha$$

を得、 I_1 に対する結果と合わせて、 $n=1$ および $n=2$ に対し、

$$R \left[\int_{\Delta S} \frac{\lambda(u, v)}{r^n} dS \right] = R \left[\int_{\Delta S_0} \frac{\lambda(0, 0)}{r^n} dS \right] \quad (\text{A. II. 23})$$

であることが示せた。

証明すべき関係式 (A. II. 18), (A. II. 19) および (A. II. 20) における被積分関数は、すべて適当な変換によって、その核が r^{-2} の形のものに帰着できるから、(A. II. 23) によってその正しいことが言える。

(A. II. 21) については更に線積分について

$$R \left[\text{rot} \oint_{\partial \Delta S} \frac{\mu}{r} ds \right] = R \left[\text{rot} \left\{ \mu(T_0) \oint_{\partial \Delta S_0} \frac{1}{r} ds \right\} \right]$$

の成立することを示さねばならない。

後縁上の一点 T_0 に近づくときこれらの線積分に現れる特異性は、 $\partial \Delta S$ あるいは $\partial \Delta S_0$ の一部たる T_0 を含む後縁に沿う積分に基づくものである。後縁は直線であると仮定したから、 $\partial \Delta S$ および $\partial \Delta S_0$ におけるこの部分の積分路は一致し、また、本文中において示したように、線積分において密度 μ は定数であるから、被積分関数も一致する。したがって上式が成立するのは明らかである。

(3) 後縁における ϕ_S および ϕ_D の連続性

この節では、

$$I_S(P) = \int_{\Delta S} \frac{\sigma}{r} dS - \sigma(T_0) \int_{\Delta S_0} \frac{1}{r} dS$$

$$I_D(P) = \int_{\Delta S} \mu \frac{\partial}{\partial \nu} \left(\frac{1}{r} \right) dS - \mu(T_0) \int_{\Delta S_0} \frac{\partial}{\partial \nu} \left(\frac{1}{r} \right) dS$$

が、点 P が ΔS 上にあって後縁上の一点 T_0 に近づくとき、それぞれ ϕ_S および ϕ_D に現われ得る不連続性の原因ではないことを示す。このためには $|I_S(p)|$ および $|I_D(p)|$ が ΔS において一様に有界で、かつ ΔS およびそれに対応して ΔS_0 が T_0 に収束するとき零に収束することを示せば十分である。

(ξ_p, η_p, ζ_p) を例えば ΔS_U の上にある p の座標とすると、(A. II. 10) から、 ΔS_U に属する点 $Q(\xi, \eta, \zeta)$ について

$$\xi - \xi_p = (u - u_p) \cos \theta_0 + 0(\rho_p^{1+\alpha})$$

$$\eta - \eta_p = v - v_p$$

$$\zeta - \zeta_p = (u - u_p) \sin \theta_0 + 0(\rho_p^{1+\alpha})$$

を得、したがって ΔS_U 上の積分について

$$r^2 = (\xi_p - \xi)^2 + (\eta_p - \eta)^2 + (\zeta_p - \zeta)^2 \\ = \rho_p^2 [1 + 0(\rho_p^\alpha)]$$

を得る。ここに

$$\rho_p^2 = (u - u_p)^2 + (v - v_p)^2.$$

まず始めに I_S について考える。

密度 σ が有界ならば、積分 $\int_{AS} (\sigma/r) dS$ それ自身が有界であることは、次のようにして示せる。

$$J = \int_{AS} \frac{dS}{r} = \int_{AS_U} \frac{dS}{r} + \int_{AS_L} \frac{dS}{r}$$

とおくとき、点 p を原点とする極座標 (ρ_p, ω_p) を採用することによって、第一の積分が有界であることは、

$$0 < \int_{AS_U} \frac{dS}{r} < \int \rho_p d\rho_p \frac{2\pi}{\rho_p [1+O(\rho_p^\alpha)]} \\ < C \int_0^{\sqrt{5}} d\rho_p < C \cdot \epsilon$$

によって示される。 C は正の定数である。

J の第二の積分については、 p は積分領域 AS_L の外にあるから、積分の大きさが ϵ の程度で抑えられることは、(A. II. 22) で既に示されたところである。

J の有界性および $\epsilon \rightarrow 0$ のとき $J \rightarrow 0$ によって、 I_S に関する主張が正しいことは明らかであろう。

次に I_D について考える。

$$J_U(p) = \int_{AS_U} \mu \frac{\partial}{\partial \nu} \left(\frac{1}{r} \right) dS - \mu_U \int_{AS_{0U}} \frac{\partial}{\partial \nu} \left(\frac{1}{r} \right) dS$$

$$J_L(p) = \int_{AS_L} \mu \frac{\partial}{\partial \nu} \left(\frac{1}{r} \right) dS - \mu_L \int_{AS_{0L}} \frac{\partial}{\partial \nu} \left(\frac{1}{r} \right) dS$$

$$J_W(p) = \int_{AS_W} \mu \frac{\partial}{\partial \nu} \left(\frac{1}{r} \right) dS - \mu_W \int_{AS_{0W}} \frac{\partial}{\partial \nu} \left(\frac{1}{r} \right) dS$$

とおくと

$$I_D(p) = J_U(p) + J_L(p) + J_W(p).$$

AS_U 上の点 $Q(\xi, \eta, \zeta)$ に対し

$$\frac{\partial}{\partial \nu} \left(\frac{1}{r} \right) = \frac{l(\xi_P - \xi) + m(\eta_P - \eta) + n(\zeta_P - \zeta)}{r^3}$$

であり、かつ

$$\left. \begin{aligned} l &= -\sin \theta_0 + O(\rho_p^\alpha) \\ m &= O(\rho_p^\alpha) \\ n &= \cos \theta_0 + O(\rho_p^\alpha) \end{aligned} \right\}$$

であるから

$$\frac{\partial}{\partial \nu} \left(\frac{1}{r} \right) = \frac{O(\rho_p^{1+\alpha})}{\rho_p^3 \sqrt{1+O(\rho_p^\alpha)}} = A \rho_p^{\alpha-2}$$

とおくことができる。 A は、 AS_U において有界な ρ_p および ω_p の函数である。

一方、 AS_{0U} については、記号 $O(\rho_p^\alpha)$ で表現されるような項はすべて存在しないから、 AS_{0U} の上で

$$\frac{\partial}{\partial \nu} \left(\frac{1}{r} \right) = 0.$$

したがって、 μ が AS_U 上で有界という条件の下で

$$|J_U(p)| < C \int_0^{\sqrt{5}} \rho_p^{\alpha-1} d\rho_p < C \epsilon^\alpha$$

となる。

次に、 p が AS_U 上にあるときの $J_L(p)$ を評価する。 AS_L の上で

$$\left. \begin{aligned} \xi &= u \cos \theta_L + O(u^{1+\alpha}) \\ \eta &= v \\ \zeta &= u \sin \theta_L + O(u^{1+\alpha}) \end{aligned} \right\}$$

および

$$\left. \begin{aligned} l &= -\sin \theta_L + O(u^\alpha) \\ m &= O(u^\alpha) \\ n &= \cos \theta_L + O(u^\alpha) \end{aligned} \right\}$$

であるから、

$$\left. \begin{aligned} \xi_p &= D \cos \varphi \\ \eta_p &= 0 \\ \zeta_p &= D \sin \varphi \end{aligned} \right\}$$

とおくと、

$$\begin{aligned} r^2 &= (\xi_p - \xi)^2 + (\eta_p - \eta)^2 + (\zeta_p - \zeta)^2 \\ &= u^2 + v^2 + D^2 - 2uD \cos(\varphi - \theta_L) \\ &\quad + D \cdot O(\rho^{1+\alpha}) + O(p^{1+\alpha}) \end{aligned}$$

および

$$\begin{aligned} N &\equiv l(\xi_p - \xi) + m(\eta_p - \eta) + n(\zeta_p - \zeta) \\ &= D[\sin(\varphi - \theta_L) + O(\rho^\alpha)] + O(\rho^{1+\alpha}) \end{aligned}$$

を得る。ここに

$$\rho = u^2 + v^2$$

である。

AS_L 上の (ξ, η, ζ) に対応する AS_{0L} 上の点 (ξ_0, η_0, ζ_0) を考えると、これに対する r, N の表現 r_0, N_0 は記号 $O(\quad)$ で表わされたすべての項を無視することによって得られる。

$$\begin{aligned} r_0^2 &= u^2 + v^2 + D^2 - 2uD \cos(\varphi - \theta_L), \\ N_0 &= D \sin(\varphi - \theta_L). \end{aligned}$$

J_L を次のように書く。

$$\begin{aligned} J_L(p) &= \int_{AS_L} (\mu - \mu_L) \frac{\partial}{\partial \nu} \left(\frac{1}{r} \right) dS \\ &\quad + \mu_L \left\{ \int_{AS_L} \frac{\partial}{\partial \nu} \left(\frac{1}{r} \right) dS - \int_{AS_{0L}} \frac{\partial}{\partial \nu} \left(\frac{1}{r} \right) dS \right\} \end{aligned}$$

μ が AS_L 上で Hölder 連続 (指数 β) であると仮定すると、 p が AS_L の外、すなわち $\varphi \neq \theta_L$ であるから、

$$\left| \int_{\Delta S_L} (\mu - \mu_L) \frac{\partial}{\partial \nu} \left(\frac{1}{r} \right) dS \right| < C_1 \int_0^{\sqrt{2}\epsilon} du \int_{-\epsilon}^{\epsilon} dv \sqrt{u^2 + v^2}^{\beta} \frac{|D[\sin(\varphi - \theta_L) + 0(\rho^\alpha)] + 0(\rho^{1+\alpha})|}{\sqrt{u^2 + v^2 + D^2 - 2uD \cos(\varphi - \theta_L) + D \cdot 0(\rho^{1+\alpha}) + 0(\rho^{2+\alpha})}^{\frac{1}{2}}} \\ < C_2 \int_0^{\sqrt{2}\epsilon} \rho d\rho \frac{\rho^{\beta} [D|\sin(\varphi - \theta_L)| + A\rho^{1+\alpha}]}{\sqrt{(\rho - D \cos \phi)^2 + (D \sin \phi)^2}^{\frac{1}{2}}}$$

を得るが、これは前節で I_2 の評価を行なった場合と同様の方法により、

$$\left| \int_{\Delta S_L} (\mu - \mu_L) \frac{\partial}{\partial \nu} \left(\frac{1}{r} \right) dS \right| < C\epsilon^\alpha \quad (\text{A. II. 24})$$

に導くことができる。

最後に、

$$K = [1 + 0(\rho^\alpha)] [D\{\sin(\varphi - \theta_L) + 0(\rho^\alpha)\} + 0(\rho^{1+\alpha})] - D \sin(\varphi - \theta_L)$$

とおくと、

$$\int_{\Delta S_L} \frac{\partial}{\partial \nu} \left(\frac{1}{r} \right) dS - \int_{\Delta S_0L} \frac{\partial}{\partial \nu} \left(\frac{1}{r} \right) dS = \int_0^{\sqrt{2}\epsilon} du \int_{-\epsilon}^{\epsilon} dv \left[\frac{D\{\sin(\varphi - \theta_L) + 0(\rho^\alpha)\} + 0(\rho^{1+\alpha})}{\sqrt{u^2 + v^2 + D^2 - 2uD \cos(\varphi - \theta_L) + D \cdot 0(\rho^{1+\alpha}) + 0(\rho^{2+\alpha})}^{\frac{1}{2}}} \right. \\ \left. - \frac{D \sin(\varphi - \theta_L)}{\sqrt{u^2 + v^2 + D^2 - 2uD \cos(\varphi - \theta_L)}^{\frac{1}{2}}} \right] \\ = \int_0^{\sqrt{2}\epsilon} du \int_{-\epsilon}^{\epsilon} dv \frac{K}{\sqrt{u^2 + v^2 + D^2 - 2uD \cos(\varphi - \theta_L)}^{\frac{1}{2}}}$$

であるから、前と同様にして

$$\left| \int_{\Delta S_L} \frac{\partial}{\partial \nu} \left(\frac{1}{r} \right) dS - \int_{\Delta S_0L} \frac{\partial}{\partial \nu} \left(\frac{1}{r} \right) dS \right| < C_1 \int_0^{\sqrt{2}\epsilon} du \int_{-\epsilon}^{\epsilon} dv \frac{D \cdot \rho^\alpha + \rho^{1+\alpha}}{\sqrt{u^2 + v^2 + D^2 - 2uD \cos(\varphi - \theta_L)}^{\frac{1}{2}}} < C\epsilon^\alpha \quad (\text{A. II. 25})$$

を得る。

(A. II. 24) と (A. II. 25) から、 $J_L(p)$ が、大きさ ϵ^α の程度で一様に有界であることがわかる。同様にして、 $J_W(p)$ もその大きさが $C \cdot \epsilon^\alpha$ によって抑えられることは容易に証明できるので、 p が ΔS_U の上

にある場合、 $I_D(p)$ についてこの節の冒頭で述べた事柄が確かに成立することが示された。 p が ΔS_L あるいは ΔS_W の上にある場合も、全く同じ筋道によってそのことを証明できるのは明らかである。

TR-234	Green 関数をラプラス方程式に適用した解法による冷却タービン翼の温度分布の計算 A Calculation of Temperature Distribution with applying Green Function to Two-Dimensional Laplace's equation	1971年1月	西村 英明
TR-235	自動着陸予備実験 (1) 電波高度計の性能試験 Preliminary Experiments for Automatic Landing (1) On the Performance Tests of Radio Altimeters	1971年4月	樋口 一雄, 堀川 勇壮 森 幹彦, 小川 鉦一 真 柳光美, 渡辺 顕 名 越孝行
TR-236T	Small-Strain Deformations Superposed on Finite Deformations of Highly Elastic Incompressible Materials, Part I Constitutive Equation	1971年6月	Tastuzo Koga
TR-237	自由飛行模型 FFM-10 による縦の動安定特性の飛しょう実験 Free Flight Tests on Longitudinal Dynamics Characteristics of FFM-10 Model	1971年4月	河崎 俊夫, 塙 武 斎藤 秀夫, 高島 一明 河本 巖
TR-238	リフトジェットエンジン JR 100H の動特性について Dynamic Characteristic of Lift Jet Engine JR 100H	1971年5月	西尾 健二, 遠藤 征紀 杉山 七契, 越沼 威 大畑 敏美
TR-239	昇華アブレーションの直接解法 A Direct Calculation of Sublimating Ablation	1971年6月	久保田弘敏
TR-240T	A Method for the Calculation of Lifting Potential Flow Problems —Part (I) —Theoretical Basis	1971年7月	Masao Ebihara
TR-241	YS-11 A-500/600 型主翼疲れ試験 (1 セーフライフ試験荷重と試験方式) Full-Scale Fatigue Test of YS-11 A-500/600 Turboprop Transport Wing (1 Safe-Life Fatigue Test Loads and Test Method)	1971年7月	竹内 和之, 野原 利雄 朝田 洋雄
TR-242	熱線による3次元平均速度ベクトルとレイノルズ応力の測定 Measurement of Three-Dimensional mean Velocity Vector and Reynolds stress by Single Rotatable Hot-wire	1971年7月	林 良生, 中谷 輝臣

航空宇宙技術研究所報告 243 号

昭和 46 年 7 月 発行

発行所 航空宇宙技術研究所
東京都調布市深大寺町 1880
電話武蔵野三鷹(0422)44-9171(代表) 182
印刷所 株式会社 東京プレス
東京都板橋区桜川 2-27-12
