

UDC 533.69.01:
629.735.45.017.2

航空宇宙技術研究所報告

TECHNICAL REPORT OF NATIONAL AEROSPACE LABORATORY

TR-256

リジッドヘリコプタロータのホバリングにおける
縦揺れ減衰モーメントについて

高 澤 金 吾

1971 年 11 月

航空宇宙技術研究所
NATIONAL AEROSPACE LABORATORY

既 刊 報 告

TR-236T	Small-Strain Deformations Superposed on Finite Deformations of Highly Elastic Incompressible Materials - —Part I Constitutive Equations—	June 1971	Tastuzo KOGA
TR-237	自由飛行模型 FFM-10 による縦の動安定特性の飛しょう実験 Free Flight Tests on Longitudinal Dynamics Characteristic of FFM-10 Model	1971年 4月	河崎俊夫, 塙武敏 斎藤秀夫, 高島一明 河本 巖
TR-238	リフトジェットエンジン JR 100H の動特性について Dynamic Characteristic of Lift Jet Engine JR 100H	1971年 5月	西尾健二, 杉山七契 大畑敏美, 遠藤征紀 越沼 威
TR-239	昇華アブレーションの直接解法 A Direct Calculation of Sublimating Ablation	1971年 6月	久保田弘敏
TR-240T	A Method for the Calculation of Lifting Potential Flow Problems —Part I Theoretical Basis—	July 1971	Masao EBIHARA
TR-241	YS-11A-500/600 型主翼疲れ試験 (I セーフライフ試験荷重と試験方式) Full-Scale Fatigue Test of YS-11A-500/600 Turboprop Transport Wing (I Safe-Lie Fatigue Test Loads and Test Method)	1971年 7月	竹内和之, 野原利雄 朝田洋雄
TR-242	熱線による3次元平均速度ベクトルとレイノルズ応力の測定 Measurement of Three-Dimensional Mean Velocity Vector and Reynolds Stress by Single Rotatable Hot-Wire	1971年 7月	林 良生, 中谷輝臣
TR-243	揚力をもつ物体のまわりのポテンシャル流れの計算法 I その理論的基礎 A Method for the Calculation of Lifting Potential Flow Problems —Part 1 Theoretical Basis—	1971年 7月	海老原正夫
TR-244	超音速風洞における動安定微係数の測定 Measurements of Dynamic Stability Derivatives in Supersonic Blowdown Wind Tunnel	1971年 7月	高島一明, 榑原盛三 関根 英夫
TR-245	ヘリコプタ高度・速度線図および臨界決定点の解析的推定法 An Analytical Method to Predict Height-Velocity Diagram Critical Decision Point of Rotorcraft	1971年 8月	古茂田真幸
TR-246	梁の大変形問題の解析について On Analysis of Large Deformation Problems of Beam	1971年11月	泉 日出夫
TR-247	任意物体のまわりの自由流線理論 On the Theory of Free Streamlines Past an Arbitrary Shape	1971年 9月	高橋 俣
TR-248	亜音速流中における二次元翼上の圧力分布の粘性効果を考慮に入れた計算法のプログラム A Description of the Ideas Underlying a Computer Programme for Predicting the Aerofoil Pressure Distributions in Subcritical Viscous Flows	1971年11月	海老原正夫, 石田洋治 小此木時雄

目 次

座 標	1
記 号	2
緒 言	5
第1章 ピッチダンピングの実験的研究	8
1節 2枚ブレードのロータについての実験	9
2節 3枚ブレードのロータについての実験	11
3節 ピッチダンピングの空力弾性学的解析	16
4節 ロータの煙実験	28
第2章 Leowy の理論を応用したピッチダンピングの解析	34
1節 Leowy の理論の紹介	34
2節 ピッチダンピングの解析	37
第3章 Ashley et. al. の理論を応用したピッチダンピングの解析	39
1節 Ashley et. al. の理論の紹介	40
2節 非定常理論による解析	48
3節 ブレードが定常な運動をしている場合の Ashley et. al. の理論の紹介と応用	57
第4章 渦とブレードの距離の変動を考慮したピッチダンピングの解析	58
1節 ピッチダンピングを解析する目的の空気力計算法が備えるべき性質について	58
2節 回転翼についての定常翼理論	59
3節 ピッチダンピングの解析	62
4節 ピッチダンピングの近似的な一計算法	66
結 言	69
あとがき	70
参考文献	70
付 録 A	71
付 録 B	72
付 録 C	73
付 録 D	75
付 録 E	75
付 録 F	78
付 録 G	79
付 録 H	80

リジッドヘリコプタロータのホバリングに於ける 縦揺れ減衰モーメントについて*

高 澤 金 吾**

On the Aerodynamic Damping Moment in Pitch of a Rigid Helicopter Rotor in Hovering

By Kingo TAKASAWA

The aerodynamic damping moment in pitch (A.D.M.P.) was measured with a hovering model helicopter rotor. Three kinds of model blades with different rigidity were tried. A flow visualisation study was performed for the purpose of determining the relative position between the blade and the vortices in steady hovering state.

Using the Rayleigh-Ritz method, the A.D.M.P. of the perfectly rigid rotor was determined from the above-mentioned experimental data. The result is only 30% as large as the analytical value proposed by Townsent.

Based on many kinds of aerodynamic theories, the A.D.M.P. is analysed. Among these, the two-dimensional quasi-steady theory, Loewy's unsteady theory, Theodorsen's unsteady theory, Ashley et. al.'s unsteady theory and their quasi-steady theory are included.

A quasi-steady theory is devised from Ichikawa's "Linear Aerodynamic Theory of Rotor Blades". The model based on this theory takes into account (1) the steady lift loss due to the finite span effect, (2) the steady lift loss attributable to the downwash induced by the returning wake and (3) the lift variation due to the change of relative position between the blade and the trailing vortices in the returning wake.

These three effects are found to be important but the two dimensional unsteady effect is less important. This is because the reduced frequency is rather small and the effect of the returning shed vortex is somewhat questionable for this case. The method proposed by the author gives a far better result than others.

A simple formula for calculating the pitch damping derivative of a helicopter rotor with spring constrained flapping hinge is proposed. The validity of the formula is ascertained by comparison with experimental results.

座 標

(i) $X_i Y_i Z_i$ 座標

原点をロータの中心にとった右手直交座標軸であって空間に固定されている。 X_i 軸は後向き、 Z_i 軸は上向きにとる。単位軸方向ベクトル I, J, K

(ii) XYZ 座標

原点をロータの中心にとった右手直交座標軸であって

てロータに固定されている。 Y 軸まわりに角速度 $\dot{\theta}_j$ なるピッチング運動を行なう。時刻 $t=0$ に於て X_i, Y_i, Z_i 座標と一致する。軸方向の単位ベクトル i, j, k

(iii) $x'y'z'$ 座標

原点をロータの中心にとった右手直交座標軸であってロータブレードに固定されている。 z' 軸は半径外向き、 x' 軸は上向きである。軸方向の単位ベクトル i^*, j^*, k^*

(iv) $\tau\sigma$ 座標

市川の論文^{(1),(2),(3)} に於て用いられる曲線座標で

* 昭和46年10月7日受付

** 飛行実験部

$x'y'z'$ 座標との間には (4.1) 式の関係がある。

XYZ 座標, $x'y'z'$ 座標と $\tau\sigma$ 座標を第66図に図示した。 $X_iY_iZ_i$ 座標, XYZ 座標, $x'y'z'$ 座標を第4図に図示した。

記 号

A_1 : ブレードの振動方程式の係数 (1.17)式参照
 A_2 : ブレードの振動方程式の係数 (1.18)式参照
 A_3 : ブレードの振動方程式の係数 (1.21)式参照
 \mathbf{a} : 加速度ベクトル
 a : 二次元揚力傾斜
 b' : 半翼弦長
 b'_0 : $y'=(R'_2+R'_1)/2$ の位置での半翼弦長 (第59図)
 $C(k)$: Theodorsen の函数
 $C'(k, m, h)$: Loewy によって導かれた Lift Deficiency Function
 C_{lj} : $\begin{cases} 1/2 & \text{for } l=0 \\ \cos l\theta_j & \text{for } l=1, 2, 3, \dots, J \end{cases}$
 c' : 翼弦長
 D : 誘導速度を求める影響函数 (4.12) 式参照
 D_1 : ブレードの振動方程式の係数 (1.19)式参照
 D_2 : ブレードの振動方程式の係数 (1.20)式参照
 EI : ブレードの曲げ剛性
 e : 自然対数の底
 $F(k)$: $C(k)$ の実部
 $F'(k, m, h)$: $C'(k, m, h)$ の実部
 \mathbf{F}_A : ブレードの単位翼幅に働く空気力ベクトル
 F_A : \mathbf{F}_A の絶対値
 \mathbf{F}_M : ブレードの単位翼幅に働く質量力ベクトル
 FW : $FW_{pq} = \int_0^\pi \cos p\theta \cos q\theta d\theta$
 FX : $FX_{pq} = \int_0^\pi \cos p\theta \cos q\theta \frac{\cos \phi - \cos \theta}{|\cos \phi - \cos \theta|} d\theta$
 FY : $FY_{pq} = \int_0^\pi \cos p\theta \cos q\theta \frac{\cos \phi - \cos \theta}{|\cos \phi - \cos \theta|} \times \log |\cos \phi - \cos \theta| d\theta$
 FZ : $FZ_{pq} = \int_0^\pi \cos p\theta \cos q\theta \frac{1}{\cos \phi - \cos \theta} d\theta$
 f : ブレードの撓みをあらわす一般座標
 ${}_0f$: f の定常成分
 f_{s+} : f の $\sin(\Omega+p)t$ 成分
 f_{s-} : f の $\sin(\Omega-p)t$ 成分
 f_{c+} : f の $\cos(\Omega+p)t$ 成分
 f_{c-} : f の $\cos(\Omega-p)t$ 成分

G : 誘導速度を求める影響函数 (4.12) 式参照
 $G(k)$: $C(k)$ の虚部
 $G'(k, m, h)$: $C'(k, m, h)$ の虚部
 $H(\mathbf{P}')$: $H(\mathbf{P}') = \sqrt{r'^2 + h^2}/2$
 $H_\nu^{(2)}$: 第2種ハンケル函数
 h' : 実験装置可動部重心とピッチング軸間の距離
Loewy の理論における渦層の間隔
 h : 市川の理論に於て導かれるパラメータ $h \equiv W/\Omega$
 I : 実験装置可動部のピッチング軸まわりの慣性能率
 I_ν : 第1種変形ベッセル函数
 I_1 : 揚力面の式にあらわれる翼面をおきかえた渦の寄与
 I_2 : 揚力面の式にあらわれる trailing vortex sheet をおきかえた渦の寄与
 I_3 : 揚力面の式にあらわれる shed vortex sheet をおきかえた渦の寄与
 $I_3^{(2)}$: 吹き下ろしを計算する点での shed vortex のパターンが翼巾方向の両側無限遠方まで拡がっているとした時の揚力面の式に対する寄与
 \mathbf{I} : X_i 座標軸方向の単位ベクトル
 ΔI_3 : $\Delta I_3 = I_3 - I_3^{(2)}$
 i : 虚数単位
 \mathbf{i} : X 軸方向の単位ベクトル
 \mathbf{i}_I : 文献(1)の xyz 座標軸における x 軸方向の単位ベクトル $\mathbf{i}_I = \mathbf{i}$
 \mathbf{i}^* : x' 軸方向の単位ベクトル
 J_0 : 第1種ベッセル函数
 J_1 : 第2種ベッセル函数
 \mathbf{J} : Y_i 軸方向の単位ベクトル
 \mathbf{j} : Y 軸方向の単位ベクトル
 \mathbf{j}_I : 文献(1)の xyz 座標軸における y 軸方向の単位ベクトル $\mathbf{j}_I = -\mathbf{j}$
 \mathbf{j}^* : y' 軸方向の単位ベクトル
 K_ν : 第2種変形ベッセル函数
 K_E : 実験によって得られたピッチダンピングからブレードの弾性によって生じるピッチダンピングを除去し, 全く剛なブレードのピッチダンピングを推定するための係数
 \mathbf{K} : Z_i 軸方向の単位ベクトル
 \mathbf{k} : Z 軸方向の単位ベクトル
 \mathbf{k}_I : 文献(1)の xyz 座標軸における z 軸方向の単位ベクトル $\mathbf{k}_I = -\mathbf{k}$
 \mathbf{k}^* : z' 軸方向の単位ベクトル

- k : 無次元振動数 (3.25) 式参照
 k_0 : 無次元振動数 (3.25) 式参照
 \bar{L} : 単位翼幅に働らく非定常揚力の振幅
 L_v : ストループ函数 B 5 式参照
 m : p/Ω
 M_H : 基準ブレードのハブまわりに発生するモーメント
 M_Y : Y 軸まわりに働らくモーメント
 $\partial M/\partial \dot{\theta}$: ピッチダンピング微係数
 $(\partial M/\partial \dot{\theta})_R$: ロータがピッチングを行なうことによって直接発生するピッチダンピング微係数。全く剛なロータブレードを仮想した場合に考えられるピッチダンピングとも言える。
 $(\partial M/\partial \dot{\theta})_E$: ロータがピッチダンピングを行なう時にブレードに生じる弾性変形を介して発生するピッチダンピング係数。
 N_A : $N_A \equiv q \int_0^\infty \frac{\lambda_1 e^{-i\lambda_1}}{[\lambda_1^2 + q^2]^{3/2}} d\lambda_1$
 N_B : $N_B(q) \equiv q \int_0^\infty \frac{e^{-i\lambda_1}}{[\lambda_1^2 + q^2]^{3/2}} d\lambda_1$
 N_C : $N_C(\tau) \equiv \int_0^\infty \left[\frac{\tau}{\sqrt{\tau^2 + \lambda_2^2}} - \frac{|\tau|}{\tau} \right] \frac{e^{-i\lambda_2}}{\lambda_2} d\lambda_2$
 ΔN_A : N_A の非特異部分
 $\Delta N_A \equiv N_A(q) - \frac{q}{|q|}$
 ΔN_B : N_B の非特異部分
 $\Delta N_B \equiv N_B(q) - \frac{1}{q} - i \frac{q}{|q|}$
 ΔN_C : N_C の非特異部分
 $\Delta N_C \equiv N_C - \frac{\tau}{|\tau|} \log|\tau| - \frac{\tau}{|\tau|} \left(r + \log 2 + \frac{\pi}{2} i \right)$
 n : ある渦が発生してから後現在までのロータの周回数
 P : 誘導速度を求める点 $P(x', y', z')$, $P(\tau, r, \sigma)$
 P' : 渦のある点 $P(\xi', \eta', \zeta')$, $P(\tau', r', \sigma')$
 p : ピッチングの振動数 $p = 2\pi/T$
 p : 圧力
 p : p/Ω
 Δp : 翼上下面の圧力差
 Q : ブレードの枚数
 Q_f : 一般力
 q : ブレードの番号。ロータの回転と同方向に 0, 1, 2, ... とつける。
 q : $q \equiv \frac{\omega(y' - \eta')}{V(\eta')}$
 R : 点 P と点 P' の距離
 R_1' : ブレードを構成する翼面の内側半径
 $R_1 = R_1'/b'$
 R_2' : ブレードを構成する翼面の外側半径
 $R_2 = R_2'/b'$
 r : 位置ベクトル
 r_τ : $\tau r \sigma$ 座標の τ 座標曲線の接線方向のベクトル (4.3) 式, (4.4) 式参照
 r_r : $\tau r \sigma$ 座標の r 座標曲線の接線方向のベクトル (4.3) 式, (4.4) 式参照
 r : 点 P の r 座標
 r' : 点 P' の r 座標
 S' : ブレードの長さ $S' = R_2'$
 S_R' : ハブから翼面の内側までの長さ $S_R' = R_1'$
 s' : ハブからブレードの中心線にそった長さ
 $s = s'/R_2'$
 T : ピッチングの周期
 T : 運動エネルギー
 t : 現在の時刻
 t' : ある渦が発生した時刻
 Δt : $\gamma_{ng}(\xi', t)$ なる渦が発生して後現在までの時間
 U : 歪エネルギー
 $\delta u'$: 仮想変位の x' 方向成分
 V : 主流の速度 $V = y'\Omega$
 v_X : ブレード上の点の X 方向の速度成分
 v_Y : ブレード上の点の Y 方向の速度成分
 v_Z : ブレード上の点の Z 方向の速度成分
 v_t : ロータ面の定常な誘導速度
 v_a : 誘導速度のうち非定常な成分
 \bar{v}_a : v_a の振幅
 \bar{v}_{as} : 誘導速度のうち定常な成分
 $\delta v'$: 仮想変位の y' 方向成分
 W : 実験装置可動部の重量
 W : 後流中にある渦の寄与をあらわす函数
 δW : 仮想仕事
 $\delta w'$: 仮想変位の z' 方向成分
 x' : 誘導速度を求める点の x' 座標
 x : $x \equiv \frac{x' - (x_t' + x_{t'})/2}{b'}$
 x_t' : ブレード前縁の x' 座標
 $x_{t'}$: ブレード後縁の x' 座標
 x_m' : $x_m = \frac{x_t' + x_{t'}}{2b'}$
 y' : 誘導速度を求める点の y' 座標

- y_A' : ブレードの半径に沿った循環分布が最大になるところの y' 座標
 z' : ブレードの撓み
 z_a' : ブレードのカンバーライン上の点の z' 座標
 $z_{qj}'(t)$: 現在の q ブレードの Z_I 座標
 $z_{q^*}'(t)$: 現在 q 番ブレードの真下にある渦を発生した時点での q^* 番ブレードの Z_i 座標
 Γ_a' : 基準ブレードの束縛渦
 $\bar{\Gamma}_a'$: Γ_a' の振幅
 $\bar{\Gamma}$: $\bar{\Gamma} \equiv \bar{\Gamma}_a' e^{ik/b'}$ (第2章)
 $\Gamma_{q'}'$: q 番ブレードの束縛渦
 Γ' : ブレードの束縛渦
 Γ_0' : 基準ブレードの束縛渦
 $\bar{\Gamma}$: $\bar{\Gamma} \equiv \frac{\bar{\Gamma}_a'}{b_0'} e^{i \frac{\omega x t'}{V(\eta')}}$ (第3章)
 Γ : Γ_a'/b_0'
 γ : ロック数 (第1章)
 γ_a : 基準ブレードをあらわす渦面
 $\bar{\gamma}_a$: γ_a の振幅
 γ_{00} : 基準ブレードの直後に続く shed vortex
 γ_{0q} : q 番ブレードの直後に続く shed vortex
 γ_{nq} : n 回転前に q 番ブレードより発生した shed vortex
 γ : オイラーの定数 (第3章)
 γ_a : 翼面をあらわす渦の主流に垂直な方向の成分 (第3章)
 γ_W : 後流中の渦の主流に垂直な方向の成分
 γ : vortex sheet の surface vorticity
 γ_{B0} : 基準ブレードをおきかえた γ 渦
 γ : 渦の r_r 方向の成分 (4.5) 式参照
 γ^N : γ の j^* 方向の成分 (4.7) 式参照
 Δ'_{qj} : q 番ブレードの第 j 分点と第 $j+1$ 分点の間から発生する渦の強さ
 Δ_{qj} : $\Delta_{qj} \equiv 2\Delta_{qj}'/(x_i' - x_l')$
 Δ'_{lj} : q 番ブレードの真下の第 l 層目にある渦の強さ。 j は内側から第 j 番目の渦系であることを示す。
 δ : 渦の r_r 方向成分 (4.5) 式参照
 δ_a : 翼面をあらわす渦の主流方向の成分
 δ^N : γ の i^* 方向の成分
 δ_{B0} : 基準ブレードをおきかえた δ
 δ_W : 後流中の渦の主流方向の成分
 ζ' : 渦の z' 座標
 ζ'_{qj} : q 番ブレードの第 j 分点と第 $j+1$ 分点の間から発生する渦をおきかえた渦系の Z_i 座標
 ζ'_{lj} : q 番ブレードの真下の第 l 層目にある渦の Z_i 座標。 j は内側から j 番目の渦系であることを示す。
 η' : 渦の y' 座標
 η'_{0j} : ブレードの分割点の y' 座標
 η'_{qj} : q 番ブレードの第 j 分点と第 $j+1$ 分点の間から発生する渦系の y' 座標
 η'_{lj} : q 番ブレードの真下の第 l 層目にある渦の y' 座標。 j は内側から j 番目の渦系であることを示す。
 θ : ピッチングの角即ちロータ面の傾角
 θ : η を変換した座標
 $\eta \equiv \frac{R_2 + R_1}{2} - \frac{R_2 - R_1}{2} \cos \theta$
 $\bar{\theta}$: ピッチングの振幅
 θ_j : Chebyshev の分点
 $\theta_j \equiv \frac{2j-1}{2(J+1)} \pi \quad (j=1, 2, 3, \dots, J+1)$
 θ_j : η_{0j} に対応する θ 座標
 θ_c : コレクティブピッチ角
 θ_A : y_A' に対応する θ 座標
 θ_X : 有効迎角
 A_1 : (2.25) 式参照
 A_2 : (3.41) 式参照
 λ : ダミーパラメータ
 λ_1 : $\lambda_1 \equiv \frac{\omega \lambda'}{V(\eta')}$
 λ_2 : $\lambda_2 \equiv \frac{\omega \lambda'}{V(y')}$
 λ^* : ダミーパラメータ
 $\lambda' = \lambda' = \xi' - x'$
 $\mu(s)$: ブレードの撓みをあらわすモード函数
 ν : ブレードの単位長さあたりの質量
 ξ' : 渦の x' 座標
 π : 円周率
 ρ : 空気密度
 σ : ソリディレシオ $Qc'/\pi R_2'$
 σ : 点 P の σ 座標
 σ' : 点 P' の σ 座標
 τ : $\tau \equiv \frac{\omega(y' - \eta')}{V(y')}$
 τ : 点 P の τ 座標
 τ' : 点 P' の τ 座標
 τ^* : $\tau^* \equiv \tau - 4\pi n - 2\pi q/Q$
 ϕ : 擾乱ポテンシャル

ϕ : y を変換した座標

$$y = \frac{R_2 + R_1}{2} - \frac{R_2 - R_1}{2} \cos \phi$$

ϕ_i : Multihopp の分点

$$\phi_i = \frac{i\pi}{N+1} \quad (i=1, 2, \dots, N)$$

ϕ : ブレードの方位角

ϕ_q : q 番ブレードの方位角 $\phi_q = \phi_0 + 2\pi q/Q$

$\bar{\phi}_q$: 基準ブレードの束縛渦と q 番ブレードの束縛渦の位相差

ω : ブレードの振動数

ω_B : 回転していないブレードの一次曲げ固有振動数

Ω : ロータの回転角速度

superscripts

' : 長さに関する量が次元をもつ場合に用いる。

' : 時間微係数

' : 振幅をあらわす

subscripts

U : 翼の上面の量

L : 翼の下面の量

R : 実部をあらわす

$+$: $\Omega + p$ の周波数成分に関する量

$-$: $\Omega - p$ の周波数成分に関する量

まえがき

ヘリコプタのロータのうちフラッピングヒンジをもたないものは、non-articulated rotor とか、rigid rotor と呼ばれている。古くは一人乗りのフライングプラットホームなど軽便なヘリコプタにこの型式のロータが用いられた。近年ブレードの構造法と材料の進歩により、XH-51, AH-56, BÖ-105 など4～5人乗りの高性能ヘリコプタに rigid rotor が採用されるようになった。

この型式のロータではブレードに働らく空気力によって生じるコントロールモーメントが、直接に機体へと伝達されるので、従来のヘリコプタロータに比べて時間遅れの極めて小さい、強力なコントロールモーメントを発生できる。のみならず、ブレードのフラップワイズ曲げ固有振動数を適切に選ぶことによって、従来のロータに比べて大きなピッチダンピング、ロールダンピングを得られる⁴⁾。フラッピングヒンジがないのでロータハブをスマートに形成できることも、高速化の為の利点である。このようなわけでリジッドロー

タはヘリコプタの操縦安定性の見地、並びに高速化の見地から有望視されている。

しかし現在のところピッチ及びロールのダンピングを計算する方法が確立していない。ホバリング状態でのリジッドロータのピッチダンピングについては Payne⁵⁾, 別府⁶⁾, Townsent⁷⁾, 内藤の研究がある。

Payne はフラッピングヒンジをスプリングで拘束したロータとフラッピングヒンジがハブにオフセットをもってとりつけられている場合とが同等であることを示し、スプリングの強さ或いはオフセットの大きさが変わると、ピッチダンピングが変わることを理論的に明らかにしている。

別府はヒンジオフセットのあるフラッピングヒンジをスプリングで拘束したロータについて、ピッチダンピングが3種の原因によって生じることを明らかにした。その1はティップパスプレーンの遅れによって生じるものであり、その2はヒンジオフセットによって生じるもの、その3はブレードのフラッピングに際しヒンジのスプリングを介して機体に伝達されるものである。前2者は従来の articulated rotor においてよく知られているものであるが、その3はフラッピングヒンジをスプリングで拘束したロータに固有である。この種のロータではヒンジオフセットによって生じるダンピングはスプリングの強さを増すと共に減少するが、スプリングを介して伝達されるピッチダンピングはスプリングの強さを増すと一度増加し、極大値に達した後減少することが理論的に示された。この結果ヒンジオフセットのあるフラッピングヒンジをスプリングで拘束されたロータでは全体として、スプリングの強さを増すにつれてピッチダンピングが増し、極大値に達した後減少することになる。これは大量の実験によっても確認された。別府による理論計算と実験値の一例を第1図にあげておく。横軸にはスプリングの発生するモーメントと空気力の発生するモーメントがとってある。縦軸にはピッチダンピングをブレードのヒンジまわりの慣性能率とロータの回転角速度の積で割ったものがとってある。実験値と理論値の一致はスプリングの強さが弱い時には良好であるが、スプリングの強さの増加と共に両者の喰い違いは増している。別府はこの原因として空気力が正確に計算できない点をあげている。

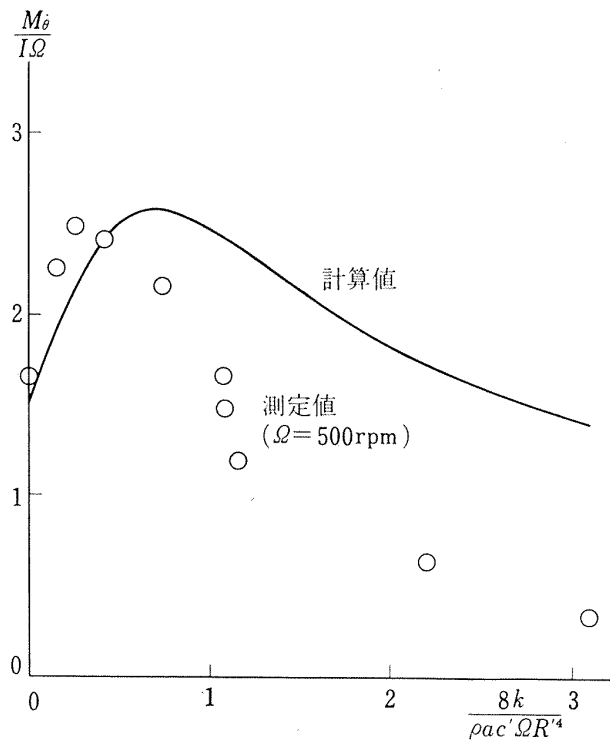
Townsent はブレードがハブに直接とりつけられている場合のロータについて、ブレードの曲げ、振りの変形が生じないものとして、空気力を簡単に仮定してピッチダンピングを求める式を得た。

$$\frac{\partial M}{\partial \theta} = -\frac{Q}{16} \rho a c' R_2^4 \Omega \quad (i)$$

ここで a は二次元定常翼について考えられる揚力傾斜である。本論文で実験的ないし、解析的に求められる種々のピッチダンピングを整理する為の基準として、 a については理論値 2π を用いた式を採用する。

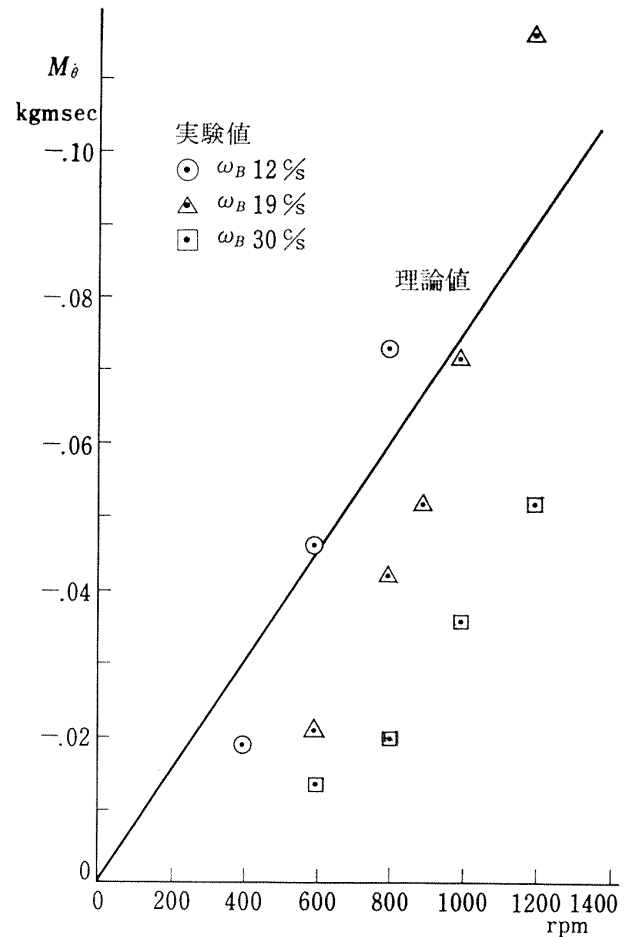
$$\frac{\partial M}{\partial \theta} = -\frac{Q}{16} \rho (2\pi) c' R_2^4 \Omega \quad (ii)$$

内藤はブレードをハブに直接とりつけたロータにつ

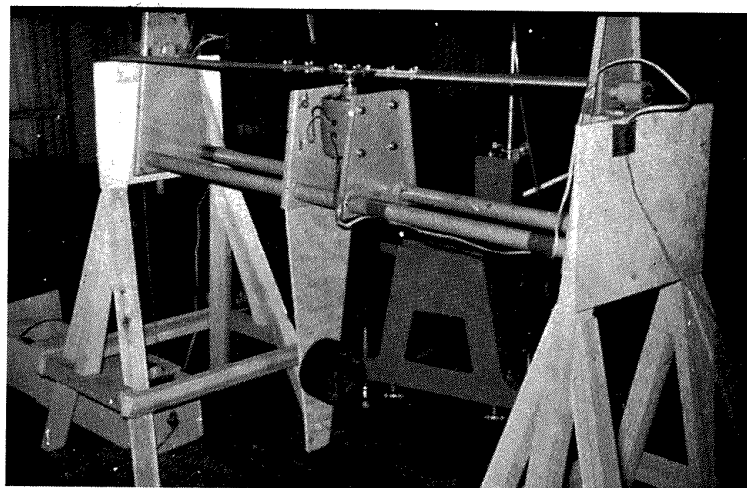


第1図 ピッチダンピングの実験値と計算値の比較⁶⁾

いて実験を行った。第2図はその結果の一例である。図中 ω_B はブレードの静止時の一次曲げ固有振動数であって、ブレードの剛性を代表するパラメータである。実線は(2)式を用いた計算値である。実験装置は第3図の如きものである。この実験の結果から、内



第2図 2枚のブレードをもつロータのピッチダンピングについて実験値と理論値の比較



第3図 ピッチダンピング実験装置 (その1)
(内藤氏より提供さる)

藤は次の2つの結論を得ている。

(i) ブレードの一次曲げ固有振動数に比べてロータの回転数が小さい時にはピッチダンピングの値は(2)式に示したものの $1/3$ 程度である。

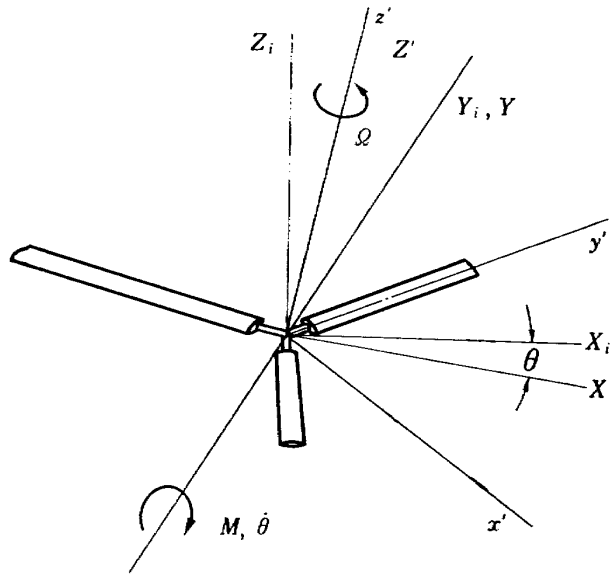
(ii) ロータの回転数が増すとピッチダンピングは急激に増すが、それはコリオリの力によってブレードに周期的な弾性変形が生じ、ブレード断面の有効迎角が変動する為であると考えられる。

別府の実験のうちスプリングの強い場合と、内藤の実験は共にピッチダンピングの実験値が、理論値よりずっと小さくなる事をあらわしている。

これまでに述べた4つの研究によってリジッドロータのピッチダンピングが大概如何なる値になるか、又それがスプリングの強さないしブレードの剛性の変動と共にどのように変るかについては明らかになった。しかしスプリングの強さが十分大きい場合、又はロータの回転数に比べてブレードの一次曲げ固有振動数が十分大きい場合に計算値が実測値よりずっと小さくなる理由について何ら説明がなされていない。この問いはピッチダンピングの問題では、いかなる機構によって空気力が発生するかについての問いである。空気力の発生機構を明らかにすることによって、小さいピッチダンピングの値が説明され、リジッドロータのピッチダンピングについて十分な理解が得られることになろう。本研究はピッチダンピングを支配する空気力が如何なる機構によって発生するかを解明し、その結果として得られるピッチダンピング計算法によって、ピッチダンピングを算定し、更に実験との比較によってこの計算法が妥当であることを実証しようとするものである。

現象の基本的性質を明らかにする為にピッチングだけを行うことができるロータについて、ホバリング状態でのピッチダンピングについて議論を行う。モデルは第4図に示した如きものであって、 Y_i 軸のまわりにピッチング運動を行うことができる。このモデルは別府、内藤の実験の場合とほぼ同様である。ロータの回転中心は丁度ピッチング軸の上にあるので、トランスレーションを含まない純粹のピッチングを生じる。当然のことながらブレードはフラッピングを行なわないのであるから、articulated rotor のピッチダンピングに於て主要な役割を果たすところのティップパスプレーンの遅れによって生じるピッチダンピングはこの場合発生しない。

本研究は実験と解析からなる。第1章では実験について述べる。実験は第3図、第5図の装置を用いて行



第4図 Y 軸まわりにピッチングを行なう
リジッドロータ

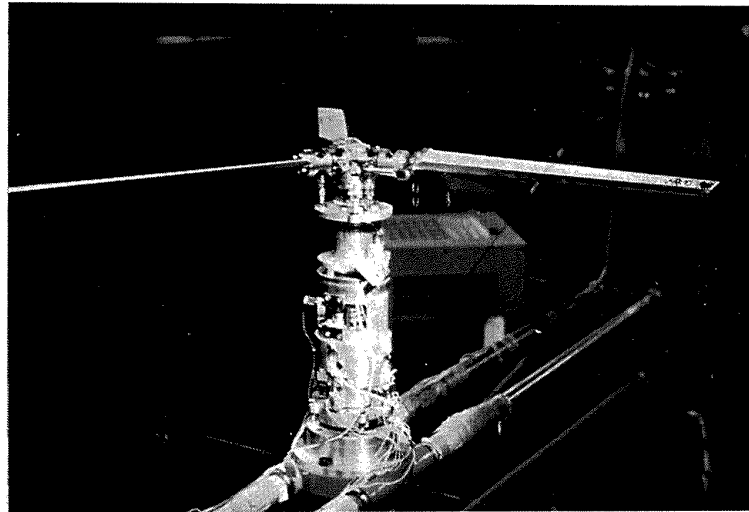
ったものであって、ロータ面はピッチング軸のまわりに小さい振幅で振子のように揺れる。ロータ面の振動の振幅は、ピッチダンピングモーメントのために次第に減少する。この振幅の減衰からピッチダンピング $\partial M / \partial \theta$ を求めることができる。測定された $\partial M / \partial \theta$ はロータ面のピッチングによって生じる部分 $(\partial M / \partial \theta)_R$ とピッチングの際にブレードに生じる曲げ変形を介して発生する部分 $(\partial M / \partial \theta)_E$ の和であると考えられる。前者 $(\partial M / \partial \theta)_R$ はロータの回転数に丁度比例して増加するが、後者 $(\partial M / \partial \theta)_E$ はロータの回転数の増加よりも一層急激に増加し、第2図に於て既に見たような、ピッチダンピングの急激な増加の原因となる。

第1章3節では、二次元準定常空気力によるストリップ理論を用いて、ブレードの曲げ変形の効果を空力弾性的に扱った解析を行ない、測定値 $\partial M / \partial \theta$ が $(\partial M / \partial \theta)_R$ と $(\partial M / \partial \theta)_E$ に分離できることを示した。

第1章4節では、ロータ後流の渦の有様を観察し、後の解析の基礎となる渦位置についてデータを得るために煙実験を行なった。

第2章と第3章ではヘリコプタロータについての既存の2種の振動翼理論を用いてピッチダンピングを計算する。この結果を第1章に述べた実験の結果と比較することによって、ピッチダンピングを支配する空気力の特性が推測される。

第4章ではピッチダンピングを解析するのに適した揚力線方程式を導いた。これは定常回転翼について、



第5図 ピッチダンピング実験装置

文献(1)の揚力面積分方程式から出発し、inflow が小さいとして、遠方の渦の影響を無視すると導かれる。

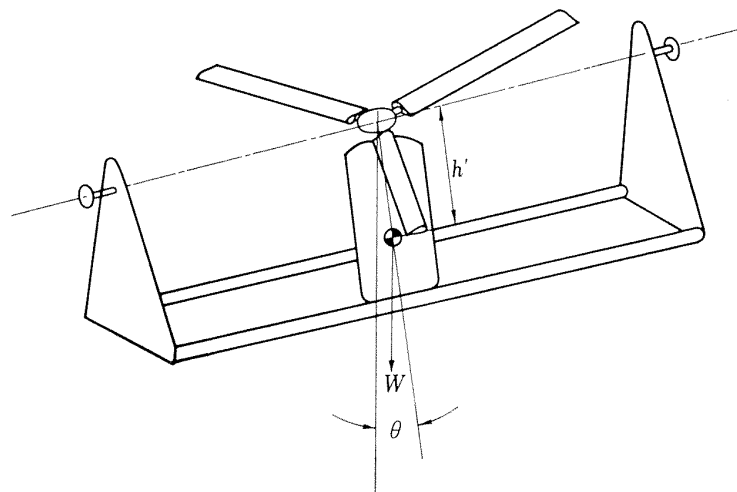
次いでこの計算法を応用して、ブレードと後流の渦の距離の変動を考慮に入れたモデルについてピッチダンピングを計算した。その結果は他の理論による計算値に比べて、実験値との一致が良好であった。

第4節ではリジッドロータが一定角速度のピッチングを行なう時に発生するピッチダンピングの微係数 M_θ を簡単に計算する式を提唱し、それをを用いた結果がかなり良好であることを文献(6)の実験値との比較によって実証した。

第1章 ピッチダンピングの実験的研究

ホバリング状態に於けるリジッドロータのピッチダンピングを実験的に求めた。ロータ後流の渦の有様を煙実験によって調べた。

ピッチダンピングの測定用実験装置は2種あって、第3図と第5図にその写真を示した。両者共その要点は第6図の如きものであって、ロータとその支持枠が両端をベアリングで支えられている。ベアリング軸は水平であって、ロータハブはこの軸上にある。ロータは軸を中心として振子のように鉛直面内で揺れる。実験は十分天井の高い室内で行い、ロータ後流が天井に向って吹き上げるように迎角と回転方向を設定しているので、地面効果の影響は考えなくてよい。勿論周囲は無風とみなしてよく、ロータの流れが外部流によって乱されることはない。ブレードのピッチ角を設定しロータを一定速度で回転させた状態で支持枠を傾けてから手を離すと次第にピッチングの振幅が減衰する。この振幅の減衰からピッチダンピングを求める。実験は2枚のブレードをもつロータと3枚のブレードを持つロータについて行った。



第6図 実験装置略図

1.1 2枚ブレードのロータについての実験

〔実験装置〕

装置の写真を第3図に示した。第7図と第8図は装置の説明図と計測器の説明図である。装置の寸法などは第1表に示した。

実験の目的はロータの回転に伴って生じる空気力によってピッチング軸のまわりに作られるモーメントのうちピッチングを抑制する部分のために、発生するピッチダンピングを測定することであるから、機械的な摩擦などによって生じるピッチダンピングを極力避けねばならない。由ってロータの回転数とピッチング角の測定は次に述べる方法によった。第7図を参照されたい。モータ②によって回転するロータブレード①が支持枠と共にベアリング⑤に支えられてピッチングを行う。豆電球④から発した光がCdS素子③にあたる。ブレードがこの間を通過する度に光が遮られてCdS素子の電気抵抗が増し、第8図の回路を通して

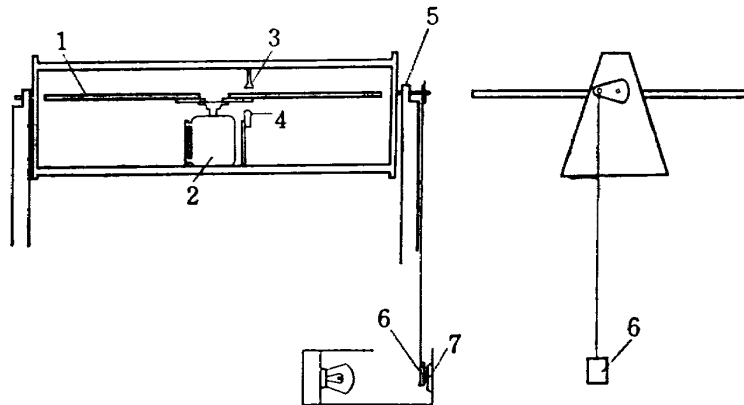
第1表

ピッチダンピング実験装置A
(2枚ブレード) 諸元

ロータ直径	1100 mm
ピッチング軸まわりの慣性能率	0.105 kg m sec^2
揺れ運動をする部分の重量	22.2 kg
重心位置(ピッチング軸の下方)	0.18 m
ピッチングの周期	1.02 sec

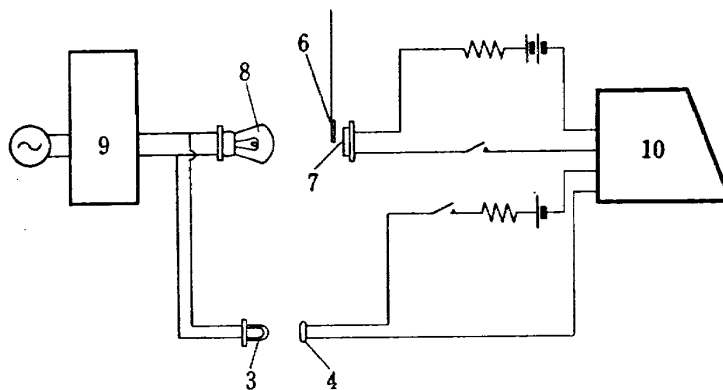
装着したブレードAの諸元

翼 型	NACA 0012
半 径	550 mm
翼 弦 長	80 mm
ロック数	4.436
曲げ一次固有振動数	1170 rpm
材 質	檜



第7図 ピッチダンピング実験装置 2枚のブレードをもつロータ

① ブレード ② モータ ③ CdS ④ 豆電球
⑤ ベアリング ⑥ シャッター ⑦ CdS



第8図 ロータの回転速度とピッチングの角の測定装置

③ 豆電球 ④ CdS ⑥ シャッター
⑦ CdS ⑧ 電灯 ⑨ 直流電源

ビジコダに入る電流はブレードが通過する度にパルス状の減少を示し、記録紙上にブレードの通過を示すパルスが描かれる。このパルスとタイムマークを読めばロータの回転数が知られる。ピッチングの角度は次のようにして測定した。ピッチング軸から偏心した遮光板を下げ、ピッチング運動につれて遮光板が上下するようにした。遮光板の上下にともなう、CdS 素子団に入る光量が変わってビジコダの入力電流が変化する。記録紙にはピッチングの角の経時変化に対応する減衰振動曲線が描かれる。ピッチングの角と記録紙上の輝点の動きは静的なキャリブレーションにより、線形関係にあることが確認された。ピッチングの周期 1 秒に比べ測定系の時間遅れは十分小さいので、動的な測定の場合にも記録はピッチングの経時変化を正しく示していると考えられる。記録に 100 c/s の雑音が入るのを防ぐために電灯回線は直流で点灯している。

〔測定方法〕

一般的な測定に先立って、ブレードの曲げ一次固有振動数、ピッチングの周期、ピッチング軸まわりの慣性能率を測定しておく。ブレードの曲げ一次固有振動数は田丸式の振動試験機⁽²⁹⁾で測った。ピッチング軸を傾けた時に発生する復元モーメントとピッチングの周期を測るとピッチング軸まわりの慣性能率は (1.1) 式で求められる。

$$I = \frac{WhT^2}{4\pi^2} \quad (1.1)$$

ブレードのピッチ角を 0°, 3°, 6°, 9°, 12° に夫々設定し、各迎角についてロータの回転数を 300 rpm, 400 rpm, 500 rpm, 600 rpm とした場合に数回づつロータの回転数とピッチングの角度の経時記録をとった。得られた経時記録によればピッチングは 2 次系の減衰振動とみなせるので、(1.2) 式によってピッチングを求めた。

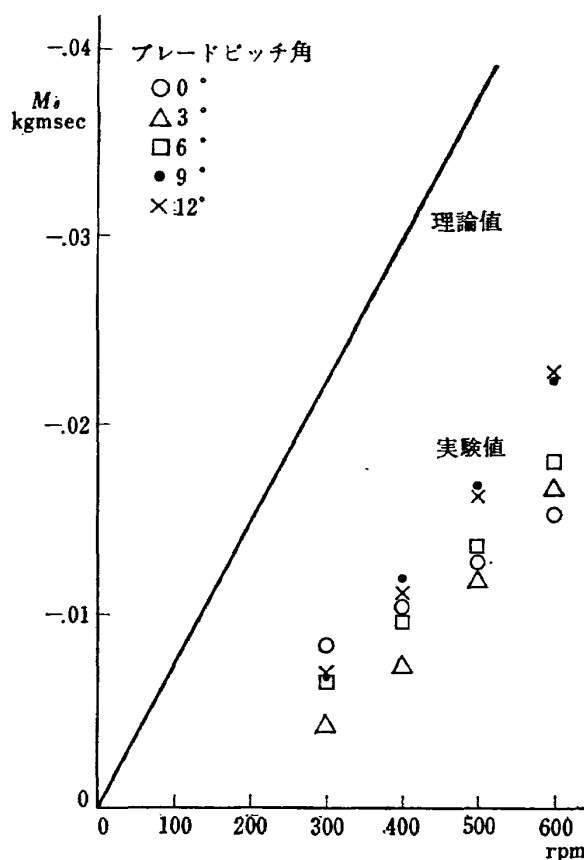
$$\frac{\partial M}{\partial \theta} = \frac{2I \ln(\theta_2/\theta_1)}{t_2 - t_1} \quad (1.2)$$

ロータが回転していない場合にもベアリングの摩擦などの為に $\partial M/\partial \theta$ の値にして -0.002 kg msec の減衰係数が得られるので (1.2) 式によって求められた値からこれを差し引いてピッチダンピングの測定値とした。ブレード、モータの回転している部分がピッチング運動をする時に生じるジャイロモーメントによって両方のベアリングに逆向きの上下荷重を生じる。この為にピッチダンピングの測定値が変わる心配があるので調べたところ、結局無視してよいことがわかった。そのチェックは次のようにして行った。まずブレードを外し

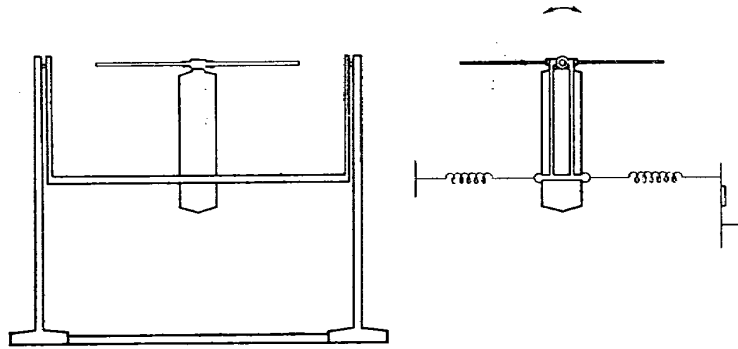
た状態でモータを回転させた場合と回転させない場合のピッチダンピングを比較し相違がないことをたしかめた。つまりモータが回転する為に生じるジャイロモーメントによってベアリングにかかる上下荷重はピッチダンピングに影響を与えていないことがわかった。次にブレードが回転している時に生じるジャイロモーメントによってベアリングにかかる荷重を計算したところ回転数 400 rpm, 振幅 5.7° としても 0.21 kg であってベアリングにかかるモータ、支持棒などの重量の 1% 程度であるから無視できることがわかった。

〔測定結果〕

測定値は第 9 図に示した。なおブレードは桧製であって回転中に振りを生じピッチ角の設定値と実際のピッチ角は、づれているものと思われる。図からもあきらかなようにピッチダンピング $\partial M/\partial \theta$ はロータの回転数が増すよりも一層速かに増すことが認められた。大ざっぱに言えばブレードの設定ピッチ角が大きいとピッチダンピングも大きくなっている。図中の実線は (2) 式による計算値であって、実測値の 2~3 倍になっている。ピッチ角 0° の場合には $\partial M/\partial \theta$ とロ



第 9 図 2 枚のブレードをもつロータについて
ピッチダンピングの実験値と理論値の比較
 $R_2' = 0.55\text{m}$ $b' = 0.040\text{m}$ $p = 1.02\text{ c/s}$



第 10 図 ピッチダンピング実験装置 3 枚のブレードをもつロータ

第 2 表
ピッチダンピング実験装置 B
(3 枚ブレード) 諸元

ロータ直径	1,800 mm
ピッチング軸まわりの慣性能率	0.92 kg m sec ²
ピッチングの周期	1.323 sec

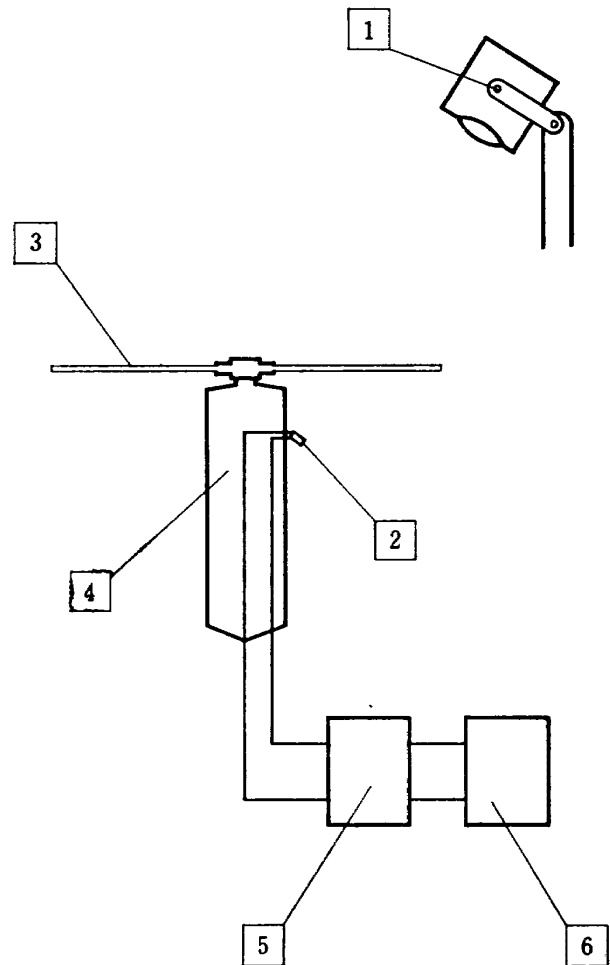
ータ回転数の関係が他のピッチ角の場合と異なっているが、それは第51図の写真にも見られるようにロータまわりの気流の状況が全く違うためであると考えられる。

1.2 3 枚ブレードのロータについての実験

3 枚ブレードのロータの場合にも実験の手法と目的は 2 枚ブレードの場合と同様である。装置の略図を第 10 図に示す。寸法などは第 2 表に示した。

〔実験装置〕

ブレードはアルミ製で翼弦が小さく振り剛性が大きいので回転中に振り変形を起す心配はない。ブレードのピッチ角は $\pm 16^\circ$ の間で任意にえらぶことができる。ロータの回転数は第 11 図に示したようにスポットライト①からフォトセル②に入る光がブレードの通過する度に遮切られてフォトセルの出力がパルス的に変化することを利用して測る。フォトセルの出力は増幅された後フリークエンシカウOUNTER⑥に導かれる。ここでロータ回転数は 10 秒ごとにデジタルに表示される。ピッチングの角の経時変化からピッチダンピングを求める為にダンピングメータ^{8),9)}⑥を用いた。ピッチングの角度の検出は第 12 図に示したようにスプリングとストレインゲージを用いて行なった。ロータが傾くとスプリング①が伸縮して板バネ②が撓む。板バネに貼り付けられたストレインゲージ③の抵抗が変動する。ストレインメータ④の入力電流は抵抗変化に応じて変り、交流分は増幅された後ローパスフィルタ

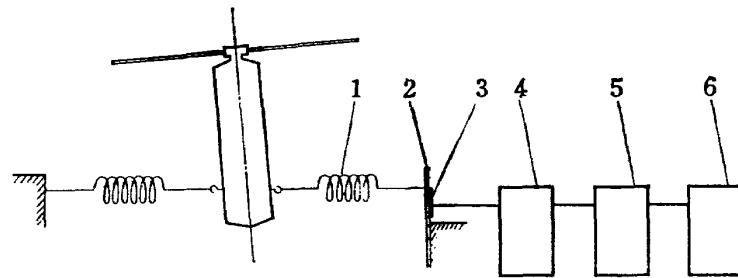


第 11 図 ロータの回転速度を測る装置

- ① スポットライト ② 太陽電池
③ ブレード ④ モータ ⑤ アンプとフィルター ⑥ フリークエンシカウOUNTER

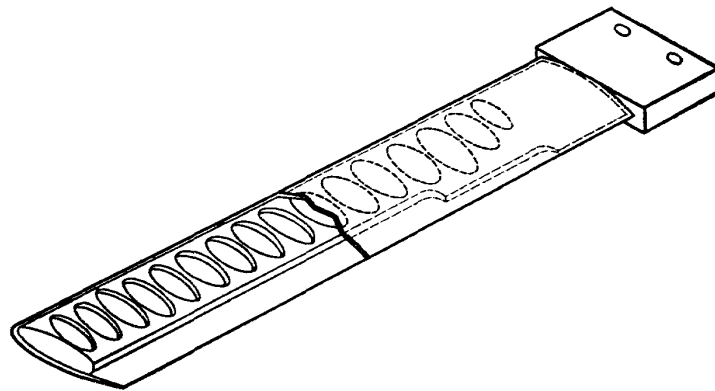
⑤によって雑音を除去されてダンピングメータ⑥に入る。(1.3) 式のような減衰する調和振動の信号電流をダンピングメータに加えると、デジタルに表示される数値から α と ω の値を読むことができる。

$$V(t) = V_0 e^{-\alpha \omega t} \cos \omega t \quad (1.3)$$



第 12 図 ピッチングの角を測る装置

- ① スプリング ② 板バネ ③ ストレインゲージ ④ ストレインメータ
⑤ アンプとフィルター ⑥ ダンピングメータ



第 13 図 C.D. ブレード構造図

ピッチダンピングの実験に於てダンピングメータの入力電圧は上式に示されるものに極めて近いから、ダンピングメータの示す数値からピッチダンピングを求めた。

実験はロック数と剛性の異なる 3 組のブレードについて行った。各ブレードの特性は第 3 表に示し、略図は第 13 図に示す。B ブレードは板を削り出したものであり、C、D ブレードは板を削り出して作った骨材に厚さ 0.5 mm のアルミ板を接着したものである。B と C は同じ NACA 0012 の翼断面をもつが、D は NACA 0018 である。C は構造が変わったので B より一次曲げ固有振動数が 24% 増した。D では更に翼厚が増したので一次曲げ固有振動数は B の 64% 増しとなっている。

ベアリングの摩擦などによって発生する振幅の減衰を修正したのは 2 枚ブレードの場合と同様である。

回転部分がピッチング運動をする時に発生するジャイロモーメントによってベアリングにかかる上下の荷重の影響は無視してよい。実験装置の諸元を第 2 表に示す。

〔測定方法〕

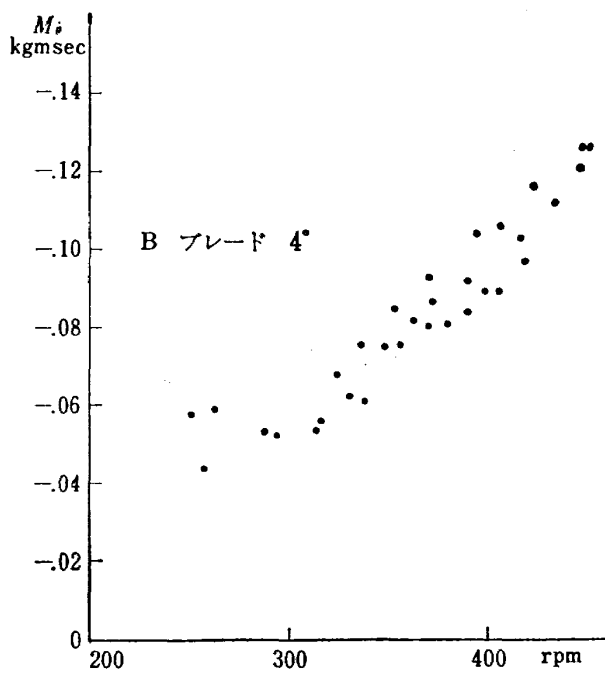
第 3 表 B, C, D ブレードの特性

	B	C	D
翼型	NACA 0012	NACA 0012	NACA 0018
R_2'	800 mm	800 mm	800 mm
c'	48 mm	48 mm	48 mm
γ	1.632	2.454	1.836
ω_B	464 rpm	577 rpm	755 rpm

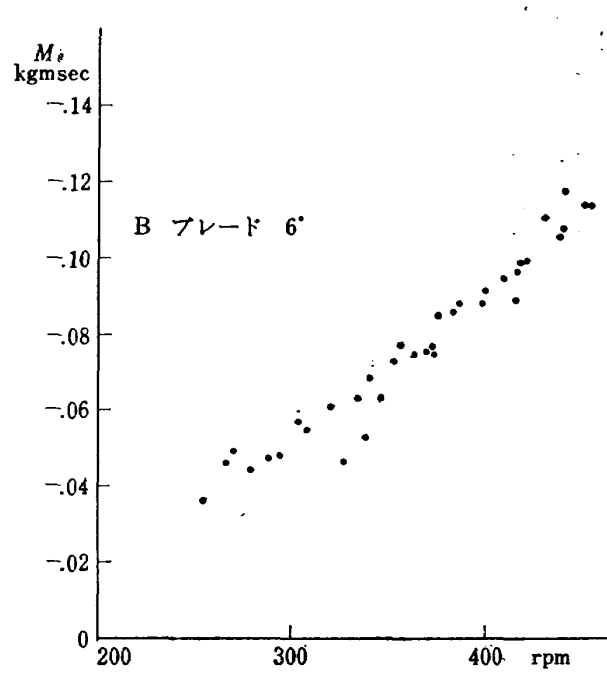
先にのべた 3 組のブレードについて、各々ピッチ角を 4° , 6° , 8° , 10° に設定する。夫々のピッチ角について、ロータの回転数を 250 rpm から 450 rpm の範囲で変えてピッチダンピングを測定した。ロータの回転数とピッチダンピングは先に述べたようにデジタルに表示できるのでかなり大量の実験値を得ることができた。ブレードの一次曲げ固有振動数は、ストレインゲージを使って測った。

〔測定結果〕

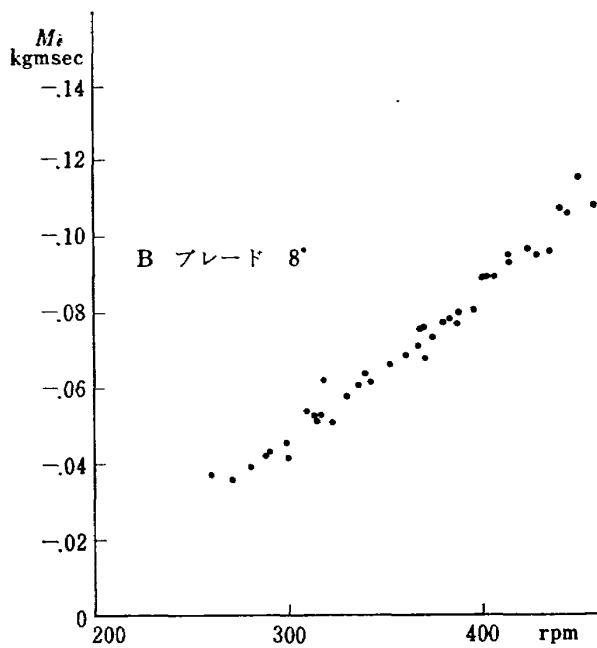
測定結果は第 14 図から第 25 図に横軸にロータの回転数、縦軸にピッチダンピング $\partial M / \partial \theta$ をとって図示した。



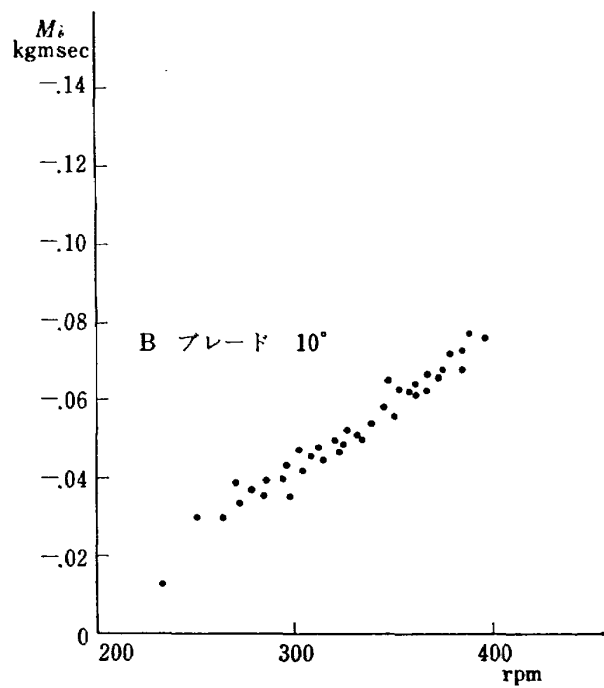
第 14 図 3 枚のブレードをもつロータのピッチ
ダンピング測定値
 $R_2' = 0.800\text{m}$ $b' = 0.024\text{m}$
 $p = 0.756\text{ c/s}$



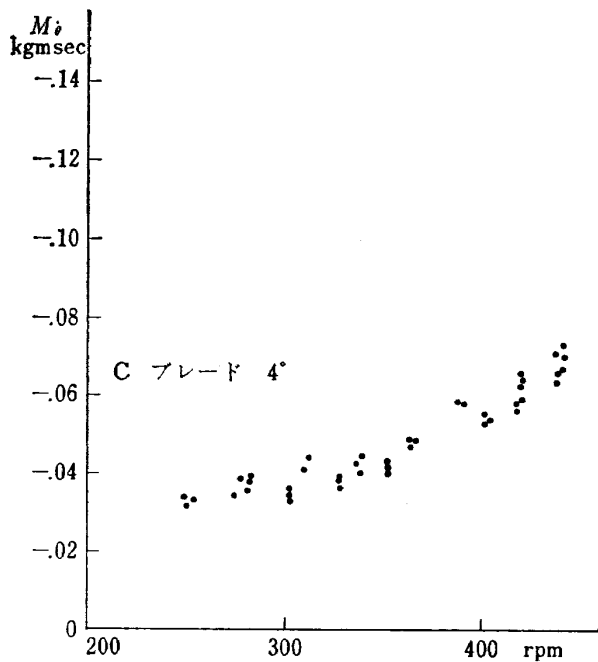
第 15 図 3 枚のブレードをもつロータのピッチ
ダンピング測定値
 $R_2' = 0.800\text{m}$ $b' = 0.024\text{m}$
 $p = 0.756\text{ c/s}$



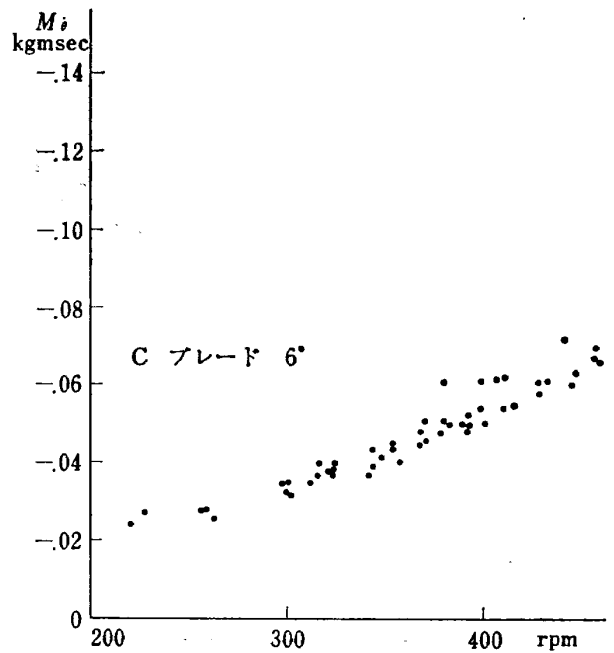
第 16 図 3 枚のブレードをもつロータのピッチ
ダンピング測定値
 $R_2' = 0.899\text{m}$ $b' = 0.024\text{m}$
 $p = 0.756\text{ c/s}$



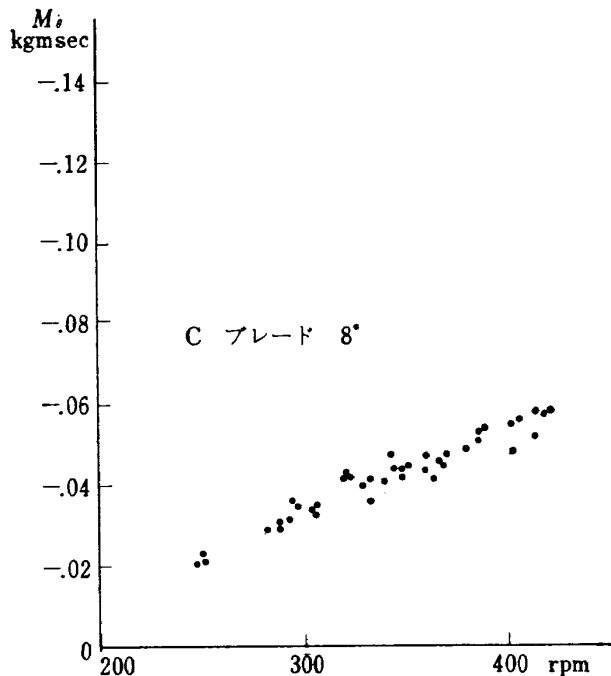
第 17 図 3 枚のブレードをもつロータのピッチ
ダンピング測定値
 $R_2' = 0.800\text{m}$ $b' = 0.024\text{m}$
 $p = 0.756\text{ c/s}$



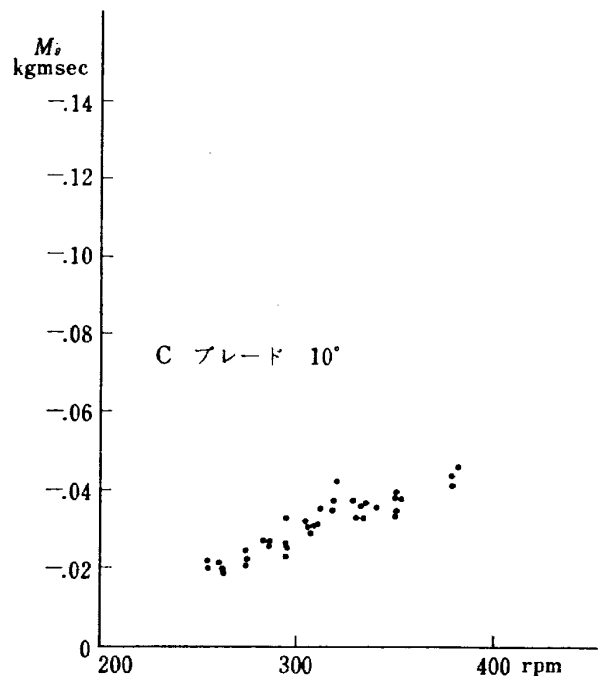
第 18 図 3 枚のブレードをもつロータのピッチ
ダンピング測定値
 $R_2' = 0.800\text{m}$ $b' = 0.024\text{m}$
 $p = 0.756\text{ c/s}$



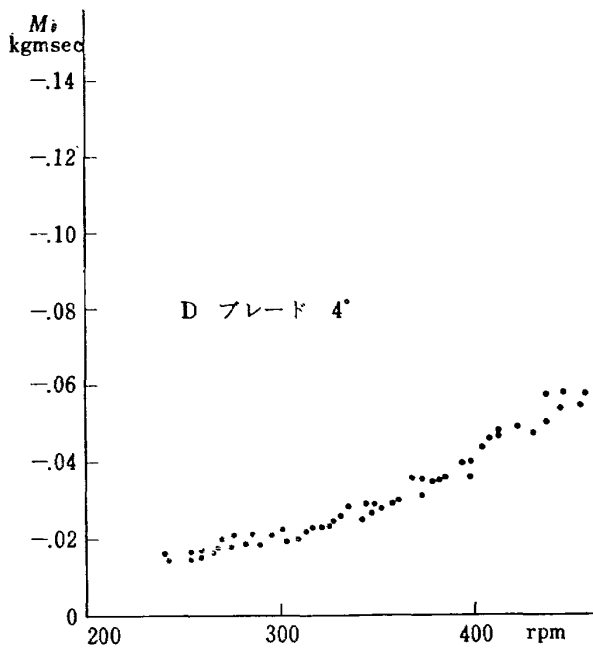
第 19 図 3 枚のブレードをもつロータのピッチ
ダンピング測定値
 $R_2' = 0.800\text{m}$ $b' = 0.024\text{m}$
 $p = 0.756\text{ c/s}$



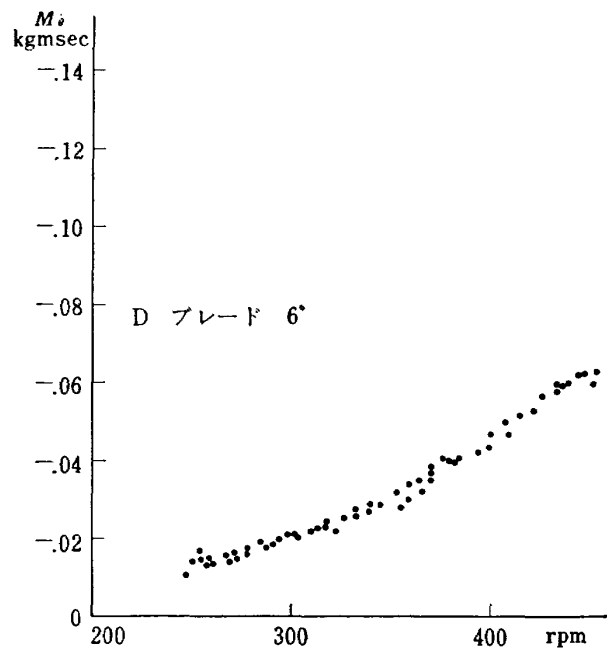
第 20 図 3 枚のブレードをもつロータのピッチ
ダンピング測定値
 $R_2' = 0.800\text{m}$ $b' = 0.024\text{m}$
 $p = 0.756\text{ c/s}$



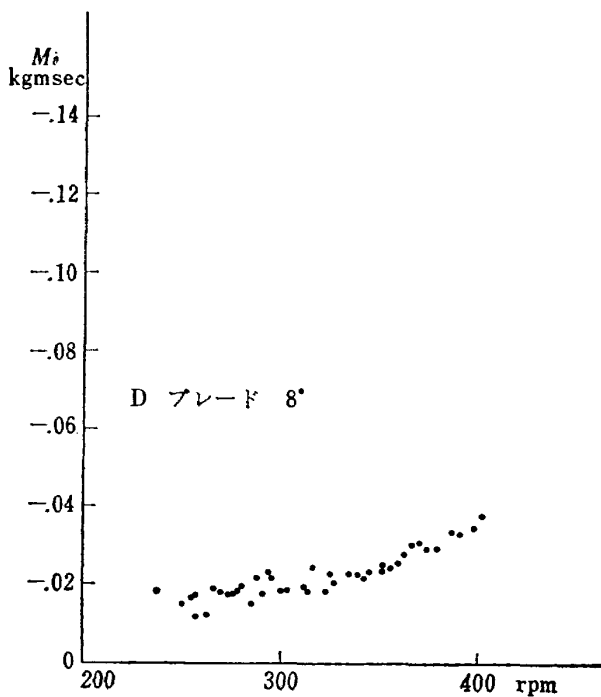
第 21 図 3 枚のブレードをもつロータのピッチ
ダンピング測定値
 $R_2' = 0.800\text{m}$ $b' = 0.024\text{m}$
 $p = 0.756\text{ c/s}$



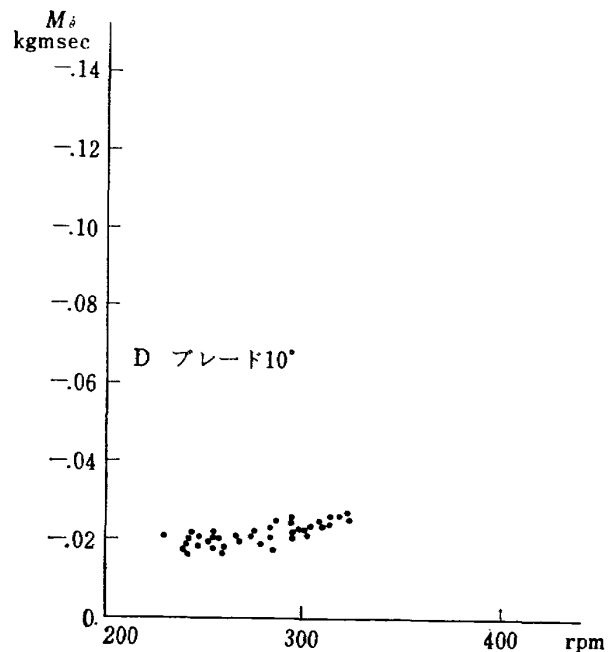
第 22 図 3 枚のプレートをもつロータのピッチ
ダンピング測定値
 $R_2' = 0.800\text{m}$ $b' = 0.024\text{m}$
 $p = 0.756\text{ c/s}$



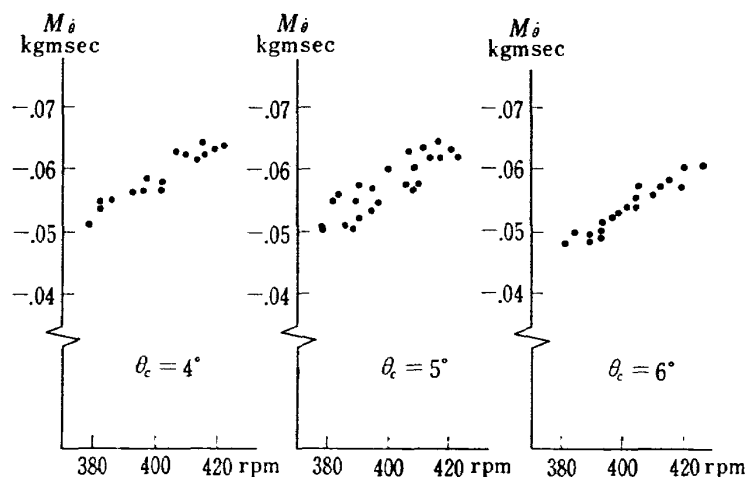
第 22 図 3 枚のプレートをもつロータのピッチ
ダンピング測定値
 $R_2' = 0.800\text{m}$ $b' = 0.024\text{m}$
 $p = 0.756\text{ c/s}$



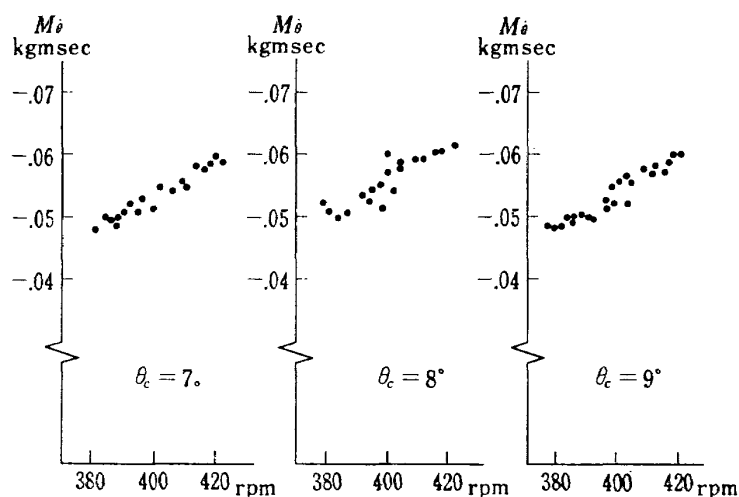
第 24 図 3 枚のプレートをもつロータのピッチ
ダンピング測定値
 $R_2' = 0.800\text{m}$ $b' = 0.024\text{m}$
 $p = 0.756\text{ c/s}$



第 25 図 3 枚のプレートをもつロータのピッチ
ダンピング測定値
 $R_2' = 0.800\text{m}$ $b' = 0.024\text{m}$
 $p = 0.756\text{ c/s}$



第 26a 図 C ブレードのロータ回転速度 400 rpm 付近におけるピッチダンピング
 $R_2' = 0.800\text{m}$ $b' = 0.024\text{m}$ $p = 0.756\text{ c/s}$



第 26b 図 C ブレードのロータ回転速度 400 rpm 付近におけるピッチダンピング
 $R_2' = 0.800\text{m}$ $b' = 0.024\text{m}$ $p = 0.756\text{ c/s}$

実験値を概観すると次のようなことがわかる。

- 1) ピッチダンピングはロータの回転数に線形に比例して増加するのではなく、一層急激に増加する。
- 2) 同じピッチ角、同じロータ回転数のもとでは、Bブレードのピッチダンピングが最も大きく、Cブレード、Dブレードの順に小さくなる。
- 3) 実験点がかなり散らばる場合とほとんど散らばらない場合がある。
- 4) Bブレード、Cブレードではピッチ角が 10° になるとピッチダンピングはかなり減少し、Dブレードでは 8° になると減少する。
- 5) Dブレードではロータの回転数の増加に伴うピッチダンピングの増し方が他の場合よりも著し

い。

既に述べた一連の測定に加えて、Cブレードについて回転数 400 rpm 付近でピッチ角を 4° から 9° まで変えてピッチダンピングの変化する様子を調べた。その結果を第26図に示す。

全ての実験値について、2枚のブレードの場合と同様ピッチダンピングは(2)式の示す値よりずっと小さい。

1.3 ピッチダンピングの空力弾性学的解析

既に述べたように、他の条件が全く同じであってもブレードの曲げ剛性が変わるとピッチダンピングはかなり大幅に変る。そこでブレードの曲げ剛性とピッチダンピングの間の関係を明らかにしておきたい。

内藤の研究によれば、幾何学的形状が同一のロータ

ブレードを同じピッチ角, 同じ回転数でまわしている場合に, ブレードの一次曲げ固有振動数が小さいほどピッチダンピングは大きいことが知られている。又, ピッチダンピングはロータの回転数に線形に比例して増すのではなく, 回転数が高いほどピッチダンピングの増加率が高い。

Townsent の研究によれば, 曲げ及び捩りの変形が全く起らないブレードの場合にはピッチダンピングは (1) 式のようにロータの回転数に線形に比例している。

この2つの事柄を併せて考えると, 実際のブレードのピッチダンピングは, 回転数に線形に比例する部分と, 回転数に対して非線形な変化をする部分に分かれると思われる。前者は Townsent が仮定したように, 弾性変形が生じないようなロータブレードに於て発生するピッチダンピングであって, ロータ面がピッチング運動をすることによって直接発生する。これに対して後者はロータのピッチング運動に伴って, ブレードに弾性変形が生じるが, その変形を介して発生する。従って, 後者はブレードの一次曲げ固有振動数の影響を強くうける。

仮に実際のロータのピッチダンピングがこの2者に整然と分離できるものとすれば, そのうち前者, 即ちロータ面がピッチング運動をすることによって直接発生するピッチダンピング, $M_{\theta R}$ は, ロータ回転数に線形に比例し, 全てのブレードについて, ロータ回転数, ピッチ角, 幾何学的条件が同じならば同一の値に

なるはずである。このブレードの変形と無関係な部分をピッチダンピングの実験データから抽出し, Townsent の計算値と比較する方法を考えよう。

ロータブレードに働らく空気力は準定常2次元理論を用いて簡単に計算できるものとし, ブレードの曲げ弾性変形が生じることを考慮して, Rayleigh-Ritz の方法によってこの問題を解析した。ロータの回転角速度が一定値 Ω であり, ロータ面が $\theta = \bar{\theta} \sin pt$ であらわされるシニユソイダルなピッチング運動をする場合について考える。ピッチングに伴って発生するブレードの曲げ弾性変形を求めた。次いでピッチング軸まわりに発生するモーメントの経時変化からピッチダンピングを計算した。空気力はブレードの中心線上に働らく, 質量も中心線上に集中しているとする。ブレードは曲げ変形のみを生じ, 伸びないものとする。曲げモードは簡単なものを仮定した。

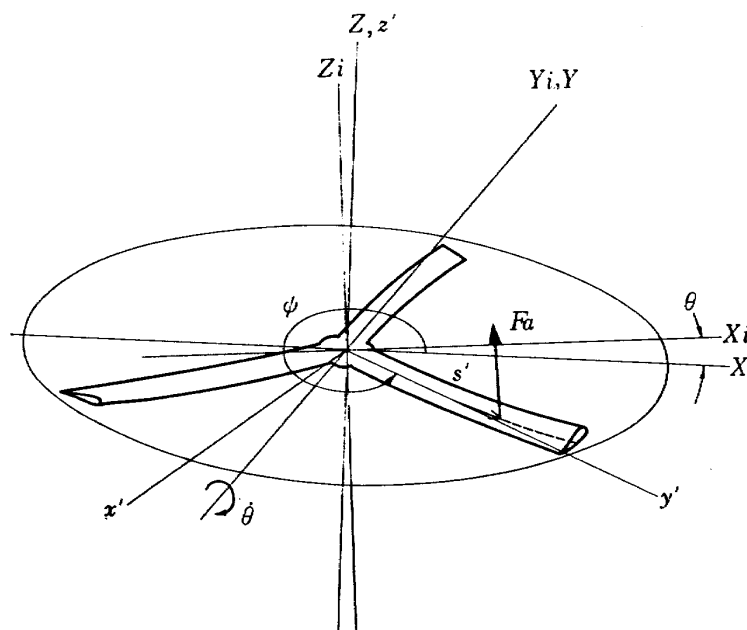
第27図に, 解析にあたって用いた XYZ 座標系と $x'y'z'$ 座標系を空間固定の $X_iY_iZ_i$ 座標系と対照して示してある。 XYZ 系はピッチング角速度 $\dot{\theta}j$ をもつ動座標系である。 $x'y'z'$ 座標系はピッチング軸とシャフト軸のまわりで回転する動座標系で, その角速度は,

$$\dot{\theta}j + \Omega k = -\dot{\theta} \cos \phi_q i_q^* + \dot{\theta} \sin \phi_q j_q^* + \Omega k_q^* \quad (1.4)$$

である。ブレード上の点の位置ベクトル r は,

$$r = y'_q j_q^* + z'_q k_q^* \quad (1.5)$$

と書ける。同じ点の速度ベクトル v は



第 27 図 ピッチングにともなう生じるブレードの曲げ変形

$$\begin{aligned} \mathbf{v} = & (z'_q \dot{\theta} \sin \phi_q - y'_q \Omega) \mathbf{i}_q^* \\ & + (\dot{y}'_q + z'_q \dot{\theta} \cos \phi_q) \mathbf{j}_q^* \\ & + (\dot{z}'_q - y'_q \dot{\theta} \cos \phi_q) \mathbf{k}_q^* \end{aligned} \quad (1.6)$$

と書ける。

ブレードに沿ってハブの中心から先端に向かって測った長さを s' とする。0 番から $Q-1$ 番までである Q 本のブレードの運動エネルギーは、

$$T = \sum_{q=0}^{Q-1} \frac{1}{2} \int_0^{s'} \nu |\mathbf{v}_q|^2 ds' \quad (1.7)$$

ブレードが曲げ変形をすると、ブレード内に歪エネルギー

$$U = \sum_{q=0}^{Q-1} \frac{1}{2} \int_0^{s'} EI \left(\frac{\partial^2 z'_q}{\partial s'^2} \right)^2 ds' \quad (1.8)$$

が蓄えられる。

次にブレードに働く空気力を考える。空気力がブレード中心線に垂直に働き、 z' 軸を含む面内にあると仮定する。このことはブレードに働く抗力を無視していることになるが、ピッチダンピングに対する抗力の寄与は 2 次の微小量であるからである。ブレードの長さ ds' の部分に働く空気力の大きさは、

$$F_{Aq} ds' = \rho a b' y_q'^2 \Omega^2 \left(\theta_0 - \frac{\dot{z}'_q - y'_q \dot{\theta} \cos \phi_q + v_i}{y' \Omega} \right) ds' \quad (1.9)$$

である。

空気力ベクトルの $x'y'z'$ 座標系に対する方向余弦ベクトルは

$$-\partial z'_q / \partial s' \mathbf{j}_q^* + \partial y'_q / \partial s' \mathbf{k}_q^*$$

であって空気力ベクトルは

$$F_{Aq} ds' = \left(-F_{Aq} \frac{\partial z'_q}{\partial s'} \mathbf{j}_q^* + F_{Aq} \frac{\partial y'_q}{\partial s'} \mathbf{k}_q^* \right) \quad (1.10)$$

ブレードの曲げモード関数を $\mu_{(s)}$ とする。この時ブレードの変形は一般座標 f を用いて、

$$z'_q = S' \mu(s) f_q \quad (1.11-1)$$

$$y'_q = S' \int_0^s \sqrt{1 - (d\mu/ds)^2} f_q^2 ds \quad (1.11-2)$$

と書くことができる。

$s=1$ の時 $\mu_{(s)}=1$ となるように $\mu_{(s)}$ をえらぶ。 $S' f_q$ はブレード先端での撓み量である。

ここではロータブレード系のロール運動が拘束され、ロータの回転角速度 Ω が一定である場合を考えているので、ブレードの変形をあらわす Q コの f_q とピッチングをあらわす θ を一般座標と考えて運動を記述する。一般座標に仮想変位 δf_q , $\delta \theta$ が生じた時にブレード上の一点 $(0, y'_q, z'_q)$ に生じる仮想変位

$\delta \mathbf{u}_q$ は、

$$\begin{aligned} \delta \mathbf{u}_q = & \mathbf{r}(f_q + \delta f_q, \theta + \delta \theta) - \mathbf{r}(f_q, \theta) \\ = & \frac{\partial y'_q}{\partial f_q} \delta f_q \mathbf{j}_q^* + \frac{\partial z'_q}{\partial f_q} \delta f_q \mathbf{k}_q^* \\ & + (\delta \theta \mathbf{j}) \times (y'_q \mathbf{j}_q^* + z'_q \mathbf{k}_q^*) \end{aligned}$$

ブレードに働く外力は空気力とピッチングを続けるために外部から加えられるモーメント M_Y を考える。仮想仕事は、

$$\delta W = \sum_{q=0}^{Q-1} \int_{s_R'}^{s'} F_{Aq} \cdot \delta \mathbf{u}_q ds' + [M_Y \mathbf{j}] \cdot [\delta \theta \mathbf{j}]$$

δf , $\delta \theta$ について夫々変分をとると、一般力は

$$Q f_q = -F_{Aq} \frac{\partial z'_q}{\partial s'} \frac{\partial y'_q}{\partial f_q} + F_{Aq} \frac{\partial y'_q}{\partial s'} \frac{\partial z'_q}{\partial f_q} \quad (1.12-1)$$

$$\begin{aligned} Q_\theta = & - \sum_{q=0}^{Q-1} F_{Aq} \frac{\partial z'_q}{\partial s'} z'_q \cos \phi_q \\ & - \sum_{q=0}^{Q-1} F_{Aq} \frac{\partial y'_q}{\partial s'} y'_q \cos \phi_q + M_Y \end{aligned} \quad (1.12-2)$$

ラグランジュの運動方程式は、

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{f}_q} \right) - \frac{\partial T}{\partial f_q} + \frac{\partial U}{\partial f_q} = Q f_q \quad (1.13-1)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial T}{\partial \theta} + \frac{\partial U}{\partial \theta} = Q_\theta \quad (1.13-2)$$

f_q , \dot{f}_q , θ が微小である時には、これらの方程式は近似的に次のように書くことができる。

$$\begin{aligned} \int_0^1 \nu \mu_{(s)}^2 ds \dot{f}_q + \rho a S'^2 \Omega \int_{s_R}^1 \frac{b'}{S'} s \mu^2(s) ds \dot{f}_q \\ + \left\{ \Omega^2 \int_0^1 \nu s \int_0^s \left(\frac{d\mu}{ds} \right)^2 ds ds \right. \\ \left. + \frac{1}{S'^4} \int_0^1 EI \left(\frac{d^2 \mu}{ds^2} \right)^2 ds \right\} f_q \\ = \int_0^1 \nu s \mu_{(s)} ds \cos \phi_q \ddot{\theta} - 2 \int_0^1 \nu s \mu_{(s)} ds \sin \phi_q \Omega \dot{\theta} \\ + \rho a S'^2 \int_{s_R}^1 \frac{b'}{S'} s^2 \mu_{(s)} ds \cos \phi_q \Omega \dot{\theta} \\ + \rho a S'^2 \int_{s_R}^1 \frac{b'}{S'} \left\{ s^2 \Omega^2 \theta_c - s \Omega \frac{v_i}{S'} \right\} \mu_{(s)} ds \end{aligned} \quad (1.14-1)$$

$$\begin{aligned} \sum_{q=0}^{Q-1} \int_{s_R'}^{s'} F_{Aq} s' \cos \phi_q ds' + \sum_{q=0}^{Q-1} \int_0^{s'} (-\nu s' z'_q \Omega^2 \cos \phi_q \\ - \nu \dot{z}'_q s' \cos \phi_q + \nu s'^2 \ddot{\theta} \cos \phi_q \\ - 2 \nu s'^2 \Omega \dot{\theta} \sin \phi_q \cos \phi_q) ds' = M_Y \end{aligned} \quad (1.14-2)$$

これで、ロール運動を拘束されたロータブレードがロータ回転角速度一定の条件の下で外部よりピッチングモーメント M_Y を加えられて、シニユソイダルなピッチング $\theta = \bar{\theta} \sin pt$ を続ける場合のフラッピングの運動方程式と必要なピッチングモーメント M_Y を

求める式を得た。 A_1, A_2, D_1, D_2, A_3 を以下のよう
に定義する。

$$A_1 \equiv \rho a S'^2 \int_{s_R}^1 \frac{b'}{S'} s \mu_{(s)}^2 ds / \int_0^1 \nu \mu_{(s)}^2 ds$$

$$A_2 \equiv \rho a S'^2 \int_{s_R}^1 \frac{b'}{S'} s^2 \mu_{(s)}^2 ds / \int_0^1 \nu \mu_{(s)}^2 ds$$

$$D_1 \equiv \int_0^1 \nu s \mu_{(s)} ds / \int_0^1 \nu \mu_{(s)}^2 ds$$

$$D_2 \equiv \int_0^1 \nu s \int_0^s \left(\frac{d\mu}{ds} \right)^2 ds ds / \int_0^1 \nu \mu_{(s)}^2 ds$$

$$A_3 \equiv \rho a S'^2 \int_{s_R}^1 \frac{b'}{S'} \left\{ s^2 \Omega^2 \theta_c - s^2 \Omega \frac{v_i}{S'} \right\} \mu_{(s)} ds / \int_0^1 \nu \mu_{(s)}^2 ds$$

ロータがピッチング運動をしている場合にもロータ面での吹き下ろし v_i が一定値であるとすれば、(14-1) 式の右辺の最後の項は一定でブレードのコニングを決定するものである。

実際のブレードで EI の分布、曲げモードを正確に求めて

$$\int_0^1 EI \left(\frac{d^2 \mu}{ds^2} \right)^2 ds / S'^4$$

を計算することは著しく困難であるから、次の方法を用いる。静止したブレードでは (1.14-1) に対応して

ブレードの曲げ振動方程式は、

$$\int_0^1 \nu \mu_{(s)}^2 ds \ddot{f} + \frac{1}{S'^4} \int_0^1 EI \left(\frac{d^2 \mu}{ds^2} \right)^2 ds f = 0 \quad (1.15)$$

と書ける。静止したブレードの 1 次曲げ固有振動数は容易に測定できる。これを ω_B とすると、

$$\omega_B^2 = \frac{1}{S'^4} \int_0^1 EI \left(\frac{d^2 \mu}{ds^2} \right)^2 ds / \int_0^1 \nu \mu_{(s)}^2 ds \quad (1.16)$$

ω_B と先に定義した A_1, A_2, D_1, D_2, A_3 を用いると、(1.14-1) 式は

$$\begin{aligned} \ddot{f}_q + A_1 \Omega \dot{f}_q + \left(D_2 + \frac{\omega_B^2}{\Omega^2} \right) \Omega^2 f_q \\ = D_1 \cos \phi_q \ddot{\theta} - 2D_1 \sin \phi_q \Omega \dot{\theta} + A_2 \cos \phi_q \Omega \dot{\theta} + A_3 \end{aligned} \quad (1.17)$$

と書ける。ピッチダンピングの問題では加振々動数は Ω 程度であり、 $\sqrt{D_2 + \frac{\omega_B^2}{\Omega^2}} \Omega$ は Ω より大きい。 $\theta = \bar{\theta} \sin pt$ の場合には (1.17) 式の特解は、

$$\begin{aligned} f_q = & f_{s+} \sin(\phi_q + pt) + f_{c+} \cos(\phi_q + pt) \\ & + f_{s-} \sin(\phi_q - pt) + f_{c-} \cos(\phi_q - pt) \end{aligned} \quad (1.18)$$

ここに $p \equiv p/\Omega$ を用いて $f_{s+}, f_{c+}, f_{s-}, f_{c-}, of$ を書く。

$$f_{s+} = \frac{-D_1 p (1+p/2) \{ D_2 + \omega_B^2 / \Omega^2 - (1+p)^2 \} + \frac{1}{2} A_1 A_2 p (1+p)}{\{ D_2 + \omega_B^2 / \Omega^2 - (1+p)^2 \}^2 + A_1^2 (1+p)^2} \bar{\theta} \quad (1.19-1)$$

$$f_{c+} = \frac{A_1 D_1 p (1+p/2) (1+p) + \frac{1}{2} A_1 p \{ D_2 + \omega_B^2 / \Omega^2 - (1+p)^2 \}}{\{ D_2 + \omega_B^2 / \Omega^2 - (1+p)^2 \}^2 + A_1^2 (1+p)^2} \bar{\theta} \quad (1.19-2)$$

$$f_{s-} = \frac{-D_1 p (1-p/2) \{ D_2 + \omega_B^2 / \Omega^2 - (1-p)^2 \} + \frac{1}{2} A_1 A_2 p (1-p)}{\{ D_2 + \omega_B^2 / \Omega^2 - (1-p)^2 \}^2 + A_1^2 (1-p)^2} \bar{\theta} \quad (1.19-3)$$

$$f_{c-} = \frac{A_1 D_1 p (1-p/2) (1-p) + \frac{1}{2} A_1 p \{ D_2 + \omega_B^2 / \Omega^2 - (1-p)^2 \}}{\{ D_2 + \omega_B^2 / \Omega^2 - (1-p)^2 \}^2 + A_1^2 (1-p)^2} \bar{\theta} \quad (1.19-4)$$

$$of = \frac{A_3}{(D_2 + \omega_B^2 / \Omega^2) \Omega^2} \quad (1.19-5)$$

of は coning である。

f_q が求まると、 $z_q', \dot{z}_q', \ddot{z}_q', y_q'$ を求めることができる。(1.14-2) において $\theta = \bar{\theta} \sin pt$ として、 $z_q', \dot{z}_q', \ddot{z}_q', y_q'$ を f_q を用いてあらわすと、 M_Y を求めることができる。ピッチダンピング微係数は付録 A に示した方法を用いると、

$$M_\theta \equiv - \int_0^{2\pi/p} M_Y \dot{\theta} dt / \pi \bar{\theta}^2 p \quad (1.20)$$

(1.14-2) 式を用いると

$$M_\theta = - \int_0^{2\pi/p} \sum_{q=0}^{Q-1} \int_{s_R}^{S'} F_{Aq} s' \dot{\theta} \cos \phi_q ds' / \pi \bar{\theta}^2 p$$

$$\begin{aligned} - \int_0^{2\pi/p} \sum_{q=0}^{Q-1} \int_0^{S'} (-\nu s' z_q' \Omega^2 \cos \phi_q - \nu \ddot{z}_q' s' \cos \phi_q \\ + \nu s'^2 \ddot{\theta} \cos^2 \phi_q - 2\nu s'^2 \Omega \dot{\theta} \sin \phi_q \cos \phi_q) \\ \times ds' \dot{\theta} dt / \pi \bar{\theta}^2 p \end{aligned} \quad (1.21)$$

右辺第 1 項はブレードに働らく空気力が作るモーメントの寄与であり、右辺第 2 項はブレードに働らく慣性力が作るモーメントの寄与である。

計算を実行すると

$$M_\theta = - \frac{Q}{2} \rho a S'^6 \Omega \int_{s_R}^1 s^3 \frac{b'}{S'} ds + \frac{Q}{2} \rho a S'^6 \Omega$$

$$\begin{aligned} & \times \frac{f_{s+}(1+p) + f_{s-}(1-p)}{\bar{\theta}p} \int_{s_R}^1 s^2 \mu \frac{b'}{S'} ds \\ & - \frac{Q}{2} S^3 \Omega \frac{f_{c+}(2p+p^2) + f_{c-}(-2p+p^2)}{\bar{\theta}p} \\ & \times \int_0^1 \nu \mu s ds \end{aligned} \quad (1.22)$$

(1.22) 式右辺の第1項と第2項の和は (1.21) 式右辺第1項と同じものである。(1.22) 式の右辺第3項は (1.21) 式の右辺第2項と同じものである。(1.22) 式の右辺第3項は一見、ロータブレードに空気力が働かない場合にも、ダンピングが発生するかの如き印象を与えるが、実は α を0にすると、 A_1 , A_2 が0になり、(1.19-2), (1.19-4) 式に見るとおり、 f_{c+} ,

f_{c-} は0となる。したがって、(1.22) 式の右辺第3項は0となる。多自由度系のダンピング表示式の中に、慣性項があらわれるのはしばしば見られるところであって、振動減衰器³¹⁾などはその簡単な例である。この項の意味について、付録Cに述べた。

第1節、第2節の実験で求めたピッチダンピングは (1.22) 式の右辺全体に相当するものである。ブレードが曲げ弾性変形を起さない時には、(1.22) 式の右辺第2項、第3項は0となり、ピッチダンピング係数は右辺第1項だけである。これが先にのべたロータ面のピッチングによって直接発生するピッチダンピング $M_{\theta R}$ である。

ここで K_E を次のように定義する。

$$K_E = \frac{M_{\theta}}{M_{\theta R}} = \frac{\left[-\frac{Q}{2} \rho a S^5 \Omega \int_{s_R}^1 s^3 \frac{b'}{S'} ds + \frac{Q}{2} \rho a S^5 \Omega \frac{f_{s+}(1+p) + f_{s-}(1-p)}{\bar{\theta}p} \int_{s_R}^1 s^2 \mu \frac{b'}{S'} ds - \frac{Q}{2} S^3 \Omega \frac{f_{c+}(2p+p^2) + f_{c-}(-2p+p^2)}{\bar{\theta}p} \int_0^1 \nu \mu s ds \right]}{-\frac{Q}{2} \rho a S^5 \Omega \int_{s_R}^1 s^3 \frac{b'}{S'} ds} \quad (1.23)$$

ここで $\mu(s)$ としてはブレードの両端の力学的及び幾何学的条件を満足し且つ最も簡単な形である

$$\mu(s) = 2s^2 - \frac{4}{3}s^3 + \frac{1}{3}s^4 \quad (1.24)$$

を用いることにする。ブレードの弦長と質量分布を一樣とすると、 A_1 , A_2 , D_1 , D_2 は

$$A_1 = \frac{73}{91} \frac{\rho a b' S'}{\nu}$$

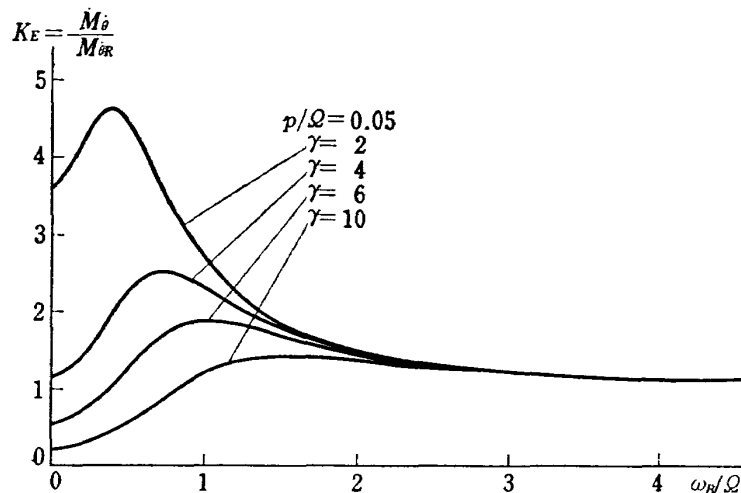
$$A_2 = \frac{639}{728} \frac{\rho a b' S'}{\nu}$$

$$D_1 = \frac{9}{8}$$

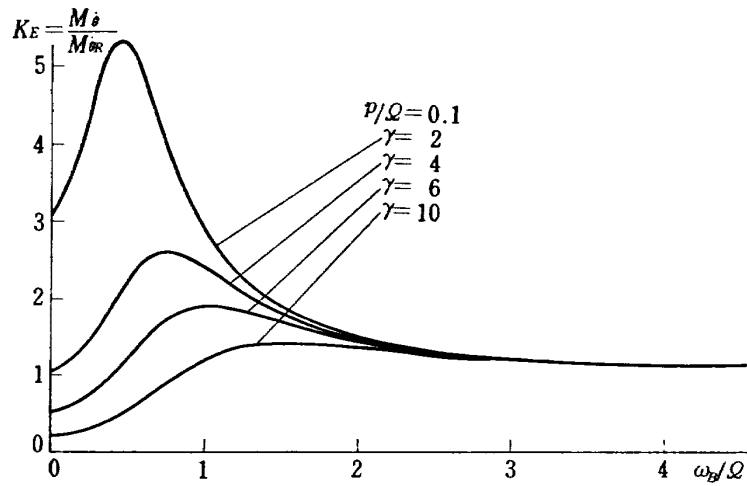
$$D_2 = \frac{61}{52}$$

K_E はロック数 $\gamma = 6 \rho a b' S' / \nu$, ω_B / Ω , p / Ω の函数であって、第28図から第31図に示したように計算できる。

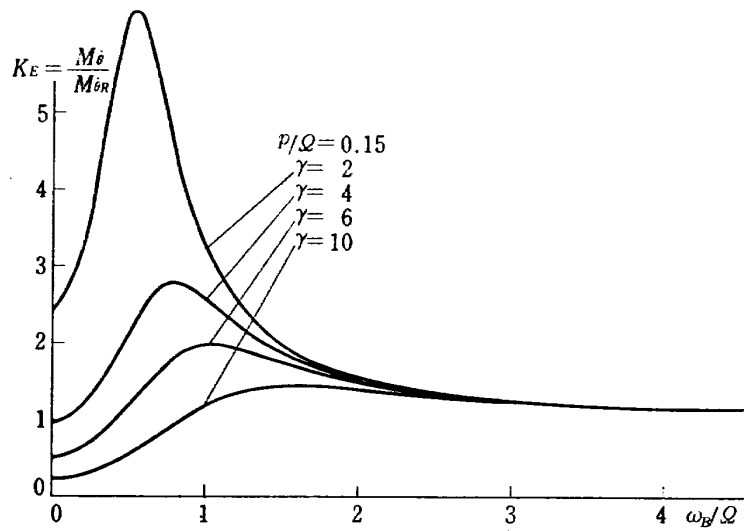
第16図から第27図に示した測定値を対応する K_E で割ると、曲げ変形が全く起らないような仮想的なブレードでのピッチダンピング係数が得られることになる。ピッチダンピング係数の測定値を K_E で割り、更に (2) 式を使って無次元化した。その結果を第32図から第43図に示した。多くの場合無次元化されたピ



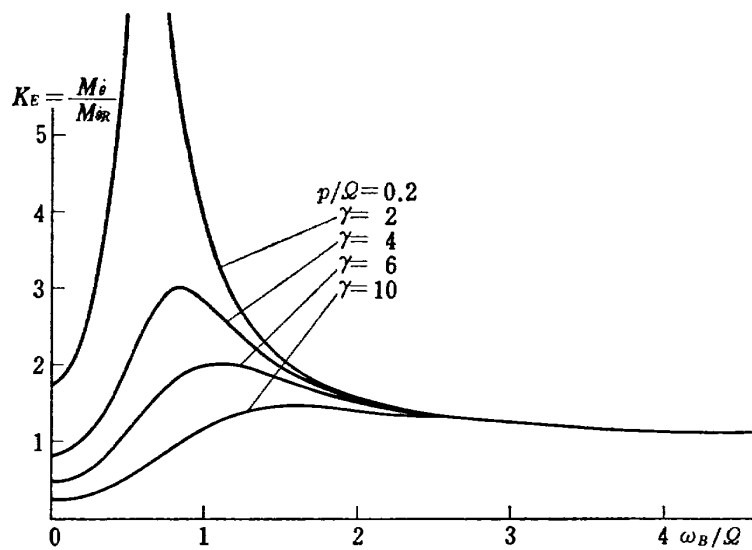
第28図 ピッチダンピングに対するブレードの剛性の影響



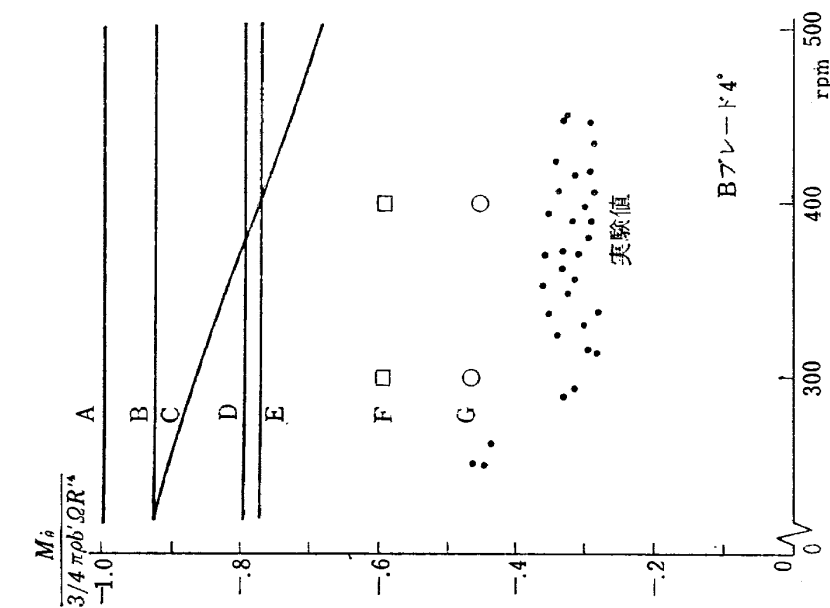
第 29 図 ピッチダンピングに対するブレードの剛性の影響



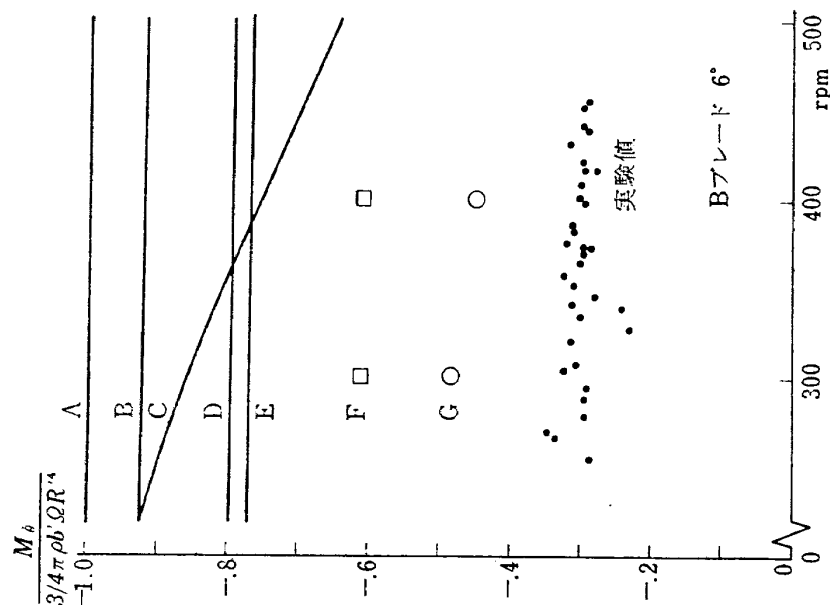
第 30 図 ピッチダンピングに対するブレードの剛性の影響



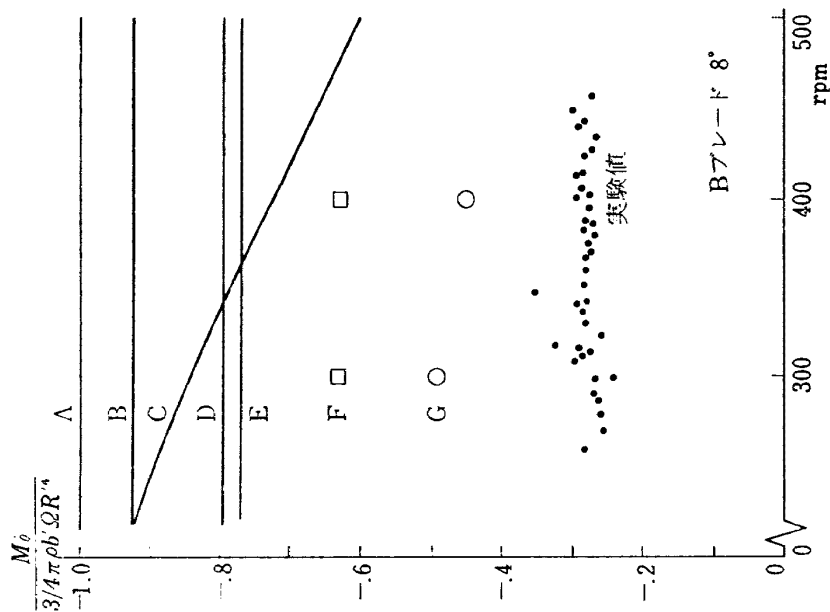
第 31 図 ピッチダンピングに対するブレードの剛性の影響



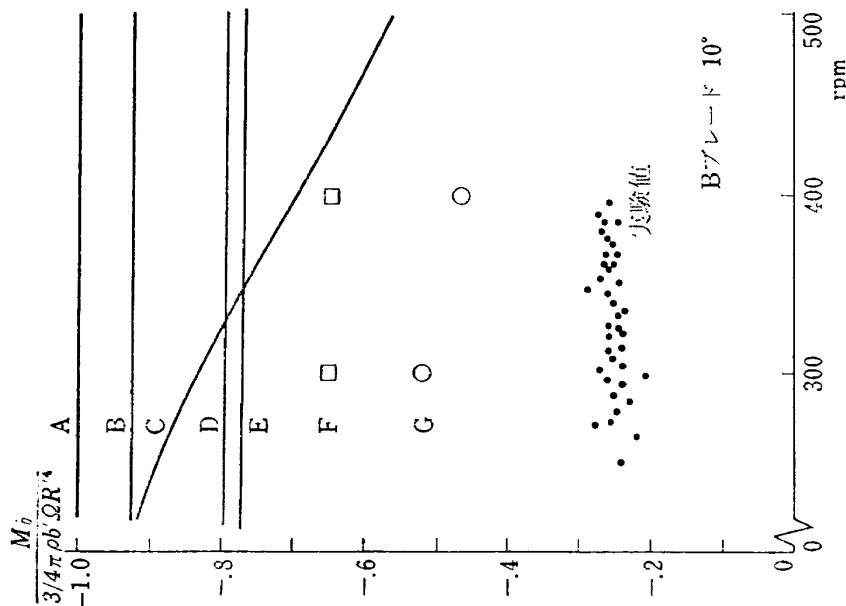
第 32 図 ブレードの曲げ変形の影響を除去し無次元化したピッチングの測定値と種々の理論値の比較
A. 二次元非定常理論 B. 二次元非定常理論
C. 後流中の渦を含めた二次元非定常理論
D. 三次元非定常理論 E. 三次元非定常理論
F. 後流中の渦の影響を含めた三次元非定常理論
G. 後流中の渦とブレードの距離の変動まで含めた三次元非定常理論



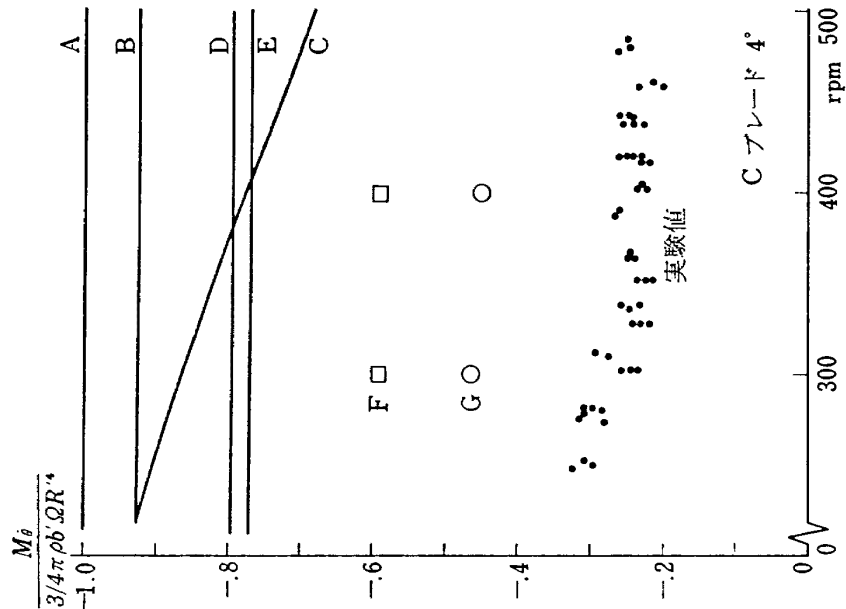
第 33 図 ブレードの曲げ変形の影響を除去し無次元化したピッチングの測定値と種々の理論値の比較
A. 二次元非定常理論 B. 二次元非定常理論
C. 後流中の渦を含めた二次元非定常理論
D. 三次元非定常理論 E. 三次元非定常理論
F. 後流中の渦の影響を含めた三次元非定常理論
G. 後流中の渦とブレードの距離の変動まで含めた三次元非定常理論



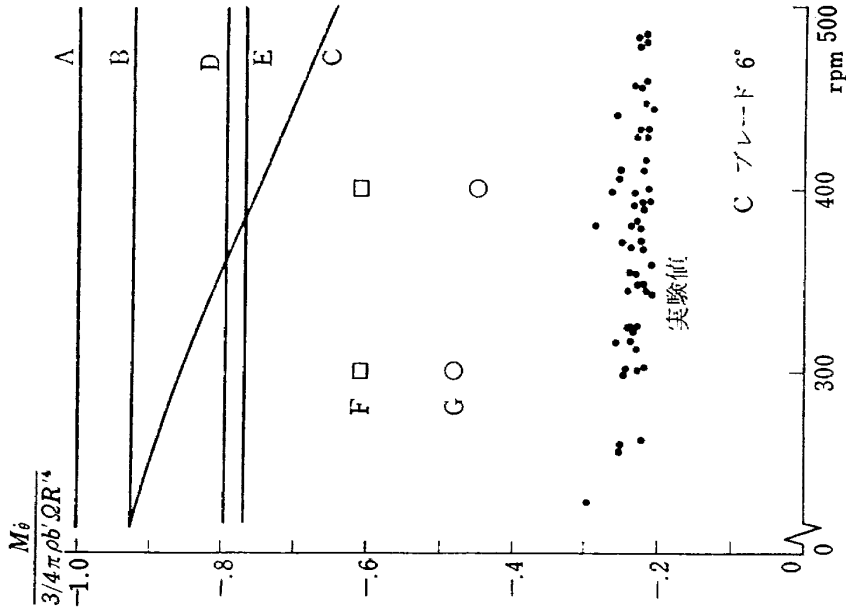
第 34 図 ブレードの曲げ変形の影響を除去し無次元化したピッチングの測定値と種々の理論値の比較
A. 二次元非定常理論 B. 二次元非定常理論
C. 後流中の渦を含めた二次元非定常理論
D. 三次元非定常理論 E. 三次元非定常理論
F. 後流中の渦の影響を含めた三次元非定常理論
G. 後流中の渦とブレードの距離の変動まで含めた三次元非定常理論



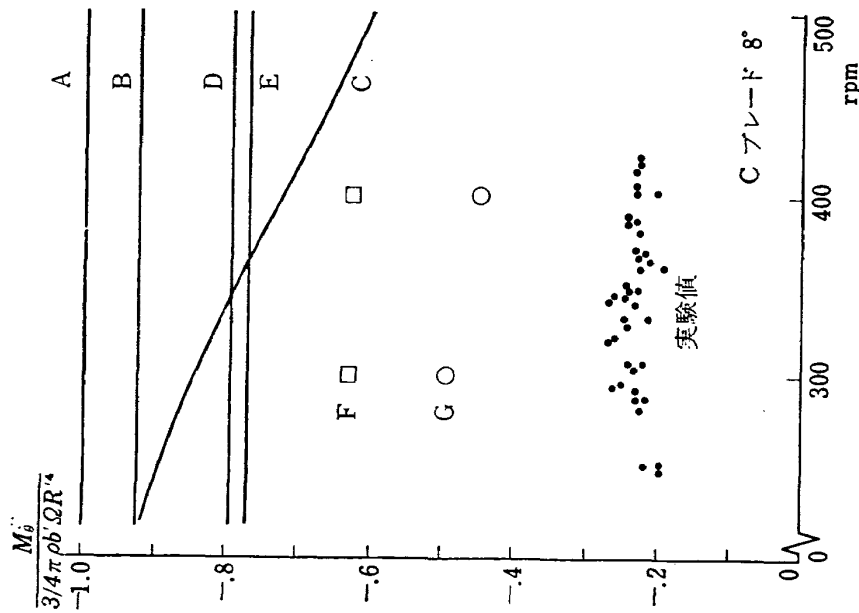
第 35 図 ブレードの曲げ変形の効果を除去し無次元化したピッチダンピングの測定値と種々の理論値の比較
A. 二次元準定常理論 B. 二次元非定常理論 C. 後流中の渦を含めた二次元非定常理論 D. 三次元準定常理論 E. 三次元非定常理論 F. 後流中の渦の影響を含めた三次元準定常理論 G. 後流中の渦とブレードの距離の変動まで含めた三次元準定常理論



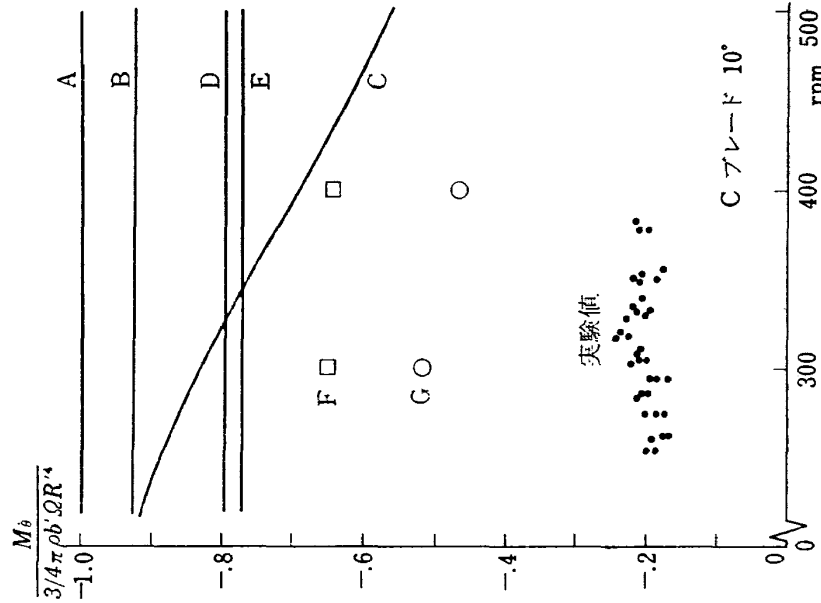
第 36 図 ブレードの曲げ変形の効果を除去し無次元化したピッチダンピングの測定値と種々の理論値の比較
A. 二次元準定常理論 B. 二次元非定常理論 C. 後流中の渦を含めた二次元非定常理論 D. 三次元準定常理論 E. 三次元非定常理論 F. 後流中の渦の影響を含めた三次元準定常理論 G. 後流中の渦とブレードの距離の変動まで含めた三次元準定常理論



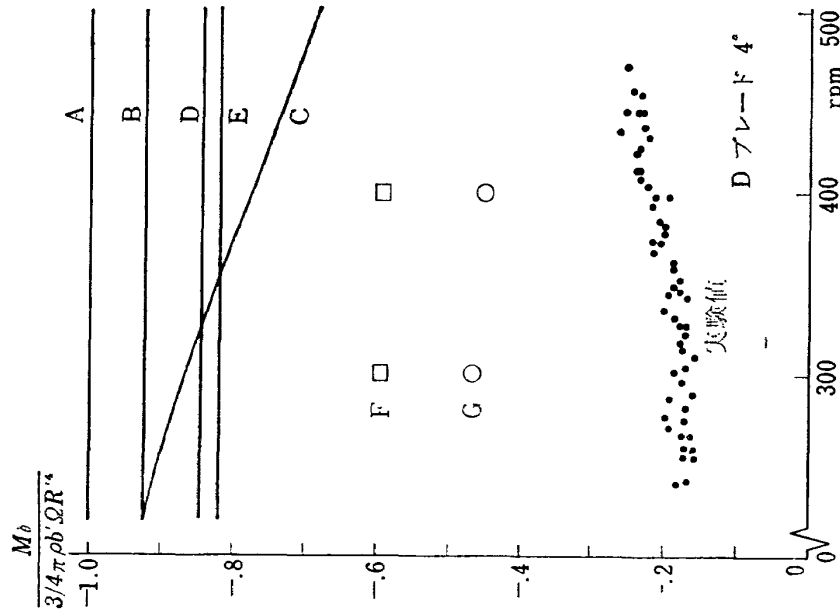
第 37 図 ブレードの曲げ変形の効果を除去し無次元化したピッチダンピングの測定値と種々の理論値の比較
A. 二次元準定常理論 B. 二次元非定常理論 C. 後流中の渦を含めた二次元非定常理論 D. 三次元準定常理論 E. 三次元非定常理論 F. 後流中の渦の影響を含めた三次元準定常理論 G. 後流中の渦とブレードの距離の変動まで含めた三次元準定常理論



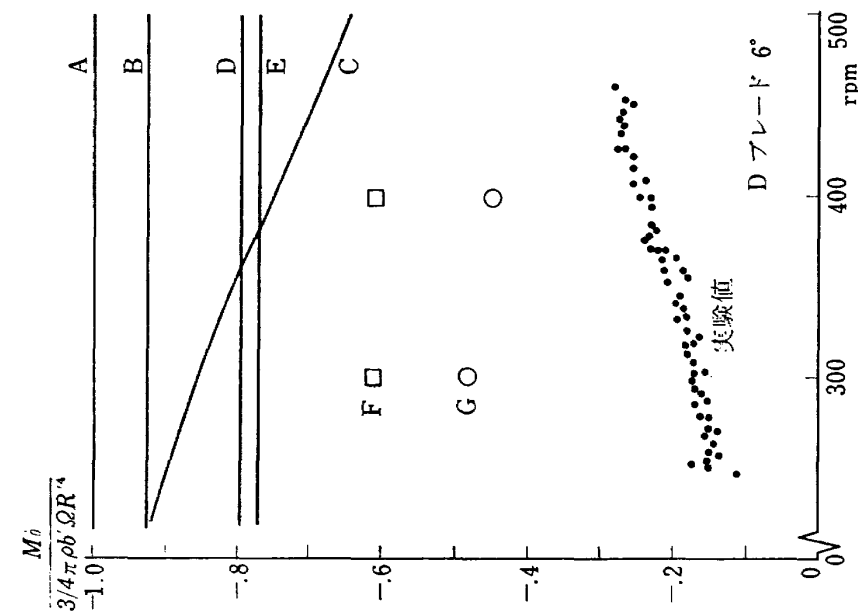
第 38 図 ブレードの曲げ変形の効果を除去し無次元化したピッチングの測定値と種々の理論値の比較
 A. 二次元準定常理論 B. 二次元非定常理論
 C. 後流中の渦を含めた二次元非定常理論
 D. 三次元準定常理論 E. 三次元非定常理論
 F. 後流中の渦の影響を含めた三次元準定常理論
 G. 後流中の渦とブレードの距離の変動を含めた三次元準定常理論



第 39 図 ブレードの曲げ変形の効果を除去し無次元化したピッチングの測定値と種々の理論値の比較
 A. 二次元準定常理論 B. 二次元非定常理論
 C. 後流中の渦を含めた二次元非定常理論
 D. 三次元準定常理論 E. 三次元非定常理論
 F. 後流中の渦の影響を含めた三次元準定常理論
 G. 後流中の渦とブレードの距離の変動を含めた三次元準定常理論

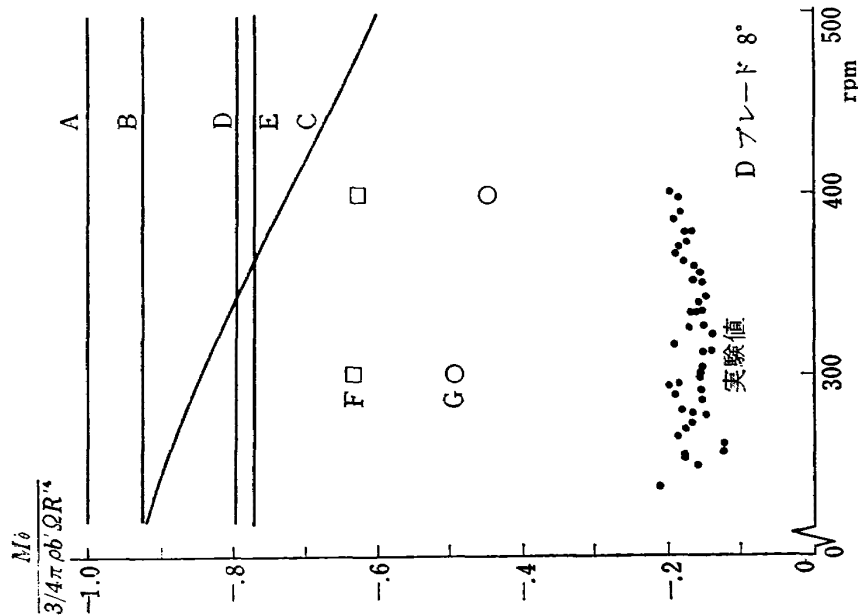


第 40 図 ブレードの曲げ変形の効果を除去し無次元化したピッチングの測定値と種々の理論値の比較
 A. 二次元準定常理論 B. 二次元非定常理論
 C. 後流中の渦を含めた二次元非定常理論
 D. 三次元準定常理論 E. 三次元非定常理論
 F. 後流中の渦の影響を含めた三次元準定常理論
 G. 後流中の渦とブレードの距離の変動を含めた三次元準定常理論



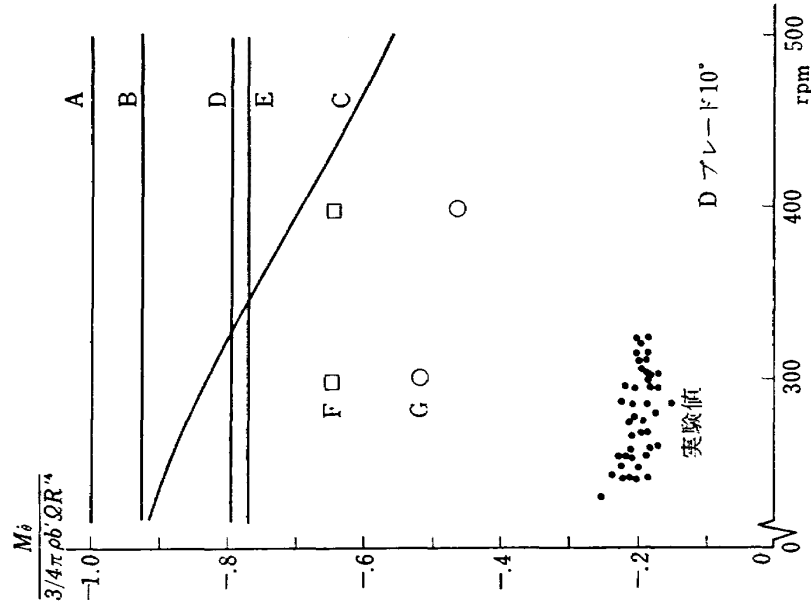
第 41 図 ブレードの曲げ変形の効果を除去し無次元化したピッチダンピングの測定値と種々の理論値の比較

A. 二次元準定常理論 B. 二次元非定常理論
C. 後流中の渦を含めた二次元非定常理論
D. 三次元準定常理論 E. 三次元非定常理論
F. 後流中の渦の影響を含めた三次元準定常理論
G. 後流中の渦とブレードの距離の変動まで含めた三次元準定常理論



第 42 図 ブレードの曲げ変形の効果を除去し無次元化したピッチダンピングの測定値と種々の理論値の比較

A. 二次元準定常理論 B. 二次元非定常理論
C. 後流中の渦を含めた二次元非定常理論
D. 三次元準定常理論 E. 三次元非定常理論
F. 後流中の渦の影響を含めた三次元準定常理論
G. 後流中の渦とブレードの距離の変動まで含めた三次元準定常理論



第 43 図 ブレードの曲げ変形の効果を除去し無次元化したピッチダンピングの測定値と種々の理論値の比較

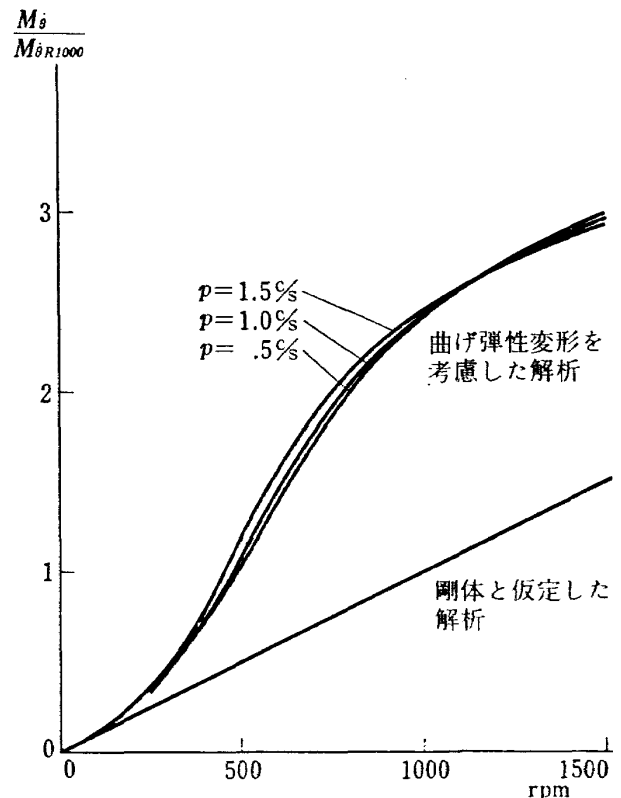
A. 二次元準定常理論 B. 二次元非定常理論
C. 後流中の渦を含めた二次元非定常理論
D. 三次元準定常理論 E. 三次元非定常理論
F. 後流中の渦の影響を含めた三次元準定常理論
G. 後流中の渦とブレードの距離の変動まで含めた三次元準定常理論

ッチダンピング微係数はロータ回転数が変わってもほぼ一定値になっていることが、これらの図からわかる。このことから、ピッチダンピングは、ブレードの弾性変形を介して発生する部分 $M_{\theta E}$ とロータ面のピッチングによって直接発生する部分 $M_{\theta R}$ に分離できるとしてよいと考えられる。第32図から第43図に示した値は全てのブレードについて同一の値にはなっていないが、その理由は実験に伴う測定誤差のほかに、 K_E を求めるにあたり、簡単な形の空気力と曲げモードを仮定したためである。

さて、第32図から第43図をみると、ロータ面のピッチングによって直接発生するピッチダンピングは(2)式を用いて計算される値の1/4程度であることがわかる。(2)式は二次元準定常理論によって求められる空気力を使ってストリップ理論でピッチダンピングを計算したものである。それゆえ、ピッチダンピングを求める問題において、空気力をこのような簡単な方法で求めることは妥当ではないことが知られた。ピッチダンピングを支配する空気力が2次元準定常理論によって計算される空気力の1/4程度であるということは、そこに独特の空気力発生の機構が存在することを示唆している。第2章以下ではブレードに曲げ変形が生じないものとして、ピッチダンピングを支配する空気力を追求し、第32図から第43図に示された実験値との比較を行なう。

ブレードの弾性変形の為にピッチダンピングが変化する事情が明らかになったが、具体的なロータブレードの一例について、弾性変形によるピッチダンピングが増加する様子を示しておく。第44図は、ブレードの一次曲げ固有振動数 ω_B が 1,000 rpm, γ が2である場合について、ロータ回転角速度 Ω を変化させて、ピッチダンピングが変化する様子を示したものである。ブレードの弾性変形が起らない場合にはピッチダンピングが回転数に線形に比例するのに対して、弾性変形がある場合には、回転数に非線形なピッチダンピングの増分が加わることがわかる。

ブレードに弾性変形があるときを考える時には、ピッチダンピングは、 Ω のみならず、 p/Ω , ω_B/Ω , γ の関数である。第28図から第31図には p/Ω を 0.05, 0.1, 0.15, 0.2 とした各場合について、 $M_{\theta}/M_{\theta R}$ の値が ω_B/Ω と γ の変動によって、変る様子を示した。 $M_{\theta}/M_{\theta R}$ はいずれの場合にも ω_B/Ω が1付近で急激に大きくなることがわかる。勿論本節でおこなった解析は曲げモードを(1.24)式のように仮定したものであって ω_B/Ω が0に近い部分では意味がない。 γ が



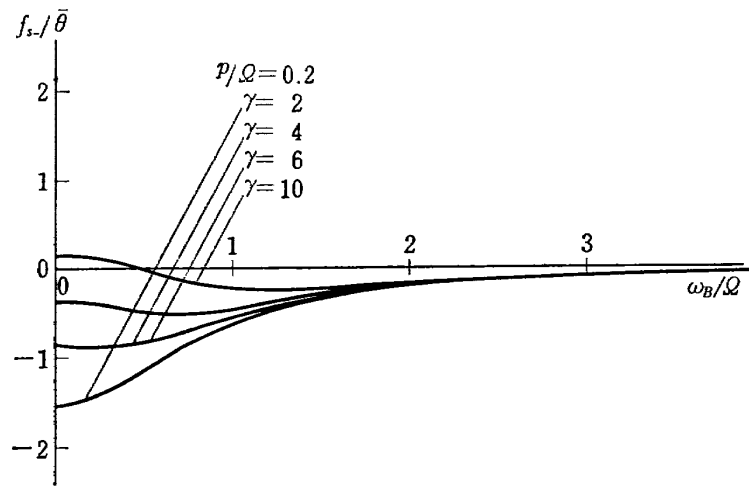
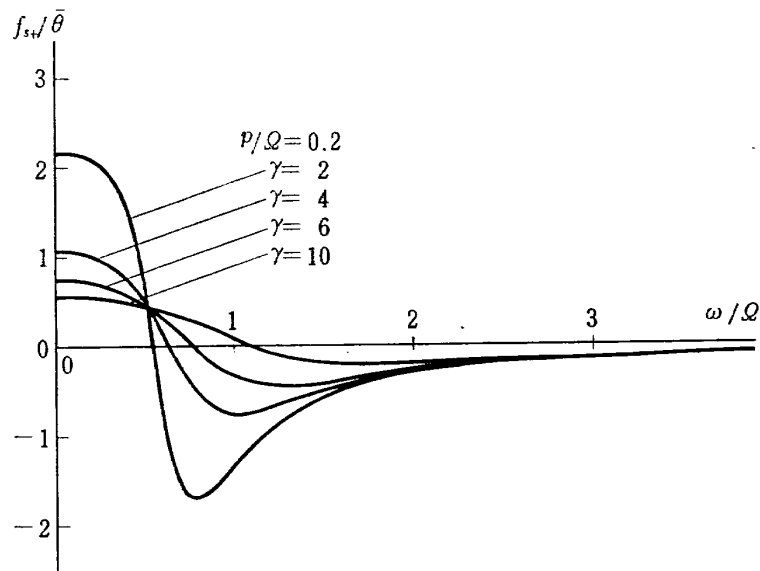
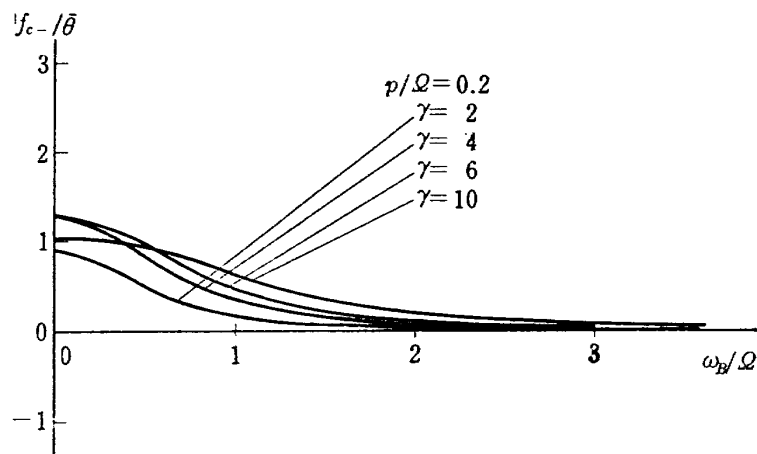
第44図 あるロータブレードについてロータ回転数の増加に伴うピッチダンピングの変化

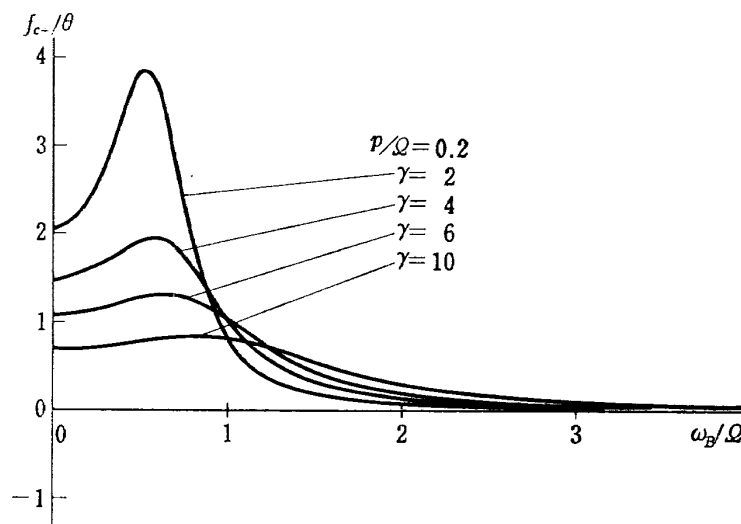
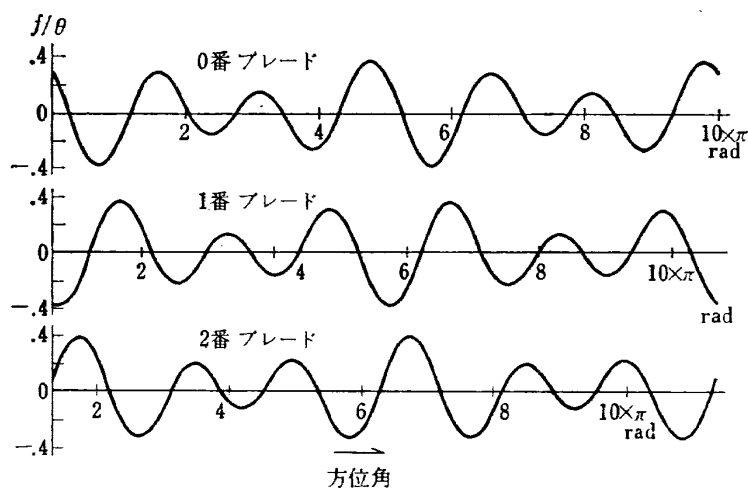
大きく、ブレードに働くコリオリの力に比べて空気力の寄与が大きい場合には、弾性変形によるピッチダンピングの増加は大きくならないことがわかる。第45図から第48図にはブレードの弾性変形をあらわすパラメータ f_{S-} , f_{S+} , f_{C-} , f_{C+} が ω_B/Ω と γ によって変動する様子を示した。やはり ω_B/Ω が大きい値から1に近づくにつれて、弾性変形が増加する様子が知られる。第49図には、 $\Omega=600$ rpm, $p=2$ c/s, $\omega_B=600$ rpm, $\gamma=4$ の場合に3枚のブレードの曲げ変形が時間と共に変動する様子を示した。

1.4 ロータの煙実験

飛行機のプロペラやヘリコプタのロータからはたえず渦が発生し、後流中には渦がラセン形をなして存在すると考えられている。実際飛行艇の離水時に波しぶきがプロペラの先端部分から生じた渦のまわりに集ってラセン形が見えとか、湿度の高い日にヘリコプタロータのブレードの先端部分から生じた、いわゆるティップボルテックス中の水蒸気が凝結してラセン形の渦が観測されることがある¹⁰⁾。

Gray¹¹⁾ はブレード内に埋め込んだ綿に四塩化チタンを浸み込ませて煙を出し、ヘリコプタロータのティップボルテックスの撮影を行っている。


 第 45 図 ブレードの曲げ変形のうち $\sin(\Omega-p)t$ の成分

 第 46 図 ブレードの曲げ変形のうち $\sin(\Omega+p)t$ の成分

 第 47 図 ブレードの曲げ変形のうち $\cos(\Omega-p)t$ の成分

第 48 図 ブレードの曲げ変形のうち $\cos(\Omega + p)t$ の成分第 49 図 ブレードの曲げ変形の経時変化 $\Omega=600$ rpm, $p=2$ c/s, $\omega_B=600$ rpm, ロック数 4

Simons, Pacifico & Jones¹²⁾ はロータにケロシンの微細な霧をふきつけてティップボルテックスの撮影を行っている。

Jenny, Olson & Landgrebe¹⁰⁾ は硫化アンモニウムを用いてティップボルテックスのみならず内側の渦層まで撮影している。

これらの研究によってブレードの先端に近い部分から発生する渦は速かに巻き上ってティップボルテックスを形成することが知られている。しかしより内側から出る渦が後流中で如何なる有様になるかははっきりしない。ブレードの断面の設定ピッチ角と回転数を変えた場合にブレードと渦の相対的な位置関係も論じら

れているが、ブレードの寸法、振り下げの量によってどう変わるかについては明らかにされていない。

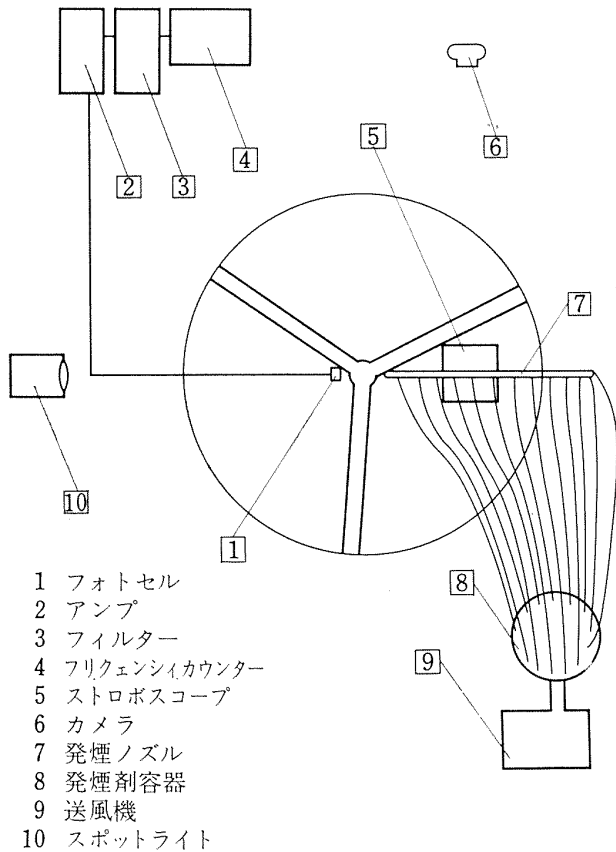
そこで3枚のブレードをもつロータについて煙実験を行なった。実験装置の配置図を第50図に示す。ロータの回転数の設定はフリークエンシカウンタを用いて行なった。ロータの回転数の値が所定の値になったところでストロボを同調し、スポットライトを消して発煙し撮影を行なった。発煙方法は四塩化チタン液に空気を吹き込んでノズルに導きロータの上流側からゆるやかに吹き出すと空気中の水蒸気によって四塩化チタンの微細な結晶を生じるものである。ノズルに粉末結晶が付着しないように、ビニルパイプに直径

4 mm の穴を多数うがったものを用いた。

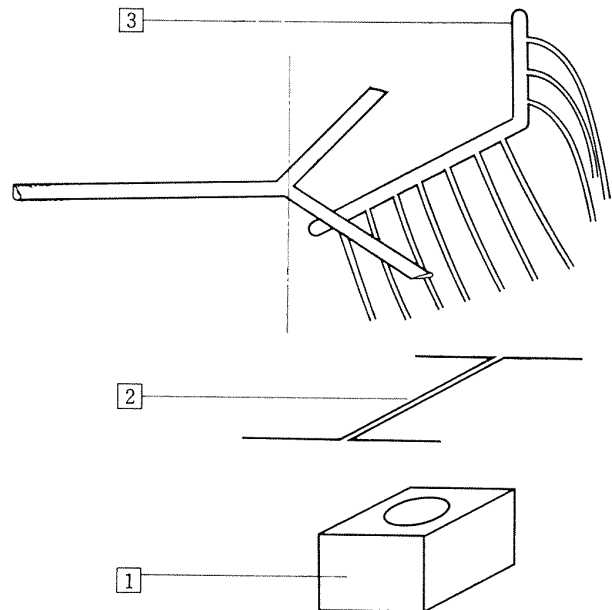
ロータの回転数は 300 rpm 及び 400 rpm とし、ブレードのピッチ角は 0° , 4° , 8° , 12° , 16° について行なった。代表的な渦の写真を第51図に示す。写真から

測定した渦の位置を第52図に示す。第52 a 図は翼端渦の位置を示し右上から第1層, 第2層, 第3層のグループに分かれる。第52 b 図は内側の渦の半径 $2/3 \cdot R$ の位置での軸方向の渦の位置をあらわしたものである。翼端渦と同様3グループに分かれている。

測定した渦の位置をもとにしてホバリング状態のロータの後流での渦のモデルを作ることができる。第53図にそれらを示す。



第 50 a 図 煙実験装置配置図

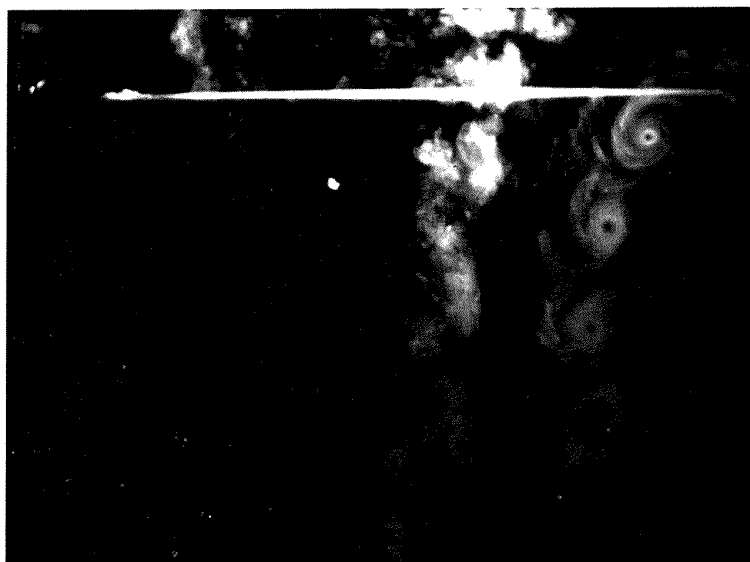


第 50 b 図 照明方法と発煙ノズル略図

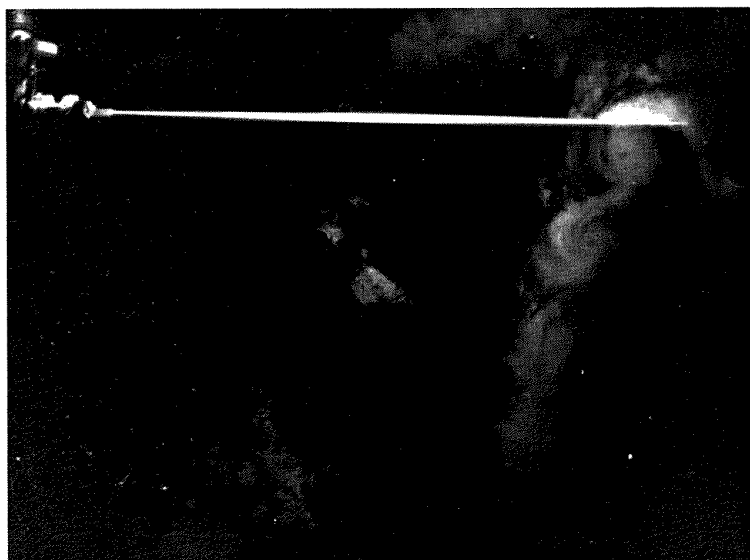
- 1 ストロボスコープ
- 2 スリット
- 3 発煙ノズル



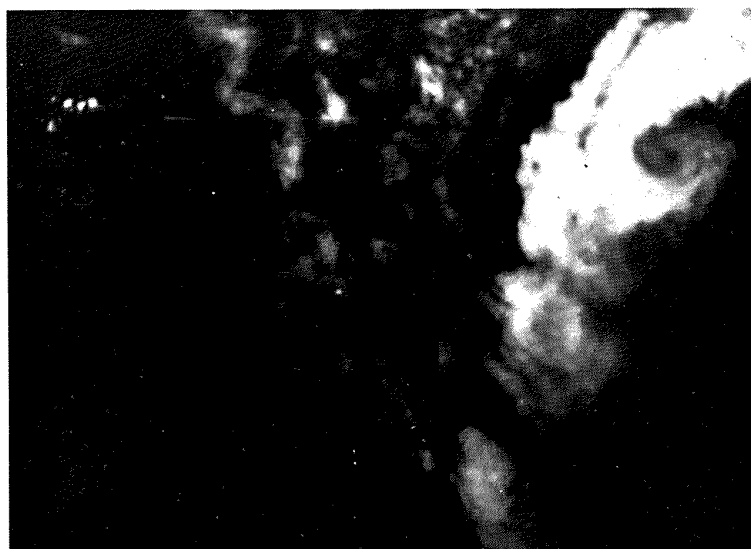
第 51 a 図 ブレード後流の模様 (400 rpm, 0°)



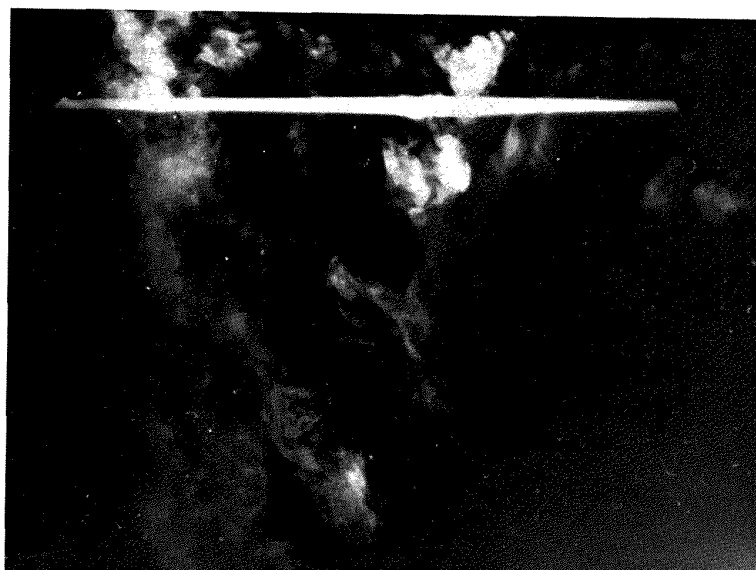
第 51 b 図 ブレード後流の渦 (300 rpm, 4°)



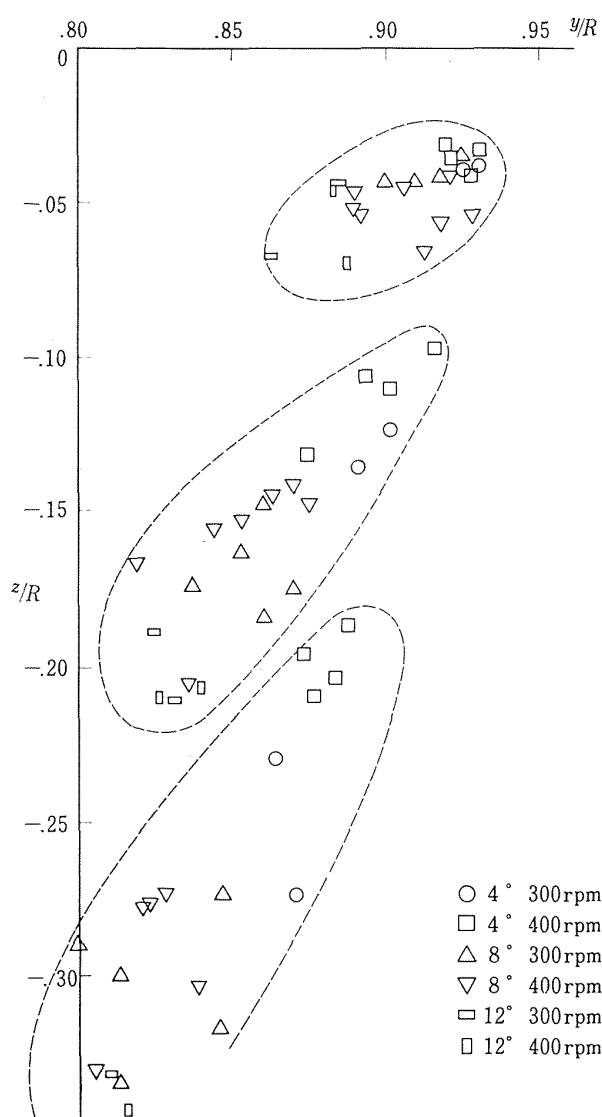
第 51 c 図 ブレード後流の渦 (300 rpm, 8°)



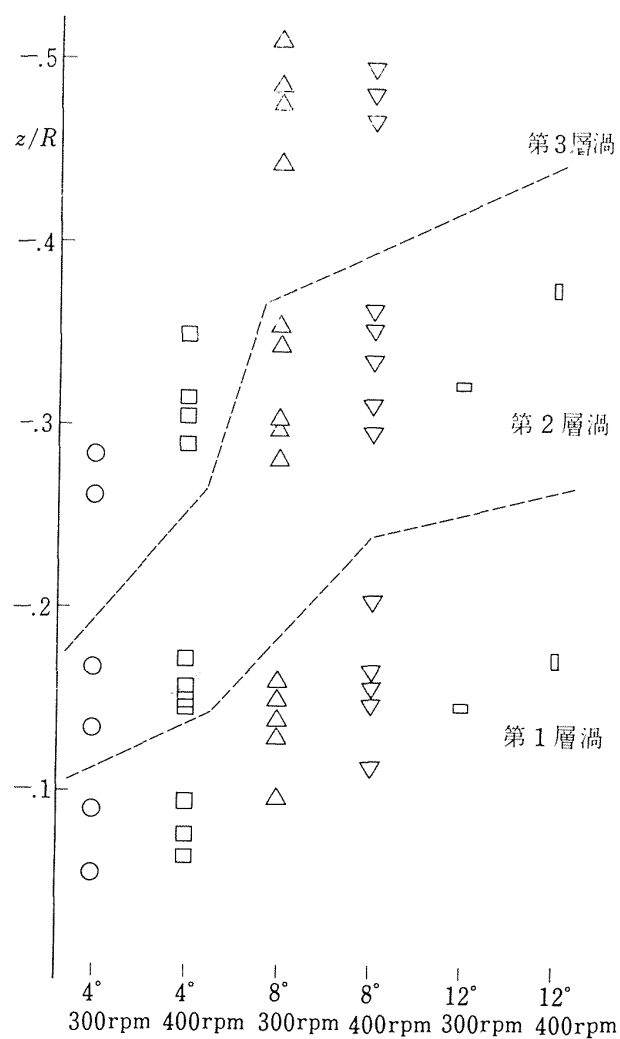
第 51 d 図 ブレード後流の渦 (300 rpm, 12°)



第 51 e 図 ブレード後流の渦 (300 rpm, 16°)



第 52 a 図 ホバリング状態における翼端渦の位置



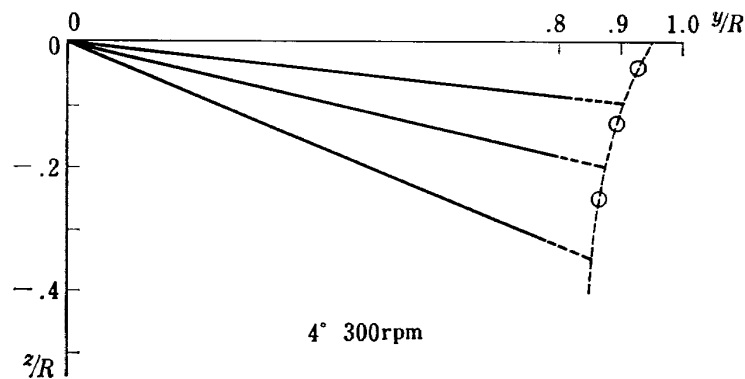
第 52 b 図 ホバリング状態における $y'=2/3 \cdot R_2'$ での内側渦層の軸向の位置

第 4 表 内側の渦の縮流率

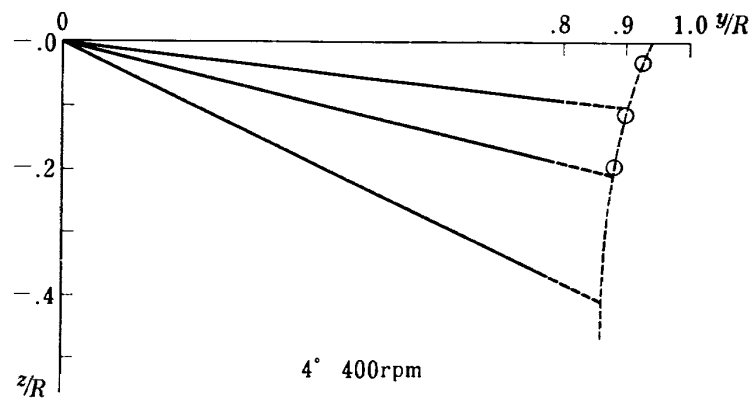
		300 rpm		400 rpm	
		半径方向	軸 方 向	半径方向	軸 方 向
4°	第 1 層	0.943	0.111	0.950	0.107
	第 2 層	0.908	0.240	0.912	0.228
	第 3 層	0.899	0.368	0.913	0.433
6°	第 1 層	0.935	0.136	0.934	0.147
	第 2 層	0.899	0.296	0.896	0.316
	第 3 層	0.874	0.492	0.869	0.524
8°	第 1 層	0.928	0.160	0.918	0.189
	第 2 層	0.890	0.352	0.880	0.406
	第 3 層	0.848	0.617	0.825	0.618
10°	第 1 層	0.921	0.185	0.902	0.229
	第 2 層	0.882	0.406	0.865	0.495
	第 3 層	0.822	0.739	0.783	0.711

第 5 表 翼端渦の位置

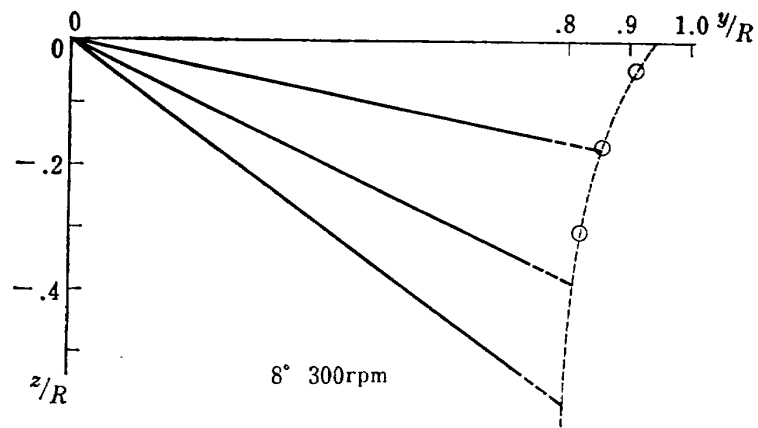
		300 rpm		400 rpm	
		半径方向	軸 方 向	半径方向	軸 方 向
4°	第 1 層	0.929	0.037	0.928	0.040
	第 2 層	0.892	0.131	0.896	0.114
	第 3 層	0.861	0.254	0.871	0.205
6°	第 1 層	0.916	0.040	0.916	0.045
	第 2 層	0.874	0.149	0.877	0.135
	第 3 層	0.847	0.276	0.853	0.241
8°	第 1 層	0.903	0.045	0.907	0.052
	第 2 層	0.858	0.167	0.864	0.160
	第 3 層	0.833	0.296	0.837	0.278
10°	第 1 層	0.889	0.050	0.897	0.057
	第 2 層	0.840	0.185	0.848	0.180
	第 3 層	0.818	0.317	0.823	0.315



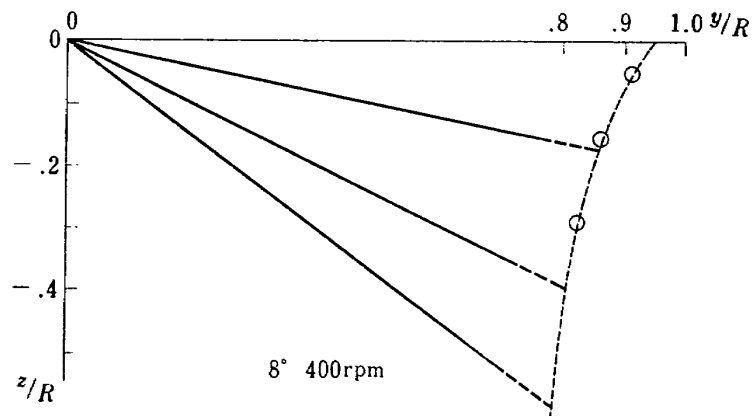
第 53 a 図 煙実験から得られたロータ後流の渦モデル



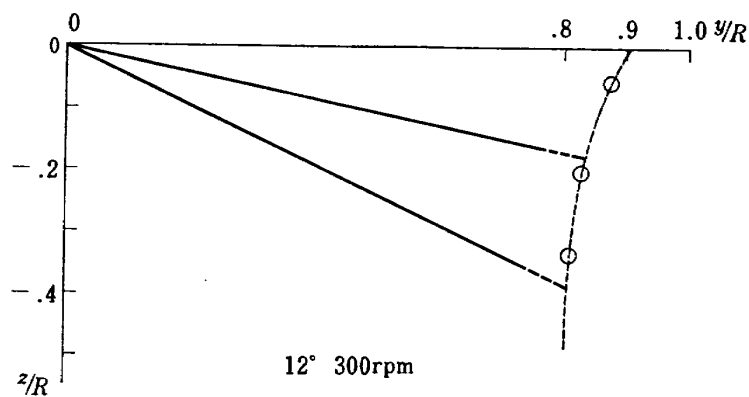
第 53 b 図 煙実験から得られたロータ後流の渦モデル



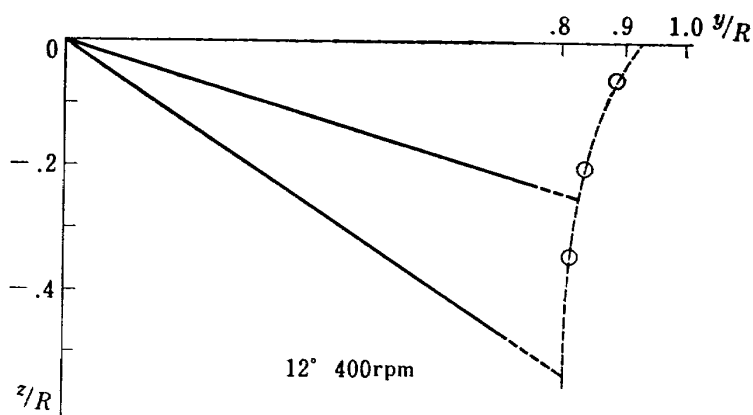
第 53 c 図 煙実験から得られたロータ後流の渦モデル



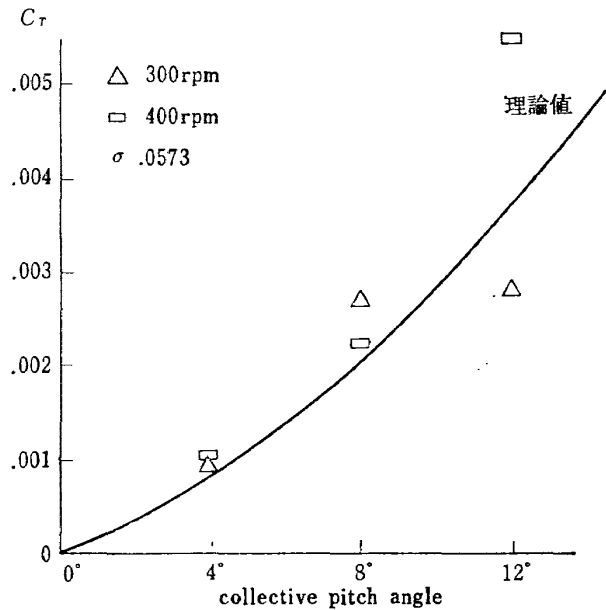
第 53 d 図 煙実験から得られたロータ後流の渦モデル



第 53 e 図 煙実験から得られたロータ後流の渦モデル



第 53 f 図 煙実験から得られたロータ後流の渦モデル



第 53 g 図 煙実験から得られた流速を用いて計算した推力係数と理論値の比較

モデルから得られる流速と後流断面積を用いて推力係数を計算し、それをホバリングロータについての理論値¹³⁾と比較した。結果は第 53 g 図に示したが、ピッチ角 4° と 8° の場合にはかなりよく合っている。ピッチ角 12° の場合はバラツキが大きい。

第 2 章 Loewy の理論¹⁴⁾を応用したピッチダンピングの解析

第 1 章 3 節に述べたようにリジッドロータのピッチダンピングを生ぜしめる空気力は定常な二次元翼理論から予測されるものに比べると著しく小さい。この理由として第 1 にあげられるのは、ロータのピッチングによってブレード断面の迎角が変動しているためにいわゆる非定常効果によって空気力の位相が変り、ダンピングが減少するであろう事である。回転翼の場合には先行するブレード、或いは考えているブレード自身がかかって残した shed vortex がロータ面の近くの後流域に大量に存在するので、直進翼の場合よりもはるかに大きな誘導速度をロータブレード上に生じる可能性がある。この為に振動する回転翼に働らく空気力の振幅と位相は直進翼の場合よりも一層大幅に変動するものと思われる。この現象は垂直飛行をする回転翼について Loewy によって理論化され、無次元振動数 k 、ブレードの振動数とロータの回転数の比 m 、渦層の間隔 h の函数として空気力の振幅と位相が求められている。その結果、 m が 1 に近く、 k が小さい場合には、lift deficiency function の実部、つまり迎角変

動と同位相の空気力の成分が著しく小さくなり、ブレードの振動を抑制する空気力が減少することが示された。

この理論は Daughaday et. al.¹⁵⁾, Brooks & Silveira¹⁶⁾ による実験とも比較された。その結果 Loewy の指摘した現象が実際に起り、定量的にもかなり良好な結果が得られることが知られた。

Timman & Van De Vooren¹⁷⁾ はやはり先行するブレードの残した渦を考慮に入れた振動翼理論を作りヘリコプタのブレードフラッターの解析を行っている。

この章では Loewy の理論を応用してピッチダンピングの解析を行うことにする。リジッドロータのピッチダンピングを解析する問題ではブレードの振動は回転数と同じ振動数の振動が、ロータ面のピッチングのより低い振動数の振動によって振幅変調をうけているものであるから、ブレードの振動数とロータの回転数の比は 1 に近くなる。勿論渦層の間隔は小さい。このようなわけで Loewy の理論を応用してピッチダンピングを計算すればかなり小さな値が得られるものと期待される。

2.1 Loewy の理論の紹介

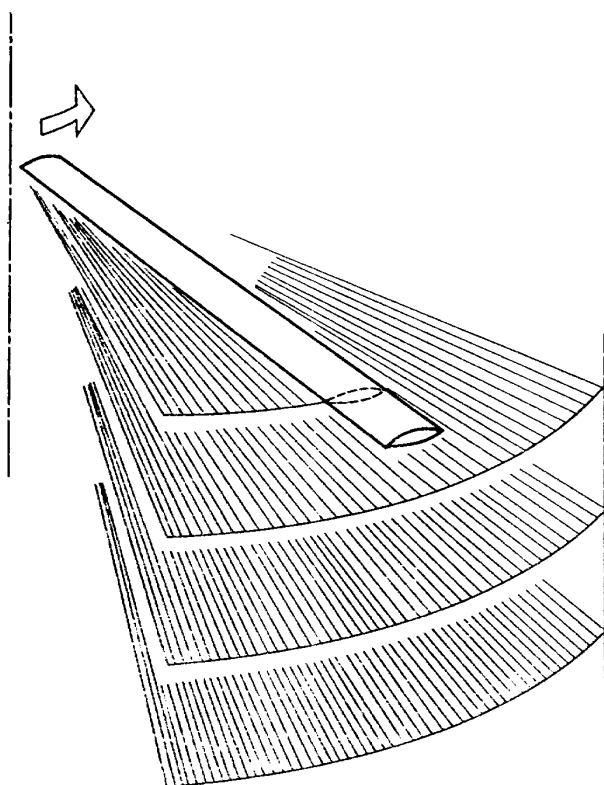
応用に先立ち、Loewy の理論を紹介する。この理論は回転翼について、Theodorsen の理論¹⁸⁾ と同等の二次元振動翼理論を導こうとするものである。直進翼の場合には振動する翼から発生した渦が翼の後流中にとり残されてほぼ直線上に並ぶとしている。他方回転翼の場合には、振動する翼から発生した渦が翼の近傍に積み重なり、翼面上に強い誘導速度を生じる。この後流中の渦の扱い方に Loewy の理論の特色がある。

ブレードは振動する薄翼として扱われ、束縛渦が変動する毎に後縁から shed vortex が生じる。ブレードの翼弦、回転速度、及び有効迎角が振動的に変化する際の振幅、はブレードの半径方向に非常にゆるやかに変るものとする。それ故ブレード上のある位置で、その半径方向の両側に起る出来事は空気力学的に同一のものとみなされる。

特定のブレードのある半径位置に於てブレードの両側に、ある方位角にわたって拡がり、ある数の渦の列を含むようなブレードに垂直な円筒面を考える。第 54 図はその略図である。inflow が小さい場合には渦の列とブレードの回転面のなす角は小さい。渦の列の間隔は各場所での吹き下ろしとロータの上昇速度によって決定され、一般に不等であるが、Loewy の理論では等間隔であると仮定している。ブレードの周囲にあ

る渦のうち、ブレードに近いものだけがブレード上の非定常な誘導速度に主要な寄与をすると考えられるので、ブレードの両側にとった方位角は小さくてよく、渦の列の数も小さくてよい。このことから逆に遠方の渦の寄与は小さく、遠方の渦の位置と大きさは必らずしも厳密に扱われる必要がないと思われる。かくして上記の円筒面は両側と下方に無限遠まで広がる平面に置き換えられる。

夫々の渦の列は回転前に q 番ブレードから発生したものであるから γ_{nq} と命名する。 γ_{nq} は同時に単位長さあたりの循環をあらわす。第55図に描いた渦列のうち最下列のものは、ロータが2本のブレードからなる時は $\gamma_{1,1}$ であり、3本のブレードからなる時は $\gamma_{1,0}$ ということになる。一般には第56図に示したモデルが



第 54 図 ホバリング状態におけるロータ後流中の Shed Vortex Sheet

得られる。

渦は粘性の為に時間と共に減衰するものであるが、渦が著しく減衰するに要する時間は、ロータの回転の周期に比べて大きいから渦の減衰は無視する。

翼の厚さ、反り、迎角が小さく、ロータの軸の方向への翼の変位も小さいとすると薄翼理論によって境界条件は $Z_i=0$ の面で記述でき、問題は線形化できる。

$$\frac{\partial z_a'}{\partial t} + y' \Omega \frac{\partial z_a'}{\partial x'} = v_a + v_{as} \quad (2.1)$$

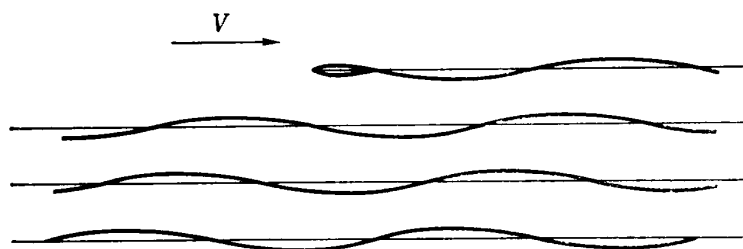
ここに v_a は誘導速度のうち非定常な成分であり、 v_{as} は定常な成分である。

基準ブレードを単位長さあたりの強さが γ_a であるような分布渦でおきかえる。基準ブレード上に誘起される非定常な誘導速度は shed vortex と翼面を代表する分布渦によって決定される。特にブレードがシニョソイダルな運動を行う場合に誘導速度、shed vortex, 束縛渦の関係を論じよう。

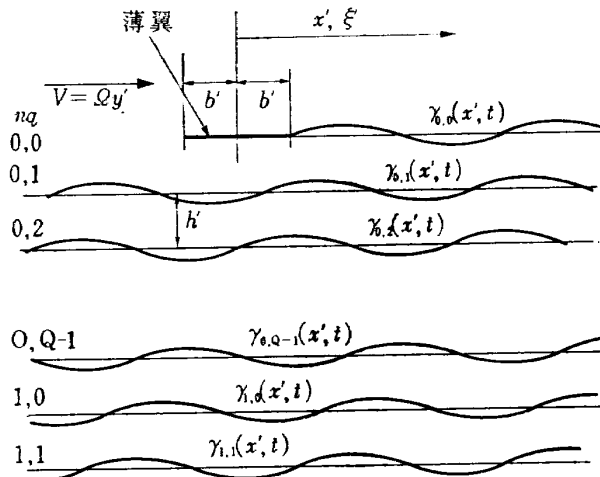
非定常な誘導速度は翼面を代表する分布渦と shed vortex によって誘起されるが、第56図のようなモデルを考えるとピオ・サバルの法則によって(2.2)式のように書くことができる。

$$\begin{aligned} v_a(x', t) = & \frac{-1}{2\pi} \left\{ \int_{-b'}^{b'} \frac{\gamma_a(\xi', t)}{x' - \xi'} d\xi' \right. \\ & + \int_{b'}^{\infty} \frac{\gamma_{00}(\xi', t)}{x' - \xi'} d\xi' \\ & + \sum_{q=1}^{Q-1} \sum_{n=0}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\gamma_{nq}(x' - \xi')}{(x' - \xi')^2 + (nQ + q)^2 (h')^2} d\xi' \\ & \left. + \sum_{n=1}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\gamma_{n0}(x' - \xi')}{(x' - \xi')^2 + (nQ)^2 (h')^2} d\xi' \right\} \quad (2.2) \end{aligned}$$

次に上式にあらわれた γ_a , γ_{00} , γ_{n0} , γ_{nq} の間の関係を論じる。 q 番ブレードの非定常な束縛渦を Γ_q' とする。束縛渦の振動の振幅が全てのブレードについて等しくその位相だけが異なるものとすれば、次のように書ける。特に基準ブレードについては束縛渦の非定常な成分を Γ_a' と書く。 v_a , γ_a などは複素量である。



第 55 図 ロータブレードと帰帰渦の二次元モデル



第 56 図 ブレードが Q 本あるロータについてのモデルと記号

$$\left. \begin{aligned} \Gamma_a' &= \int_{-b}^{b'} \gamma_a d\xi' \\ v_a &= \bar{v}_a e^{i\omega t} & \gamma_a &= \bar{\gamma}_a e^{i\omega t} \\ \Gamma_a' &= \bar{\Gamma}_a e^{i\omega t} & \Gamma_q' &= \bar{\Gamma}_a' e^{i(\omega t + \bar{\varphi}_q)} \end{aligned} \right\} \quad (2.3)$$

shed vortex はブレードの束縛渦が変動するたびにブレードの後縁から発生し、基準ブレードの後縁の近傍では次の関係がある。

$$\gamma_{0q}(b', t) d\xi' = - \frac{d\Gamma_a'}{dt} dt = -i\omega \bar{\Gamma}_a' e^{i\omega t} dt \quad (2.4)$$

一般に q 番ブレードの後縁の近傍では、

$$\begin{aligned} \gamma_{0q}\left(b' - \frac{2\pi y' q}{Q}, t\right) d\xi' &= - \frac{d\Gamma_q'}{dt} dt \\ &= -i\omega \bar{\Gamma}_a' e^{i(\omega t + \bar{\varphi}_q)} dt \end{aligned} \quad (2.5)$$

現在 x' 座標が ξ' であるような shed vortex $\gamma_{nq}(\xi', t)$ はある時間 Δt だけ以前に q 番ブレードから発生した渦である。

$$\begin{aligned} \gamma_{nq}(\xi', t) d\xi' &= - \frac{d\Gamma_q'}{dt} dt_{t=t-\Delta t} \\ &= -i\omega \bar{\Gamma}_a' e^{i(\omega t + \bar{\varphi}_q - \omega \Delta t)} \end{aligned} \quad (2.6)$$

第60図を参照すると Δt は次のとおりである。

$$\Delta t = \frac{2\pi}{Q} \frac{q}{Q} + \frac{\xi' - b'}{\Omega y'} + \frac{2\pi}{Q} n \quad (2.7)$$

$d\xi'/dt = \Omega y'$ であるから一般に $\gamma_{nq}(\xi', t)$ は

$$\begin{aligned} \gamma_{nq}(\xi', t) &= - \frac{i\omega \Gamma_a'}{\Omega y'} e^{i(\omega t + \bar{\varphi}_q - \omega \frac{2\pi}{Q} \frac{q}{Q} - \omega \frac{\xi' - b'}{\Omega y'} - \omega \frac{2\pi}{Q} n)} \\ &= - \frac{i\omega \Gamma_a'}{\Omega y'} e^{i(\omega t + \bar{\varphi}_q - \omega \frac{2\pi}{Q} \frac{q}{Q} - \omega \frac{\xi' - b'}{\Omega y'} - \omega \frac{2\pi}{Q} n)} \end{aligned} \quad (2.8)$$

(2.2) 式に $\gamma_{nq}(\xi', t)$ を代入して書きなおす。(2.3) 式を併せ考えると $e^{i\omega t}$ の項は考えなくてよい。無次元振動数 $k = \omega b'/\Omega y'$ を導入し、長さを半弦長で無次元化すると (2.2) 式は次のように書ける。但し $\bar{\Gamma}$ は $\bar{\Gamma} \equiv \bar{\Gamma}_a' e^{ik/b'}$ である。

$$\begin{aligned} \bar{v}_a(x) &= - \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 \frac{\bar{\gamma}_a(\xi)}{x - \xi} d\xi + \frac{ik\bar{\Gamma}}{2\pi} \int_{-1}^{\infty} \frac{1}{x - \xi} e^{-ik\xi} d\xi + \frac{ik\bar{\Gamma}}{2\pi} \left[\sum_{q=1}^{Q-1} \sum_{n=0}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(\bar{\varphi}_q - \omega \frac{2\pi}{Q} \frac{q}{Q} - \omega \frac{\xi' - b'}{\Omega y'} - \omega \frac{2\pi}{Q} n - k\xi)} \right. \\ &\quad \left. \times \frac{x - \xi}{(x - \xi)^2 + (nQ + q)^2 h^2} d\xi + \sum_{n=1}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(-\omega \frac{2\pi}{Q} n - k\xi)} \frac{x - \xi}{(x - \xi)^2 + n^2 Q^2 h^2} d\xi \right] \end{aligned} \quad (2.9)$$

複素積分を行うと

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-ik\xi}(x - \xi)}{(x - \xi)^2 + A^2} d\xi = i\pi e^{-k(ix + A)} \quad (2.10)$$

由って (2.9) 式は

$$\bar{v}_a(x) = - \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 \frac{\bar{\gamma}_a(\xi)}{x - \xi} d\xi + \frac{ik\bar{\Gamma}}{2\pi} \int_{-1}^{\infty} \frac{e^{-ik\xi}}{x - \xi} d\xi - \frac{k\bar{\Gamma}W}{2} e^{-ikx} \quad (2.11)$$

但し

$$W = \sum_{q=1}^{Q-1} \sum_{n=0}^{\infty} e^{i\{\bar{\varphi}_q - \omega \frac{2\pi}{Q} \frac{q}{Q} - \omega \frac{2\pi}{Q} n - kh(nQ + q)\}} + \sum_{n=1}^{\infty} e^{i(-\omega \frac{2\pi}{Q} n - kh n Q)} \quad (2.12)$$

Söngen³¹⁾ はもし $f_{(1)}$ が有限であれば積分方程式 (2.13) の解が (2.14) のように書けることを示している。

$$g(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 \frac{f(\xi)}{x - \xi} d\xi \quad (2.13)$$

$$f(x) = - \frac{2}{\pi} \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1+\xi}{1-\xi}} \frac{g(\xi)}{x - \xi} d\xi \quad (2.14)$$

我々の問題では Kutta の条件によって $\bar{\gamma}_{a(1)} = 0$ であるから (2.11) 式は次のように書ける。

$$\begin{aligned} \bar{\gamma}_a(x) &= \frac{-2}{\pi} \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \left[\int_{-1}^1 - \sqrt{\frac{1+\xi}{1-\xi}} \frac{\bar{v}_a(\xi)}{x - \xi} d\xi + \frac{ik\bar{\Gamma}}{2\pi} \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1+\xi}{1-\xi}} \frac{1}{x - \xi} \int_{-1}^{\infty} \frac{e^{-ik\lambda}}{\xi - \lambda} d\lambda \right. \\ &\quad \left. - \frac{k\bar{\Gamma}W}{2} \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1+\xi}{1-\xi}} \frac{1}{x - \xi} e^{-ik\xi} d\xi \right] \end{aligned} \quad (2.15)$$

しかるに Γ と $\bar{\gamma}_a$ の間には次の関係があるから $\bar{\gamma}_a$ を消去すると Γ を得る。

$$\Gamma = e^{ik} \int_{-1}^1 \bar{\gamma}_a(x) dx \quad (2.16)$$

$$\Gamma = \frac{2 \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1+\xi}{1-\xi}} \bar{v}_a(\xi) d\xi}{i\pi k \left\{ \frac{1}{2} [H_1^{(2)}(k) + iH_0^{(2)}(k)] + [J_1(k) + iJ_0(k)] W \right\}} \quad (2.17)$$

W は回帰渦の寄与をあらわしているから $W=0$ とすれば (2.17) 式が Theodorsen の理論の式と一致するのは全く当然である。更に $k \rightarrow 0$ に近づけると分母は -1 となり二次元定常翼理論の式と一致することは言うまでもない。

次に翼に働く空気力を求めよう。非定常な流れに対する線形化されたベルヌイの式は

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{V}{b} \frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{p}{\rho} = f(u) \quad (2.18)$$

翼の上下面の速度差と分布渦の関係は

$$\frac{\partial \phi_U}{\partial x} - \frac{\partial \phi_L}{\partial x} = b' \gamma \quad (2.19)$$

翼の前縁から考えている点まで積分すると、

$$\phi_U - \phi_L = b' \int_{-1}^x \gamma_a(\xi, t) d\xi \quad (2.20)$$

翼の上下面を通る2つの経路にそったベルヌイの式を作り、その差をとって (2.19) 式、(2.20) 式を使って ϕ_U , ϕ_L を消去すると

$$p_U - p_L = \Delta p = -\rho \left[V \gamma_a(x, t) + b' \frac{\partial}{\partial t} \int_{-1}^x \gamma_a(\xi, t) d\xi \right] \quad (2.21)$$

シニョソイダルな運動の場合には Δp は $\Delta p = \Delta \bar{p} e^{i\omega t}$ と書けるから、

$$\frac{\Delta \bar{p}(x^*)}{\rho \Omega y'} = -\bar{\gamma}_a(x^*) - ik \int_{-1}^{x^*} \bar{\gamma}_a(\xi^*) d\xi^* \quad (2.22)$$

計算を実行すると次の結果を得る。

$$\begin{aligned} \frac{\Delta \bar{p}(x^*)}{\rho \Omega y'} &= \frac{-2}{\pi} [1 - C'(k, m, h)] \\ &\times \sqrt{\frac{1-x^*}{1+x^*}} \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1+\xi}{1-\xi}} \bar{v}_a(\xi) d\xi \\ &+ \frac{-2}{\pi} \int_{-1}^1 \left[\sqrt{\frac{1-x^*}{1+x^*}} \sqrt{\frac{1+\xi}{1-\xi}} \frac{1}{x^* - \xi} \right. \\ &\left. - ik A_1(x^*, \xi) \right] \bar{v}_a(\xi) d\xi \end{aligned} \quad (2.23)$$

但し

$$\begin{aligned} C'(k, m, h) &\equiv F'(k, m, h) + iG'(k, m, h) \\ &= \frac{H_1^{(2)}(k) + 2J_1(k)W}{H_1^{(2)}(k) + iH_0^{(2)}(k) + 2[J_1(k) + iJ_0(k)]W} \end{aligned} \quad (2.24)$$

$$A_1(x^*, \xi) = \frac{1}{2} \log \left| \frac{1-x^*\xi + \sqrt{1-\xi^2} \sqrt{1-x^{*2}}}{1-x^*\xi - \sqrt{1-\xi^2} \sqrt{1-x^{*2}}} \right| \quad (2.25)$$

$C'(k, m, h)$ は直進振動翼の場合の Theodorsen の函数 $C(k)$ に相当し、 h を無限に大きくした極限では W が 0 に近づくので $C'(k, m, h)$ は $C(k)$ に近づく。

2.2 ピッチダンピングの解析

Loewy の理論を応用してピッチダンピングの解析を行なう。1章3節の場合と同様ロータ面が $\theta = \bar{\theta} \sin pt$ であらわされるシニョソイダルなピッチングをする時にピッチングの軸まわりに発生する空気力モーメントを求め、モーメントの経時変化からピッチダンピングを計算した。ブレードの剛性が非常に大きくて、弾性変形は起らないものとしている。ブレードが変形しない時にはブレードの速度のうち回転面内の成分は $y'\Omega$ であり回転面に垂直な成分は $-y'\bar{\theta} \cos \psi$ であることが (1.5) 式からわかる。ブレードに働く空気力のうち定常な成分が Y 軸まわりのモーメントと無関係であることは既に (1.28) 式で述べたとおりである。由って (2.1) 式の境界条件のうち非定常の部分だけを書く。

$$\begin{aligned} &-y'\bar{\theta} p \cos pt \cos \Omega t \\ &= -\frac{1}{2} y'\bar{\theta} p [\cos(\Omega + p)t + \cos(\Omega - p)t] = v_a \end{aligned} \quad (2.26)$$

Loewy の理論では翼は振動数 ω のシニョソイダルな運動をするが、ピッチダンピングの問題では翼は振動数の異なる2種のシニョソイダルな運動を合成した運動をする。しかし、渦相互の関係を規定する式も、誘導速度を求める式も共に線型であるから、 $(\Omega + p)$, $(\Omega - p)$ の周波数成分に対して夫々一組の関係式が得られる。

誘導速度と渦の関係式は (2.11) 式、(2.12) 式を参照すると、

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2} y b' \bar{\theta} p &= \frac{-1}{2\pi} \int_{-1}^1 \frac{\bar{\gamma}_{a\pm}(\xi)}{x - \xi} d\xi \\ &+ \frac{ik \Gamma_{\pm}}{2\pi} \int_1^{\infty} \frac{e^{-ik_{\pm}\xi}}{x - \xi} d\xi - \frac{k_{\pm} \Gamma_{\pm} W_{\pm}}{2} e^{-ik_{\pm}x} \end{aligned} \quad (2.27)$$

但し,

$$W_{\pm} = \sum_{q=1}^{Q-1} \sum_{n=0}^{\infty} e^{i(\bar{\phi}_q - [\Omega \pm p] \frac{2\pi}{Q} - \frac{q}{Q} - [\Omega \pm p] \frac{2\pi}{Q} n - k_{\pm} [nQ + q]h)} + \sum_{n=1}^{\infty} e^{i(-[\Omega \pm p] \frac{2\pi}{Q} n - k_{\pm} nQh)} \quad (2.28)$$

渦の間隔 h' は次のようにして決める¹³⁾。

$$h' = \frac{\pi b'}{2} \left(-1 + \sqrt{1 + \frac{8y'\theta_c}{Qb'}} \right) \quad (2.29)$$

基準ブレードと q 番ブレードの間の位相差 $\bar{\phi}_q$ については次のように考える。Loewy の理論は薄翼理論であって常に $Z_i=0$ の面で境界条件を記述している。又、ブレードと渦、渦相互の間隔は常に一定値 h' であるとしている。従ってこの理論をピッチダンピングの解析に応用する時にはブレードと渦の相対的な位置は不変であることが前提となっている。この前提の下では、束縛渦の位相差はブレードの回転面に垂直な速度成分の間の位相差に等しい。由って

$$\bar{\phi}_q = 2\pi q/Q \quad (2.30)$$

とする。

$$\therefore W_{\pm} = \sum_{j=1}^{\infty} e^{i(\mp \frac{2\pi p}{Q} - k_{\pm} h)} j = \frac{e^{i(\mp \frac{2\pi p}{Q} - k_{\pm} h)}}{1 - e^{i(\mp \frac{2\pi p}{Q} - k_{\pm} h)}} \quad (2.31)$$

(2.17) 式を参照すると束縛渦を決める $\bar{\Gamma}_{\pm}$ は夫々次のように書ける。

$$\bar{\Gamma}_{\pm} = \frac{-\pi y b' \bar{\theta} p}{i\pi k_{\pm} \left\{ \frac{1}{2} [H_1^{(2)}(k_{\pm}) + iH_0^{(2)}(k_{\pm})] + [J_1(k_{\pm}) + iJ_0(k_{\pm})] W_{\pm} \right\}} \quad (2.32)$$

(2.23) 式を参照すると $\Delta \bar{p}_{\pm}$, $\Delta \bar{p}_{-}$ は夫々次のように書ける。

$$\begin{aligned} \frac{\Delta \bar{p}_{\pm}(x^*)}{\rho \Omega y'} &= \frac{-2}{\pi} [1 - C'(k_{\pm}, m_{\pm}, h)] \sqrt{\frac{1-x^*}{1+x^*}} \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1+\xi}{1-\xi}} \left(-\frac{1}{2} y b' \bar{\theta} p \right) \\ &\quad + \frac{-2}{\pi} \int_{-1}^1 \left[\sqrt{\frac{1-x^*}{1+x^*}} \sqrt{\frac{1+\xi}{1-\xi}} \frac{1}{x^* - \xi} - i k_{\pm} A_1(x^*, \xi) \right] d\xi \left(-\frac{1}{2} y b' \bar{\theta} p \right) \end{aligned}$$

ξ についての積分を実行すると,

$$\frac{\Delta \bar{p}_{\pm}(x^*)}{\rho \Omega y'} = -C'(k_{\pm}, m_{\pm}, h) \sqrt{\frac{1-x^*}{1+x^*}} y b' \bar{\theta} p - i k_{\pm} \sqrt{1-x^*} y b' \bar{\theta} p \quad (2.33)$$

ロータハブから y' のところで幅 dy' の部分に働らく揚力の非定常成分の振幅は

$$\begin{aligned} \bar{L}_{\pm} dy' &= b'^2 \int_{-1}^1 -\Delta p_{\pm}(x^*) dx^* dy \\ &= \pi \rho \Omega \bar{\theta} p b'^4 y^2 \left\{ C'(k_{\pm}, m_{\pm}, h) + \frac{i k_{\pm}}{2} \right\} dy \end{aligned} \quad (2.34)$$

q 番ブレードに働らく揚力の非定常成分は基準ブレードより位相が $2\pi q/Q$ 進んでいるから,

$$\begin{aligned} \bar{L}_{\pm q} dy' &= \pi \rho \Omega \bar{\theta} p b'^4 y^2 \left\{ C'(k_{\pm}, m_{\pm}, h) + \frac{i k_{\pm}}{2} \right\} dy e^{i 2\pi q/Q} \end{aligned}$$

Q 本のブレードに働らく揚力の非定常成分によって Y 軸まわりに生じるモーメントは

$$\begin{aligned} M_Y &= - \sum_{q=0}^{Q-1} \int_{R_1}^{R_2} b'^2 \bar{L}_{+q} y dy \cos \left(\Omega t + \frac{2\pi q}{Q} \right) e^{i(\Omega + p)t} \\ &\quad - \sum_{q=0}^{Q-1} \int_{R_1}^{R_2} b'^2 \bar{L}_{-q} y dy \cos \left(\Omega t + \frac{2\pi q}{Q} \right) e^{i(\Omega - p)t} \end{aligned} \quad (2.35)$$

ロータ面の傾きが $\theta = \bar{\theta} \sin pt$ であらわされるよう

なピッチングを行なっているロータではピッチング軸まわりのモーメントの経時変化が知られると付録Aの方法によってピッチダンピングが計算できる。

$$\frac{\partial M}{\partial \theta} = \frac{1}{\pi \bar{\theta}} \int_0^{2\pi/p} M_Y \cos p t dt \quad (2.36)$$

具体的に (2.31) 式を書くと

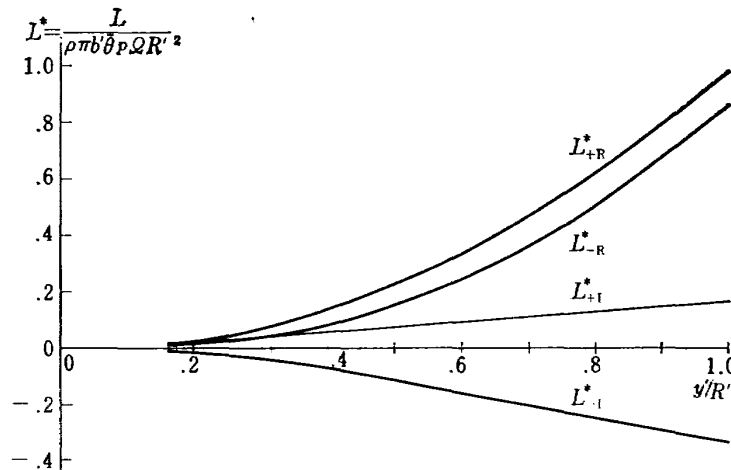
$$\begin{aligned} \frac{\partial M}{\partial \theta} &= - \frac{\pi Q \rho \Omega b'^5 R_2^4}{4} \int_{R_1}^{R_2} \frac{4}{R_2^4} \\ &\quad \times \frac{F'(k_{+}, m_{+}, h) + F'(k_{-}, m_{-}, h)}{2} y^3 dy \end{aligned}$$

Chebyshev の積分公式³⁾によって数値積分を行うと

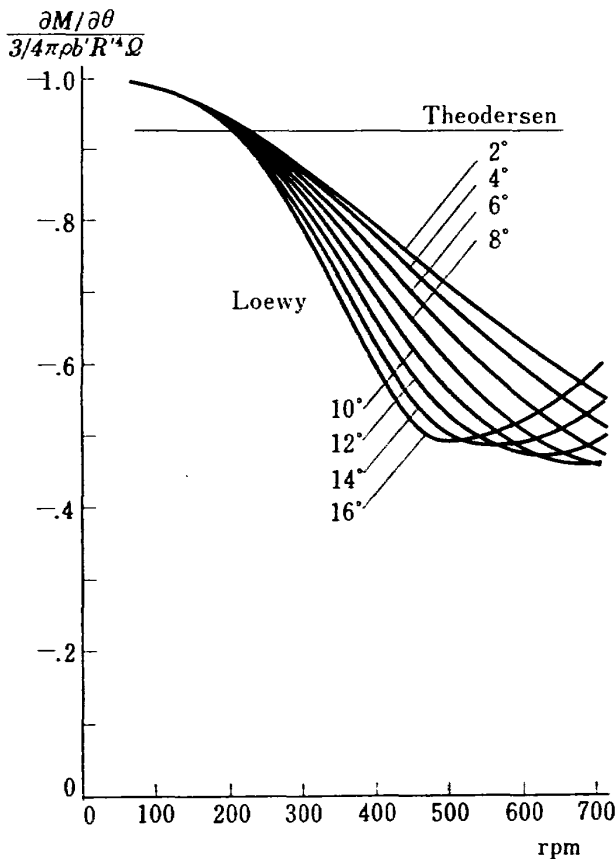
$$\frac{\partial M}{\partial \theta} = - \frac{\pi Q \rho \Omega b'^5 R_2^4}{4} \frac{\pi}{J} \sum_{j=1}^J \varphi(\theta_j) \quad (2.37)$$

但し,

$$\begin{aligned} \varphi(\theta_j) &= 4 \left(\frac{R_2 - R_1}{2R_2} \right)^4 \frac{F'(k_{+j}, m_{+}, h_j) + F'(k_{-j}, m_{-}, h_j)}{2} \\ &\quad \times \left(\frac{R_2 + R_1}{R_2 - R_1} - \cos \theta_j \right)^3 \sin \theta_j \\ \theta_j &= \frac{2j-1}{2(J+1)} \pi \end{aligned}$$



第 57 図 Loewy の理論を用いて計算した揚力分布
 $p=0.756 \text{ c/s}$, $Q=300 \text{ rpm}$, $\theta_c=4^\circ$



第 58 図 Theodorsen の理論と Loewy の理論
 を用いて計算したピッチダンピング

ロータの回転数 300 rpm, ピッチングの振動数 0.756 c/s とした場合のブレードの半径方向の揚力分布を第57図に示す。ピッチングの振動数 0.756 c/s とした場合のピッチダンピングを種々の迎角について計算した結果を第58図に示す。特に W を 0 に近づけた極限では Theodorsen の理論と一致するが比較の為に図中に示した。

第32図から第43図に於てブレードの弾性変形が生じないとした場合に実験値から推定される値と, Loewy の理論を用いて計算されるピッチダンピングを比較した。

計算値は測定値に比べてずっと大きい, Townsent の理論⁷⁾, Theodorsen の理論¹⁸⁾ の場合よりも小さくなっている。

ロータの回転速度が大きくなると計算値は実験値に近づく。これはブレードの振動数とロータの回転数の比 m が 1 に近づくためである。

無次元化された測定値はロータ回転数を変えても変わらないが, 計算値はロータ回転数が増すと共に減少する。

計算を行なった範囲ではブレードのピッチ角を変えても計算値はあまり変らない。

以上の結果から Loewy の理論によってピッチダンピングを十分に説明することはできないことがわかる。しかし, 後流中にある渦がピッチダンピングを相当に減少させ得る可能性があることはたしかめられた。ブレードフラッタの解析の場合^{15), 16)} のように空気力の著しい減少が計算されないのは m が十分 1 に近くないためである。

第 3 章 Ashley et. al. の理論を応用したピッチダンピングの解析

第61図に Loewy の理論によって計算したブレードの半径方向への揚力分布を描いておいた。Loewy の理論は二次元理論であるからブレードの端で空気力が 0 にならない。ところがピッチダンピングの問題では空気力によって作られるモーメントが重要であり翼端

付近の空気力が正確に求められなければならない。それ故に有限翼幅の振動翼理論を用いて計算をする必要が生じる。

さて Ashley et. al. はヘリコプタのロータブレードが振動している場合に働く空気力を計算する理論を作っている。この理論は Reissner の有限翼幅の振動翼についての理論²⁰⁾ を拡張したものである。

Ashley et. al. はブレードが振動していない場合に翼幅が有限であることを考慮して空気力を計算する理論も作っている。

この章ではまず Ashley et. al. の論文を紹介し、次いで非定常、及び準定常の有限翼幅を考慮した翼理論によってピッチダンピングを計算する。その結果ピッチダンピングに対して (1) 有限翼幅の効果, (2) 非定常な取扱いと準定常な取扱いの相違が夫々どの程度影響を及ぼすか明らかにされよう。

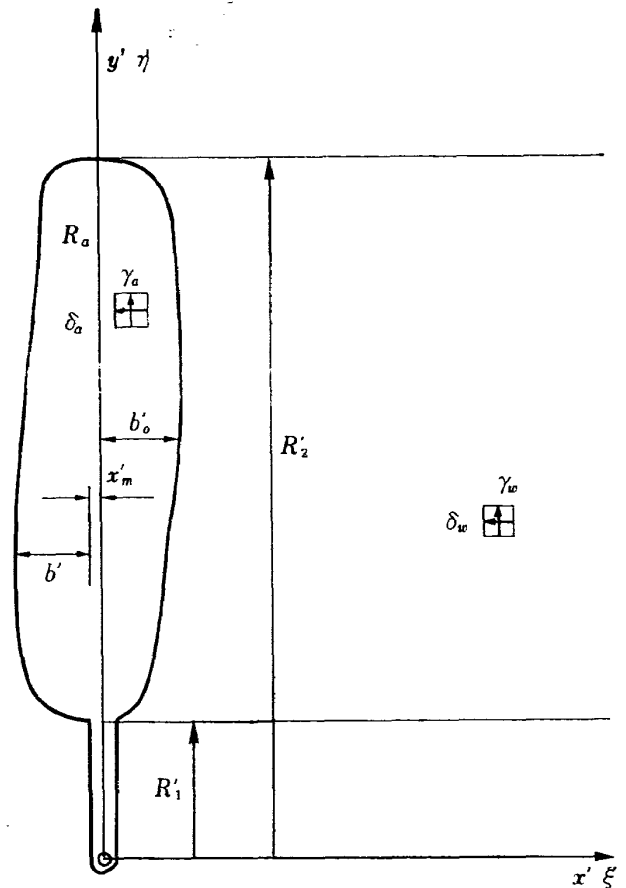
3.1 Ashley et. al. の理論¹⁹⁾の紹介

この理論は Reissner が導いた「有限翼幅の振動翼についての理論」²⁰⁾ を翼幅方向に主流の値の変る場合に適用できるように拡張しヘリコプタロータに応用しようとするものである。

ロータブレードのうち1本に注目する。このブレードの後縁からはたえず後流中に渦が出ている。渦はブレードの後に面をなして拡がる。渦面はブレード上に吹き下ろしを誘起する。ブレードに近い渦がブレード上の吹き下ろしの非定常な成分に主要な寄与をすると仮定すれば、ブレードの後方わずかな方位角内にある渦だけに注目すれば十分であろう。渦層がロータ回転面内にあるとする。更に渦面はブレードが回転しているので弧の形になるが、方位角が小さい範囲ではブレードに垂直な直線の形とみなされる。遠方の渦の位置及び大きさは必ずしも厳密に扱う必要がないと考え、第59図のように渦面はブレードの後縁よりはじまり、後方半無限遠方に拡がる帯状になる。ロータ面での inflow が小さい場合には、先に第2章の Loewy の理論のところで述べたように、先行するブレードが残した渦面が存在するが、Ashley et. al. はさしあたりこの回帰渦を考慮しないで議論を進めている。

翼の厚さ、反り、迎角が小さく、翼の Z_i 方向の変位も小さいような振動翼を扱う場合には、いわゆる薄翼理論によって境界条件を $Z_i=0$ の面への翼の投影上で記述すると問題が線形化できる。境界条件は次のとおりである。

$$\frac{\partial z_a'}{\partial t} + V(y') \frac{\partial z_a'}{\partial x'} = v_a + v_{as} \quad (3.1)$$



第 59 図 主流速度が翼幅方向に変化する流れの中におかれた翼のモデルと記号

ここでは v_a は誘導速度のうち非定常な成分であり、 v_{as} は定常な成分である。ピッチダンピングの問題では定常な成分は考慮する必要がない。

ブレードがシニソイダルな振動をする場合には、 v_a は $v_a(x', y', t) = \bar{v}_a(x', y') e^{i\omega t}$ とおける。第59図に示したように翼弦および翼幅方向の渦の非定常な成分の強さを γ, δ とする。但し翼面上の値には subscript a を、後流での値には subscript w をつけておく。

$$\begin{aligned} \gamma_a(\xi', \eta', t) &= \bar{\gamma}_a(\xi', \eta') e^{i\omega t} \\ \delta_a(\xi', \eta', t) &= \bar{\delta}_a(\xi', \eta') e^{i\omega t} \\ \gamma_w(\xi', \eta', t) &= \bar{\gamma}_w(\xi', \eta') e^{i\omega t} \\ \delta_w(\xi', \eta', t) &= \bar{\delta}_w(\xi', \eta') e^{i\omega t} \end{aligned}$$

束縛渦は $\Gamma_a'(\eta', t) = \bar{\Gamma}_a'(\eta') e^{i\omega t}$ となり、 $\bar{\delta}_a(\xi', \eta')$ と $\bar{\Gamma}_a'(\eta')$ の間には次の関係がなり立つ。

$$\bar{\Gamma}_a'(\eta') = \int_{x_l'}^{x_t'} \bar{\gamma}_a(\xi', \eta') d\xi' \quad (3.2)$$

potential flow では渦によって誘起される速度はビオ・サバルの法則によって求めることができる。

$$\begin{aligned} \bar{v}_a(x', y') = & \frac{-1}{4\pi} \iint_{R_a} \frac{\bar{\gamma}_a(\xi', \eta')[x' - \xi'] + \bar{\delta}_a(\xi', \eta')[y' - \eta']}{[(x' - \xi')^2 + (y' - \eta')^2]^{3/2}} d\xi' d\eta' \\ & - \frac{1}{4\pi} \iint_{R_W} \frac{\bar{\gamma}_W(\xi', \eta')[x' - \xi'] + \bar{\delta}_W(\xi', \eta')[y' - \eta']}{[(x' - \xi')^2 + (y' - \eta')^2]^{3/2}} d\xi' d\eta' \end{aligned} \quad (3.3)$$

後流の shed vortex と束縛渦の間には次の関係が成立する。

$$\gamma_W(x_i', \eta) d\xi' = - \frac{d\Gamma_a'(\eta')}{dt} dt \quad (3.4)$$

シニユソイダルな運動を仮定すれば、

$$\bar{\gamma}_W(\xi', \eta') = - \frac{i\omega}{V(\eta')} \Gamma_a'(\eta') e^{-i\omega \frac{\xi' - x_i'}{V(\eta')}} \quad (3.5)$$

$\partial\gamma/\partial\eta' = \partial\delta/\partial\xi'$ であり且つ翼の前縁より前方には γ が存在しないので

$$\bar{\delta}_a(\xi', \eta') = \frac{\partial}{\partial\eta'} \int_{x_i'}^{\xi'} \bar{\gamma}_a(\lambda^*, \eta') d\lambda^* \quad (3.6)$$

$$\begin{aligned} \bar{\delta}_W(\xi', \eta') &= \frac{\partial}{\partial\eta'} \int_{x_i'}^{\xi'} \bar{\gamma}_a(\lambda^*, \eta') d\lambda^* + \frac{\partial}{\partial\eta'} \int_{x_i'}^{\xi'} \bar{\gamma}_W(\lambda^*, \eta') d\lambda^* \\ &= \frac{\partial\Gamma_a'}{\partial\eta'} + \frac{\partial}{\partial\eta'} \int_{x_i'}^{\xi'} \left(- \frac{i\omega}{V(\eta')} \right) \Gamma_a'(\eta') e^{-i\omega \frac{\lambda^* - x_i'}{V(\eta')}} d\lambda^* \end{aligned} \quad (3.7)$$

更に $\Gamma(\eta) \equiv \Gamma_a(\eta')/b_0' \cdot e^{i\omega \frac{x_i'}{V(\eta')}}$ とおく。

$$\bar{\gamma}_W(\xi', \eta') = - \frac{i\omega b_0'}{V(\eta')} e^{-i\omega \frac{\xi'}{V(\eta')}} \quad (3.8)$$

$$\begin{aligned} \bar{\delta}_W(\xi', \eta') &= \frac{\partial}{\partial\eta'} b_0' \Gamma(\eta') e^{-i\omega \frac{x_i'}{V(\eta')}} + \frac{\partial}{\partial\eta'} \int_{x_i'}^{\xi'} \left(- \frac{i\omega b_0'}{V(\eta')} \Gamma(\eta') e^{-i\omega \frac{\lambda^*}{V(\eta')}} d\lambda^* \right. \\ &= b_0' \frac{d}{d\eta'} \left[\Gamma(\eta') e^{-i\omega \frac{\xi'}{V(\eta')}} \right] \end{aligned} \quad (3.9)$$

(3.3) 式に (3.8), (3.9) 式を代入すると、

$$\begin{aligned} \bar{v}_a(x', y') = & - \frac{1}{4\pi} \iint_{R_a} \frac{\bar{\gamma}_a(\xi', \eta')[x' - \xi'] + \bar{\delta}_a(\xi', \eta')[y' - \eta']}{[(x' - \xi')^2 + (y' - \eta')^2]^{3/2}} d\xi' d\eta' \\ & - \frac{1}{4\pi} \iint_{R_W} \frac{- \frac{i\omega b_0'}{V(\eta')} \Gamma(\eta') e^{-i\omega \frac{\xi'}{V(\eta')}} [x' - \xi'] + b_0' \frac{\partial}{\partial\eta'} \left[\Gamma(\eta') e^{-i\omega \frac{\xi'}{V(\eta')}} \right] [y' - \eta']}{[(x' - \xi')^2 + (y' - \eta')^2]^{3/2}} d\xi' d\eta' \end{aligned} \quad (3.10)$$

(3.10) 式の右辺の各項を I_1, I_2, I_3 とあらわす。

$$\begin{aligned} I_1 &\equiv - \frac{1}{4\pi} \iint_{R_a} \frac{\bar{\gamma}_a(\xi', \eta')[x' - \xi'] + \bar{\delta}_a(\xi', \eta')[y' - \eta']}{[(x' - \xi')^2 + (y' - \eta')^2]^{3/2}} d\xi' d\eta' \\ I_2 &\equiv \iint_{R_W} \frac{\frac{\partial}{\partial\eta'} \left[\Gamma(\eta') e^{-i\omega \frac{\xi'}{V(\eta')}} \right] [y' - \eta']}{[(x' - \xi')^2 + (y' - \eta')^2]^{3/2}} d\xi' d\eta' \\ I_3 &\equiv \iint_{R_W} \frac{\Gamma(\eta')/V(\eta') \cdot e^{-i\omega \frac{\xi'}{V(\eta')}} [x' - \xi']}{[(x' - \xi')^2 + (y' - \eta')^2]^{3/2}} d\xi' d\eta' \end{aligned}$$

(3.10) 式は I_1, I_2, I_3 を用いて書くと

$$\bar{v}_a(x', y') = I_1 - \frac{b_0'}{4\pi} [I_2 - i\omega I_3] \quad (3.11)$$

I_1 は翼面をおきかえた渦の寄与をあらわしており、 I_2 は後流中の trailing vortex, I_3 は後流中の shed vortex をあらわしている。

(3.10) 式を数学的な操作に適した形にする為には物理的なモデルに若干の修正を加えなければならない。

そのうち2つは Reissner の理論において行なわれるものと全く同様であり、他の一つは翼幅方向に主流の速度が変化している場合に特有のものである。

(a) 翼面をおきかえた渦 $\bar{\gamma}_a(\xi', \eta')$ と $\bar{\delta}_a(\xi', \eta')$ が誘導速度 $\bar{v}_a(\xi', \eta)$ に対して及ぼす影響に関するかぎり、翼面をおきかえた渦はあたかも翼が y' の位置での翼弦方向の空力荷重分布と同じ荷重分布を至るところでもつ二次元翼であるかのように扱われる。

$$\bar{\delta}_a(\xi', \eta') \cong 0$$

$$\bar{\delta}_a(\xi', \eta') \cong \bar{\gamma}_a(\xi', \eta')$$

$$I_1 \cong \frac{-1}{2\pi} \int_{x_1'}^{x_2'} \frac{\bar{\gamma}_a(\xi', \eta')}{x' - \xi'} d\xi' \quad (3.12)$$

ヘリコプタのロータブレードでは翼幅は翼弦に比べて十分に大きく、翼面上の出来事は、翼端の近くを除いては、誘導速度を計算すべき点の両側で、そう急激に

変化するものではないから、(3.12) 式の如き簡略化はそう無理なことではないと思われる。

(b) 後流中の trailing vortex のパターンは後縁から更に翼面の中へ、誘導速度を求めるべき点 (x', y') を通る翼幅方向の直線まで拡張される。即ち I_2 において ξ' に関する積分域は $x_1' \rightarrow \infty$ から $x' \rightarrow \infty$ に変更される。

$$\begin{aligned} I_2 &\cong \int_{R_1'}^{R_2'} \int_{x_1'}^{\infty} \frac{\frac{\partial}{\partial \eta'} \left[\bar{\Gamma}(\eta') e^{-i \frac{\omega \xi'}{V(\eta')}} \right] [y' - \eta']}{[(x' - \xi')^2 + (y' - \eta')^2]^{3/2}} d\xi' d\eta' \\ &= \int_{R_1'}^{R_2'} \frac{d\bar{\Gamma}(\eta')}{d\eta'} e^{-i \frac{\omega x'}{V(\eta')}} \left\{ \int_0^{\infty} \frac{e^{-i \frac{\omega \lambda'}{V(\eta')}} [y' - \eta']}{[\lambda'^2 + (y' - \eta')^2]^{3/2}} d\lambda' \right\} d\eta' \\ &\quad - i\omega \int_{R_1'}^{R_2'} \bar{\Gamma}(\eta') \frac{d}{d\eta'} \left[\frac{1}{V(\eta')} \right] e^{-i \frac{\omega x'}{V(\eta')}} \left\{ \int_0^{\infty} \frac{[\lambda' + x'] [y' - \eta'] e^{-i \frac{\omega \lambda'}{V(\eta')}}}{[\lambda'^2 + (y' - \eta')^2]^{3/2}} d\lambda' \right\} d\eta' \quad (3.13) \end{aligned}$$

(c) 後流中の shed vortex のパターンと、誘導速度を求めるべき翼幅方向の位置即ち y' での shed vortex との差に相当する部分は点 (x', y') を通る翼幅方向の直線まで拡張される。更にこの部分については wave length factor $e^{-i \frac{\omega \xi'}{V(\eta')}}$ は y' の位置での wave length factor $e^{-i \frac{\omega \xi'}{V(y')}}$ で代用される。

$I_3 = I_3^{(2)} + \Delta I_3$ において、 $I_3^{(2)}$ は y' での shed vortex のパターンであるとする。 ΔI_3 については積分域が $x_1' \rightarrow \infty$ から $x' \rightarrow \infty$ に変わり、 $e^{-i \frac{\omega \xi'}{V(\eta')}}$ が $e^{-i \frac{\omega \xi'}{V(y')}}$ に変わる。wave length factor についての変更は、翼幅方向に主流の値が変わる Ashley et. al. の理論に特有のものである。

$$I_3^{(2)} \equiv \int_{-\infty}^{\infty} \int_{x_1'}^{\infty} \frac{\bar{\Gamma}(y')}{V(y')} \frac{e^{-i \frac{\omega \xi'}{V(y')}} [x' - \xi']}{[(x' - \xi')^2 + (y' - \eta')^2]^{3/2}} d\xi' d\eta' = \frac{2\bar{\Gamma}(y')}{V(y')} \int_{x_1'}^{\infty} \frac{e^{-i \frac{\omega \xi'}{V(y')}}}{x' - \xi'} d\xi' \quad (3.14)$$

ΔI_3 は $I_3 - I_3^{(2)}$ で求められるが、 $I_3^{(2)}$ と I_3 を少し書きかえておく。 $\bar{\Gamma}(R_1')$, $\bar{\Gamma}(R_2')$ は 0 であるから、

$$\frac{2\bar{\Gamma}(y')}{V(y')} = \int_{R_1'}^{R_2'} \frac{d}{d\eta'} \left[\frac{\bar{\Gamma}(\eta')}{V(\eta')} \right] \frac{|y' - \eta'|}{|y' - \eta'|} d\eta' \quad (3.15)$$

(3.14) 式は次のように書きかえられる。

$$I_2^{(3)} = \int_{R_1'}^{R_2'} \int_{x_1'}^{\infty} \frac{d}{d\eta'} \left[\frac{\bar{\Gamma}(\eta')}{V(\eta')} \right] \frac{e^{-i \frac{\omega \xi'}{V(y')}} |y' - \eta'|}{(x' - \xi') (y' - \eta')} d\xi' d\eta' \quad (3.16)$$

I_3 は η' について部分積分を行い、 $\bar{\Gamma}(R_1')$ と $\bar{\Gamma}(R_2')$ が夫々 0 であることを利用すると、

$$I_3 = \int_{x_1'}^{\infty} \int_{R_1'}^{R_2'} \frac{\frac{\partial}{\partial \eta'} \left[e^{-i \frac{\omega \xi'}{V(\eta')}} \frac{\bar{\Gamma}(\eta')}{V(\eta')} \right] [y' - \eta']}{[x' - \xi'] \sqrt{[x' - \xi']^2 + [y' - \eta']^2}} d\xi' d\eta' \quad (3.17)$$

(3.17) 式から (3.16) 式を引いて ΔI_3 を求めるのであるが、その際に積分範囲を $x' \rightarrow \infty$ とし、(3.16) 式の wave length factor を $e^{-i \frac{\omega \xi'}{V(\eta')}}$ から $e^{-i \frac{\omega \xi'}{V(y')}}$ におきかえる。

$$\begin{aligned} \Delta I_3 &\cong \int_{R_1'}^{R_2'} \int_{x_1'}^{\infty} \frac{1}{x' - \xi'} \left\{ \frac{\frac{\partial}{\partial \eta'} \left[e^{-i \frac{\omega \xi'}{V(\eta')}} \frac{d\bar{\Gamma}(\eta')}{d\eta'} \right] [y' - \eta']}{\sqrt{[x' - \xi']^2 + [y' - \eta']^2}} - \frac{e^{-i \frac{\omega \xi'}{V(y')}} \frac{d}{d\eta'} \left[\frac{\bar{\Gamma}(\eta')}{V(\eta')} \right] |y' - \eta'|}{[y' - \eta']} \right\} d\xi' d\eta' \\ &= \int_{R_1'}^{R_2'} e^{-i \frac{\omega x'}{V(y')}} \frac{d}{d\eta'} \left[\frac{\bar{\Gamma}(\eta')}{V(\eta')} \right] \left\{ - \int_0^{\infty} \frac{1}{\lambda'} \left[\frac{y' - \eta'}{\sqrt{\lambda'^2 + (y' - \eta')^2}} - \frac{|y' - \eta'|}{y' - \eta'} \right] e^{-i \frac{\omega \lambda'}{V(y')}} d\lambda' \right\} d\eta' \quad (3.18) \end{aligned}$$

(3.11) 式は次のように書きなおされる。

$$- \frac{1}{2\pi} \int_{x_1'}^{x_2'} \frac{\bar{\gamma}_a(\xi', \eta')}{x' - \xi'} d\xi' = \bar{v}_a(x', y') + \frac{b_0'}{4\pi} [I_2 - i\omega I_3^{(2)} - i\omega \Delta I_3] \quad (3.19)$$

右辺第 2 項が ξ' を含まないことは (3.13), (3.14), (3.18) の各式によって明らかである。

I_2 , $I_3^{(2)}$, ΔI_3 に含まれる積分を実行する。変数 q , τ , λ_1 , λ_2 を導入する。

$$\left. \begin{aligned} q &\equiv \frac{\omega(y' - \eta')}{V(\eta')} & \tau &\equiv \frac{\omega(y' - \eta')}{V(y')} \\ \lambda_1 &\equiv \frac{\omega \lambda'}{V(\eta')} & \lambda_2 &\equiv \frac{\omega \lambda'}{V(y')} \end{aligned} \right\} \quad (3.20)$$

$q, \tau, \lambda_1, \lambda_2$ を用いて I_2 を書きかえる。

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_{R_1}^{R_2} \frac{d\Gamma(\eta')}{d\eta'} \frac{\omega}{V(\eta')} e^{-i \frac{\omega x'}{V(\eta')}} \int_0^\infty \frac{e^{-i \lambda_1 q}}{[\lambda_1^2 + q^2]^{3/2}} d\lambda_1 d\eta' \\ &\quad - i\omega \int_{R_1}^{R_2} \Gamma(\eta') \frac{d}{d\eta'} \left[\frac{1}{V(\eta')} \right] e^{-i \frac{\omega x'}{V(\eta')}} \int_0^\infty \frac{\left[\lambda_1 + \frac{\omega x'}{V(\eta')} \right] q e^{-i \lambda_1}}{[\lambda_1^2 + q^2]^{3/2}} d\lambda_1 d\eta' \end{aligned} \quad (3.21)$$

$q, \tau, \lambda_1, \lambda_2$ を用いて ΔI_3 を書きかえる。

$$\begin{aligned} \Delta I_3 &= - \int_{R_1}^{R_2} \frac{d\Gamma(\eta')}{d\eta'} \frac{1}{V(\eta')} e^{-i \frac{\omega x'}{V(\eta')}} \int_0^\infty \frac{1}{\lambda_2} \left[\frac{\tau}{\sqrt{\lambda_2^2 + \tau^2}} - \frac{|\tau|}{\tau} \right] e^{-i \lambda_2} d\lambda_2 d\eta' \\ &\quad - \int_{R_1}^{R_2} \Gamma(\eta') \frac{d}{d\eta'} \left[\frac{1}{V(\eta')} \right] e^{-i \frac{\omega x'}{V(\eta')}} \int_0^\infty \frac{1}{\lambda_2} \left[\frac{\tau}{\sqrt{\lambda_2^2 + \tau^2}} - \frac{|\tau|}{\tau} \right] e^{-i \lambda_2} d\lambda_2 d\eta' \end{aligned} \quad (3.22)$$

I_2 と ΔI_3 にあらわれた函数を次のように名づける。

$$\left. \begin{aligned} N_A(q) &\equiv q \int_0^\infty \frac{\lambda_1 e^{-i \lambda_1}}{[\lambda_1^2 + q^2]^{3/2}} d\lambda_1 \\ N_B(q) &\equiv q \int_0^\infty \frac{e^{-i \lambda_1}}{[\lambda_1^2 + q^2]^{3/2}} d\lambda_1 \\ N_C(\tau) &\equiv \int_0^\infty \left[\frac{\tau}{\sqrt{\tau^2 + \lambda_2^2}} - \frac{|\tau|}{\tau} \right] \frac{e^{-i \lambda_2}}{\lambda_2} d\lambda_2 \end{aligned} \right\} \quad (3.23)$$

$$\left. \begin{aligned} y &= \frac{y'}{b_0'} & \eta &= \frac{\eta'}{b_0'} \\ x &= \frac{x' - (x_l' + x_l')/2}{b'} & \xi &= \frac{\xi' - (x_l' + x_l')/2}{b'} \\ x_m &= \frac{x_l' + x_l'}{2b'} \end{aligned} \right\} \quad (3.24)$$

4 種類の reduced frequency を導入する。

$N_A(q), N_B(q), N_C(\tau)$ の計算法は別に付録 B に述べる。

無次元化された変数を次のように導入する。

$$\left. \begin{aligned} k(y) &\equiv \frac{\omega b'(y)}{V(y)} & k(\eta) &\equiv \frac{\omega b'(\eta)}{V(\eta)} \\ k_0(y) &= \frac{\omega b_0'}{V(y)} & k_0(\eta) &= \frac{\omega b_0'}{V(\eta')} \end{aligned} \right\} \quad (3.25)$$

I_2 は次のように書くことができる。

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_{R_1}^{R_2} \frac{d\Gamma}{d\eta} \frac{\omega}{V(\eta)} e^{-i[k(\eta)x + k_0(\eta)x_m]} N_B(k_0(\eta)[y - \eta]) d\eta \\ &\quad - i\omega \int_{R_1}^{R_2} \Gamma(\eta) \frac{d}{d\eta} \left[\frac{1}{V(\eta)} \right] e^{-i[k(\eta)x + k_0(\eta)x_m]} \{N_A(k_0(\eta)[y - \eta] + [k(\eta)x + k_0(\eta)x_m] N_B(k_0(\eta)[y - \eta])\} d\eta \end{aligned} \quad (3.26)$$

ΔI_3 は次のように書くことができる。

$$\begin{aligned} \Delta I_3 &= - \int_{R_1}^{R_2} \frac{d\Gamma(\eta)}{d\eta} \frac{1}{V(\eta)} e^{-i[k(y)x + k_0(y)x_m]} N_C(k_0(y)[y - \eta]) d\eta \\ &\quad - \int_{R_1}^{R_2} \Gamma(\eta) \frac{d}{d\eta} \left[\frac{1}{V(\eta)} \right] e^{-i[k(y)x + k_0(y)x_m]} N_C(k_0(y)[y - \eta]) d\eta \end{aligned} \quad (3.27)$$

(3.19) 式の右辺は

$$- \frac{1}{2\pi} \int_{x_l'}^{x_l'} \frac{\tilde{r}_a(\xi', y')}{x' - \xi'} d\xi' = - \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 \frac{\tilde{r}_a(\xi, y)}{x - \xi} d\xi \quad (3.28)$$

$I_3^{(2)}$ は (3.14) 式より

$$I_3^{(2)} = \frac{2\Gamma(y)}{V(y)} \int_1^\infty \frac{e^{-i[k(y)\xi + k_0(y)x_m]}}{x - \xi} d\xi \quad (3.29)$$

(3.19) 式に (3.28), (3.26), (3.29), (3.27) の各式を代入すると,

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 \frac{\tilde{r}_a(\xi, y)}{x - \xi} d\xi = -\bar{v}_a(x, y) + \frac{ik_0(y)}{2\pi} \Gamma(y) e^{-ik_0(y)x_m} \int_1^\infty \frac{e^{-ik(y)\xi}}{x - \xi} d\xi$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{4\pi} \int_{R_1}^{R_2} \frac{d\Gamma}{d\eta} k_0(\eta) \left\{ e^{-i[k_0(y)x_m + k(y)x] \frac{V(y)}{V(\eta)}} N_B(k_0(\eta)[y-\eta]) \right. \\
& \quad \left. + i e^{-i[k_0(y)x_m + k(y)x] \frac{V(y)}{V(\eta)}} N_C(k_0(y)[y-\eta]) \right\} d\eta \\
& + \frac{ik_0(y)}{4\pi} \int_{R_1}^{R_2} \Gamma(\eta) \frac{d}{d\eta} \left[\frac{V(y)}{V(\eta)} \right] \left\{ e^{-i[k_0(y)x_m + k(y)x] \frac{V(y)}{V(\eta)}} \left\langle N_A(k_0(\eta)[y-\eta]) \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + [k_0(y)x_m + k(y)x] \frac{V(y)}{V(\eta)} N_B(k_0(\eta)[y-\eta]) \right\rangle - e^{i[k_0(y)x_m + k(y)x] \frac{V(y)}{V(\eta)}} N_C(k_0(y)[y-\eta]) \right\} d\eta
\end{aligned} \tag{3.30}$$

Kutta の条件により $\bar{r}_a(1, y) = 0$ であるから Söngen²²⁾ の反転公式を適用できる。その前に次の演算子を導入しておく。

$$\begin{aligned}
D_1 \{ \dots \} &= \frac{1}{4\pi} \int_{R_1}^{R_2} \frac{d\Gamma}{d\eta} k_0(\eta) e^{-ik_0(y)x_m \frac{V(y)}{V(\eta)}} N_B(k_0(\eta)[y-\eta]) \{ \dots \} d\eta \\
D_2 \{ \dots \} &= \frac{i}{4\pi} \int_{R_1}^{R_2} \frac{d\Gamma}{d\eta} k_0(\eta) e^{-ik_0(y)x_m} N_C(k_0(y)[y-\eta]) \{ \dots \} d\eta \\
D_3 \{ \dots \} &= \frac{ik_0(y)}{4\pi} \int_{R_1}^{R_2} \Gamma(\eta) \frac{d}{d\eta} \left[\frac{V(y)}{V(\eta)} \right] e^{-ik_0(y)x_m \frac{V(y)}{V(\eta)}} N_A(k_0(\eta)[y-\eta]) \{ \dots \} d\eta \\
D_4 \{ \dots \} &= \frac{ik_0(y)}{4\pi} \int_{R_1}^{R_2} \Gamma(\eta) \frac{d}{d\eta} \left[\frac{V(y)}{V(\eta)} \right] e^{-ik_0(y)x_m \frac{V(y)}{V(\eta)}} \frac{V(y)}{V(\eta)} N_B(k_0(\eta)[y-\eta]) \{ \dots \} d\eta \\
D_5 \{ \dots \} &= \frac{ik_0(y)}{4\pi} \int_{R_1}^{R_2} \Gamma(\eta) \frac{d}{d\eta} \left[\frac{V(y)}{V(\eta)} \right] e^{-ik_0(y)x_m} N_C(k_0(y)[y-\eta]) \{ \dots \} d\eta
\end{aligned} \tag{3.31}$$

(3.30) 式を演算子 D_1, D_2, D_3, D_4, D_5 を用いて書くと,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 \frac{\bar{r}_a(\xi, y)}{x-\xi} d\xi &= -\bar{v}_a(x, y) + \frac{ik_0(y)}{\pi} \Gamma(y) e^{-ik_0(y)x_m} \int_1^\infty \frac{e^{-ik(y)\xi}}{x-\xi} d\xi - \{D_1 - D_3\} \left\{ e^{-ik(y) \frac{V(y)}{V(\eta)}} \right\} \\
&\quad - \{D_2 + D_5\} \{ e^{-ik(y)x} \} + D_4 \left\{ [k_0(y)x_m + k(y)x] e^{-ik(y)x \frac{V(y)}{V(\eta)}} \right\}
\end{aligned} \tag{3.32}$$

Söngen の反転公式を用いると,

$$\begin{aligned}
\bar{r}_a(x, y) &= -\frac{2}{\pi} \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \left\langle \int_{-1}^1 -\sqrt{\frac{1+\xi}{1-\xi}} \frac{v_a(\xi, y)}{x-\xi} d\xi \right. \\
&\quad + \frac{ik_0(y)}{2\pi} \Gamma(y) e^{-ik_0(y)x_m} \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1+\xi}{1-\xi}} \frac{1}{x-\xi} \int_1^\infty \frac{e^{-ik(y)\lambda}}{\xi-\lambda} d\lambda d\xi \\
&\quad - \{D_1 - D_3\} \left\{ \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1+\xi}{1-\xi}} \frac{1}{x-\xi} e^{-ik(y)\xi \frac{V(y)}{V(\eta)}} d\xi \right\} - \{D_2 + D_5\} \left\{ \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1+\xi}{1-\xi}} \frac{1}{x-\xi} e^{-ik(y)\xi} d\xi \right\} \\
&\quad + \{D_4\} \left\{ \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1+\xi}{1-\xi}} \frac{1}{x-\xi} [k_0(y)x_m + k(y)\xi] e^{-ik(y)\xi \frac{V(y)}{V(\eta)}} d\xi \right\}
\end{aligned} \tag{3.33}$$

しかるに (3.2) 式を用いると,

$$\int_{x'}^{x'} \bar{r}_a(x', y') dx' = b' \int_{-1}^1 \bar{r}_a(x, y) dx = \Gamma_a'(y') = b_0' e^{-i[k(y)x + k_0(y)x_m]} \Gamma(y) \tag{3.34}$$

$\bar{r}_a(x, y)$ を $x = -1$ から 1 まで積分する為には (3.33) 式の右辺第 2 項を書きなおしておく。

$$\int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1+\xi}{1-\xi}} \frac{1}{x-\xi} \int_1^\infty \frac{e^{-ik\lambda}}{\xi-\lambda} d\lambda d\xi = \int_1^\infty e^{-ik\lambda} \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1+\xi}{1-\xi}} \frac{1}{x-\xi} \frac{1}{\xi-\lambda} d\xi d\lambda$$

しかるに

$$\begin{aligned}
\sqrt{\frac{1+\xi}{1-\xi}} \frac{1}{x-\xi} \frac{1}{\xi-\lambda} &= \frac{1}{x-\lambda} \sqrt{\frac{1+\xi}{1-\xi}} \frac{1}{x-\xi} + \frac{1}{\lambda-x} \sqrt{\frac{1+\xi}{1-\xi}} \frac{1}{\lambda-\xi} \\
\int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1+\xi}{1-\xi}} \frac{1}{x-\xi} d\xi &= -\pi \quad \text{for } -1 \leq x \leq 1 \\
\int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1+\xi}{1-\xi}} \frac{1}{\lambda-\xi} d\xi &= \pi \left(\sqrt{\frac{\lambda+1}{\lambda-1}} - 1 \right) \quad \text{for } \lambda \geq 1
\end{aligned}$$

$$\int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1+\xi}{1-\xi}} \frac{1}{x-\xi} \int_1^\infty \frac{e^{-ik\lambda}}{\xi-\lambda} d\lambda d\xi = \int_1^\infty \pi \frac{1}{\lambda-x} \sqrt{\frac{\lambda+1}{\lambda-1}} e^{-ik\lambda} d\lambda$$

由って

$$\begin{aligned} & \frac{ik_0(y)}{2\pi} \Gamma(y) e^{-ik_0(y)x_m} \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1+\xi}{1-\xi}} \frac{1}{x-\xi} \int_1^\infty \frac{e^{-ik(y)\lambda}}{\xi-\lambda} d\lambda \\ &= \frac{ik_0(y)}{2} \Gamma(y) e^{-ik_0(y)x_m} \int_1^\infty \frac{1}{\lambda-x} \sqrt{\frac{\lambda+1}{\lambda-1}} e^{-ik(y)\lambda} d\lambda \end{aligned}$$

を用いると, (3.34) 式は次のように書ける。

$$\begin{aligned} \bar{\gamma}_a(x, y) = & -\frac{2}{\pi} \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \left\langle \int_{-1}^1 -\sqrt{\frac{1+\xi}{1-\xi}} \frac{\bar{v}_a(\xi, y)}{x-\xi} d\xi + \frac{ik_0(y)}{2} \Gamma(y) e^{-ik_0(y)x_m} \int_1^\infty \frac{1}{\lambda-x} \sqrt{\frac{\lambda+1}{\lambda-1}} e^{-ik(y)\lambda} d\lambda \right. \\ & - \{D_1 - D_3\} \left\{ \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1+\xi}{1-\xi}} \frac{1}{x-\xi} e^{-ik(y)\xi} \frac{V(y)}{V(\eta)} d\xi \right\} - \{D_2 + D_5\} \left\{ \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1+\xi}{1-\xi}} \frac{1}{x-\xi} e^{-ik(y)\xi} d\xi \right. \\ & \left. \left. + D_4 \left\{ \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1+\xi}{1-\xi}} \frac{1}{x-\xi} [k_0(y)x_m + k(y)\xi] e^{-ik(y)\xi} \frac{V(y)}{V(\eta)} d\xi \right\} \right\} \right\rangle \quad (3.35) \end{aligned}$$

(3.35) 式を (3.34) 式に代入して $\bar{\gamma}_a$ を消去するのであるが, その際に $\bar{\gamma}_a(x, y)$ を $x=-1$ より $x=1$ にわたって積分する為に次の積分を用いる。

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \frac{1}{x-\xi} dx &= -\pi \quad \text{for } -1 \leq \xi \leq 1 \\ \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \frac{1}{\lambda-x} dx &= -\pi \left(\sqrt{\frac{\lambda-1}{\lambda+1}} - 1 \right) \quad \text{for } \lambda \geq 1 \end{aligned}$$

由って,

$$\begin{aligned} \frac{b'_0}{b'} e^{-i[k(y)x + k_0(y)x_m]} \Gamma(y) = & 2 \int_{-1}^1 -\sqrt{\frac{1+\xi}{1-\xi}} \bar{v}_a(\xi, y) d\xi + ik_0(y) \Gamma(y) e^{-ik_0(y)x_m} \int_1^\infty \left(1 - \sqrt{\frac{\lambda+1}{\lambda-1}} \right) e^{-ik(y)\lambda} d\lambda \\ & - 2\{D_1 - D_3\} \left\{ \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1+\xi}{1-\xi}} e^{-ik(y)\xi} \frac{V(y)}{V(\eta)} d\xi \right\} - 2\{D_2 + D_5\} \left\{ \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1+\xi}{1-\xi}} e^{-ik(y)\xi} d\xi \right\} \\ & + 2D_4 \left\{ \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1+\xi}{1-\xi}} [k_0(y)x_m + k(y)\xi] e^{-ik(y)\xi} \frac{V(y)}{V(\eta)} d\xi \right\} \quad (3.36) \end{aligned}$$

(3.36) 式の左辺と右辺の第2項の一部が等しいから,

$$\begin{aligned} 2 \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1+\xi}{1-\xi}} \bar{v}_a(\xi, y) d\xi = & -ik_0(y) \Gamma(y) e^{-ik_0(y)x_m} \int_1^\infty \sqrt{\frac{\lambda+1}{\lambda-1}} e^{-ik(y)\lambda} d\lambda \\ & - 2\{D_1 - D_3\} \left\{ \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1+\xi}{1-\xi}} e^{-ik(y)\xi} \frac{V(y)}{V(\eta)} d\xi \right\} - 2\{D_2 + D_5\} \left\{ \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1+\xi}{1-\xi}} e^{-ik(y)\xi} d\xi \right. \\ & \left. + 2D_4 \left\{ \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1+\xi}{1-\xi}} [k_0(y)x_m + k(y)\xi] e^{-ik(y)\xi} \frac{V(y)}{V(\eta)} d\xi \right\} \right\} \quad (3.37) \end{aligned}$$

(3.37) 式の右辺にあらわれる積分は Bessel 関数などを用いてあらわすことができる。

$$\begin{aligned} \int_1^\infty \sqrt{\frac{\lambda+1}{\lambda-1}} e^{-ik\lambda} d\lambda &= \left(\frac{\pi}{2i} H_0^{(2)}(k) - \frac{\pi}{2} H_1^{(2)}(k) \right) \\ \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1+\xi}{1-\xi}} e^{-ik\xi} d\xi &= (\pi J_0(k) - \pi i J_1(k)) \\ \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1+\xi}{1-\xi}} \xi e^{-ik\xi} d\xi &= \pi \left(J_0(k) - \frac{1+ik}{k} J_1(k) \right) \end{aligned}$$

(3.37) 式の右辺を Bessel 関数などであらわし, 両辺を $\frac{\pi ik_0(y)}{2} e^{-ik_0(y)x_m} (H_1^{(2)}(k(y)) + iH_0^{(2)}(k(y)))$ で割る。

更に D_1, D_2 などの演算子をもとにもどす。

$$\begin{aligned} \Gamma^{(2)}(y) = & \Gamma(y) - \frac{e^{-ik_0(y)x_m}}{\pi i [H_1^{(2)}(k(y)) + iH_0^{(2)}(k(y))]} \int_{R_1}^{R_2} \frac{d\Gamma}{d\eta} \frac{V(y)}{V(\eta)} e^{-ik_0(y)x_m} \frac{V(y)}{V(\eta)} \\ & \times N_B(k_0(\eta)[y-\eta]) \left\{ J_0\left(k(y) \frac{V(y)}{V(\eta)}\right) - iJ_1\left(k(y) \frac{V(y)}{V(\eta)}\right) \right\} d\eta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{e^{-ik_0(y)x_m}}{\pi i [H_1^{(2)}(k(y)) + iH_0^{(2)}(k(y))]} \int_{R_1}^{R_2} i\bar{\Gamma}(\eta) \frac{d}{d\eta} \left[\frac{V(y)}{V(\eta)} \right] e^{-ik_0(y)x_m \frac{V(y)}{V(\eta)}} \\
& \times N_A(k_0(\eta)[y-\eta]) \left\{ J_0\left(k(y) \frac{V(y)}{V(\eta)}\right) - iJ_1\left(k(y) \frac{V(y)}{V(\eta)}\right) \right\} d\eta \\
& + \frac{e^{-ik_0(y)x_m}}{\pi i [H_1^{(2)}(k(y)) + iH_0^{(2)}(k(y))]} \int_{R_1}^{R_2} i\bar{\Gamma}(\eta) \frac{d}{d\eta} \left[\frac{V(y)}{V(\eta)} \right] \cdot \left[\frac{V(y)}{V(\eta)} \right] e^{-ik_0(y)x_m \frac{V(y)}{V(\eta)}} \\
& \times N_B(k_0(\eta)[y-\eta]) \left\{ k_0(y)x_m \left(J_0\left(k(y) \frac{V(y)}{V(\eta)}\right) - iJ_1\left(k(y) \frac{V(y)}{V(\eta)}\right) \right) \right. \\
& \left. + k(y) \left(J_0\left(k(y) \frac{V(y)}{V(\eta)}\right) - \frac{1+ik(y) \frac{V(y)}{V(\eta)}}{k(y) \frac{V(y)}{V(\eta)}} J_1\left(k(y) \frac{V(y)}{V(\eta)}\right) \right) \right\} d\eta \\
& - \frac{e^{-ik_0(y)x_m}}{\pi i [H_1^{(2)}(k(y)) + iH_0^{(2)}(k(y))]} \int_{R_1}^{R_2} i \frac{d\bar{\Gamma}}{d\eta} \left[\frac{V(y)}{V(\eta)} \right] e^{-ik_0(y)x_m} \\
& \times N_C(k_0(y)[y-\eta]) \{ J_0(k(y)) - iJ_1(k(y)) \} d\eta \\
& - \frac{e^{-ik_0(y)x_m}}{\pi i [H_1^{(2)}(k(y)) + iH_0^{(2)}(k(y))]} \int_{R_1}^{R_2} i\bar{\Gamma}(\eta) \frac{d}{d\eta} \left[\frac{V(y)}{V(\eta)} \right] e^{-ik_0(y)x_m} \\
& \times N_C(k_0(y)[y-\eta]) \{ J_0(k(y)) - iJ_1(k(y)) \} d\eta \tag{3.38}
\end{aligned}$$

$y=R_1$, $y=R_2$ で $\bar{\Gamma}(y)$ が 0 になることを考慮して (3.38) 式を解けばブレードの半径方向にそった循環の分布を求めることができる。

但し

$$\bar{\Gamma}^{(2)}(y) \equiv 4 \frac{b'}{b_0'} e^{-ik_0(y)x_m} \frac{\int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1+\xi}{1-\xi}} \bar{v}_a(\xi, y) d\xi}{\pi i k(y) [H_1^{(2)}(k(y)) + iH_0^{(2)}(k(y))]} \tag{3.39}$$

これは今までに述べた過程からも明らかなように二次元振動翼理論に於てあらわれる循環の表示式である。

次いで翼に働らく非定常な空気力を求める。(2.22) 式を導いたのと全く同様の考え方によって翼の上下面の圧力差と翼面をおきかえた分布渦の間には次の関係が成立する。

$$\frac{\Delta \bar{p}(x^*, y)}{\rho V(y)} = -\bar{r}_a(x^*, y) - ik(y) \int_{-1}^{x^*} \bar{r}_a(\xi, y) d\xi \tag{3.40}$$

右辺第 2 項の積分を実行する。 \bar{r}_a としては (3.35) 式を用いる。

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{x^*} \bar{r}_a(\xi^*, y) d\xi^* &= -\frac{2}{\pi} \int_{-1}^1 -\sqrt{\frac{1+\xi}{1-\xi}} \bar{v}_a(\xi, y) \int_{-1}^{x^*} \sqrt{\frac{1-\xi^*}{1+\xi^*}} \frac{1}{\xi^*-\xi} d\xi^* d\xi \\
&- \frac{ik_0(y)\bar{\Gamma}(y)}{\pi} e^{-ik_0(y)x_m} \int_1^\infty e^{-ik(y)\lambda} \sqrt{\frac{\lambda+1}{\lambda-1}} \int_{-1}^{x^*} \sqrt{\frac{1-\xi^*}{1+\xi^*}} \frac{1}{\lambda-\xi^*} d\xi^* d\lambda \\
&+ \frac{2}{\pi} \{D_1-D_3\} \left\{ \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1+\xi}{1-\xi}} e^{-ik(y)\xi \frac{V(y)}{V(\eta)}} \int_{-1}^{x^*} \sqrt{\frac{1-\xi^*}{1+\xi^*}} \frac{1}{\xi^*-\xi} d\xi^* d\xi \right\} \\
&+ \frac{2}{\pi} \{D_2+D_3\} \left\{ \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1+\xi}{1-\xi}} e^{-ik(y)\xi} \int_{-1}^{x^*} \sqrt{\frac{1-\xi^*}{1+\xi^*}} \frac{1}{\xi^*-\xi} d\xi^* d\xi \right\} \\
&- \frac{2}{\pi} D_4 \left\{ \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1+\xi}{1-\xi}} [k_0(y)x_m + k(y)\xi] e^{-ik(y)\xi \frac{V(y)}{V(\eta)}} \int_{-1}^{x^*} \sqrt{\frac{1-\xi^*}{1+\xi^*}} \frac{1}{\xi^*-\xi} d\xi^* d\xi \right\} \tag{3.41}
\end{aligned}$$

しかるに

$$\int_{-1}^{x^*} \sqrt{\frac{1-\xi^*}{1+\xi^*}} \frac{1}{\xi^*-\xi} d\xi^* = -\left(\frac{\pi}{2} + \sin^{-1} x^*\right) - \sqrt{\frac{1-\xi}{1+\xi}} A_1(x^*, \xi) \quad \text{for } -1 \leq \xi \leq 1$$

但し

$$A_1(x^*, \xi) = \frac{1}{2} \log \left| \frac{1-x^*\xi + \sqrt{1-\xi^2} \sqrt{1-x^{*2}}}{1-x^*\xi - \sqrt{1-\xi^2} \sqrt{1-x^{*2}}} \right|$$

$$\int_{-1}^{x^*} \sqrt{\frac{1-\xi^*}{1+\xi^*}} \frac{1}{\lambda-\xi^*} d\xi^* = \frac{\pi}{2} + \sin^{-1} x^* + \sqrt{\frac{\lambda-1}{\lambda+1}} A_2(x^*, \lambda) \quad \text{for } \lambda \geq 1$$

但し

$$A_2(x^*, \lambda) = 2 \tan^{-1} \sqrt{\frac{(1-x^*)(\lambda+1)}{(1+x^*)(\lambda-1)}} - \pi$$

$$\begin{aligned} \therefore \int_{-1}^{x^*} \bar{r}_a(\xi^*, y) d\xi^* &= \frac{2}{\pi} \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1+\xi}{1-\xi}} \bar{v}_a(\xi, y) \left[-\left(\frac{\pi}{2} + \sin^{-1} x^* \right) - \sqrt{\frac{1-\xi}{1+\xi}} A_1(x^*, \xi) \right] d\xi \\ &\quad - \frac{ik_0(y) \Gamma(y)}{\pi} e^{-ik_0(y)x_m} \int_1^\infty \left[\frac{\pi}{2} + \sin^{-1} x^* + \sqrt{\frac{\lambda-1}{\lambda+1}} A_2(x^*, \lambda) \right] \sqrt{\frac{\lambda+1}{\lambda-1}} e^{-ik(y)\lambda} d\lambda \\ &\quad + \frac{2}{\pi} \{D_1 - D_3\} \left\{ \int_{-1}^1 \left[-\left(\frac{\pi}{2} + \sin^{-1} x^* \right) - \sqrt{\frac{1-\xi}{1+\xi}} A_1(x^*, \xi) \right] \sqrt{\frac{1+\xi}{1-\xi}} e^{-ik(y)\xi} \frac{V(y)}{V(\eta)} d\xi \right\} \\ &\quad + \frac{2}{\pi} \{D_2 + D_5\} \left\{ \int_{-1}^1 \left[-\left(\frac{\pi}{2} + \sin^{-1} x^* \right) - \sqrt{\frac{1-\xi}{1+\xi}} A_1(x^*, \xi) \right] \sqrt{\frac{1+\xi}{1-\xi}} e^{-ik(y)\xi} d\xi \right\} \\ &\quad - \frac{2}{\pi} D_4 \left\{ \int_{-1}^1 \left[-\left(\frac{\pi}{2} + \sin^{-1} x^* \right) - \sqrt{\frac{1-\xi}{1+\xi}} A_1(x^*, \xi) \right] \sqrt{\frac{1+\xi}{1-\xi}} [k_0(y)x_m + k(y)\xi] e^{-ik(y)\xi} \frac{V(y)}{V(\eta)} d\xi \right\} \end{aligned} \quad (3.42)$$

(3.42) 式のうち $\left(\frac{\pi}{2} + \sin^{-1} x^* \right)$ のかかっている項は 0 となることが (3.37) 式から明らかであるから

$$\begin{aligned} \int_{-1}^{x^*} \bar{r}_a(\xi^*, y) d\xi^* &= -\frac{2}{\pi} \int_{-1}^1 A_1(x^*, \xi) \bar{v}_a(\xi, y) d\xi - \frac{ik_0(y) \Gamma(y)}{\pi} e^{-ik_0(y)x_m} \int_1^\infty A_2(x^*, \lambda) e^{-ik(y)\lambda} d\lambda \\ &\quad - \frac{2}{\pi} \{D_1 - D_3\} \left\{ \int_{-1}^1 A_1(x^*, \xi) e^{-ik(y)\xi} \frac{V(y)}{V(\eta)} d\xi \right\} - \frac{2}{\pi} \{D_2 + D_5\} \left\{ \int_{-1}^1 A_1(x^*, \xi) e^{-ik(y)\xi} d\xi \right\} \\ &\quad + \frac{2}{\pi} D_4 \left\{ \int_{-1}^1 A_1(x^*, \xi) [k_0(y)x_m + k(y)\xi] e^{-ik(y)\xi} \frac{V(y)}{V(\eta)} d\xi \right\} \end{aligned} \quad (3.43)$$

ところが

$$\begin{aligned} \int_1^\infty A_2(x^*, \lambda) e^{-ik(y)\lambda} d\lambda &= -\frac{1}{ik(y)} e^{-ik(y)\lambda} A_2(x^*, \lambda) \Big|_1^\infty + \frac{1}{ik(y)} \sqrt{\frac{1-x^*}{1+x^*}} \int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{\lambda^2-1}} e^{-ik(y)\lambda} d\lambda \\ &\quad + \frac{1}{ik(y)} \sqrt{\frac{1-x^*}{1+x^*}} \int_1^\infty \sqrt{\frac{\lambda+1}{\lambda-1}} \frac{1}{x^*-\lambda} e^{-ik(y)\lambda} d\lambda \end{aligned} \quad (3.44)$$

右辺の第 1 項は 0 になるとみなされるから、

$$\begin{aligned} -ik(y) \int_{-1}^{x^*} \bar{r}_a(\xi^*, y) d\xi^* &= \frac{2}{\pi} ik(y) \int_{-1}^1 A_1(x^*, \xi) \bar{v}_a(\xi, y) d\xi \\ &\quad + \frac{ik_0(y) \Gamma(y)}{\pi} e^{-ik_0(y)x_m} \sqrt{\frac{1-x^*}{1+x^*}} \int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{\lambda^2-1}} e^{-ik(y)\lambda} d\lambda \\ &\quad + \frac{ik_0(y) \Gamma(y)}{\pi} e^{-ik_0(y)x_m} \sqrt{\frac{1-x^*}{1+x^*}} \int_1^\infty \sqrt{\frac{\lambda+1}{\lambda-1}} \frac{1}{x^*-\lambda} e^{-ik(y)\lambda} d\lambda \\ &\quad - \frac{2}{\pi} \{D_1 - D_3\} \left\{ \int_{-1}^1 -ik(y) A_1(x^*, \xi) e^{-ik(y)\xi} \frac{V(y)}{V(\eta)} d\xi \right\} \\ &\quad - \frac{2}{\pi} \{D_2 + D_5\} \left\{ \int_{-1}^1 -ik(y) A_1(x^*, \xi) e^{-ik(y)\xi} d\xi \right\} \\ &\quad + \frac{2}{\pi} D_4 \left\{ \int_{-1}^1 -ik(y) A_1(x^*, \xi) [k_0(y)x_m + k(y)\xi] e^{-ik(y)\xi} \frac{V(y)}{V(\eta)} d\xi \right\} \end{aligned} \quad (2.45)$$

(3.35) 式と (3.45) 式を (3.40) 式に代入すると

$$\begin{aligned} \frac{\Delta \bar{p}(x^*, y)}{\rho V(y)} &= -\frac{2}{\pi} \int_{-1}^1 \left[\sqrt{\frac{1+\xi}{1-\xi}} \sqrt{\frac{1-x^*}{1+x^*}} \frac{1}{x^*-\xi} - ik(y) A_1(x^*, \xi) \right] \bar{v}_a(\xi, y) d\xi \\ &\quad + \frac{ik_0(y) \Gamma(y)}{\pi} e^{-ik_0(y)x_m} \sqrt{\frac{1-x^*}{1+x^*}} \int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{\lambda^2-1}} e^{-ik(y)\lambda} d\lambda \\ &\quad - \frac{2}{\pi} \{D_1 - D_3\} \left\{ \int_{-1}^1 \left[\sqrt{\frac{1+\xi}{1-\xi}} \sqrt{\frac{1-x^*}{1+x^*}} \frac{1}{x^*-\xi} - ik(y) A_1(x^*, \xi) \right] e^{-ik(y)\xi} \frac{V(y)}{V(\eta)} d\xi \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{2}{\pi} \{D_2 + D_3\} \left\{ \int_{-1}^1 \left[\sqrt{\frac{1+\xi}{1-\xi}} \sqrt{\frac{1-x^*}{1+x^*}} \frac{1}{x^*-\xi} - ik(y) A_1(x^*, \xi) \right] e^{-ik(y)\xi} d\xi \right\} \\
& + \frac{2}{\pi} D_4 \left\{ \int_{-1}^1 [k_0(y)x_m + k(y)\xi] \left[\sqrt{\frac{1+\xi}{1-\xi}} \sqrt{\frac{1-x^*}{1+x^*}} \frac{1}{x^*-\xi} - ik(y) A_1(x^*, \xi) \right] e^{-ik(y)\xi} \frac{V(y)}{V(\eta)} d\xi \right\}
\end{aligned} \quad (3.46)$$

3.2 非定常理論による解析

2章2節に述べたようにロータ面が $\theta = \bar{\theta} \sin pt$ であらわされるようなシニソイダルな運動をしている場合には、ブレードは振動数が $\Omega + p$, $\Omega - p$ であるような2種のシニソイダルな振動を合成した運動を行う。誘導速度を求める式 (3.11) は線形であるから、この2つの周波数成分について夫々一組の関係式が得られる。ミッドコードラインが直線で翼弦が一定であるようなブレードについては、(3.38) 式を参照すると2つの周波数成分に対して束縛渦を求める積分方程式は次のように書かれる。

$$\begin{aligned}
\bar{\Gamma}_{\pm}^{(2)}(y) = & \bar{\Gamma}_{\pm}(y) - \frac{1}{\pi i [H_1^{(2)}(k_{\pm}(y)) + iH_0^{(2)}(k_{\pm}(y))]} \int_{R_1}^{R_2} \frac{d\bar{\Gamma}_{\pm}(\eta)}{d\eta} \frac{V(y)}{V(\eta)} \\
& \times N_B(k_{\pm}(\eta)[y-\eta]) \{J_0(k_{\pm}(\eta)) - iJ_1(k_{\pm}(\eta))\} d\eta \\
& + \frac{1}{\pi i [H_1^{(2)}(k_{\pm}(y)) + iH_0^{(2)}(k_{\pm}(y))]} \int_{R_1}^{R_2} i\bar{\Gamma}_{\pm}(\eta) \frac{d}{d\eta} \left[\frac{V(y)}{V(\eta)} \right] \\
& \times N_A(k_{\pm}(\eta)[y-\eta]) \{J_0(k_{\pm}(\eta)) - iJ_1(k_{\pm}(\eta))\} d\eta \\
& - \frac{1}{\pi i [H_1^{(2)}(k_{\pm}(y)) + iH_0^{(2)}(k_{\pm}(y))]} \int_{R_1}^{R_2} i \frac{d\bar{\Gamma}_{\pm}(\eta)}{d\eta} \left[\frac{V(y)}{V(\eta)} \right] \\
& \times N_C(k_{\pm}(y)[y-\eta]) \{J_0(k_{\pm}(y)) - iJ_1(k_{\pm}(y))\} d\eta \\
& - \frac{1}{\pi i [H_1^{(2)}(k_{\pm}(y)) + iH_0^{(2)}(k_{\pm}(y))]} \int_{R_1}^{R_2} i\bar{\Gamma}_{\pm}(\eta) \frac{d}{d\eta} \left[\frac{V(y)}{V(\eta)} \right] \\
& \times N_C(k_{\pm}(y)[y-\eta]) \{J_0(k_{\pm}(y)) - iJ_1(k_{\pm}(y))\} d\eta \\
& + \frac{1}{\pi i [H_1^{(2)}(k_{\pm}(y)) + iH_0^{(2)}(k_{\pm}(y))]} \int_{R_1}^{R_2} i\bar{\Gamma}_{\pm}(\eta) \frac{d}{d\eta} \left[\frac{V(y)}{V(\eta)} \right] \cdot \left[\frac{V(y)}{V(\eta)} \right] \\
& \times N_B(k_{\pm}(\eta)[y-\eta]) \cdot k_{\pm}(y) \cdot \left\{ J_0(k_{\pm}(\eta)) - \frac{1+ik_{\pm}(\eta)}{k_{\pm}(\eta)} J_1(k_{\pm}(\eta)) \right\} d\eta
\end{aligned} \quad (3.47)$$

但し

$$\bar{\Gamma}_{\pm}^{(2)}(y) = \frac{4 \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1+\xi}{1-\xi}} d\xi \left(-\frac{1}{2} y b' \bar{\theta} p \right)}{\pi i k_{\pm}(y) [H_1^{(2)}(k_{\pm}(y)) + iH_0^{(2)}(k_{\pm}(y))]} \quad (3.48)$$

(3.47) 式を連立方程式に書きかえれば解くことができ、ブレードの半径方向に沿った束縛渦が求められる。Ashley らの方法とはやや異なった解法を行ったので以下に述べる。

〔循環方程式の解法〕

N_A , N_B , N_C は $y=\eta$ で特異性をもつ。これは付録Bに述べたとおりであるがここに再び書いておく。

$$\begin{aligned}
\lim_{q \rightarrow 0} N_A(q) &= \frac{q}{|q|} \\
\lim_{q \rightarrow 0} N_B(q) &= \lim_{q \rightarrow 0} \frac{1}{q} - i \frac{q}{|q|} \\
\lim_{\tau \rightarrow 0} N_C(\tau) &= \frac{\tau}{|\tau|} \lim_{\tau \rightarrow 0} \log |\tau| + \frac{\tau}{|\tau|} \left(\gamma + \log 2 + \frac{2}{\pi} i \right)
\end{aligned}$$

次に ΔN_A , ΔN_B , ΔN_C を導入する。

$$N_A(q) = \Delta N_A(q) + \frac{q}{|q|} \quad (3.49)$$

$$N_B(q) = \Delta N_B(q) + \frac{1}{q} - i \frac{q}{|q|} \quad (3.50)$$

$$N_C(\tau) = \Delta N_C(\tau) + \frac{\tau}{|\tau|} \log |\tau| + \frac{\tau}{|\tau|} \left(\gamma + \log 2 + \frac{\pi}{2} i \right) \quad (3.51)$$

次式のような変数変換を行う。

$$y = \frac{R_2 + R_1}{2} - \frac{R_2 - R_1}{2} \cos \phi \quad \eta = \frac{R_2 + R_1}{2} - \frac{R_2 - R_1}{2} \cos \theta \quad (3.52)$$

変数変換を行った時には N_A , N_B , N_C は次のようになる。

$$N_A(k_{\pm}(\eta)[y-\eta]) = \Delta N_A(k_{\pm}(\eta)[y-\eta]) + \frac{\cos \theta - \cos \phi}{|\cos \theta - \cos \phi|} \quad (3.53)$$

$$N_B(k_{\pm}(\eta)[y-\eta]) = \Delta N_B(k_{\pm}(\eta)[y-\eta]) + \frac{2}{k_{\pm}(\eta)[R_2 - R_1][\cos \theta - \cos \phi]} - i \frac{\cos \theta - \cos \phi}{|\cos \theta - \cos \phi|} \quad (3.54)$$

$$N_C(k_{\pm}(y)[y-\eta]) = \Delta N_C(k_{\pm}(y)[y-\eta]) + \frac{\cos \theta - \cos \phi}{|\cos \theta - \cos \phi|} \log |\cos \theta - \cos \phi| \\ + \frac{\cos \theta - \cos \phi}{|\cos \theta - \cos \phi|} \left\{ \log \left(k_{\pm}(y) \frac{R_2 - R_1}{2} \right) + \gamma + \log 2 + \frac{\pi}{2} i \right\} \quad (3.55)$$

$\bar{\Gamma}_{\pm}(y)$ は $y=R_1$ と $y=R_2$ で 0 であるから Multihop の補間公式³⁾を適用する。以下 $F\left(\frac{R_2 + R_1}{2} - \frac{R_2 - R_1}{2} \times \cos \phi\right)$ と書くべきところを $F(\phi)$ と略記しているので注意されたい。

$$\bar{\Gamma}_{\pm}(\phi) = \frac{2}{N+1} \sum_{n=1}^N \bar{\Gamma}_{\pm}(\phi_i) \sum_{n=1}^N \sin n\phi_i \sin n\phi \quad (3.56)$$

但し

$$\phi_i = \frac{\pi i}{N+1}$$

補間公式を用いると (3.47) 式は次のように書かれる。

$$\begin{aligned} \bar{\Gamma}_{\pm}(\phi)^{(2)} = & \frac{2}{N+1} \sum_{i=1}^N \bar{\Gamma}_{\pm}(\phi_i) \sum_{n=1}^N \sin n\phi_i \sin n\phi \\ & + \frac{1}{\pi i [H_1^{(2)}(k_{\pm}(\phi)) + iH_0^{(2)}(k_{\pm}(\phi))]} \frac{2}{N+1} \frac{R_2 - R_1}{2} \sum_{i=1}^N \bar{\Gamma}_{\pm}(\phi_i) \sin n\phi_i \\ & \times \int_0^{\pi} \sin n\theta \sin \theta \left[i \frac{d}{d\eta} \left[\frac{V(y)}{V(\eta)} \right] \{J_0(k_{\pm}(\eta)) - iJ_1(k_{\pm}(\eta))\} \Delta N_A(k_{\pm}(\eta)[y-\eta]) \right. \\ & + i \frac{d}{d\eta} \left[\frac{V(y)}{V(\eta)} \right] \{J_0(k_{\pm}(\eta)) - iJ_1(k_{\pm}(\eta))\} \frac{\cos \theta - \cos \phi}{|\cos \theta - \cos \phi|} \\ & - i \frac{d}{d\eta} \left[\frac{V(y)}{V(\eta)} \right] \{J_0(k_{\pm}(y)) - iJ_1(k_{\pm}(y))\} \Delta N_C(k_{\pm}(y)[y-\eta]) \\ & - i \frac{d}{d\eta} \left[\frac{V(y)}{V(\eta)} \right] \{J_0(k_{\pm}(y)) - iJ_1(k_{\pm}(y))\} \left\{ \log \left(k_{\pm}(y) \frac{R_2 - R_1}{2} \right) + \gamma + \log 2 + \frac{\pi}{2} i \right\} \frac{\cos \theta - \cos \phi}{|\cos \theta - \cos \phi|} \\ & - i \frac{d}{d\eta} \left[\frac{V(y)}{V(\eta)} \right] \{J_0(k_{\pm}(y)) - iJ_1(k_{\pm}(y))\} \frac{\cos \theta - \cos \phi}{|\cos \theta - \cos \phi|} \log |\cos \theta - \cos \phi| \\ & + i \frac{d}{d\eta} \left[\frac{V(y)}{V(\eta)} \right] \{k_{\pm}(\eta) [J_0(k_{\pm}(\eta)) - iJ_1(k_{\pm}(\eta))] - J_1(k_{\pm}(\eta))\} \Delta N_B(k_{\pm}(\eta)[y-\eta]) \\ & + \frac{d}{d\eta} \left[\frac{V(y)}{V(\eta)} \right] \{k_{\pm}(\eta) [J_0(k_{\pm}(\eta)) - iJ_1(k_{\pm}(\eta))] - J_1(k_{\pm}(\eta))\} \frac{\cos \theta - \cos \phi}{|\cos \theta - \cos \phi|} \\ & + i \frac{d}{d\eta} \left[\frac{V(y)}{V(\eta)} \right] \left\{ J_0(k_{\pm}(\eta)) - iJ_1(k_{\pm}(\eta)) \right\} - \frac{J_1(k_{\pm}(\eta))}{k_{\pm}(\eta)} \left. \right\} \frac{2}{[R_2 - R_1][\cos \theta - \cos \phi]} \Big] d\theta \\ & - \frac{1}{\pi i [H_1^{(2)}(k_{\pm}(\phi)) + iH_0^{(2)}(k_{\pm}(\phi))]} \frac{2}{N+1} \sum_{n=1}^N \bar{\Gamma}_{\pm}(\phi_i) \sum_{n=1}^N n \sin n\phi_i \\ & \times \int_0^{\pi} \cos n\theta \left[\frac{V(y)}{V(\eta)} \{J_0(k_{\pm}(\eta)) - iJ_1(k_{\pm}(\eta))\} \Delta N_B(k_{\pm}(\eta)[y-\eta]) \right. \\ & - i \frac{V(y)}{V(\eta)} \{J_0(k_{\pm}(\eta)) - iJ_1(k_{\pm}(\eta))\} \frac{\cos \theta - \cos \phi}{|\cos \theta - \cos \phi|} \\ & + \{J_0(k_{\pm}(\eta)) - iJ_1(k_{\pm}(\eta))\} \frac{1}{k_{\pm}(y)} \frac{2}{R_2 - R_1} \frac{1}{\cos \theta - \cos \phi} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + i \frac{V(y)}{V(\eta)} \{J_0(k_{\pm}(y)) - iJ_1(k_{\pm}(y))\} \Delta N_C(k_{\pm}(y)[y-\eta]) \\
& + i \frac{V(y)}{V(\eta)} \{J_0(k_{\pm}(y)) - iJ_1(k_{\pm}(y))\} \left\{ \log\left(k_{\pm}(y) \frac{R_2-R_1}{2}\right) + r + \log 2 + \frac{\pi i}{2} \right\} \frac{\cos \theta - \cos \phi}{|\cos \theta - \cos \phi|} \\
& + i \frac{V(y)}{V(\eta)} \{J_0(k_{\pm}(y)) - iJ_1(k_{\pm}(y))\} \frac{\cos \theta - \cos \phi}{|\cos \theta - \cos \phi|} \log |\cos \theta - \cos \phi| \Big] d\theta \quad (3.57)
\end{aligned}$$

更に整理すると,

$$\begin{aligned}
\bar{\Gamma}_{\pm}^{(2)}(\phi) &= \frac{2}{N+1} \sum_{i=1}^N \bar{\Gamma}_{\pm}(\phi_i) \sum_{n=1}^N \sin n\phi_i \sin n\phi \\
&+ \frac{1}{\pi i [H_1^{(2)}(k_{\pm}(\phi)) + iH_0^{(2)}(k_{\pm}(\phi))]} \frac{2}{N+1} \frac{R_2-R_1}{2} \sum_{i=1}^N \bar{\Gamma}_{\pm}(\phi_i) \sum_{n=1}^N \sin n\phi_i \\
&\times \int_0^{\pi} \sin n\theta \sin \theta \left[K_{A1}(\phi, \theta) + K_{A2}(\phi, \theta) \frac{\cos \theta - \cos \phi}{|\cos \theta - \cos \phi|} \right. \\
&+ K_{A3}(\phi, \theta) \frac{\cos \theta - \cos \phi}{|\cos \theta - \cos \phi|} \log |\cos \theta - \cos \phi| + K_{A4} \frac{1}{\cos \theta - \cos \phi} \Big] d\theta \\
&- \frac{1}{\pi i [H_1^{(2)}(k_{\pm}(\phi)) + iH_0^{(2)}(k_{\pm}(\phi))]} \frac{2}{N+1} \sum_{i=1}^N \bar{\Gamma}_{\pm}(\phi_i) \sum_{n=1}^N n \sin n\phi_i \\
&\times \int_0^{\pi} \cos n\theta \left[K_{A5}(\phi, \theta) + K_{A6}(\phi, \theta) \frac{\cos \theta - \cos \phi}{|\cos \theta - \cos \phi|} \right. \\
&+ K_{A7}(\phi, \theta) \frac{\cos \theta - \cos \phi}{|\cos \theta - \cos \phi|} \log |\cos \theta - \cos \phi| + K_{A8} \frac{1}{\cos \theta - \cos \phi} \Big] d\theta \quad (3.58)
\end{aligned}$$

但し,

$$\begin{aligned}
K_{A1}(\phi, \theta) &= i \frac{d}{d\eta} \left[-\frac{V(y)}{V(\eta)} \right] \{J_0(k_{\pm}(\eta)) - iJ_1(k_{\pm}(\eta))\} \Delta N_A(k_{\pm}(\eta)[y-\eta]) \\
&- i \frac{d}{d\eta} \left[-\frac{V(y)}{V(\eta)} \right] \{J_0(k_{\pm}(y)) - iJ_1(k_{\pm}(y))\} \Delta N_C(k_{\pm}(y)[y-\eta]) \\
&+ i \frac{d}{d\eta} \left[-\frac{V(y)}{V(\eta)} \right] \{k_{\pm}(\eta) [J_0(k_{\pm}(\eta)) - iJ_1(k_{\pm}(\eta))] - J_1(k_{\pm}(\eta))\} \Delta N_B(k_{\pm}(\eta)[y-\eta]) \\
K_{A2}(\phi, \theta) &= i \frac{d}{d\eta} \left[-\frac{V(y)}{V(\eta)} \right] \{J_0(k_{\pm}(\eta)) - iJ_1(k_{\pm}(\eta))\} \\
&- i \frac{d}{d\eta} \left[-\frac{V(y)}{V(\eta)} \right] \{J_0(k_{\pm}(y)) - iJ_1(k_{\pm}(y))\} \left\{ \log\left(k_{\pm}(y) \frac{R_2-R_1}{2}\right) + r + \log 2 + \frac{\pi}{2} i \right\} \\
&+ \frac{d}{d\eta} \left[-\frac{V(y)}{V(\eta)} \right] \{k_{\pm}(\eta) [J_0(k_{\pm}(\eta)) - iJ_1(k_{\pm}(\eta))] - J_1(k_{\pm}(\eta))\} \\
K_{A3}(\phi, \theta) &= -i \frac{d}{d\eta} \left[-\frac{V(y)}{V(\eta)} \right] \{J_0(k_{\pm}(y)) - iJ_1(k_{\pm}(y))\} \\
K_{A4}(\phi, \theta) &= i \frac{2}{R_2-R_1} \frac{d}{d\eta} \left[-\frac{V(y)}{V(\eta)} \right] \left\{ J_0(k_{\pm}(\eta)) - iJ_1(k_{\pm}(\eta)) - \frac{J_1(k_{\pm}(\eta))}{k_{\pm}(\eta)} \right\} \\
K_{A5}(\phi, \theta) &= \frac{V(y)}{V(\eta)} \{J_0(k_{\pm}(\eta)) - iJ_1(k_{\pm}(\eta))\} \Delta N_B(k_{\pm}(\eta)[y-\eta]) \\
&+ i \frac{V(y)}{V(\eta)} \{J_0(k_{\pm}(y)) - iJ_1(k_{\pm}(y))\} \Delta N_C(k_{\pm}(y)[y-\eta]) \\
K_{A6}(\phi, \theta) &= -i \frac{V(y)}{V(\eta)} \{J_0(k_{\pm}(\eta)) - iJ_1(k_{\pm}(\eta))\} \\
&+ i \frac{V(y)}{V(\eta)} \{J_0(k_{\pm}(y)) - iJ_1(k_{\pm}(y))\} \left\{ \log\left(k_{\pm}(y) \frac{R_2-R_1}{2}\right) + r + \log 2 + \frac{\pi i}{2} \right\} \\
K_{A7}(\phi, \theta) &= i \frac{V(y)}{V(\eta)} \{J_0(k_{\pm}(y)) - iJ_1(k_{\pm}(y))\} \\
K_{A8}(\phi, \theta) &= \{J_0(k_{\pm}(\eta)) - iJ_1(k_{\pm}(\eta))\} \frac{1}{k_{\pm}(y)} \frac{2}{R_2-R_1}
\end{aligned}$$

$K_{A1}(\phi, \theta)$, $K_{A2}(\phi, \theta)$, $\dots K_{A8}(\phi, \theta)$ は各々 Chebyshev の補間公式^{3), 19)} とよばれるものを用いてあらわすと次のように書くことができる。

$$\begin{aligned} K_A(\phi, \theta) &= \frac{2}{J+1} \sum_{j=1}^{J+1} K_A(\phi, \theta_j) \left(\frac{1}{2} + \sum_{l=1}^J \cos l\theta_j \cos l\theta \right) \\ &= \frac{2}{J+1} \sum_{j=1}^{J+1} K_A(\phi, \theta_j) \sum_{l=0}^J (C_{lj} \cos l\theta) \end{aligned} \quad (3.59)$$

但し

$$\left. \begin{aligned} C_{0j} &= 1/2 \\ C_{lj} &= \cos l\theta_j \end{aligned} \right\} \quad (l=1, 2, \dots, J) \quad (3.60)$$

従って (3.58) 式は次のように書くことができる。

$$\begin{aligned} \bar{\Gamma}_{\pm}^{(2)}(\phi) &= \sum_{i=1}^N \bar{\Gamma}_{\pm}(\phi_i) \frac{2}{N+1} \sum_{n=1}^N \sin n\phi_i \left\langle \sin n\phi + \frac{1}{\pi i [H_1^{(2)}(k_{\pm}(\phi)) + iH_0^{(2)}(k_{\pm}(\phi))]} \right. \\ &\quad \times \frac{2}{J+1} \left\{ \frac{R_2 - R_1}{4} \sum_{j=1}^{J+1} K_{A1}(\phi, \theta_j) \sum_{l=0}^J C_{lj} \int_0^{\pi} \cos l\theta [\cos(n-1)\theta - \cos(n+1)\theta] d\theta \right. \\ &\quad + \frac{R_2 - R_1}{4} \sum_{j=1}^{J+1} K_{A2}(\phi, \theta_j) \sum_{l=0}^J C_{lj} \int_0^{\pi} \cos l\theta [\cos(n-1)\theta - \cos(n+1)\theta] \frac{\cos \theta - \cos \phi}{|\cos \theta - \cos \phi|} d\theta \\ &\quad + \frac{R_2 - R_1}{4} \sum_{j=1}^{J+1} K_{A3}(\phi, \theta_j) \sum_{l=0}^J C_{lj} \int_0^{\pi} \cos l\theta [\cos(n-1)\theta - \cos(n+1)\theta] \frac{\cos \theta - \cos \phi}{|\cos \theta - \cos \phi|} \log |\cos \theta - \cos \phi| d\theta \\ &\quad + \frac{R_2 - R_1}{4} \sum_{j=1}^{J+1} K_{A4}(\phi, \theta_j) \sum_{l=0}^J C_{lj} \int_0^{\pi} \cos l\theta [\cos(n-1)\theta - \cos(n+1)\theta] \frac{1}{\cos \theta - \cos \phi} d\theta \\ &\quad - n \sum_{j=1}^{J+1} K_{A5}(\phi, \theta_j) \sum_{l=1}^J C_{lj} \int_0^{\pi} \cos l\theta \cos n\theta d\theta \\ &\quad - n \sum_{j=1}^{J+1} K_{A6}(\phi, \theta_j) \sum_{l=1}^J C_{lj} \int_0^{\pi} \cos l\theta \cos n\theta \frac{\cos \theta - \cos \phi}{|\cos \theta - \cos \phi|} d\theta \\ &\quad - n \sum_{j=1}^{J+1} K_{A7}(\phi, \theta_j) \sum_{l=0}^J C_{lj} \int_0^{\pi} \cos l\theta \cos n\theta \frac{\cos \theta - \cos \phi}{|\cos \theta - \cos \phi|} \log |\cos \theta - \cos \phi| d\theta \\ &\quad \left. \left. - n \sum_{j=1}^{J+1} K_{A8}(\phi, \theta_j) \sum_{l=0}^J C_{lj} \int_0^{\pi} \cos l\theta \cos n\theta \frac{1}{\cos \theta - \cos \phi} d\theta \right\} \right\rangle \end{aligned} \quad (3.61)$$

上式の右辺にあらわれる 4 種類の積分を解く。

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad FW_{pq} &= \int_1^{\pi} \cos p\theta \cos q\theta d\theta = \begin{cases} \pi & \text{for } p=q=0 \\ \pi/2 & \text{for } p=q \neq 0 \\ 0 & \text{for } p \neq q \end{cases} \\ \text{(b)} \quad FX_{pq}(\phi) &= \int_0^{\pi} \cos p\theta \cos q\theta \frac{\cos \phi - \cos \theta}{|\cos \phi - \cos \theta|} d\theta = \begin{cases} \pi - 2\phi & \text{for } p=q=0 \\ \frac{\pi - 2\phi}{2} - \frac{\sin(p+q)\phi}{p+q} & \text{for } p=q \neq 0 \\ -\frac{\sin|p-q|\phi}{|p-q|} - \frac{\sin(p+q)\phi}{p+q} & \text{for } p \neq q \end{cases} \\ \text{(c)} \quad FY_{pq}(\phi) &= \int_0^{\pi} \cos p\theta \cos q\theta \frac{\cos \phi - \cos \theta}{|\cos \phi - \cos \theta|} \ln |\cos \phi - \cos \theta| d\theta = \begin{cases} -f_0(\phi) & \text{for } p=q=0 \\ -\frac{f_0(\phi) + f_{p+q}(\phi)}{2} & \text{for } p=q \neq 0 \\ -\frac{f_{p-q}(\phi) + f_{p+q}(\phi)}{2} & \text{for } p \neq q \end{cases} \end{aligned}$$

但し、

$$f_k(\phi) = \int_0^{\pi} \frac{\cos \theta - \cos \phi}{|\cos \theta - \cos \phi|} (\log |\cos \theta - \cos \phi|) \cos k\theta d\theta$$

$k \neq 0$ の場合の $f_k(\phi)$ は Reissner²¹⁾ が求めている。市川³⁾は Reissner の式を変形して取扱い易い式を作った。市川の式は次のとおりである。

$$f_k(\phi) = \frac{2}{k} \left\{ [2 \log |\sin \phi| + \log 2 - 1] \sin k\phi - \left(\phi - \frac{\pi}{2} \right) \cos k\phi \right\} + g_k(\phi)$$

ここで $g_k(\phi)$ は初期条件

$$\begin{aligned} g_1(\phi) &= 0 \\ g_2(\phi) &= -\frac{\sin 2\phi}{2} \end{aligned}$$

と漸化式

$$(k-1)g_{k-1}(\phi) - 2k \cos \phi g_k(\phi) + (k+1)g_{k+1}(\phi) = 2 \left[\frac{\sin(k-1)\phi}{k-1} - \frac{\sin(k+1)\phi}{k+1} \right] \quad (k=2, 3, \dots)$$

によって求められる。

特に $k=0$ の場合には次のようになることがわかる²²⁾。

$$f_0(\phi) = \begin{cases} (\pi - 2\phi) \log 2 + 4 \int_{\phi}^{\pi/2} \log \sin x dx & \text{for } \frac{\pi}{2} \geq \phi \\ (\pi - 2\phi) \log 2 - 4 \int_{\pi-\phi}^{\pi/2} \log \sin x dx & \text{for } \frac{\pi}{2} < \phi \end{cases}$$

但し

$$\int_{\phi}^{\pi/2} \log \sin x dx = -\frac{\pi}{2} \log 2 - \phi \log \phi + \phi + \frac{\phi^3}{18} + \frac{\phi^5}{900} + \frac{\phi^7}{19845} + \dots$$

$$(d) \quad FZ_{pq}(\phi) = \int_0^{\pi} \cos p\theta \cos q\theta \frac{1}{\cos \phi - \cos \theta} d\theta \quad {}^{23)} = \begin{cases} 0 \\ -\frac{\pi}{2} \frac{\sin(p+q)\phi}{p+q} \\ -\frac{\pi}{2} \frac{\sin|p-q|\phi}{|p-q|} - \frac{\pi}{2} \frac{\sin(p+q)\phi}{(p+q)} \end{cases}$$

FW, FX, FY, FZ を用いて (3.61) 式を書くと,

$$\begin{aligned} \bar{\Gamma}_{\pm}^{(2)}(\phi) &= \sum_{i=1}^N \bar{\Gamma}_{\pm}(\phi_i) \frac{2}{N+1} \sum_{n=1}^N \sin n\phi_i \left\langle \sin n\phi + \frac{1}{\pi i [H_1^{(2)}(k_{\pm}(\phi)) + iH_0^{(2)}(k_{\pm}(\phi))]} \right. \\ &\quad \times \frac{2}{J+1} \left\{ \frac{R_2-R_1}{4} \sum_{j=1}^{J+1} K_{A1}(\phi, \theta_j) \sum_{l=0}^J C_{lj} (FW_{l,n-1} - FW_{l,n+1}) - n \sum_{j=1}^{J+1} K_{A5}(\phi, \theta_j) \sum_{l=0}^J C_{lj} FW_{l,n} \right. \\ &\quad - \frac{R_2-R_1}{4} \sum_{j=1}^{J+1} K_{A2}(\phi, \theta_j) \sum_{l=0}^J C_{lj} (FX_{l,n-1} - FX_{l,n+1}) + n \sum_{j=1}^{J+1} K_{A6}(\phi, \theta_j) \sum_{l=0}^J C_{lj} FX_{l,n} \\ &\quad - \frac{R_2-R_1}{4} \sum_{j=1}^{J+1} K_{A3}(\phi, \theta_j) \sum_{l=0}^J C_{lj} (FY_{l,n-1} - FY_{l,n+1}) + n \sum_{j=1}^{J+1} K_{A7}(\phi, \theta_j) \sum_{l=0}^J C_{lj} FY_{l,n} \\ &\quad \left. \left. - \frac{R_2-R_1}{4} \sum_{j=1}^{J+1} K_{A4}(\phi, \theta_j) \sum_{l=0}^J C_{lj} (FZ_{l,n-1} - FZ_{l,n+1}) + n \sum_{j=1}^{J+1} K_{A8}(\phi, \theta_j) \sum_{l=0}^J C_{lj} FZ_{l,n} \right\} \right\rangle \quad (3.62) \end{aligned}$$

N コの ϕ の値をえらぶと (3.62) 式は連立方程式として解くことができ、 $\bar{\Gamma}_{\pm}(\phi_i)$ を求めることができる。

〔ブレードの半径方向にそった揚力分布〕

(3.46) 式を参照すると 2つの周波数成分に対してブレードの上下面の圧力差を求める式は次のように書くことができる。

$$\begin{aligned} \frac{\Delta \bar{p}_{\pm}(x^*, y)}{\rho V(y)} &= -\frac{2}{\pi} \int_{-1}^1 \left[\sqrt{\frac{1+\xi}{1-\xi}} \sqrt{\frac{1-x^*}{1+x^*}} \frac{1}{x^*-\xi} - ik_{\pm}(y) A_1(x^*, \xi) \right] \left(-\frac{1}{2} y b' \bar{\theta} p \right) d\xi \\ &\quad + \frac{ik_{\pm}(y) \bar{\Gamma}_{\pm}(y)}{\pi} \sqrt{\frac{1-x^*}{1+x^*}} \int_{-1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\lambda^2-1}} e^{-ik_{\pm}(y)\lambda} d\lambda \\ &\quad - \frac{2}{\pi} \{D_1 - D_3\} \left\{ \int_{-1}^1 \left[\sqrt{\frac{1+\xi}{1-\xi}} \sqrt{\frac{1-x^*}{1+x^*}} \frac{1}{x^*-\xi} - ik_{\pm}(y) A_1(x^*, \xi) \right] e^{-ik_{\pm}(y)\xi} d\xi \right. \\ &\quad - \frac{2}{\pi} \{D_2 + D_5\} \left\{ \int_{-1}^1 \left[\sqrt{\frac{1+\xi}{1-\xi}} \sqrt{\frac{1-x^*}{1+x^*}} \frac{1}{x^*-\xi} - ik_{\pm}(y) A_1(x^*, \xi) \right] e^{-ik_{\pm}(y)\xi} d\xi \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{2}{\pi} \{D_4\} \left\{ \int_{-1}^1 k_{\pm}(y) \xi \left[\sqrt{\frac{1+\xi}{1-\xi}} \sqrt{\frac{1-x^*}{1+x^*}} \frac{1}{x^*-\xi} - ik_{\pm}(y) A_1(x^*, \xi) \right] e^{-ik_{\pm}(y)\xi} d\xi \right. \right. \right. \end{aligned} \quad (3.63)$$

$\Delta p_{\pm}(x^*, y)$ を前縁から後縁まで積分すると単位翼幅あたりの揚力が得られるが, その際に次の積分を利用する。

$$\begin{aligned}
 \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1-x^*}{1+x^*}} \frac{1}{x^*-\xi} dx^* &= -\pi \\
 \int_{-1}^1 A_1(x^*, \xi) dx^* &= \pi \sqrt{1-\xi^2} \\
 \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1-x^*}{1+x^*}} dx^* &= \pi \\
 \int_{-1}^1 \frac{\Delta \bar{p}_{\pm}(x^*, y)}{\rho V(y)} dx^* &= 2 \int_{-1}^1 \left[\sqrt{\frac{1+\xi}{1-\xi}} + ik_{\pm}(y) \sqrt{1-\xi^2} \right] \left(-\frac{1}{2} y b' \bar{\theta} p \right) d\xi \\
 &\quad + ik_{\pm}(y) \Gamma_{\pm}(y) \int_1^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\lambda^2-1}} e^{-ik_{\pm}(y)\lambda} d\lambda \\
 &\quad + 2\{D_1-D_3\} \left\{ \int_{-1}^1 \left[\sqrt{\frac{1+\xi}{1-\xi}} + ik_{\pm}(y) \sqrt{1-\xi^2} \right] e^{-ik_{\pm}(y)\xi} d\xi \right\} \\
 &\quad + 2\{D_2+D_6\} \left\{ \int_{-1}^1 \left[\sqrt{\frac{1+\xi}{1-\xi}} + ik_{\pm}(y) \sqrt{1-\xi^2} \right] e^{-ik_{\pm}(y)\xi} d\xi \right\} \\
 &\quad - 2\{D_4\} \left\{ \int_{-1}^1 k_{\pm}(y) \xi \left[\sqrt{\frac{1+\xi}{1-\xi}} + ik_{\pm}(y) \sqrt{1-\xi^2} \right] e^{-ik_{\pm}(y)\xi} d\xi \right\} \quad (3.64)
 \end{aligned}$$

更に積分が Bessel 関数などを用いて表示できる。

$$\begin{aligned}
 \int_1^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\lambda^2-1}} e^{-ik_{\pm}(y)\lambda} d\lambda &= \frac{\pi}{2i} H_0^{(2)}(k_{\pm}(y)) \\
 \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1+\xi}{1-\xi}} e^{-ik_{\pm}(y)\xi} d\xi &= -\pi i [J_1(k_{\pm}(y)) + iJ_0(k_{\pm}(y))] \\
 \int_{-1}^1 ik_{\pm}(y) \sqrt{1-\xi^2} e^{-ik_{\pm}(y)\xi} d\xi &= \frac{i\pi V(y)}{V(y)} J_1(k_{\pm}(y)) \\
 \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1+\xi}{1-\xi}} e^{-ik_{\pm}(y)\xi} d\xi &= -\pi i [J_1(k_{\pm}(y)) + iJ_0(k_{\pm}(y))] \\
 \int_{-1}^1 ik_{\pm}(y) \sqrt{1-\xi^2} e^{-ik_{\pm}(y)\xi} d\xi &= i\pi J_1(k_{\pm}(y)) \\
 \int_{-1}^1 k_{\pm}(y) \xi \sqrt{\frac{1+\xi}{1-\xi}} e^{-ik_{\pm}(y)\xi} d\xi &= \pi \left[k_{\pm}(y) J_0(k_{\pm}(y)) - \frac{V(y)}{V(y)} J_1(k_{\pm}(y)) - ik_{\pm}(y) J_1(k_{\pm}(y)) \right] \\
 i \int_{-1}^1 k_{\pm}^2(y) \xi \sqrt{1-\xi^2} e^{-ik_{\pm}(y)\xi} d\xi &= \frac{2\pi V^2(y)}{V^2(y)} J_1(k_{\pm}(y)) - \frac{\pi k_{\pm}(y) V(y)}{V(y)} J_0(k_{\pm}(y)) \\
 \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1+\xi}{1-\xi}} d\xi &= \pi \\
 \int_{-1}^1 \sqrt{1-\xi^2} d\xi &= \frac{\pi}{2}
 \end{aligned}$$

単位翼幅あたりの揚力は演算記号をもとにもどすと,

$$\begin{aligned}
 \bar{L}_{\pm}(y) &= -b' \int_{-1}^1 \Delta \bar{p}(x^*, y) dx^* \\
 &= \rho b' V(y) \left\langle 2\pi \left(1 + \frac{ik_{\pm}(y)}{2} \right) \left(-\frac{1}{2} b' y \bar{\theta} p \right) + \frac{\pi k_{\pm}(y) \Gamma_{\pm}(y)}{2} H_0^{(2)}(k_{\pm}(y)) \right. \\
 &\quad + \int_{R_1}^{R_2} \Gamma_{\pm}(\eta) \left\{ \frac{k_{\pm}(y)}{2} \frac{d}{d\eta} \left[\frac{V(y)}{V(\eta)} \right] N_A(k_{\pm}(\eta) [y-\eta]) \left[\left(\frac{V(\eta)}{V(y)} - 1 \right) J_0(k_{\pm}(\eta)) - iJ_1(k_{\pm}(\eta)) \right] \right. \\
 &\quad + i \frac{k_{\pm}(y)}{2} \frac{d}{d\eta} \left[\frac{V(y)}{V(\eta)} \right] N_C(k_{\pm}(y) [y-\eta]) J_0(k_{\pm}(y)) \\
 &\quad - i \frac{k_{\pm}(y)}{2} \frac{d}{d\eta} \left[\frac{V(y)}{V(\eta)} \right] N_B(k_{\pm}(\eta) [y-\eta]) \left[\left(2 \frac{V(\eta)}{V(y)} - 1 - ik_{\pm}(\eta) \right) J_1(k_{\pm}(\eta)) \right. \\
 &\quad \left. \left. - k_{\pm}(\eta) \left(\frac{V(\eta)}{V(y)} - 1 \right) J_0(k_{\pm}(\eta)) \right] \right\} d\eta
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \int_{R_1}^{R_2} \frac{d\bar{\Gamma}_{\pm}(\eta)}{d\eta} \left\{ \frac{ik_{\pm}(\eta)}{2} N_B(k_{\pm}(\eta) [y-\eta]) \left[\left(\frac{V(\eta)}{V(y)} - 1 \right) J_1(k_{\pm}(\eta)) - iJ_0(k_{\pm}(\eta)) \right] \right. \\
& \left. + \frac{ik_{\pm}(\eta)}{2} N_C(k_{\pm}(\eta) [y-\eta]) J_C(k_{\pm}(\eta)) \right\} d\eta \Bigg\rangle \quad (3.65)
\end{aligned}$$

N_A , N_B , N_C に含まれる特異性を考慮し, $\bar{\Gamma}_{\pm}$ を Multihop の補間公式³⁾ を用いてあらわすと, (3.58) 式を導いたのと全く同様の手順によって, $\bar{L}_{\pm}(\phi)$ を次のように書くことができる。

$$\begin{aligned}
\bar{L}_{\pm}(y) = & \rho b' V(\phi) \left\langle 2\pi \left(1 + \frac{ik_{\pm}(\phi)}{2} \right) \left(-\frac{1}{2} b' y \bar{\theta} \bar{p} \right) + \sum_{i=1}^N \bar{\Gamma}_{\pm}(\phi_i) \frac{2}{N+1} \sum_{n=1}^N \sin n\phi_i \sin n\phi \frac{\pi k_{\pm}(\phi)}{2} H_0^{(2)}(k_{\pm}(\phi)) \right. \\
& + \frac{2}{N+1} \frac{R_2 - R_1}{2} \sum_{i=1}^N \bar{\Gamma}_{\pm}(\phi_i) \sum_{n=1}^N \sin n\phi_i \int_0^{\pi} \sin n\theta \sin \theta \left[K_{A9}(\phi, \theta) + K_{A10}(\phi, \theta) \frac{\cos \theta - \cos \phi}{|\cos \theta - \cos \phi|} \right. \\
& + K_{A11}(\phi, \theta) \frac{\cos \theta - \cos \phi}{|\cos \theta - \cos \phi|} \log |\cos \theta - \cos \phi| + K_{A12}(\phi, \theta) \frac{1}{\cos \phi - \cos \phi} \Bigg] d\theta \\
& + \frac{2}{N+1} \sum_{i=1}^N \bar{\Gamma}_{\pm}(\phi_i) \sum_{n=1}^N n \sin n\phi_i \int_0^{\pi} \cos n\theta \left[K_{A13}(\phi, \theta) + K_{A14}(\phi, \theta) \frac{\cos \theta - \cos \phi}{|\cos \theta - \cos \phi|} \right. \\
& \left. \left. + K_{A15}(\phi, \theta) \frac{\cos \theta - \cos \phi}{|\cos \theta - \cos \phi|} \log |\cos \theta - \cos \phi| + K_{A16}(\phi, \theta) \frac{1}{\cos \theta - \cos \phi} \right] d\theta \right\rangle \quad (3.66)
\end{aligned}$$

但し

$$\begin{aligned}
K_{A9}(\phi, \theta) = & \frac{k_{\pm}(y)}{2} \frac{d}{d\eta} \left[\frac{V(y)}{V(\eta)} \right] \left[\left(\frac{V(y)}{V(\eta)} - 1 \right) J_1(k_{\pm}(\eta)) - iJ_0(k_{\pm}(\eta)) \right] \Delta N_A(k_{\pm}(\eta) [y-\eta]) \\
& + i \frac{k_{\pm}(y)}{2} \frac{d}{d\eta} \left[\frac{V(y)}{V(\eta)} \right] J_0(k_{\pm}(y)) \Delta N_C(k_{\pm}(y) [y-\eta]) \\
& - i \frac{k_{\pm}(y)}{2} \frac{d}{d\eta} \left[\frac{V(y)}{V(\eta)} \right] \left[\left(2 \frac{V(\eta)}{V(y)} - 1 - ik_{\pm}(\eta) \right) J_1(k_{\pm}(\eta)) \right. \\
& \left. - k_{\pm}(\eta) \left(\frac{V(\eta)}{V(y)} - 1 \right) J_0(k_{\pm}(\eta)) \right] \Delta N_B(k_{\pm}(\eta) [y-\eta]) \\
K_{A10}(\phi, \theta) = & \frac{k_{\pm}(y)}{2} \frac{d}{d\eta} \left[\frac{V(y)}{V(\eta)} \right] \left[\left(\frac{V(y)}{V(\eta)} - 1 \right) J_1(k_{\pm}(\eta)) - iJ_0(k_{\pm}(\eta)) \right] \\
& + i \frac{k_{\pm}(y)}{2} \frac{d}{d\eta} \left[\frac{V(y)}{V(\eta)} \right] J_0(k_{\pm}(y)) \left[\log \left(k_{\pm}(y) \frac{R_2 - R_1}{2} \right) + \gamma + \log 2 + \frac{\pi}{2} i \right] \\
& + \frac{k_{\pm}(y)}{2} \frac{d}{d\eta} \left[\frac{V(y)}{V(\eta)} \right] \left[\left(2 \frac{V(\eta)}{V(y)} - 1 - ik_{\pm}(\eta) \right) J_1(k_{\pm}(\eta)) - k_{\pm}(\eta) \left(\frac{V(\eta)}{V(y)} - 1 \right) J_0(k_{\pm}(\eta)) \right] \\
K_{A11}(\phi, \theta) = & i \frac{k_{\pm}(y)}{2} \frac{d}{d\eta} \left[\frac{V(y)}{V(\eta)} \right] J_0(k_{\pm}(y)) \\
K_{A12}(\phi, \theta) = & -i \frac{1}{2} \frac{V(\eta)}{V(y)} \frac{d}{d\eta} \left[\frac{V(y)}{V(\eta)} \right] \left[\left(2 \frac{V(\eta)}{V(y)} - 1 - ik_{\pm}(\eta) \right) J_1(k_{\pm}(\eta)) - k_{\pm}(\eta) \left(\frac{V(\eta)}{V(y)} - 1 \right) J_0(k_{\pm}(\eta)) \right] \\
K_{A13}(\phi, \theta) = & \frac{ik_{\pm}(\eta)}{2} \left[\left(\frac{V(\eta)}{V(y)} - 1 \right) J_1(k_{\pm}(\eta)) - iJ_0(k_{\pm}(\eta)) \right] \Delta N_B(k_{\pm}(\eta) [y-\eta]) \\
& + i \frac{k_{\pm}(\eta)}{2} J_0(k_{\pm}(y)) \Delta N_C(k_{\pm}(y) [y-\eta]) \\
K_{A14}(\phi, \theta) = & \frac{k_{\pm}(\eta)}{2} \left[\left(\frac{V(\eta)}{V(y)} - 1 \right) J_1(k_{\pm}(\eta)) - iJ_0(k_{\pm}(\eta)) \right] \\
& + \frac{ik_{\pm}(\eta)}{2} J_0(k_{\pm}(y)) \left[\log \left(k_{\pm}(y) \frac{R_2 - R_1}{2} \right) + \gamma + \log 2 + \frac{\pi}{2} i \right] \\
K_{A15}(\phi, \theta) = & \frac{ik_{\pm}(\eta)}{2} J_0(k_{\pm}(y)) \\
K_{A16}(\phi, \theta) = & \frac{i}{2} \left[\left(\frac{V(\eta)}{V(y)} - 1 \right) J_1(k_{\pm}(\eta)) - iJ_0(k_{\pm}(\eta)) \right]
\end{aligned}$$

$K_{A9}(\phi, \theta)$ などは各々 Chebyshev の補間公式^{3), 19)} とよばれるものを用いてあらわし, 積分は FW などを用いてあらわすと,

$$\begin{aligned}
\bar{L}_{\pm}(\phi) = & \rho b' V(\phi) \left[2\pi \left(1 + \frac{ik_{\pm}(\phi)}{2} \right) \left(-\frac{1}{2} b'y\bar{\theta}p \right) \right. \\
& + \sum_{i=1}^N \bar{\Gamma}_{\pm}(\phi_i) \frac{2}{N+1} \sum_{n=1}^N \sin n\phi_i \left\langle \sin n\phi \frac{\pi k_{\pm}(\phi)}{2} H_0^{(2)}(k_{\pm}(\phi)) + \frac{2}{J+1} \right. \\
& \times \left\{ \frac{R_2-R_1}{4} \sum_{j=1}^{J+1} K_{A9}(\phi, \theta_j) \sum_{l=0}^J C_{lj}(FW_{l,n-1} - FW_{l,n+1}) - n \sum_{j=1}^{J+1} K_{A13}(\phi, \theta_j) \sum_{l=0}^J C_{lj}FW_{l,n} \right. \\
& - \frac{R_2-R_1}{4} \sum_{j=1}^{J+1} K_{A10}(\phi, \theta_j) \sum_{l=0}^J C_{lj}(FX_{l,n-1} - FX_{l,n+1}) + n \sum_{j=1}^{J+1} K_{A14}(\phi, \theta_j) \sum_{l=0}^J C_{lj}FX_{l,n} \\
& - \frac{R_2-R_1}{4} \sum_{j=1}^{J+1} K_{A11}(\phi, \theta_j) \sum_{l=0}^J C_{lj}(FY_{l,n-1} + FY_{l,n+1}) + n \sum_{j=1}^{J+1} K_{A5}(\phi, \theta_j) \sum_{l=0}^J C_{lj}FY_{l,n} \\
& \left. \left. - \frac{R_2-R_1}{4} \sum_{j=1}^{J+1} K_{A12}(\phi, \theta_j) \sum_{l=0}^J C_{lj}(FZ_{l,n-1} + FZ_{l,n+1}) + n \sum_{j=1}^{J+1} K_{A16}(\phi, \theta_j) \sum_{l=0}^J C_{lj}FZ_{l,n} \right\} \right] \quad (3.67)
\end{aligned}$$

ロータハブから y' のところで幅 dy' の部分に働く揚力の非定常成分の振幅は

$$\bar{L}_{\pm} dy' = \bar{L}_{\pm}(\phi) b' \frac{R_2-R_1}{2} \sin \phi d\phi$$

q 番ブレードに働く揚力の非定常成分は基準ブレードより位相が $2\pi q/Q$ 進んでいるから、

$$\bar{L}_{\pm q} dy' = \bar{L}_{\pm} dy' e^{i2\pi q/Q}$$

Q 本のブレードに働く揚力の非定常成分によって Y 軸まわりに生じるモーメントは

$$M_Y = - \sum_{q=0}^{Q-1} \int_{R_1}^{R_2} b'^2 \bar{L}_{\pm q} y dy \cos \left(\Omega t + \frac{2\pi q}{Q} \right) e^{i(\Omega + p)t} - \sum_{q=0}^{Q-1} \int_{R_1}^{R_2} b'^2 \bar{L}_{-q} y dy \cos \left(\Omega t + \frac{2\pi q}{Q} \right) e^{i(\Omega - p)t}$$

ロータ面が $\theta = \bar{\theta} \sin pt$ であらわされるようなピッチングを行なっているロータではピッチング軸まわりのモーメントの経時変化が知られると付録Aの方法によってピッチダンピングが計算できる。

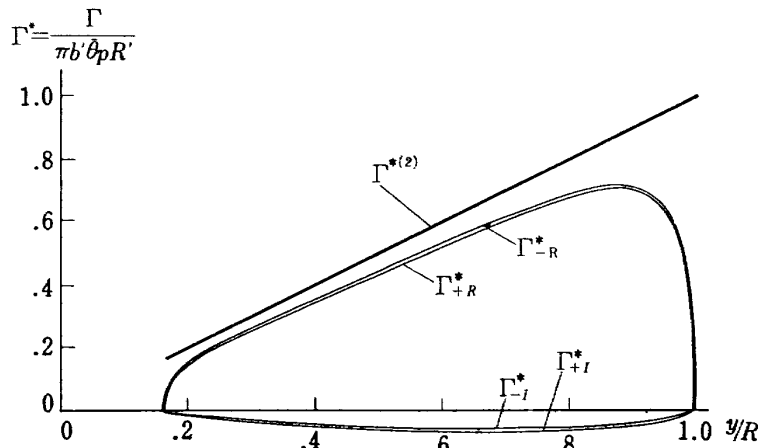
$$\frac{\partial M}{\partial \bar{\theta}} = \frac{1}{\pi \bar{\theta}} \int_0^{2\pi/p} M_T \cos pt dt \quad (3.68)$$

計算を実行すると

$$\frac{\partial M}{\partial \bar{\theta}} = \frac{-\theta b'^2}{2p\bar{\theta}} \left\{ \int_{R_1}^{R_2} \bar{L}_{R+} y dy + \int_{R_1}^{R_2} \bar{L}_{R-} y dy \right\}$$

(3.62) 式を解いて得られる $\bar{\Gamma}(\phi_i)$ はいうまでもなく近似値である。この $\bar{\Gamma}(\phi_i)$ を使って計算される $\bar{\Gamma}(\phi)$ は翼端即ち $\phi=0$ と $\phi=\pi$ で 0 になるとはかぎらない。しかし翼端で揚力が 0 になると考えて、 $\bar{L}_{R\pm}(\phi)y$ を Multhop の補間公式^{3), 19)} を使ってあらわす。

$$\begin{aligned}
\bar{L}_{R\pm}(\phi) \left(\frac{R_2+R_1}{2} - \frac{R_2-R_1}{2} \cos \phi \right) &= \frac{2}{N+1} \sum_{m=1}^N \bar{L}_{R\pm}(\phi_m) \left(\frac{R_2+R_1}{2} - \frac{R_2-R_1}{2} \cos \phi_m \right) \sum_{n=1}^N \sin n\phi_i \sin n\phi \\
\therefore \int_{R_1}^{R_2} \bar{L}_{R\pm} y dy &= \frac{2}{N+1} \frac{R_2-R_1}{2} \sum_{m=1}^N \bar{L}_{\pm R}(\phi_m) \left(\frac{R_2+R_1}{2} - \frac{R_2-R_1}{2} \cos \phi_m \right) \sin \phi_m \cdot \frac{\pi}{2}
\end{aligned}$$



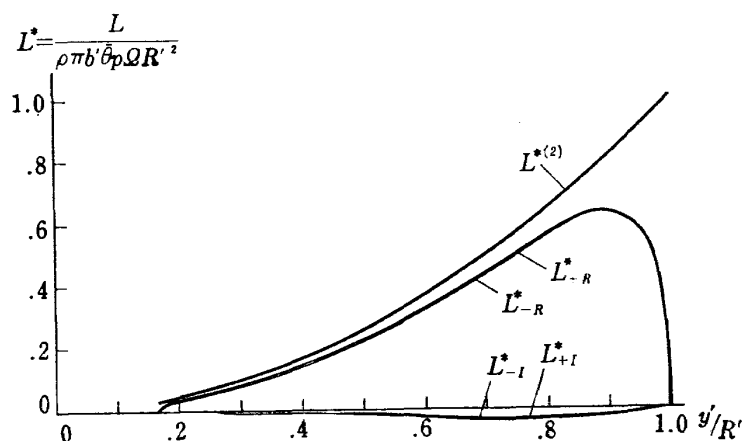
第 60 図 Ashley の非定常理論によって求めた翼幅に沿う揚力分布
 $b'=0.024$ m, $R_2=0.800$ m, $p=0.756$ c/s, $\Omega=300$ rpm
 $\Gamma^{*(2)}$ は二次元準定常理論によるもの

ロータの回転数 300 rpm, ピッチングの振動数 0.756 c/s とした場合のブレードの半径方向の循環分布と揚力分布を第60図, 第61図に示す。

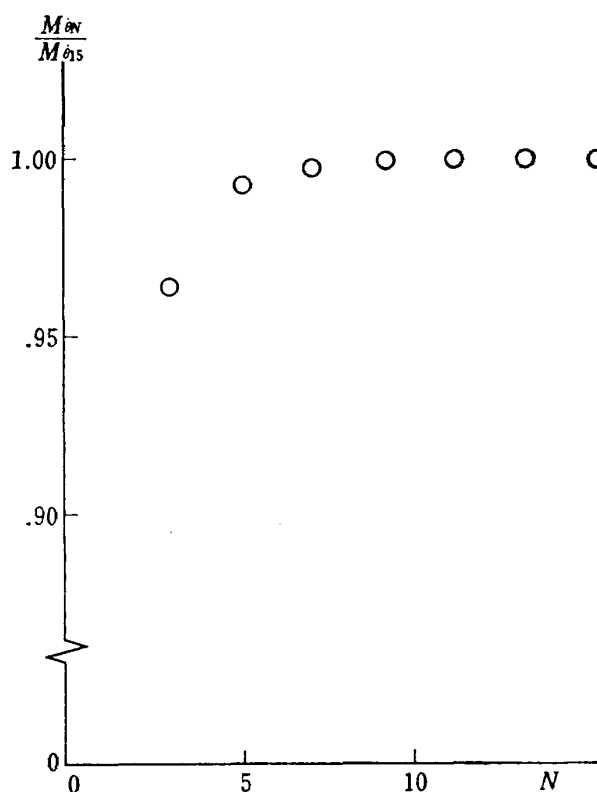
第32図から第43図に於てブレードの弾性変形が生じないとした場合に実験値から推定される値と Ashley et. al. の理論¹⁹⁾を用いて計算されるピッチダンピングを比較した。

計算値は測定値に比べてずっと大きい, Towns-
sent⁷⁾ の理論, Theodorsen の理論¹⁸⁾よりは小さくな
っている。即ち翼幅が有限である為に翼端付近で空気
力が急に小さくなり二次元理論に比べてピッチダンピ
ングが小さくなる。

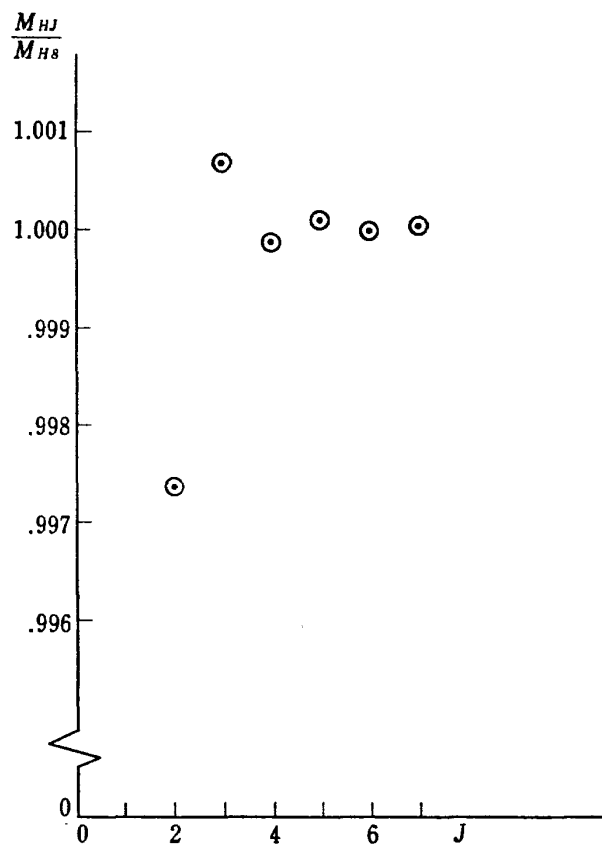
ロータの回転数が変わっても計算値はほとんど変わらず
測定値と似た傾向を示している。



第 61 図 Ashley の非定常理論によって求めた翼幅に沿う揚力分布
 $b'=0.024$ m, $R_2'=0.800$ m, $p=0.756$ c/s, $Q=300$ rpm
 $L^{*(2)}$ は二次元準定常理論によるもの



第 62 図 補間公式 (356) の項数 N を増した場合の M_θ の収束の様様



第 63 図 補間公式 (359) の項数 J を増した場合の M_θ の収束の様様

解の精度と (3.56) 式の項数 N の関係を第 62 図に示した。同じく (3.59) 式の項数 J との関係を第 63 図に示した。 $N=9$, $J=5$ で十分な精度が得られた。

3.3 ブレードが定常な運動をしている場合の

Ashley et. al. の理論¹⁹⁾の紹介と応用

Ashley et. al. の論文にプロローグとしてブレード

が定常な運動をしている場合に、翼幅が有限であることを考慮してブレードに働く空気力を計算する方法が述べられているので、それを紹介する。

束縛渦が時間的に変化しないから後流中に shed vortex は存在せず、単に定常な trailing vortex が存在するのみである。よって (3.3) 式は次のように書ける。

$$\begin{aligned} v_{as}(x', y') = & -\frac{1}{4\pi} \iint_{R_a} \frac{\gamma_a(\xi', \eta') [x' - \xi'] + \delta_a(\xi', \eta') [y' - \eta']}{[(x' - \xi')^2 + (y' - \eta')^2]^{3/2}} d\xi' d\eta' \\ & - \frac{1}{4\pi} \iint_{R_W} \frac{\delta_W(\xi', \eta') [y' - \eta']}{[(x' - \xi')^2 + (y' - \eta')^2]^{3/2}} d\xi' d\eta' \\ \delta_W(\xi', \eta') = & \frac{\partial}{\partial \eta'} \int_{x_l'}^{x_t'} \gamma_a(\lambda', \eta') d\lambda' = \frac{\partial}{\partial \eta'} \Gamma_a'(\eta') \end{aligned} \quad (3.69)$$

$\eta' = R_1'$, $\eta' = R_2'$ で γ_a , Γ_a' が 0 になることを考慮しつつ変形を行なうと²⁵⁾

$$v_{as}(x', y') = -\frac{1}{4\pi} \int_{R_1'}^{R_2'} \int_{x_l'}^{x_t'} \frac{\partial \gamma_a(\xi', \eta')}{\partial \eta'} \frac{\sqrt{(x' - \xi')^2 + (y' - \eta')^2}}{(x' - \xi')(y' - \eta')} d\xi' d\eta' - \frac{1}{4\pi} \int_{R_1}^{R_2} \frac{d\Gamma_a'}{d\eta'} \frac{d\eta'}{y' - \eta'} \quad (3.70)$$

ヘリコプタのロータブレードでは翼幅は翼弦に比べて十分大きいので、翼面の大部分の領域では、長さ $|y' - \eta'|$ は長さ $|x' - \xi'|$ に比べて十分大きい。点 (ξ', η') が $\xi' = x'$, $\eta' = y'$ となるような場合にはこのことが成立しないが、点 (x', y') を中心とする長方形の領域では $\sqrt{(x' - \xi')^2 + (y' - \eta')^2} / (x' - \xi')(y' - \eta')$ が $(x' - \xi')$, $(y' - \eta')$ の夫々奇函数となっているから、 $\partial \gamma_a / \partial \eta'$ が急激に変化する函数でないかぎり、長方形領域が誘導速度 $v_a(x', y')$ に及ぼす影響は小さい。以上の考察から $\sqrt{(x' - \xi')^2 + (y' - \eta')^2} / (x' - \xi')(y' - \eta')$ を $|y' - \eta'| / (y' - \eta')(x' - \xi')$ とする。この近似は直進翼について Prandtl²⁴⁾ が行なった近似そのものである。上記の近似を用いると上式が積分できて、

$$\begin{aligned} v_{as}(x', y') = & -\frac{1}{2\pi} \int_{x_l'}^{x_t'} \frac{\gamma_a(\xi', y')}{x' - \xi'} d\xi' \\ & - \frac{1}{4\pi} \int_{R_1'}^{R_2'} \frac{d\Gamma_a'}{d\eta'} \frac{d\eta'}{y' - \eta'} \end{aligned} \quad (3.71)$$

$$y = y' / b_0'$$

$$\eta = \eta' / b_0'$$

$$x = \{x' - (x_t' + x_l') / 2\} / b'$$

$$\xi = \{\xi' - (x_t' + x_l') / 2\} / b'$$

$$\Gamma = \Gamma_a' / b_0'$$

として変数変換を行なうと

$$\begin{aligned} v_{as}(x, y) = & -\frac{1}{2\pi} \int \frac{\gamma_a(\xi, y)}{x - \xi} d\xi \\ & - \frac{1}{4\pi} \int_{R_1}^{R_2} \frac{d\Gamma}{d\eta} \frac{d\eta}{y - \eta} \end{aligned} \quad (3.72)$$

両辺に $\sqrt{(1+x)/(1-x)}$ をかけて x について -1 から 1 まで積分する。

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 v_{as}(x, y) \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} dx \\ = -\frac{1}{2} \Gamma(y) - \frac{1}{4} \int_{R_1}^{R_2} \frac{d\Gamma}{d\eta} \frac{d\eta}{y - \eta} \end{aligned} \quad (3.73)$$

v_{as} を境界条件から定めると上式は Γ を未知函数とする方程式となり数値的に解くことができる。翼面に働く揚力は次式で計算できる。

$$L(y) = \rho b_0' V(y) \Gamma(y) \quad (3.74)$$

(3.73) 式, (3.74) 式を応用してピッチダンピングの問題を準定常的に扱う。2 節で行なった非定常理論の場合の結果と比較すれば、ピッチダンピングの問題における非定常効果を評価するという点で大変興味深い。

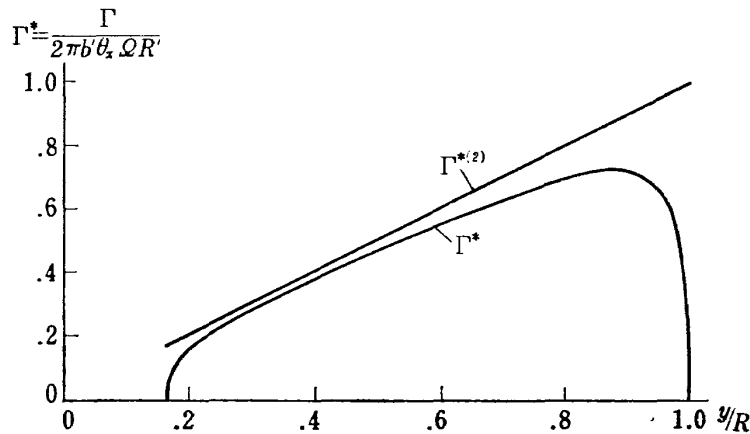
(3.73) 式を導いた場合、 v_{as} は時間的に定常であることが仮定されていた。しかるにピッチダンピングの問題ではブレードは回転面に垂直な、時間的に変動する速度成分をもつ。しかし、各瞬間の回転面に垂直な速度があたかも不変であるかのように考えて、 $v_{as}(x, y)$ と等置すると基準ブレードについて時刻 t に於ては次の関係が成立する。

$$\begin{aligned} v_{as}(x, y) = & -y b_0' \bar{\theta} p \cos pt \cos \Omega t \\ \therefore & -y b_0' \bar{\theta} p \cos pt \cos \Omega t \\ = & -\frac{1}{2} \Gamma(y) - \frac{1}{4} \int_{R_1}^{R_2} \frac{d\Gamma}{d\eta} \frac{d\eta}{y - \eta} \end{aligned}$$

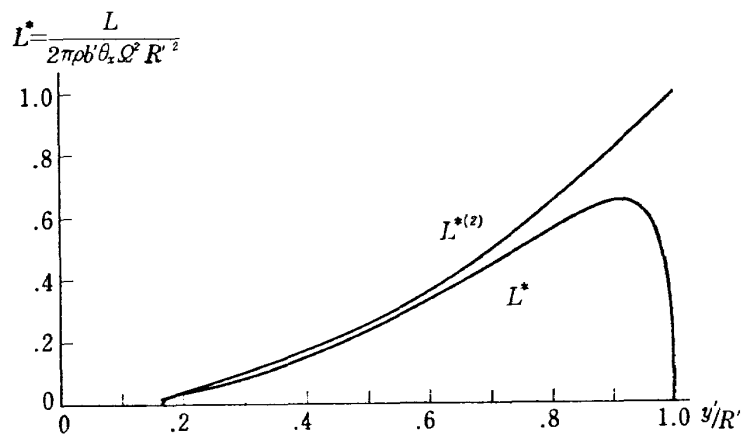
$\Gamma(y)$ は 2 節の場合と同様に Multhop の補間公式³⁾であらわし、右辺第 2 項は Glauert の積分²³⁾を用いて計算する。

q 番ブレードの場合には

$$v_{as}(x, y) = -y b_0' \bar{\theta} p \cos pt \cos(\Omega t + (2\pi q / Q))$$



第 64 図 Ashley の準定常理論によって求めた翼幅に沿う循環分布
 $b'=0.024$ m, $R_2=0.800$ m, $p=0.756$ c/s, $\Omega=300$ rpm
 $\Gamma^{(2)}$ は二次元準定常理論によるもの



第 65 図 Ashley の準定常理論によって求めた翼幅に沿う循環分布
 $b'=0.024$ m, $R_2'=0.800$ m, $p=0.756$ c/s, $\Omega=300$ rpm
 $L^{(2)}$ は二次元準定常理論によるもの

揚力分布は (3.74) 式を利用して解く。 q 番ブレードの単位翼幅あたりの揚力を $L_q(y')$ とするとピッチングの軸まわりに発生するモーメントは

$$M_Y = \sum_{q=0}^{Q-1} \int_{R_1'}^{R_2'} L_q(y') y' \cos\left(\Omega t + \frac{2\pi q}{Q}\right) dy'$$

ピッチダンピングは付録 A の方法で計算する。

$$M_\theta = \frac{1}{\pi\theta} \int_0^{2\pi/p} M_Y \cos pt \, dt$$

ロータの回転数 300 rpm, ピッチングの振動数 0.756 c/s とした場合のブレードの半径方向の循環分布と揚力分布を第64図と第65図に示した。

第32図から第43図に於てブレードの弾性変形が生じないとした場合に実験値から推定される値とこの場合の計算値 (Ashley, 定常理論) を比較した。全ての図に於て Ashley et. al. の非定常理論を用いて計算した結果とほとんど変わらない結果が得られた。これは無次

元振動数が小さいことに帰せられる。二次元理論で見られた非定常効果 (Townsend の理論と Theodorsen の理論の差) よりも三次元理論で見られる非定常効果が小さくなっている。

第 4 章 渦とブレードの距離の変動を考慮したピッチダンピングの解析

4.1 ピッチダンピングを解析する為の空気力計算法が備えるべき性質について

リジッドロータのピッチダンピングを解析する目的で 2 種の非定常理論を応用したが満足な結果は得られなかった。しかし、これまでに行なった解析と、実験から推定される全く剛なブレードをもつロータのピッチダンピングの値を比較した結果次のことが知られた。

- (1) Loewy の理論¹⁴⁾では後流中の shed vortex の効果だけを考えたのであるが、その結果場合によってはピッチダンピングがかなり減少することが知られた。
- (2) それ故に後流中の trailing vortex の効果をも含めるとかなりピッチダンピングが減少するものと期待される。
- (3) 翼幅が有限であることを考慮すると、翼端付近の揚力が二次元理論の場合に比べて著しく減少し、ひいてはピッチダンピングが減少する。
- (4) ピッチダンピングの問題について非定常効果の寄与は小さい。

以上述べたことから、ピッチダンピングを解析する為の理論は次のような性質を備えるであろう。

- (1) 後流中の渦による誘導速度の為に空気力が減少する効果を考慮していること。
- (2) 翼端付近で急激な空気力の減少があることを考慮に入れていること。

しかし、必ずしも非定常理論である必要はない。

さてこのような理論によってホバリング状態におけるロータブレードの付根に働く空気力のモーメントを計算すればかなり良好な結果が得られるであろう。しかるに実験的に求められたホバリング状態におけるロータブレードの付根に働く空気力モーメント^{25), 26), 27)}は二次元ストリップ理論によって計算した値の50~60%である。それ故上のモデルを使って計算しても似たような値になるはずである。従ってピッチダンピングも二次元ストリップ理論を用いた Towns-ent の解析⁷⁾の60%程度になるはずである。しかるに実験値から推定される全く剛なロータブレードの場合のピッチダンピングはこれよりずっと小さい。それ故に今まで考慮しなかった要素を導入する必要がある。

ロータのピッチングに伴ってブレードの位置はたえず Z_I 方向に変位する。この結果後流中の渦とブレードの相対的な位置は一定ではない。相対位置の変動があると、後流中の渦によってブレード上に誘起される誘導速度が変動し、ひいてはピッチダンピングの値は変るであろう。従って空気力の計算をするにあたって後流中の渦とブレードの相対位置の変動を含めたいと思う。

そこで、翼幅が有限であることを考慮し、後流中の任意の位置に渦を配置できるような回転翼についての定常翼理論を導く。この理論を応用してピッチダンピングの準定常解析を行なうのであるから、翼理論自体はできるだけ簡単な形のものであることが要請される。

4.2 回転翼についての定常理論

定常な垂直飛行を行っている場合には回転翼についても定常翼理論が有効である。市川の回転翼の線形理論¹⁾に述べられている方程式から出発してピッチダンピングを解析するのに適した簡単な揚力線の方程式を導く。その際にロータの回転面で inflow が小さいこと、考えている基準ブレードから離れたところにある渦の効果は小さいことを仮定する。

これまで本論文で用いた $x'y'z'$ 座標と市川の論文で用いられる $\tau r \sigma$ 座標の関係を次に示す。

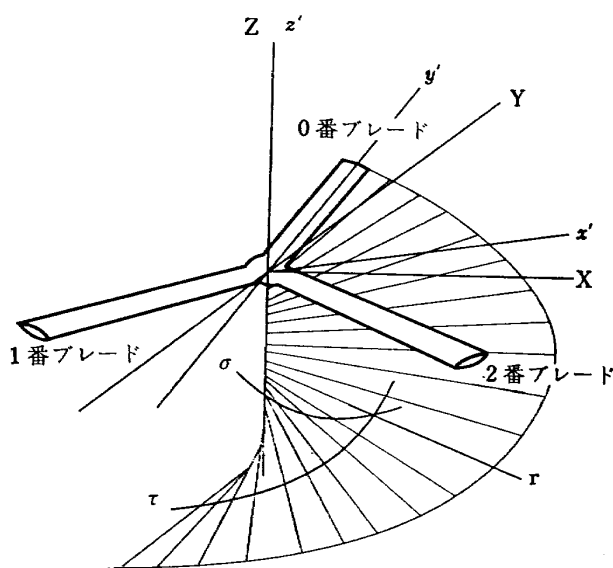
$$\left. \begin{aligned} x' &= r \sin \frac{\tau + \sigma}{2} \\ y' &= r \cos \frac{\tau + \sigma}{2} \\ z' &= -h \frac{\tau - \sigma}{2} \end{aligned} \right\} \quad (4.1)$$

市川の論文で用いられる xyz 座標と本論文の $x'y'z'$ 座標の関係を第66図に示し座標軸方向の単位ベクトルの間の関係を次に示す。

$$\left. \begin{aligned} i_I &= \sin \phi i^* + \cos \phi j^* \\ j_I &= \cos \phi i^* - \sin \phi j^* \\ k_I &= -k \end{aligned} \right\} \quad (4.2)$$

$\tau r \sigma$ 座標の座標曲線の接線方向のベクトル r_r と r_r を i_I, j_I, k_I を用いてあらわすと、

$$\left. \begin{aligned} r_r &= \frac{1}{2} r \sin \left(\phi - \frac{\tau + \sigma}{2} \right) i_I \\ &\quad + \frac{1}{2} r \cos \left(\phi - \frac{\tau + \sigma}{2} \right) j_I + \frac{1}{2} h k_I \\ r_r &= \cos \left(\phi - \frac{\tau + \sigma}{2} \right) i_I - \sin \left(\phi - \frac{\tau + \sigma}{2} \right) j_I \end{aligned} \right\} \quad (4.3)$$



第 66 図 座標系

r_c と r_r を i^* , j^* , k^* を用いてあらわすと,

$$\left. \begin{aligned} r_c &= \frac{1}{2} r \cos \frac{\tau + \sigma}{2} i^* - \frac{1}{2} r \sin \frac{\tau + \sigma}{2} j^* - \frac{h}{2} k^* \\ r_r &= \sin \frac{\tau + \sigma}{2} i^* + \cos \frac{\tau + \sigma}{2} j^* \end{aligned} \right\} \quad (4.04)$$

市川の論文に於て vortex sheet の surface vorticity vector γ は次のように書かれている。

$$\gamma = \frac{1}{H(p')} (\gamma r_r - \delta r_c) \quad (4.5)$$

但し

$$H(p') = \frac{1}{2} \sqrt{h^2 + r'^2}$$

γ を i^* , j^* , k^* を用いてあらわすと,

$$\begin{aligned} \gamma &= \frac{2}{\sqrt{h^2 + r'^2}} \left[\gamma \sin \frac{\tau' + \sigma'}{2} - \delta \frac{1}{2} r' \cos \frac{\tau' + \sigma'}{2} \right] i^* \\ &+ \frac{2}{\sqrt{h^2 + r'^2}} \left[\gamma \cos \frac{\tau' + \sigma'}{2} + \delta \frac{1}{2} r' \sin \frac{\tau' + \sigma'}{2} \right] j^* \\ &+ \frac{\delta h}{\sqrt{h^2 + r'^2}} k^* \end{aligned} \quad (4.7)$$

inflow が小さいときには $h/\sqrt{h^2 + r'^2}$ は小さいとみなして翼面をあらわす γ については,

$$\gamma = -\delta^N i^* + \gamma^N j^*$$

と書く。

$$\left. \begin{aligned} \delta^N &= -\frac{2}{\sqrt{h^2 + r'^2}} \sin \frac{\tau' + \sigma'}{2} \cdot \gamma \\ &+ \frac{r'}{\sqrt{h^2 + r'^2}} \cos \frac{\tau' + \sigma'}{2} \cdot \delta \\ \gamma^N &= \frac{2}{\sqrt{h^2 + r'^2}} \cos \frac{\tau' + \sigma'}{2} \cdot \gamma \\ &+ \frac{r'}{\sqrt{h^2 + r'^2}} \sin \frac{\tau' + \sigma'}{2} \cdot \delta \end{aligned} \right\} \quad (4.8)$$

これを γ と δ について解くと

$$\left. \begin{aligned} \gamma &= \frac{\sqrt{h^2 + r'^2}}{2} \left(\gamma^N \cos \frac{\tau' + \sigma'}{2} - \delta^N \sin \frac{\tau' + \sigma'}{2} \right) \\ \delta &= \frac{\sqrt{h^2 + r'^2}}{2} \left(\gamma^N \sin \frac{\tau' + \sigma'}{2} + \delta^N \cos \frac{\tau' + \sigma'}{2} \right) \end{aligned} \right\} \quad (4.9)$$

後流中の渦面をあらわす γ については,

$$\gamma = 0 \quad (4.10)$$

$$\delta = \frac{d\Gamma'}{dr} \quad (4.11)$$

揚力面の式は市川によると次のように書かれる。

$$\begin{aligned} w_n(P_0) &= \frac{1}{4\pi H(P_0)} \sum_{q=0}^{Q-1} \left\{ \int_{r_1}^{r_2} \int_{\tau_{1q}}^{\tau_{2q}} G(P_0, P_q') \gamma_{Bq} d\tau' dr' \right. \\ &\quad \left. + \int_{r_1}^{r_2} \int_{\tau_{1q}}^{\tau_{2q}} D(P_0, P_q') \delta_{Bq} d\tau' dr' + \int_{r_1}^{r_2} \int_{\tau_{2q}}^{\infty} D(P_0, P_q') \frac{d\Gamma'}{dr} d\tau' dr' \right\} \end{aligned} \quad (4.12)$$

基準ブレードから離れたところにある渦の寄与が小さいとして省略する。 q 番ブレードから発生して基準ブレードの下を通りさらに Z 軸のまわりを n 回まわったあたりの軌跡面上の点をあらわす τ' 座標は小さな τ^* を用いて次のようにあらわされる。

$$\frac{\tau' + \sigma'}{2} = \theta = 2n\pi + \frac{\tau^*}{2} \quad (4.13)$$

この時には揚力面の式は次のように書きかえられる。

$$\begin{aligned} w_n(P_0) &= \frac{1}{4\pi H(P_0)} \left\{ \int_{r_1}^{r_2} \int_{\tau_{10}}^{\tau_{20}} G(P_0, P_0') \gamma_{B0} d\tau^* dr' \right. \\ &\quad \left. + \int_{r_1}^{r_2} \int_{\tau_{10}}^{\tau_{20}} D(P_0, P_0') \delta_{B0} d\tau^* dr' + \sum_{q=0}^{Q-1} \sum_{n=0}^{\infty} \int_{r_1}^{r_2} \int_{\tau_{*1nq}}^{\tau_{*2nq}} D(P_0, P_q') \delta_{Wq} d\tau^* dr' \right\} \end{aligned} \quad (4.14)$$

点 P と点 P' の距離は $R(P, P')$ であらわす。 $R(P, P')$, $G(P, P')$, $D(P, P')$ を具体的に書くと点 P が基準ブレードの軌跡面にある時には,

$$\begin{aligned} R(P, P') &= \left\{ \frac{h^2}{4} \left(\tau - \tau^* - 4\pi n - \frac{4\pi q}{Q} \right)^2 + r^2 + r'^2 - 2rr' \cos \frac{\tau - \tau^*}{2} \right\}^{1/2} \\ G(P, P') &= -\frac{r}{2} \sin \frac{\tau - \tau^*}{2} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{R} \right) - \cos \frac{\tau - \tau^*}{2} \frac{\partial}{\partial \tau} \left(\frac{1}{R} \right) \\ D(P, P') &= \frac{r'}{2} \sin \frac{\tau - \tau^*}{2} \frac{\partial}{\partial \tau} \left(\frac{1}{R} \right) - \frac{1}{4} \left\{ h^2 + rr' \cos \frac{\tau - \tau^*}{2} \right\} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{R} \right) \end{aligned}$$

G と D については更に計算を行なうと,

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \left(\frac{1}{R} \right) = \frac{1}{R^3} \left\{ -\frac{h^2}{4} \left(\tau - \tau^* - 4\pi n - \frac{4\pi q}{Q} \right) - \frac{rr'}{2} \sin \frac{\tau - \tau^*}{2} \right\}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{R} \right) &= \frac{1}{R^3} \left\{ r' \cos \frac{\tau - \tau^*}{2} - r \right\} \\ G(P, P') &= \left\{ \frac{r^2}{2} \sin \frac{\tau - \tau^*}{2} + \frac{h^2}{4} \left(\tau - \tau^* - 4\pi n - \frac{4\pi q}{Q} \right) \right\} \frac{1}{R^3} \\ D(P, P') &= \left\{ -\frac{h^2 r'}{8} \left(\tau - \tau^* - 4\pi n - \frac{4\pi q}{Q} \right) \sin \frac{\tau - \tau^*}{2} - \frac{r r'^2}{4} \right. \\ &\quad \left. - \frac{h^2 r'}{4} \cos \frac{\tau - \tau^*}{4} + \frac{h^2 r}{4} + \frac{r^2 r'}{4} \cos \frac{\tau - \tau^*}{2} \right\} \frac{1}{R^3}\end{aligned}$$

τ^* を用いると (4.9) 式は

$$\begin{aligned}\gamma &= \frac{\sqrt{h^2 + r'^2}}{2} \left\{ \gamma^N \cos \frac{\tau^*}{2} - \delta^N \sin \frac{\tau^*}{2} \right\} \\ \delta &= \frac{\sqrt{h^2 + r'^2}}{r'} \left\{ \gamma^N \sin \frac{\tau^*}{2} + \delta^N \cos \frac{\tau^*}{2} \right\}\end{aligned}\quad (4.15)$$

$$\begin{aligned}\therefore G(P_0, P'_0) \gamma_{B0} + D(P_0, P'_0) \delta_{B0} &= \frac{\sqrt{h^2 + r'^2}}{R^3} \left\{ \frac{r^2}{4} \sin \frac{\tau}{2} - \frac{r r'}{4} \sin \frac{\tau'}{2} \right\} \gamma^N \\ &\quad + \frac{\sqrt{h^2 + r'^2}}{R^3} \left\{ \frac{h^2}{8} (\tau - \tau^*) \cos \frac{\tau^*}{2} - \frac{h^2}{8} (\tau - \tau^*) \sin \frac{\tau - \tau^*}{2} \sin \frac{\tau^*}{2} \right. \\ &\quad \left. + \frac{h^2 r}{4 r'} \sin \frac{\tau^*}{2} - \frac{h^2}{4} \cos \frac{\tau - \tau^*}{2} \sin \frac{\tau^*}{2} \right\} \gamma^N \\ &\quad + \frac{\sqrt{h^2 + r'^2}}{R^3} \left\{ \frac{r^2}{4} \cos \frac{\tau}{2} - \frac{r r'}{4} \cos \frac{\tau^*}{2} \right\} \delta^N + \frac{\sqrt{h^2 + r'^2}}{R^3} \left\{ -\frac{h^2}{8} (\tau - \tau^*) \sin \frac{\tau^*}{2} \delta^N \right. \\ &\quad \left. - \frac{h^2}{8} (\tau - \tau^*) \sin \frac{\tau - \tau^*}{2} \cos \frac{\tau^*}{2} - \frac{h^2}{4} \cos \frac{\tau - \tau^*}{2} \cos \frac{\tau^*}{2} + \frac{h^2 r}{4 r'} \cos \frac{\tau^*}{2} \right\} \delta^N\end{aligned}$$

inflow が小さい場合には h/r , h/r' は 1 に比べて小さい。この時には,

$$G(P_0, P'_0) \gamma_{B0} + D(P_0, P'_0) \delta_{B0} = \frac{r'}{R^3} \left\{ \frac{r^2}{4} \sin \frac{\tau}{2} - \frac{r r'}{4} \sin \frac{\tau^*}{2} \right\} \gamma^N + \frac{r'}{R^3} \left\{ \frac{r^2}{4} \cos \frac{\tau}{2} - \frac{r r'}{4} \cos \frac{\tau^*}{2} \right\} \delta^N \quad (4.16)$$

$$\begin{aligned}\sum_{q=0}^{Q-1} D(P_0, P'_q) \delta_{Wq} &= \frac{1}{R^3} \left\{ -\frac{r r'^2}{4} + \frac{r^2 r'}{2} \cos \frac{\tau - \tau^*}{2} \right\} \frac{d\Gamma'_0}{dr'} \\ &\quad + \sum_{q=1}^{Q-1} \frac{1}{R^3(P_0, P'_q)} \left\{ -\frac{r r'^2}{4} + \frac{r^2 r'}{4} \cos \frac{\tau - \tau^*}{2} \right\} \frac{d\Gamma'_q}{dr'} \\ &\quad + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{q=0}^{Q-1} \frac{1}{R^3(P_0, P'_q)} \left\{ \frac{r r'^2}{4} + \frac{r^2 r'}{4} \cos \frac{\tau - \tau^*}{2} \right\} \frac{d\Gamma'_q}{dr'}\end{aligned}\quad (4.17)$$

由って (4.14) 式は

$$\begin{aligned}w_n(P_0) &= \frac{1}{4\pi r/2} \left[\int_{\tau_2}^{\tau_1} \int_{\tau_{10}}^{\tau_{20}} \frac{r'}{R^3} \left\{ \frac{r^2}{4} \sin \frac{\tau}{2} - \frac{r r'}{4} \sin \frac{\tau^*}{2} \right\} \gamma^N dt^* dr' \right. \\ &\quad + \int_{\tau_1}^{\tau_2} \int_{\tau_{10}}^{\tau_{20}} \frac{r'}{R^3} \left\{ \frac{r^2}{4} \cos \frac{\tau}{2} - \frac{r r'}{4} \cos \frac{\tau^*}{2} \right\} \delta^N d\tau^* dr' \\ &\quad + \int_{\tau_1}^{\tau_2} \int_{\tau_{22}}^{\tau_{21}^*} \frac{1}{R^3} \left\{ \frac{r^2 r'}{4} \cos \frac{\tau - \tau^*}{2} - \frac{r r'^2}{4} \right\} \frac{d\Gamma'_0}{dr'} d\tau^* dr' \\ &\quad + \sum_{q=1}^{Q-1} \int_{\tau_1}^{\tau_2} \int_{\tau_{11}^*}^{\tau_{21}^*} \frac{1}{R^3} \left\{ \frac{r^2 r'}{4} \cos \frac{\tau - \tau^*}{2} - \frac{r r'^2}{4} \right\} \frac{d\Gamma'_q}{dr'} d\tau^* dr' \\ &\quad \left. + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{q=0}^{Q-1} \int_{\tau_1}^{\tau_2} \int_{\tau_{11}^*}^{\tau_{21}^*} \frac{1}{R^3} \left\{ \frac{r^2 r'}{4} \cos \frac{\tau - \tau^*}{2} - \frac{r r'^2}{4} \right\} \frac{d\Gamma'_q}{dr'} d\tau^* dr' \right]\end{aligned}\quad (4.18)$$

変数を x' , y' , z' に変換すると,

$$\begin{aligned}w_{z'} &= \frac{-1}{4\pi} \left[\int_{R_1'}^{R_2'} \int_{x_1'}^{x_2'} \frac{[x' - \xi'] \gamma^N + [y' - \eta'] \delta^N}{R^3} d\xi' d\eta' + \int_{R_1'}^{R_2'} \int_{x_1'}^{x_2'} \frac{y' - \eta'}{R^3} \frac{d\Gamma'_0}{d\eta'} d\xi' d\eta' \right. \\ &\quad \left. + \sum_{q=1}^{Q-1} \int_{R_1'}^{R_2'} \int_{x_1'}^{x_2'} \frac{y' - \eta'}{R^3} \frac{d\Gamma'_q}{d\eta'} d\xi' d\eta' + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{q=0}^{Q-1} \int_{R_1'}^{R_2'} \int_{x_1'}^{x_2'} \frac{y' - \eta'}{R^3} \frac{d\Gamma'_q}{d\eta'} d\xi' d\eta' \right]\end{aligned}\quad (4.19)$$

後流中にある遠方の渦の寄与は小さいと考えると,

$$w_z' = \frac{-1}{4\pi} \left[\int_{R_1'}^{R_2'} \int_{x_l'}^{x_l'} \frac{[x' - \xi'] \gamma^N + [y' - \eta'] \delta^N}{R^3} d\xi' d\eta' + \int_{R_1'}^{R_2'} \int_{x_l'}^{x_l'} \frac{y' - \eta'}{R^3} \frac{d\Gamma_0'}{d\eta'} d\xi' d\eta' \right. \\ \left. + \sum_{q=1}^{Q-1} \int_{R_1'}^{R_2'} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{y' - \eta'}{R^3} \frac{d\Gamma_q'}{d\eta'} d\xi' d\eta' + \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{q=0}^{Q-1} \int_{R_1'}^{R_2'} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{y' - \eta'}{R^3} \frac{d\Gamma_q'}{d\eta'} d\xi' d\eta' \right] \quad (4.20)$$

第1項は3章3節の(3.69)式と全く同じことになり, 第2項以下は ξ' についての積分ができる。

$$v_{as} = \frac{-1}{4\pi} \left[2 \int_{x_l'}^{x_l'} \frac{\gamma^N}{x' - \xi'} d\xi' + \int_{R_1'}^{R_2'} \frac{d\Gamma_0'}{d\eta'} \frac{d\eta'}{y' - \eta'} + \sum_{q=1}^{Q-1} \int_{R_1'}^{R_2'} 2 \frac{d\Gamma_q}{d\eta'} \frac{y' - \eta'}{[y' - \eta']^2 + [z' - \zeta']^2} d\eta' \right. \\ \left. + \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{q=0}^{Q-1} \int_{R_1'}^{R_2'} 2 \frac{d\Gamma_q}{d\eta'} \frac{y' - \eta'}{[y' - \eta']^2 + [z' - \zeta']^2} d\eta' \right] \quad (4.21)$$

第3項, 第4項については後流の渦面を離散的な渦糸でおきなおす。

$$v_{as} = \frac{-1}{4\pi} \left[2 \int_{x_l'}^{x_l'} \frac{\gamma^N}{x' - \xi'} d\xi' + \int_{R_1'}^{R_2'} \frac{d\Gamma_0'}{d\eta'} \frac{d\eta'}{y' - \eta'} + \sum_{q=1}^{Q-1} 2 \sum_{j=1}^J \frac{A'_{qj} [y' - \eta'_{qj}]}{[y' - \eta'_{qj}]^2 + [z' - \zeta'_{qj}]^2} \right. \\ \left. + \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{q=0}^{Q-1} 2 \sum_{j=1}^J \frac{A'_{qj} [y' - \eta'_{n,q,j}]}{[y' - \eta'_{n,q,j}]^2 + [z' - \zeta'_{n,q,j}]^2} \right]$$

但し

$$A'_{qj} = \Gamma'_{q,j+1} - \Gamma'_{q,j} \qquad A_{qj} = \frac{2}{x'_{i0} - x'_{i0}} A'_{qj} \\ \xi' \equiv \frac{x'_l + x'_l}{2} + \frac{x'_l - x'_l}{2} \xi \qquad \eta' \equiv \frac{x'_{i0} - x'_{i0}}{2} \eta$$

とおくと,

$$v_{as}(x, y) = -\frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 \frac{\gamma^N(\xi, y)}{x - \xi} d\xi - \frac{1}{4\pi} \int_{R_1}^{R_2} \frac{d\Gamma}{d\eta} \frac{d\eta}{y - \eta} - \frac{1}{2\pi} \sum_{q=1}^{Q-1} \sum_{j=1}^J \frac{A_{qj} [y - \eta_{qj}]}{[y - \eta_{qj}]^2 + [z - \zeta_{qj}]^2} \\ - \frac{1}{2\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{q=0}^{Q-1} \sum_{j=1}^J \frac{A_{qj} [y - \eta_{qj}]}{[y - \eta_{qj}]^2 + [z - \zeta_{qj}]^2} \quad (4.22)$$

両辺に $\sqrt{1+x/1-x}$ をかけて x について -1 より 1 まで積分すると,

$$\int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} v_{as}(x, y) dx = -\frac{1}{2} \Gamma(y) - \frac{1}{4} \int_{R_1}^{R_2} \frac{d\Gamma}{d\eta} \frac{d\eta}{y - \eta} - \frac{1}{2} \sum_{q=1}^{Q-1} \sum_{j=1}^J \frac{A_{qj} [y - \eta_{qj}]}{[y - \eta_{qj}]^2 + [z - \zeta_{qj}]^2} \\ - \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{q=0}^{Q-1} \sum_{j=1}^J \frac{A_{qj} [y - \eta_{qj}]}{[y - \eta_{qj}]^2 + [z - \zeta_{qj}]^2} \quad (4.23)$$

4.3 ピッチダンピングの解析

ロータのピッチダンピングは本来非定常空気力を想定して解析すべきものであるが, 第3章の研究の結果準定常空気力によって解析してよいことが知られた。

1節に述べたように渦とブレードの相対的な位置の変動を考慮しつつ, ロータ面の傾きが, $\theta = \bar{\theta} \sin pt$ であらわされるピッチング運動を行なうリジッドロータについて前節の理論を応用してピッチダンピングの解析を行なう。

(4.23) 式を q 番ブレードについて次のように書く。

$$\int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} v_a(x, y) dx \\ = -\frac{1}{2} \Gamma(y) - \frac{1}{4} \int_{R_1}^{R_2} \frac{d\Gamma}{d\eta} \frac{d\eta}{y - \eta} \\ - \sum_{l=1}^L \sum_{j=1}^J \frac{1}{2} \frac{A_{lj}(y - \eta_{lj})}{(y - \eta_{lj})^2 + (z - \zeta_{lj})^2} \quad (4.24)$$

上式をピッチダンピングの問題に応用するにあたって A_{lj} , η_{lj} , ζ_{lj} , v_a を決めなければならない。 v_a は(1.5)式を参照し, 接線流の境界条件を考慮すると

$$v_{as} = -y' \Omega \theta_c - y' \dot{\theta} \cos \phi_q \quad (4.25)$$

有効迎角 θ_x を導入すると

$$\theta_x = \theta_c + \dot{\theta} / \Omega \cdot \cos \phi_q \quad (4.26)$$

$\eta_{lj}(t)$ と $\zeta_{lj}(t)$ は q 番ブレードの真下の第 l 番目の渦層を構成する内側から j 番目の渦糸の位置をあらわしている。但し $j=J$ の場合には第 l 番目の翼端渦をあらわしている。 $\eta_{lj}(t)$ と $\zeta_{lj}(t)$ はロータがピッチングを行なっている状態で時々刻々測定した値を用いるべきであるが, ここでは1章4節の煙実験の結果を利用して近似的に決定した。その方法は次のとおりである。 lj で示される第 l 層の内側から j 番目の渦糸は時刻 $t' = t - 2\pi l / Q\Omega$ に q^* 番ブレードから発生したものである。渦を発生した時点では q^* 番ブレード

ドの Z_i 座標は $z'_{q*}(t')$ である。発生した渦はこの位置から後流中へ流される。その流され方はロータが単にホバーしている状態と、ピッチング運動をしている状態では勿論異なるわけであるが、近似的には両者は等しいと見なされよう。ピッチングを行っていない場合の渦の位置 ζ'_{ijST} は既に1章4節の煙実験によって求めているので、 $2\pi l/Q\Omega$ の時間に渦がどれだけ移動するかは既知である。由って時刻 t での渦の位置は $z'_{vq*}(t) + \zeta'_{ijST}$ である。他方時刻 t でのブレードの Z_i 座標は $z'_q(t)$ である。ピッチングの角が微小であるから、

$$\zeta'_{ij}(t) = z'_{q*}(t') + \zeta'_{ijST} \quad (4.27)$$

但し $z'_{q*}(t')$ と $z'_q(t)$ は次のように書ける。

$$z'_q(t) = -y' \cos \phi_q(t) \sin \theta(t) \quad (4.28)$$

$$z'_{vq*}(t') = -y_{v'} \cos \phi_{q*}(t') \sin \theta(t') \quad (4.29)$$

$\phi_q(t) = \phi_{q*}(t')$ であることはいうまでもない。

第67図に基準ブレードについての翼端の Z_i 座標 $z'_0(t)$ と1番ブレードから発生し、基準ブレードの真下にある渦の Z_i 座標 $z'_{v1}(t) + \zeta'_{1jST}$ を描く。

$\eta'_{ij}(t)$ はピッチングを行っていない場合の渦位置 η_{ijST} をそのまま用いる。

次に後流中にある翼端渦と内側の渦層を代表する渦系の強さ $\Delta'_{ij}(t)$ について考えよう。 $\Delta'_{ij}(t)$ は q 番ブレードの真下の第 l 番目の層を構成する内側から j 番目の渦系の強さである。それ故 $\Delta'_{ij}(t)$ は q 番ブレードの時刻 t' での束縛渦によって決定されるべきものである。しかしロータの回転の周期に比べてピッチングの周期が十分長い時には $\Delta'_{ij}(t)$ は q 番ブレードの時刻 t における束縛渦を用いて決めてもよ

いだろう。

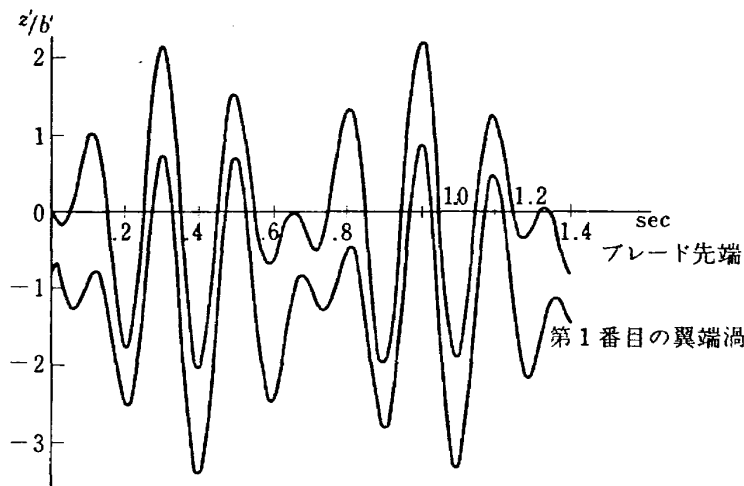
$$\Delta'_{ij}(t) \doteq \Gamma_{q,j+1}(t) - \Gamma_{qj}(t) \quad (4.30)$$

この近似の内容は以下にのべるとおりである。即ちピッチ角 $\theta_X(t') = \theta_0 + \frac{\dot{\theta}(t')}{\Omega} \cos \phi_{q*}(t')$ 渦位置 $\zeta'_{ijq*}(t')$ の条件で作動しているロータブレードの束縛渦によって後流中の渦を決めるかわりに、ピッチ角 $\theta_X(t) = \theta_0 + \frac{\dot{\theta}(t)}{\Omega} \cos \phi_q(t)$ 渦位置 $\zeta'_{ijq}(t)$ の条件で作動しているロータブレードの束縛渦によって後流中の渦を決めている。従って後流中の渦の強さについてのみ誤差を生じるが、その大きさは小さい。何故なら $\phi_{q*}(t')$ と $\phi_q(t)$ は等しいから誤差は全て $\dot{\theta}(t')$ を $\dot{\theta}(t)$ とし、 $\theta(t')$ を $\theta(t)$ としたことに起因する。 t' と t の差は $2\pi l/Q\Omega$ であってロータの回転数が大きければピッチングの周期に比べて十分短い。従って $\theta(t')$ を $\theta(t)$ とした誤差は小さい。 $\dot{\theta}(t')$ を $\dot{\theta}(t)$ とした誤差は $\theta(t')$ を $\theta(t)$ とした誤差の p 倍であるがピッチ角そのものについての誤差はこれを Ω で割ったものであるからやはりロータ回転周期がピッチングの周期に比べて十分短かければ誤差は十分小さい。

以上の考察の結果 (4.24) 式は未知数 $\Gamma(y, t)$ についての微積分方程式となり数値的に解くことができる。上に述べた近似を用いて書きなおしておくと、

$$\begin{aligned} -\pi y b' \Omega \theta_X = & -\frac{1}{2} \Gamma(y) - \frac{1}{4} \int_{R_1}^{R_2} \frac{d\Gamma}{d\eta} \frac{d\eta}{y-\eta} \\ & - \sum_{l=1}^L \sum_{j=1}^J \frac{1}{2} (\Gamma_{j+1} - \Gamma_j) \frac{y - \eta_{lj}}{(y - \eta_{lj})^2 + (z - \zeta_{lj})^2} \end{aligned} \quad (4.31)$$

ロータ面の傾きが $\theta = \bar{\theta} \sin pt$ であらわされるような微小振幅のシヌソイダルなピッチングを行なって



第 67 図 ブレードの翼端の位置と第1番目の翼端渦の位置の経時変化 (ブレードの曲げ変形は含まない)

$R_1'/b = 33.33$, $\bar{\theta} = 0.0654$ rad, $p = 0.756$ c/s, $\Omega = 300$ rpm

いる場合に、次々とわずかな時間間隔において(4.31)式を解くと各時刻でのブレード上の循環が求まる。これより各時刻での揚力とピッチング軸まわりのモーメントが求められる。ピッチング軸まわりのモーメントの経時変動が知られると付録Aの方法によってピッチダンピングの微係数が得られる。

具体的な解き方について

渦糸の設定は次のようにして行なう。

ブレードの半径方向に沿った束縛渦の分布は第68図のようになると期待される。翼端から束縛渦が最大になる点 y_A までの部分で発生する trailing vortex は巻き上って tip vortex core を形成すると考える。この仮定を明確に保証する実験的根拠はないが、煙実験から知られる翼端付近の流れの模様からみて、 y_A の両側から発生した渦が混合することはないと思われる。 y_A の両側からは符号の逆な強い trailing vortex が生じると考えられるが、強さの異なる二つの渦糸の運動²⁸⁾ がそれらの重心まわりの円運動であることから、渦の混合は速かには生じないとみてよいであろう。

煙実験によれば、ブレードの内側から出た渦は速かに巻き上ることはなくてかなりの時間にわたって vortex sheet とみなされることがわかる。この vortex sheet を離散的な渦糸でおきなおすのは先に述べたとおりである。

θ_A を次のように定義する。

$$y_A \equiv \frac{R_2 + R_1}{2} - \frac{R_2 - R_1}{2} \cos \theta_A \quad (4.32)$$

θ_j を次のように定義する。

$$\theta_j \equiv \frac{\theta_A(j-1)}{J-1} \quad (j=1, 2, \dots, J) \quad (4.33)$$

η_{0j} を次のように定義する。

$$\eta_{0j} \equiv \frac{R_2 + R_1}{2} - \frac{R_2 - R_1}{2} \cos \theta_j \quad (4.34)$$

故に $\eta_{0J} = y_A$ となる。

$\theta_{J+1} \equiv \pi$ とする。

内側から j 番目の渦糸は η_{0j} と η_{0j+1} の中点から発生すると考える。それが第4表に示した縮流率に従って位置 η_{lj} , ζ_{ljST} をとる。

$$\left. \begin{aligned} \eta_{lj} &= CTR(L) \cdot (\eta_{0j} + \eta_{0j+1})/2 \\ \zeta_{ljST} &= VPR(L) \cdot (\eta_{0j} + \eta_{0j+1})/2 \end{aligned} \right\} \quad (4.35)$$

$$(j=1, 2, \dots, J-1)$$

η_{lj} , ζ_{ljST} は tip vortex core の位置であるが、これは写真から直接求められ、第5表に記されている。

内側から j 番目の渦糸の強さは η_{0j+1} のところでの束縛渦の強さ Γ_{j+1} と η_{0j} のところでの束縛渦の強さ Γ_j の差として決める。これは(4.30)式に記したとおりである。

束縛渦の強さをあらわす補間公式は Multhop の式³⁾を使う。

既に第3章において循環方程式を解くのに用いたのと全く同じ手法を用いる。

$$\Gamma(\phi) = \frac{2}{N+1} \sum_{i=1}^N \Gamma(\phi_i) \sum_{n=1}^N \sin n\phi_i \sin n\phi \quad (4.36)$$

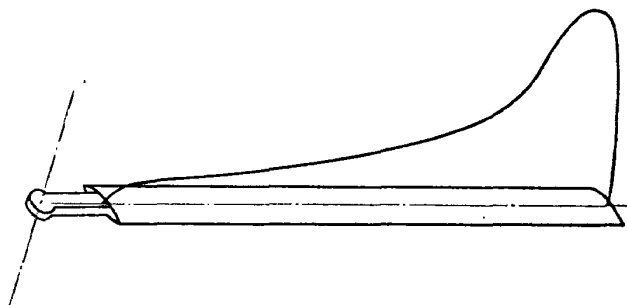
(4.31) の積分は Glauert の公式²³⁾ を用いて計算する。

(4.31) 式は次のような連立方程式になり、 $\Gamma(\phi_i)$ を求めることができる。

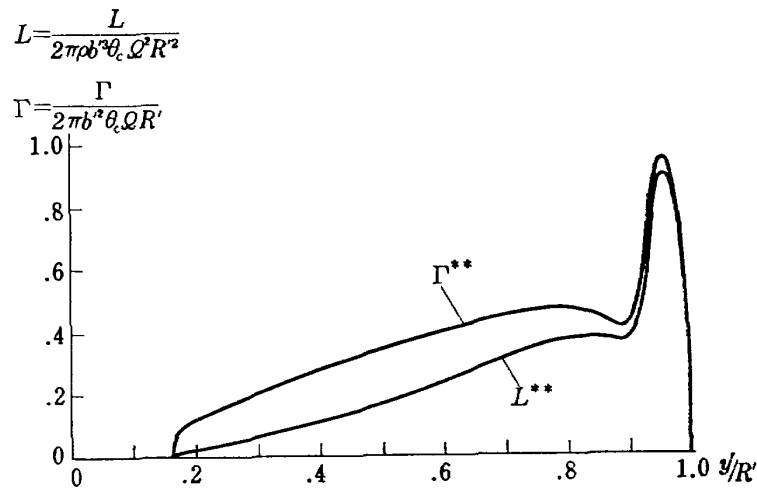
$$\begin{aligned} & -\pi b' \left(\frac{R_2 + R_1}{2} - \frac{R_2 - R_1}{2} \cos \theta \right) \\ & \times (\Omega \theta_c + \bar{\theta} p \cos \phi_q \cos p\theta) \\ & = \frac{2}{N+1} \sum_{i=1}^N \Gamma(\phi_i) \sum_{n=1}^N \sin n\phi_i \left[-\sin n\phi \left(\frac{1}{2} \right. \right. \\ & \quad + \frac{n\pi}{2(R_2 - R_1) \sin \phi} - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^J (\sin n\theta_{j+1} \\ & \quad \left. \left. - \sin n\theta_j) \sum_{l=1}^L \frac{y - \eta_{lj}}{(y - \eta_{lj})^2 + (z - \zeta_{lj})^2} \right] \right] \end{aligned} \quad (4.37)$$

揚力分布は $L' = \rho b' y \Omega \Gamma'$ によって求める。

θ_A を適当に仮定して η_{0j} , θ_j を求め循環方程式を解くと y_A が求まる。これより θ_A の第1近似を得て同



第 68 図 ブレードの翼幅方向の循環分布のスケッチ



第 69 図 渦とブレードの距離の変動を考慮した理論によって求めた循環と揚力の分布
 $R_2'/b'=33.33$, $\bar{\theta}=0.0654$ rad, $p=0.756$ c/s, $\Omega=300$ rpm,
 時刻 $t=0$, $\phi=0^\circ$, $\theta_c=4^\circ$

じことをくりかえす。2～3 回くりかえすと θ_A が収束した。

Y 軸まわりのモーメントは

$$M_Y' = - \sum_{q=0}^{Q-1} \int_{R_1'}^{R_2'} L_q' y' dy' \cos \phi_q \quad (4.38)$$

L_q' は $y'=R_1'$, $y'=R_2'$ で 0 であるべきだから、Multthop の補間公式³⁾ を用いて上式の積分を行う。

$$M_Y' = - \sum_{q=0}^{Q-1} \frac{2}{N+1} \frac{R_2' - R_1'}{2} \frac{\pi}{2} \times \sum_{i=1}^N L_q'(\phi_i) y_i' \sin \phi_i \cos \phi_q \quad (4.39)$$

但し

$$\phi_i = \frac{\pi i}{N+1}$$

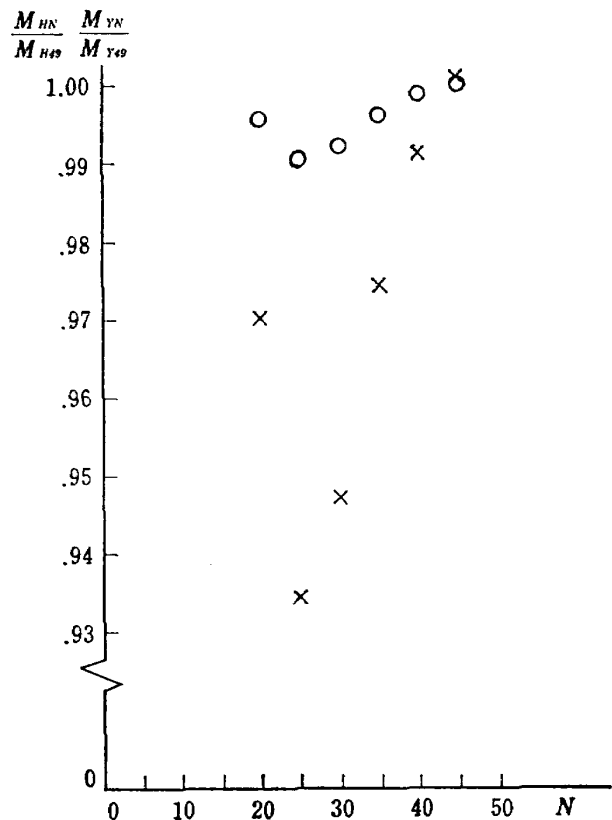
ピッチダンピングは付録 A の手法によって求める。

$$M_\theta = \frac{1}{\pi \bar{\theta}} \int_0^{2\pi/p} M_Y \cos pt \, dt \quad (4.40)$$

計算例について

第69図には時刻 $t=0$ の基準ブレードの半径方向の循環及び圧力分布を計算した例を示した。この例は後流中にある強い回帰した翼端渦とブレードが非常に近かついた場合の例であって、ブレードと渦の中心の距離は $0.8b'$ 又は $0.024R'$ である。この為 y'/R' が 0.9 の付近で急激に誘導速度の方向が変わり、循環と揚力の分布は極めて収束しにくい。この図は (4.36) 式の N を 35 とし計算したものであるが、なお循環及び揚力分布に凹みが生じている。しかし少し渦がブレードから離れると解の収束は十分良くなり、循環分布の凹みはなくなる。

このように分布の収束は良くないがピッチダンピン

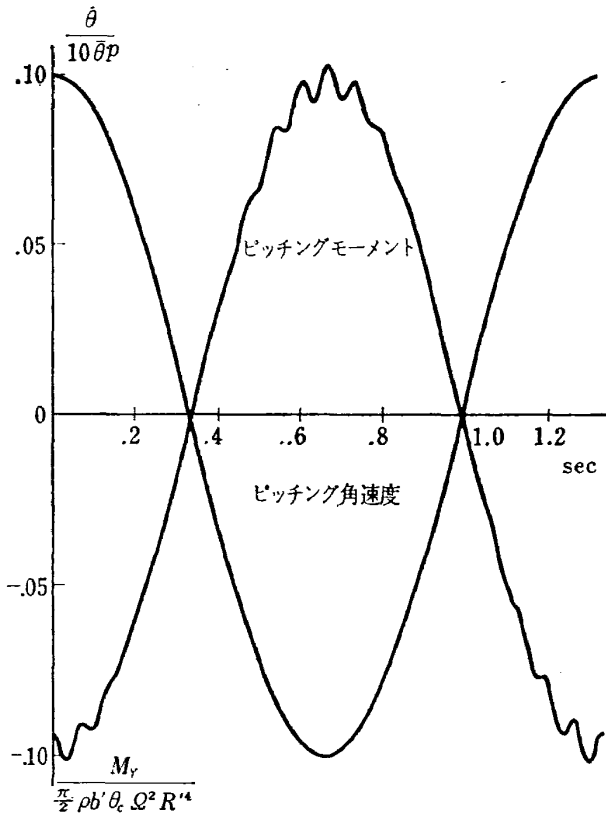


第 70 図 補間公式 () の項数 N を増した場合のブレード付根まわりのモーメント M_H とピッチング軸まわりのモーメント M_Y の収束

グの計算に必要なモーメントの収束は比較的良好である。第70図にはブレードの付根まわりのモーメント M_H ○ 印と3本のブレードに働らく空気力によって作られるピッチング軸まわりのモーメント M_Y × 印の収束を記した。 N を 35 とする M_Y の誤差が 3%

程度になることがわかる。

次にブレードが 15° 回転するごとに M_Y を計算してピッチングの一周期にわたってプロットした例を第71図に示す。(4.37) 式の $z-\zeta_{ij}$ が time dependent であるから M_Y は高周波を含んだ time history になる。 $M_Y \cos pt$ を同様にプロットした例を第72図に示



第 71 図 ピッチング角速度 $\dot{\theta}$ とピッチング軸まわりのモーメントの M_Y 経時変化
 $R_2'/b'=33.33$, $\bar{\theta}=0.0654$ rad, $\Omega=300$ rpm
 $p=0.756$ c/s, $\theta_c=4^\circ$

す。両図において横軸の $56/144$ mm が方位角 15° に対応する。この図から方位角 45° おきに M_Y を計算しても十分な精度が得られることがわかる。方位角 45° おきに $M_Y \cos pt$ を計算して (4.40) 式を数値積分し、 M_θ を求めた。計算結果は第32図より第43図に \bigcirc 印 G で記した。全ての図においてこの方法によって得られた結果が他の理論によるものより良好な結果を示している。

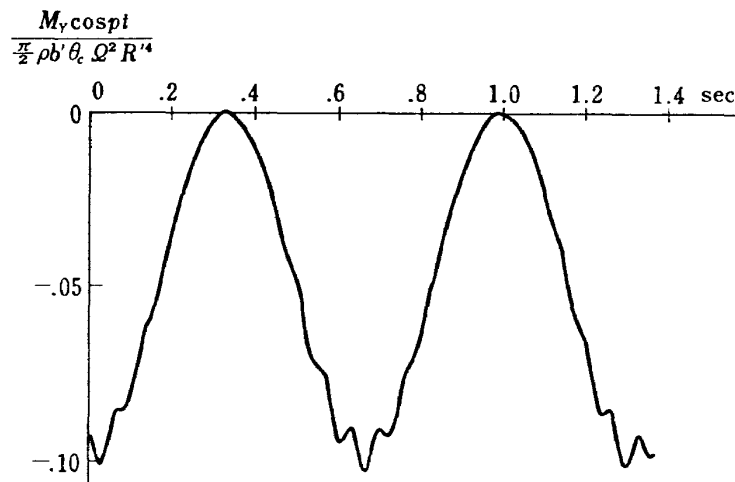
(4.37) 式の $z-\zeta_{ij}$ が時間的に変化するとしたのが G であるが、これを一定値 $-\zeta_{ist}$ でおきかえた結果が F \square 印である。 F はロータ回転速度によってほとんど変わらない。

F と G の差はブレードと渦との距離が変動することによって生じるピッチダンピングの減少分を示す。

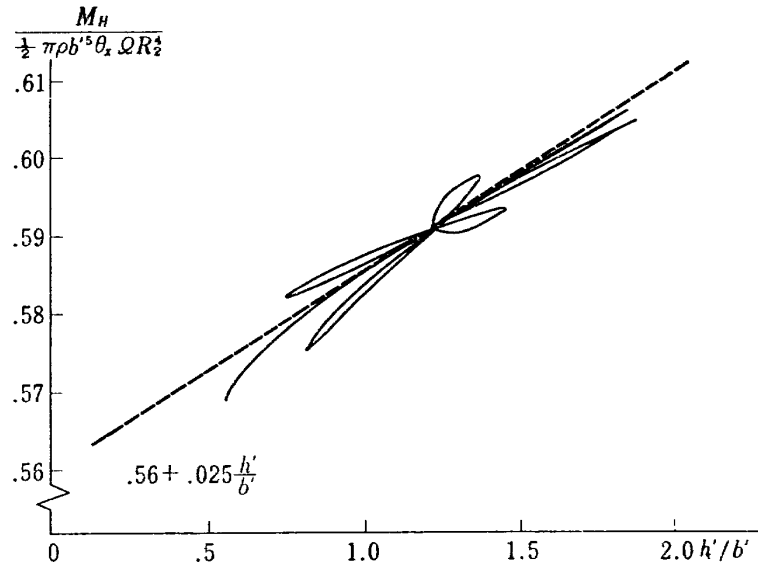
4.4 ピッチダンピングの近似的な一計算法

リジッドヘリコプタロータのホバリングにおけるピッチダンピング微係数を求める時に用いるべき空気力の計算法は、単にロータ後流中の回帰渦の寄与を考慮した三次元翼理論では不十分であって、ブレードと後流中の渦の相対的位置の変動までも考慮に入れたものでなければならないことが、今や解析と実験の相互比較によって明らかとなった。

次に設計にあたって、ピッチダンピング微係数を如何にして推算すべきかという問題について考えよう。ヘリコプタロータの空気力学は最近著しく発展し、ブレードの曲げ、捩り、後流中の渦面の変形を含めた状態で、ホバリングでも前進飛行でも、ロータの空力荷重分布を直接電子計算機によって解くことが試みられるようになった。近い将来にピッチダンピングの算定もこの総合的な計算プログラムの一環に組み込まれてしかるべきであると思う。本研究は、そのような総合



第 72 図 $M_Y \cos pt$ の経時変化



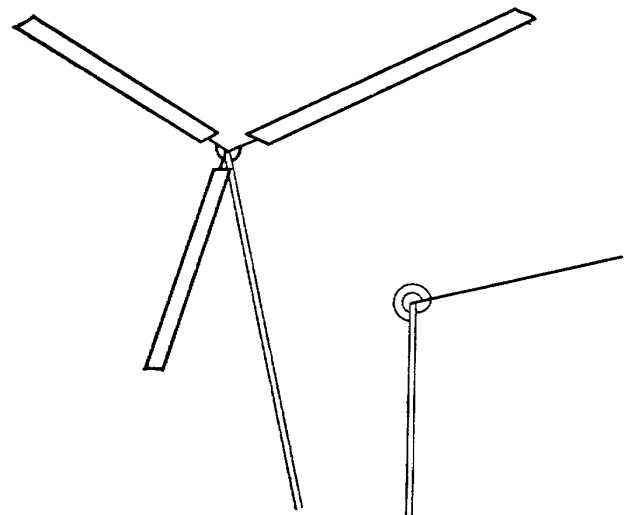
第 73 図 ハブモーメントの変動

的な解析法の一側面での注意すべき問題点を指摘したものである。しかし、このような総合的な計算を実行する為には、極めて複雑なプログラム、大型且つ高速の電子計算機を用いて、かなり長時間の計算を行わねばならない。他方、設計の初期段階では、むしろ大ざっぱな安定微係数の値を、簡単な手続きによって求めることが要求される。

文献6)に於て別府はブレードに働く空気力のうち $\sin \phi$ に比例して変化する部分と、 $\cos \phi$ に比例する部分の大きさが異なるという卓抜な着想に基づいて、ピッチダンピングの計算式に経験的なファクター ϵ , μ を導入した。別府の方法を参考にしつつ、本研究で得られた結果を利用して、リジッドロータのピッチダンピングを比較的簡単に計算する方法を提案し、別府の実験結果と比較しておく。

本研究の結果、リジッドロータのピッチダンピングは、ブレードから発生する渦面と回帰渦の両方を含めた意味での、いわゆる三次元効果ばかりでなく、後流中の渦とブレードの相対的な位置の変動のために、二次元準定常理論の予測するところより、大巾に小さくなることが知られた。そこで、相対的位置を代表する量として、ブレードに最も近い回帰翼端渦、つまり先行するブレードから発生した翼端渦とブレードの距離 h' を横軸にとり、縦軸にブレード付根に発生するモーメントを $\frac{1}{2} \pi \rho b^5 \theta_x \Omega^2 R^4$ で割った量をとる。4章3節の結果をこのグラフ上にプロットすると、第73図を得る。これより、近似的に、

$$M'_H = \frac{1}{2} \pi \rho b^5 \Omega^2 R^4 \theta_x \left\{ 0.56 + 0.025 \frac{h'}{b'} \right\} \quad (4.41)$$



第 74 図 フラッピングヒンジをバネで拘束したロータ

を得る。

さて、リジッドヘリコプタロータの工学的近似モデルとして、第74図に示したような、フラッピングヒンジをバネで拘束したモデルを考える。このモデルが Y 軸のまわりに一定角速度 $\dot{\theta}$ のピッチング運動を行なう場合には、ブレードの弦長を c とすると、

$$\theta_x = \theta_0 - \frac{\dot{\theta}}{\Omega} + \frac{\dot{\theta}}{\Omega} \cos \phi \quad (4.42)$$

$$\frac{h'}{c/2} = \frac{h'_H}{c/2} + \frac{R}{c/2} (-\dot{\theta} \cos \phi) \frac{2\pi}{\Omega \Omega} \quad (4.43)$$

となる。 h'_H はホバリング時のブレードと最も近い回帰翼端渦の距離であって、煙実験から求めるのが望ましい。 h'_H を実験的に求めない時は、ホバリングロー

タの平均吹き下ろし, $u = \sqrt{C_T/2} R\Omega$ にロータブレードが $2\pi/Q$ だけ回る時間をかけ, 更に修正係数 $1/2$ をかけたものを用いる。この修正係数は, 翼端渦の降下速度が渦発生後しばらくはロータ面の平均吹き下ろしよりも小さいという実験的事実にもとづくものである。このことは本研究のみならず, 文献 10), 11) にも報告されている。即ち

$$h'_H = \pi \sqrt{\frac{C_T}{2}} \frac{R}{Q} \quad (4.44)$$

ブレードに働く空気力によって, ブレード付根に発生するモーメント M'_H が知られると, 付録 C, D の手続きとはほぼ同様にして, ピッチダンピングを求めることができる。

(C.9) 式は次のように変更され,

$$\delta W = \sum_{q=0}^{Q-1} M_{Hq}' \cdot (\delta \beta_q - \delta \theta \cos \psi_q) + [M_Y j + M_Z k] \cdot [\delta \theta j + \delta \phi k] \quad (4.45)$$

(C.10) 式は

$$Q_{\beta q} = \frac{1}{4} \pi \rho c R^4 \Omega^2 \left(\theta_0 - \frac{\dot{\beta}_q}{\Omega} + \frac{\theta}{\Omega} \cos \psi_q \right) \left[0.56 + 0.025 \left\{ \frac{h'_H}{c/2} + \frac{R}{c/2} (-\theta \cos \psi) \frac{2\pi}{Q\Omega} \right\} \right] \quad (4.46)$$

(C.11) 式は

$$Q_{\theta} = \sum_{q=0}^{Q-1} \frac{1}{4} \pi \rho c R^4 \Omega^2 \left(\theta_0 - \frac{\dot{\beta}_q}{\Omega} + \frac{\theta}{\Omega} \cos \psi_q \right) \left[0.56 + 0.025 \left\{ \frac{h'_H}{2/c} + \frac{R}{c/2} (-\theta \cos \psi) \frac{2\pi}{Q\Omega} \right\} \cos \psi_q + M_Y \right] \quad (4.47)$$

(D.2) 式に対応して,

$$\begin{aligned} \ddot{\beta}_q + \frac{\gamma}{8} \alpha_2 \dot{\beta}_q \Omega + \left(\Omega^2 + \frac{K}{I_B} \right) \beta_q \\ = -2 \sin \psi_q \Omega \dot{\theta} + \frac{\gamma}{8} \alpha_2 \dot{\theta} \Omega \cos \psi_q + \frac{\gamma}{8} \alpha_1 \theta_0 \Omega^2 \end{aligned} \quad (4.48)$$

(C.18) 式に対応して,

$$\begin{aligned} I_P \ddot{\theta} + W l \theta - I_B (\sum \ddot{\beta}_q \cos \psi_q - \ddot{\theta} \sum \cos^2 \psi_q \\ + 2\Omega \dot{\theta} \sum \sin \psi_q \cos \psi_q + \Omega^2 \sum \beta_q \cos \psi_q) \\ + \frac{1}{8} \rho a c R^4 (\alpha_1 \theta_0 \Omega^2 \sum \cos \psi_q + \alpha_2 \Omega \dot{\theta} \sum \cos^2 \psi_q \\ - \alpha_2 \Omega \sum \dot{\beta}_q \cos \psi_q) = M_Y \end{aligned} \quad (4.49)$$

ここに

$$\alpha_1 \equiv 0.56 + 0.025 \frac{h'_H}{c/2} \quad (4.50)$$

$$\alpha_2 \equiv 0.56 + 0.025 \left[\frac{h'_H}{c/2} - \theta_0 \frac{R}{c/2} \frac{2\pi}{Q} \right] \quad (4.51)$$

(4.48) 式を解いて,

$$\begin{aligned} \beta_q = \frac{\gamma}{8} \cdot \frac{\alpha_1 \theta_0 \Omega^2}{\Omega^2 + K/I_B} + \frac{\sqrt{\left(\frac{\gamma}{8} \alpha_2\right)^2 + 4} \cdot \Omega \dot{\theta}}{\sqrt{(K/I)^2 + \left(\frac{\gamma}{8} \alpha_2 \Omega^2\right)^2}} \\ \times \sin(\phi_q - \phi - \lambda) \end{aligned} \quad (4.52)$$

但し

$$\begin{aligned} \cos \phi &= \frac{-2}{\sqrt{\left(\frac{\gamma}{8} \alpha_2\right)^2 + 4}} \\ \sin \phi &= \frac{-\frac{\beta}{8} \alpha_2}{\sqrt{\left(\frac{\gamma}{8} \alpha_2\right)^2 + 4}} \\ \cos \lambda &= \frac{K/I}{\sqrt{(K/I)^2 + \left(\frac{\gamma}{8} \alpha_2 \Omega^2\right)^2}} \\ \sin \lambda &= \frac{\frac{\gamma}{8} \alpha_2 \Omega^2}{\sqrt{(K/I)^2 + \left(\frac{\gamma}{8} \alpha_2 \Omega^2\right)^2}} \end{aligned}$$

$\beta_q, \dot{\beta}_q, \ddot{\beta}_q$ を (4.49) 式に代入して,

$$M_{\theta} \equiv \frac{-1}{\pi \theta^2 p} \int_0^{2\pi/p} M_Y \theta dt \quad (4.53)$$

を計算すると,

$$M_{\theta} = \frac{\gamma}{16} Q I_B \alpha_2 \Omega \left[\frac{\nu^2 + \frac{16}{\gamma} \nu}{\nu^2 + \alpha_1^2} \right] \quad (4.54)$$

但し

$$\nu = \frac{8K}{\gamma I \Omega^2} \quad (4.55)$$

最後に本節で提案したピッチダンピング微係数の一計算式 (4.54) の有効性を別府の実験の場合との比較によって確かめておく。 β_q は,

$$\beta_q = a_0 - a_1 \cos \psi_q - b_1 \sin \psi_q \quad (4.56)$$

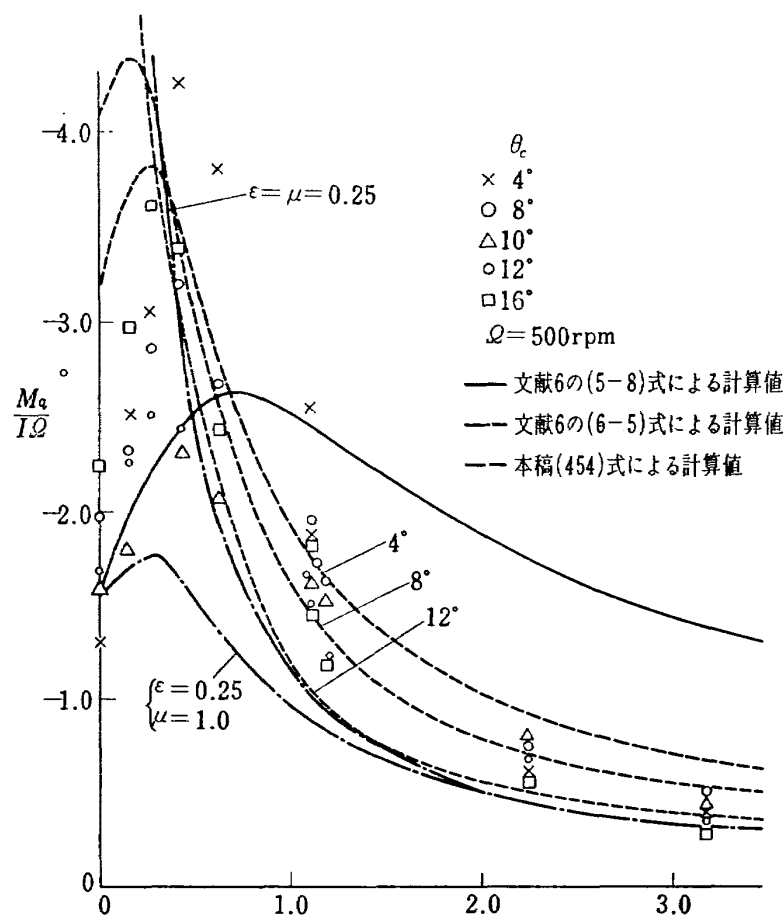
と書ける。

(4.52) 式を用いると,

$$a_1 = \frac{\alpha_1 + \frac{\gamma}{16} \nu \alpha_2}{\nu^2 + \alpha_2^2} \left(-\frac{16}{\gamma \Omega} \right) \dot{\theta} \quad (4.57)$$

$$b_1 = \frac{\frac{1}{\Omega} \frac{16}{\gamma} \nu - \alpha_2^2 \frac{1}{\Omega}}{\nu^2 + \alpha_2^2} \dot{\theta} \quad (4.58)$$

これを別府の論文の (5.3.1), (5.3.2) 式のかわりに用いて計算を行なうと第75図を得る。

第 75 図 ピッチダンピング微係数 実験値⁽⁶⁾と計算値の比較

む す び

ピッチダンピングを2種のロータ、計4種のブレードについて測定し、空力弾性的な手法を用いて測定値からブレードの弾性変形が生じない場合のピッチダンピングを計算した。その結果をTownsentの計算値を用いて無次元化したところ、回転数に対してはほぼ一定になることがわかった。他方この値がブレードごとに異なっているのは、実験精度もさることながら空力弾性的な手法による解析の精度によるものと思われる。

無次元化した測定値が1に比べてずっと小さく、ピッチダンピングにおいて作用する空気力が独特のものであることが推察された。全く弾性変形を生じないとした仮想的なロータブレードについて計7種類のモデルによってピッチダンピングを計算した。はじめの5種類は既存のものであり、あとの2種はピッチダンピングの特色をつかむべく工夫したものである。

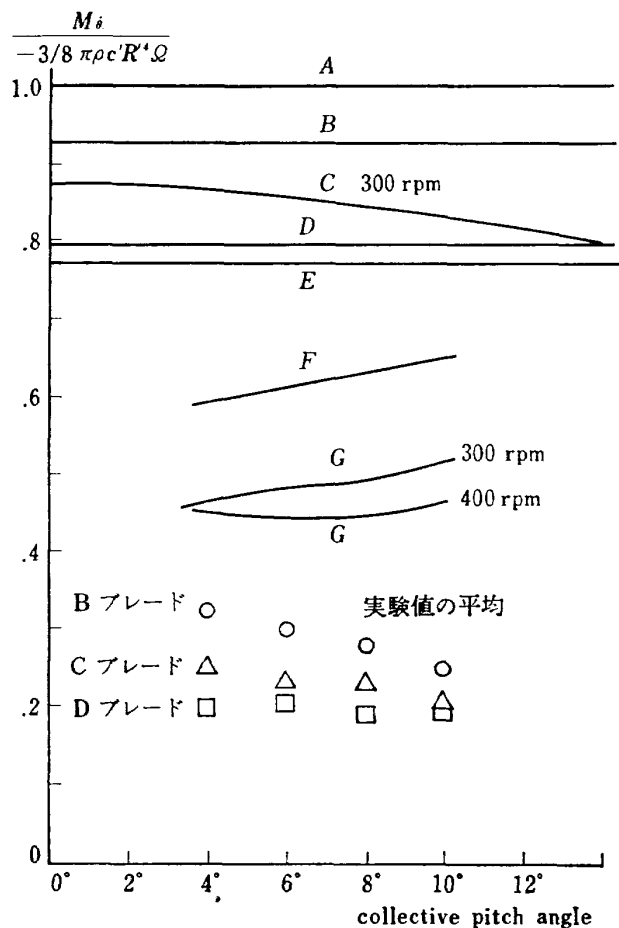
あるブレードのあるピッチ角のデータを平均して得た値を第76図に、○、△、□印で示した。同じ図に7種の計算値を記した。AはTownsentの理論、

BはTheodorsenの理論、CはLoewyの理論、DはAshleyの準定常理論であり、EはAshleyの定常理論である。FとGは市川の線形理論から、遠方の渦の寄与は小であること、inflowは小であることを仮定して導いたものである。

AとBの差は二次元翼についての非定常効果に起因する。AとD、又はBとEは差は三次元効果に起因する。BとCの差は回帰渦中のshed vortexの寄与に起因する。DとFの差は後流中にあるtrailing vortexの寄与に帰する。DとEの差は三次元翼理論における非定常効果に起因するが、回帰渦中のshed vortexの寄与は含まない。FとGの差はブレードと渦の距離の変動によって生じるピッチダンピングの減少分をあらわしている。

Gと実験値の間になお食い違いが見られるが、これは(1)空力弾性的な解析法、特に曲げモード決定法を改善すること、(2)実験精度の向上、(3)ピッチングを行なっている場合の実際の渦配置を測定して計算に用いることによって克服されるものと思われる。

リジッドロータが一定角速度のピッチングを行なう



第 76 図 ブレードの曲げ変形の効果を除去し無次元化したピッチダンピングの測定値と種々の理論値の比較

A. 二次元準定常理論 B. 二次元非定常理論
C. 後流中の渦を含めた二次元非定常理論
D. 三次元準定常理論 E. 三次非定常理論
F. 後流中の渦の影響を含めた三次元準定常理論
G. 後流中の渦とブレードの距離の変動まで含めた三次元準定常理論

時に発生するピッチダンピングの微係数 M_δ を簡単に計算する式を提唱し、それを用いた結果がかなり良好であることを、文献 6) の実験値との比較によって実証した。

あとがき

5 年間にわたり本研究を御指導下さった鷺津教授に深く感謝いたします。今考えてみると十分とは言えない結果ですが、実に多くの方々の御助力によっているものとあらためて深く感じている次第です。航技研の市川技官、別府技官、宇宙研の東助教授、にはいろいろと御注告、御鞭達いただき、久保田鉄工の内藤さん、中口研究室、鷺津研究室、航技研飛行実験部の方々には実験の面で御便宜を計っていただきました。ロータ、ブレードの製作は工作室の当麻さん、山口機器製

作所が大変面倒なものを快く作って下さいました。大量の計算は東京大学の大型計算センターと航空宇宙技術研究所の計算センターで行いました。末筆ながら厚くお礼申し上げます。

参考文献

- 1) 市川輝雄; 回転翼の線形理論 (I) 揚力面理論, 航技研報告, TR-68 (昭和 39)
- 2) 市川輝雄; 回転翼の線形理論 (II) 揚力線理論, 航技研報告, TR-85 (昭和 40)
- 3) 市川輝雄; 回転翼の線形理論 (III) 揚力線方程式の解法, 航技研報告, TR-100 (昭和 41)
- 4) G. Reichert, and P. Oelker; Handling Qualities with the Bolkow Rigid Rotor System, Paper Presented at the 24th Annual National Forum of American Helicopter Society, May 1968.
- 5) P.R. Payne; Helicopter Dynamics and Aerodynamics Pitman & Sons Ltd., 1959.
- 6) 別府護郎, 岡 遠一; ブレードのフラッピン運動をバネで拘束したロータのピッチダンピングについて, 航技研資料, TM-164 (1969)
- 7) M.W. Townsent; Stability and Control of Unducted Stand-On Helicopter Preliminary Theoretical and Flight Test Results, Princeton Univ. Dept. of Aeronautical Engineering Rept No. 404, Nov. 1957.
- 8) C.O. Olossen and K. Orlik-Rückemann; An Electronic Apparatus for Automatic Recording of Logarithmic Decrement and Frequency of Oscillations in the Audio and Sub Audio Freq. Range, FFA (The Aeronautical Research Institute of Sweden) Rept. 52 (1954)
- 9) 柳沢三憲; ダンピングメータの試作, 航技研資料, TM-168
- 10) D.S. Jenny, J.R. Olson and A.J. Landgrebe; A Reassessment of Rotor Hovering Performance Prediction Methods, Journal of A.H.S. Vol. 13, No. 2 (1968 April)
- 11) R.B. Gray; On the Motion of the Hovering Model Helicopter Rotor and its Application to the Calculation of the Spanwise Aerodynamic Loading, Princeton Univ. Dept. of Aeronautical Engineering Rept. No. 313 (1955)
- 12) I.A. Simons, R.E. Pacifico and J.P. Jones; The Movement, Structure and Breakdown of Trailing Vortices from a Rotor Blade, CAL/USAAVLABS SYMPOSIUM PROCEEDINGS Vol. 1, Propeller & Rotor Aerodynamics. 22~24, June 1966.
- 13) A. Gessow and G.C. Myers Jr.; Aerodynamics of Helicopter, Macmillan (1952)
- 14) R.G. Loewy; A Two-Dimensional Approx-

- mation to the Unsteady Aerodynamics of Rotary Wings, J.A.S. Vol. 24, No. 2, Feb. 1957.
- 15) H. Daughaday, F. Duwaldt and C. Gates; Investigation of Helicopter Blade Flutter and Load Amplification Problem, I.A.S. preprint No. 705, Jan. 1957.
 - 16) G.W. Brooks and M.A. Silveira; Dynamic Model Investigation of the Damping of Flapwise Bending Modes of Two-Blades Rotor in Hovering and a Comparison with Quasi-Static and Unsteady Aerodynamic Theories, NASA TN D-175
 - 17) R. Timman and A.I. van de Vooren; Flutter of a Helicopter Rotor Rotating in Its Own Wake, J.A.S. Vol. 24, No. 9, Sep. 1957.
 - 18) T. Theodorsen; General Theory of Aerodynamic Instability and the Mechanism of Flutter, N.A.C.A., Rept. 496, 1935.
 - 19) H. Ashley, H.H. Moser and J. Dugundji; Investigation of Rotor Response to Vibratory Aerodynamic Inputs, WADC TR 58-87, Oct. 1958.
 - 20) E. Reissner; Effect of Finite Span on the Airload Distributions for Oscillating Wings, I—Aerodynamic Theory of Oscillating Wings of Finite Span, NACA TN-1194, 1947.
 - 21) E. Reissner and J.E. Stevens; Effect of Finite Span on the Airload Distributions for Oscillating Wings II—Method of Calculations and Examples of Application, NACA TN-1195, 1947.
 - 22) 森口繁一; 数学公式 I 岩波
 - 23) M. Rauscher; Introduction to Aerodynamics, John Wiley & Sons, Inc., 1953.
 - 24) R.L., Bisplinghoff, H. Ashley and R.L. Halfman; Aeroelasticity, Addison-Wesley 1955,
 - 25) J.P. Rabbott Jr.; Static-Thrust Measurements of the Aerodynamics Loading on a Helicopter Rotor Blade, NACA TN 3688 (1956)
 - 26) J.R. Meyer and G. Falabella Jr.; An Investigation of the Experimental Aerodynamic Loading on a Model Helicopter Rotor Blade NACA TN 2953 (1953)
 - 27) 幸尾治朗, 岡 遠一; 地面近くでホバリングするヘリコプタ・ロータに関する実験, 航技研報告 TR-113
 - 28) H. Lamb; Hydrodynamics 6th ed., Dover publications, 1945
 - 29) 山名正夫, 中口 博; 飛行機設計論 pp. 486 養賢堂 1968
 - 30) G.N. Watson; A Treatise on the theory of Bessel Functions. Cambridge
 - 31) 守屋富次郎, 鷲津久一郎; 力学概論 培風館 1970
 - 32) N. Minorsky; Introduction to Non-Linear Mechanics. Ann Arbor 1947

付録 A³²⁾ ピッチダンピング微係数について

第 6 図に示したようなロータブレードが、回転しない状態でピッチング運動をする時には、空気抵抗、摩擦力を無視すると、運動方程式は

$$I\ddot{\theta} + Wl\dot{\theta} = 0 \quad (\text{A.1})$$

と書ける。ロータが回転している場合には、ブレードに働く空気力とブレードの変形に帰因するモーメント $\gamma(\theta, \dot{\theta}, \dots)$ が働く。このモーメント $\gamma(\theta, \dot{\theta}, \dots)$ は、慣性モーメント $-I\ddot{\theta}$ 、復元モーメント $-Wl\dot{\theta}$ に比べてかなり小さい。系の運動方程式は、

$$I\ddot{\theta} - \gamma(\theta, \dot{\theta}, \dots) + Wl\dot{\theta} = 0 \quad (\text{A.2})$$

と書ける。ロータが回転している場合にモーメント M_Y を外から加えてピッチング運動が $\theta^* = \bar{\theta} \sin pt$ となるようにする場合を考えよう。特に $p^2 = Wl/I$ である場合には、 $I\ddot{\theta}^* - \gamma(\theta^*, \dot{\theta}^*, \dots) + Wl\dot{\theta}^* = M_Y(t)$ 即ち、

$$-\gamma(\bar{\theta}, p) = M_Y(t) \quad (\text{A.3})$$

である。

再び (A.2) 式にもどる。系の運動は $\gamma(\theta, \dot{\theta}, \dots)$ があるので次第に減衰するとして、減衰の微係数を求めたい。 $\gamma=0$ の場合には系は (A.1) 式で記述され、解は $\theta = \bar{\theta} \sin(pt + \phi)$, $\dot{\theta} = \bar{\theta} p \cos(pt + \phi)$ である。 $\gamma(\theta, \dot{\theta}, \dots)$ が 0 ない場合には、系の運動はやや異なり、 $\bar{\theta}$ と ϕ が時間と共に変動すると考える。

$$\theta = \bar{\theta}_{(t)} \sin(pt + \phi_{(t)}) \quad (\text{A.4})$$

$$\dot{\theta} = \bar{\theta}_{(t)} p \cos(pt + \phi_{(t)}) \quad (\text{A.5})$$

(A.4) 式を時間で微分すると、

$$\dot{\theta} = \dot{\bar{\theta}} \sin(pt + \phi_{(t)}) + \bar{\theta}_{(t)} p \cos(pt + \phi_{(t)}) + \bar{\theta}_{(t)} \dot{\phi} \cos(pt + \phi_{(t)})$$

(A.5) 式との差をとると、

$$\dot{\bar{\theta}} \sin(pt + \phi_{(t)}) + \bar{\theta}_{(t)} \dot{\phi} \cos(pt + \phi_{(t)}) = 0 \quad (\text{A.6})$$

(A.5) 式を微分すると、

$$\ddot{\theta} = \ddot{\bar{\theta}} p \cos(pt + \phi_{(t)}) - \bar{\theta}_{(t)} p^2 \sin(pt + \phi_{(t)}) - \bar{\theta}_{(t)} p \dot{\phi} \sin(pt + \phi_{(t)}) \quad (\text{A.7})$$

(A.4) の θ , (A.7) の $\ddot{\theta}$ を (A.2) 式に代入する。

$$\dot{\bar{\theta}}_{(t)} p \cos(pt + \phi_{(t)}) - \bar{\theta}_{(t)} p \dot{\phi} \sin(pt + \phi_{(t)}) = \gamma/I \quad (\text{A.8})$$

(A.6) と (A.8) を $\dot{\bar{\theta}}$ と $\dot{\phi}$ について解くと、

$$\dot{\bar{\theta}} = \frac{\gamma}{Ip} \cos(pt + \phi_{(t)}) \quad (\text{A.9})$$

$$\dot{\phi} = -\frac{\gamma}{Ip\bar{\theta}_{(t)}} \sin(pt + \phi_{(t)}) \quad (\text{A.10})$$

(A.9), (A.10) の右辺の係数は共に微小であるか

ら, $\bar{\theta}(t)$, $\phi(t)$ の時間的な変化率は小さい。それ故, 時刻 t_1 と時刻 $t_2=t_1+2\pi/p$ の間で縦揺れ角の振幅の比 $\bar{\theta}(t_2)/\bar{\theta}(t_1)$ を求めるにあたり, t_1 と t_2 の間では $\bar{\theta}(t)$, $\phi(t)$ がほとんど変化しないと考えることができる。この場合系の運動は周期 $2\pi/p$ のシニョソイダル運動に近いので, r は (A.3) 式によって求めることも可能である。

$$\begin{aligned}\bar{\theta}(t_2) - \bar{\theta}(t_1) &= \int_{t_1}^{t_2} \dot{\bar{\theta}} dt = \int_{t_1}^{t_2} \frac{r}{Ip} \cos(pt + \phi(t_1)) dt \\ &= \int_{t_1}^{t_2} -\frac{M_Y}{Ip} \cos(pt + \phi(t_1)) dt \\ \therefore \ln \left\{ \frac{\bar{\theta}(t_2)}{\bar{\theta}(t_1)} \right\} &= \ln \left\{ 1 + \frac{1}{\bar{\theta}(t_1)} \int_{t_1}^{t_2} \frac{r}{Ip} \cos(pt + \phi(t_1)) dt \right. \\ &\quad \left. + \phi(t_1) \right\} \\ &= \frac{1}{\bar{\theta}(t_1)} \int_{t_1}^{t_2} \frac{r}{Ip} \cos(pt + \phi(t_1)) dt \\ &= -\frac{1}{\bar{\theta}(t_1)} \int_{t_1}^{t_2} \frac{M_Y}{Ip} \cos(pt + \phi(t_1)) dt \quad (\text{A.11})\end{aligned}$$

定数係数の二階の線形微分方程式であらわされる系では $l_n \{ \bar{\theta}(t_2)/\bar{\theta}(t_1) \} \times 2I/(2\pi/p)$ がダンピングの係数になる。これに準じて (A.11) に $2I/(2\pi/p)$ をかけたものを, ピッチダンピングの係数とよぶことにし

$$\begin{aligned}M_\theta &\equiv \frac{Ip}{\pi \bar{\theta}(t_1)} \int_{t_1}^{t_2} \frac{r}{Ip} \cos(pt + \phi(t_1)) dt \\ &= -\frac{Ip}{\pi \bar{\theta}(t_1)} \int_{t_1}^{t_2} \frac{M_Y}{Ip} \cos(pt + \phi(t_1)) dt \quad (\text{A.12})\end{aligned}$$

と定義する。 t_1 を $\phi(t_1)=0$ ととっても一般性を失わない。

$$M_\theta \equiv \frac{1}{\pi \bar{\theta} p^2} \int_{t_1}^{t_2} r \dot{\theta} dt = -\frac{1}{\pi \bar{\theta} p^2} \int_{t_1}^{t_2} M_Y \dot{\theta} dt \quad (\text{A.13})$$

と書くこともできる。

付 録 B

$N_A(q)$, $N_B(q)$, $N_C(\tau)$ の計算法について

(1) $N_A(q)$ の計算法

(3.23) 式を再び書く

$$N_A(q) \equiv q \int_0^\infty \frac{\lambda_1 e^{-i\lambda_1}}{[\lambda_1^2 + q^2]^{3/2}} d\lambda_1 \quad (\text{B.1})$$

$q > 0$ ならば $\lambda_1 = ql$ とおくと

$$\begin{aligned}N_A(q) &= \int_0^\infty \frac{le^{-iql}}{[l^2 + 1]^{3/2}} dl = 1 - iq \left[\int_0^\infty \frac{\cos ql}{\sqrt{l^2 + 1}} dl \right. \\ &\quad \left. - i \int_0^\infty \frac{\sin ql}{\sqrt{l^2 + 1}} dl \right] \quad (\text{B.2})\end{aligned}$$

文献 30) p. 172 に よれば $R\left(\nu + \frac{1}{2}\right) \geq 0$, $x > 0$,

$|\arg z| < \frac{\pi}{2}$ の時には次の式がなり立つ。

$$K_\nu(xz) = \frac{\Gamma\left(\nu + \frac{1}{2}\right) \cdot (2z)^\nu}{x^\nu \cdot \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} \int_0^\infty \frac{\cos xu}{(u^2 + z^2)^{\nu+1/2}} du \quad (\text{B.3})$$

$$\therefore \int_0^\infty \frac{\cos ql}{\sqrt{l^2 + 1}} dl = K_0(q) \quad (\text{B.4})$$

文献 30) p. 332 に よれば $R(\nu) > \frac{1}{2}$, $x > 0$ の時次の式が成り立つ。

$$\begin{aligned}L_\nu(x) &= I_{-\nu}(x) - \frac{2\left(\frac{1}{2}x\right)^\nu}{\Gamma\left(\nu + \frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} \int_0^\infty \sin xu \\ &\quad \times (1+u^2)^{\nu-1/2} du \quad (\text{B.5})\end{aligned}$$

但し

$$L_\nu(x) = \sum_{m=0}^\infty \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{\nu+2m+1}}{\Gamma\left(m + \frac{3}{2}\right)\Gamma\left(\nu + m + \frac{3}{2}\right)} \quad (\text{B.6})$$

$$\therefore \int_0^\infty \frac{\sin ql}{\sqrt{l^2 + 1}} dl = \frac{\pi}{2} [I_0(q) - L_0(q)] \quad (\text{B.7})$$

$$\therefore N_A(q) = 1 - iq \left[K_0(q) - i \frac{\pi}{2} (I_0(q) - L_0(q)) \right] \quad (\text{B.8})$$

$q < 0$ の時は (B.1) 式よりあきらかに

$$\begin{aligned}N_A(q) &= -1 - iq \left[K_0(-q) - i \frac{\pi}{2} (I_0(-q) \right. \\ &\quad \left. - L_0(-q)) \right] \quad (\text{B.9})\end{aligned}$$

q を 0 に近かつけた極限については,

$$\lim_{q \rightarrow 0} I_0(q) = 0$$

$$\lim_{q \rightarrow 0} L_0(q) = 0$$

$$\lim_{q \rightarrow 0} qK_0(q) = 0$$

$$\therefore \lim_{q \rightarrow 0} N_A(q) = \frac{q}{|q|} \quad (\text{B.10})$$

(2) $N_B(q)$ の計算法

(3.23) 式を再び書く

$$N_B(q) \equiv q \int_0^\infty \frac{e^{-i\lambda_1}}{[\lambda_1^2 + q^2]^{3/2}} d\lambda_1 \quad (\text{B.11})$$

$q > 0$ ならば $\lambda_1 = ql$ とおくと

$$N_B(q) = \frac{1}{q} \int_0^\infty \frac{e^{-iql}}{[l^2 + 1]^{3/2}} dl = \frac{1}{q} \frac{\cos ql - i \sin ql}{[l^2 + 1]^{3/2}} dl \quad (\text{B.12})$$

(B.3) 式と (B.5) 式を用いると

$$\frac{1}{q} \int_0^\infty \frac{\cos ql}{[l^2 + 1]^{3/2}} dl = K_1(q) \quad (\text{B.13})$$

$$\frac{1}{q} \int_0^\infty \frac{\sin ql}{[l^2+1]^{3/2}} dl = 1 - \frac{\pi}{2} [I_1(q) - L_1(q)] \quad (\text{B.14})$$

$$\therefore N_B(q) = K_1(q) - i + \frac{\pi i}{2} [I_1(q) - L_1(q)] \quad (\text{B.15})$$

$q < 0$ の時は (B.11) 式よりあきらかに,

$$N_B(q) = -K_1(-q) + i - \frac{\pi i}{2} [I_1(-q) - L_1(-q)] \quad (\text{B.16})$$

q を 0 に近かつけた極限については,

$$\begin{aligned} \lim_{q \rightarrow 0} I_1(q) &= 0 \\ \lim_{q \rightarrow 0} L_1(q) &= 0 \\ \lim_{q \rightarrow 0} K_1(q) &= \frac{1}{q} \\ \lim_{q \rightarrow 0} N_B(q) &= \frac{1}{q} - i \frac{q}{|q|} \end{aligned} \quad (\text{B.17})$$

(3) $N_c(\tau)$ の計算法

(3.23) 式を再び書く

$$N_c(\tau) = \int_0^\infty \left[\frac{\tau}{\sqrt{\lambda_2^2 + \tau^2}} - \frac{\tau}{|\tau|} \right] \frac{e^{-i\lambda_2}}{\lambda_2} d\lambda_2 \quad (\text{B.18})$$

$\tau > 0$ ならば $\lambda_2 = \tau x$ とおくと

$$N_c(\tau) = \int_0^\infty \left[\frac{1}{\sqrt{x^2+1}} - 1 \right] \frac{e^{-i\tau x}}{x} dx = I_1 + I_2 + I_3 \quad (\text{B.19})$$

$$(a) \quad I_1 = \int_0^{X_1} \left[\frac{1}{\sqrt{x^2+1}} - 1 \right] \frac{e^{-i\tau x}}{x} dx \quad (\text{B.20})$$

integrand を Taylor 展開して積分すると

$$\begin{aligned} I_1 &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{[(n+1)/2]!}{j!} \frac{(-1)^j (2j-1)!! (-i\tau)^{n-2j+1}}{2^j (n-2j+1)!} \\ &\quad \times \frac{X_1^{n+1}}{n+1} \end{aligned} \quad (\text{B.21})$$

$$(b) \quad I_2 = \int_{X_1}^{X_2} \left[\frac{1}{\sqrt{x^2+1}} - 1 \right] \frac{e^{-i\tau x}}{x} dx \quad (\text{B.22})$$

Simpson の公式を用いて積分を行なう。

$$(c) \quad I_3 = \int_{X_2}^\infty \left[\frac{1}{\sqrt{x^2+1}} - 1 \right] \frac{e^{-i\tau x}}{x} dx \quad (\text{B.23})$$

$$\begin{aligned} \left[\frac{1}{\sqrt{x^2+1}} - 1 \right] \frac{1}{x} &= \frac{1/x^3}{\sqrt{1+1/x^2}} - \frac{1}{x} \\ &= -\frac{1}{x} + \frac{1}{x^3} - \frac{1}{2} \frac{1}{x^5} + \frac{3}{8} \frac{1}{x^7} - \frac{5}{16} \frac{1}{x^9} \\ &\quad + \frac{35}{128} \frac{1}{x^{11}} - \dots \end{aligned} \quad (\text{B.24})$$

$$\begin{aligned} \int_{X_2}^\infty \frac{e^{-i\tau x}}{x} dx &= \int_{X_2}^\infty \frac{\cos \lambda_2 - i \sin \lambda_2}{\lambda_2} d\lambda_2 \\ &= C_i(\tau X_2) + i \left\{ \frac{\pi}{2} - S_i(\tau X_2) \right\} \end{aligned} \quad (\text{B.25})$$

$$\begin{aligned} \int_{X_2}^\infty \frac{e^{-i\tau x}}{x^2} dx &= \sum_{j=1}^{2n-1} \frac{(2n-j-1)! (-i\tau)^{j-1}}{(2n-1)! X_2^{2n-j}} \\ &\quad \times e^{-\tau X_2} + \frac{(-i\tau)^{2n-1}}{(2n-1)!} \left\{ -C_i(\tau X_2) \right. \\ &\quad \left. + i(S_i(\tau X_2) - \frac{\pi}{2}) \right\} \end{aligned} \quad (\text{B.26})$$

$X_2 > 1$ で n かなり大きくなると,

$$\left| \int_{X_2}^\infty \frac{e^{-i\tau x}}{x^{2n}} dx \right| < \int_{X_2}^\infty \frac{1}{x^{2n}} dx = \frac{X_2^{-(2n+1)}}{2n+1} \quad (\text{B.27})$$

であるから省略できる。

I_3 は (B.25) と (B.26) を用いて計算できる。

$\tau < 0$ の時は (B.18) 式よりあきらかに

$$N_c(\tau) = -N_c(-\tau) \quad (\text{B.28})$$

τ を 0 に近かつけた極限については (B.18) 式を用いて

$$\begin{aligned} \lim_{\tau \rightarrow 0+} N_c(\tau) &= \lim_{\tau \rightarrow 0+} \left\{ \int_0^\tau \left[\frac{\tau}{\sqrt{\lambda_2^2 + \tau^2}} - 1 \right] \frac{e^{-i\lambda_2}}{\lambda_2} d\lambda_2 \right. \\ &\quad \left. + \int_\tau^\infty \left[\frac{\tau}{\sqrt{\lambda_2^2 + \tau^2}} - 1 \right] \frac{e^{-i\lambda_2}}{\lambda_2} d\lambda_2 \right\} \\ &= \lim_{\tau \rightarrow 0+} \left\{ \int_0^1 \left(\frac{1}{\sqrt{x^2+1}} - 1 \right) \frac{e^{-i\tau x}}{x} dx \right. \\ &\quad \left. + \int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} \frac{e^{-i\tau x}}{x} dx - \int_\tau^\infty \frac{e^{-i\lambda_2}}{\lambda_2} d\lambda_2 \right\} \\ &= \lim_{\tau \rightarrow 0+} \left\{ -\int_0^1 \frac{e^{-i\lambda_2}}{\lambda_2} d\lambda_2 + \int_0^1 \left(\frac{1}{\sqrt{x^2+1}} - 1 \right) \right. \\ &\quad \left. \times \frac{1}{x} dx + \int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} \frac{1}{x} dx \right\} \\ &= \lim_{\tau \rightarrow 0+} \log \tau + \gamma + \frac{\pi}{2} i + \log 2 \end{aligned} \quad (\text{B.29})$$

一般には

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} N_c(\tau) = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{\tau}{|\tau|} \left\{ \log |\tau| + \gamma + \frac{\pi}{2} i + \log 2 \right\} \quad (\text{B.30})$$

付録 C 単純化されたりジッドロータモデルの 3 自由度の運動方程式

第74図に示したようなフラッピングヒンジをバネで拘束したロータブレード系について運動の解析を行なう。ホバリングでロール運動ができないように拘束されている場合には系の運動はピッチング、フラッピング及びシャフト軸まわりの回転の3自由度をもつ。系はブレード部分と、ピッチングだけを行なう振子部分からなると考える。系にピッチング軸まわりのモーメント M_Y とシャフト軸まわりのトルク M_Z が外部から加えられている場合について、厳密な運動方程式を導く。ブレードに働く空気力は、二次元準定常理論

に基づく揚力成分だけを考慮する。

次いで $\dot{\phi}$ が一定値 Ω であり且つ運動がゆるやかな場合について、近似的な運動方程式を導く。

ブレード上の点の位置ベクトル \mathbf{r} は (1.5) 式に対応して

$$\mathbf{r} = r \cos \beta_q \mathbf{i}_q^* + r \sin \beta_q \mathbf{k}_q^* \quad (\text{C.1})$$

この点の速度ベクトル \mathbf{v} は (1.6) 式に対応して、

$$\begin{aligned} \mathbf{v} = & (r \sin \beta_q \sin \phi_q \dot{\theta} - r \cos \beta_q \dot{\phi}) \mathbf{i}_q^* \\ & + (-r \sin \beta_q \dot{\beta}_q + r \sin \beta_q \cos \phi_q \dot{\theta}) \mathbf{j}_q^* \\ & + (r \cos \beta_q \dot{\beta}_q - r \cos \beta_q \cos \phi_q \dot{\theta}) \mathbf{k}_q^* \end{aligned} \quad (\text{C.2})$$

ブレードの運動エネルギーは

$$\begin{aligned} T_B = & \sum_{q=0}^{Q-1} \frac{1}{2} \int_0^R \nu |\mathbf{v}|^2 dr = \sum_{q=0}^{Q-1} \frac{I_B}{2} (\sin^2 \beta_q \sin^2 \phi_q \dot{\theta}^2 \\ & - 2 \sin \beta_q \cos \beta_q \sin \phi_q \dot{\phi} \dot{\theta} + \cos^2 \beta_q \dot{\phi}^2 \\ & + \dot{\beta}_q^2 - 2 \cos \phi_q \dot{\beta}_q \dot{\theta} + \cos^2 \phi_q \dot{\theta}^2) \end{aligned} \quad (\text{C.3})$$

振子の運動エネルギーは

$$T_p = \frac{I_p}{2} \dot{\theta}^2 \quad (\text{C.4})$$

振子の位置エネルギーは

$$U_p = \frac{Wl}{2} \dot{\theta}^2 \quad (\text{C.5})$$

バネに蓄えられる歪エネルギーは

$$U = \sum_{q=0}^{Q-1} \frac{k}{2} \beta_q^2 \quad (\text{C.6})$$

3 自由度 β_q , θ , ϕ に仮想変位 $\delta \beta_q$, $\delta \theta$, $\delta \phi$ が生じた時にブレード上の点に発生する仮想変位 $\delta \mathbf{u}_q$ は、

$$\begin{aligned} \delta \mathbf{u}_q = & (\delta \theta \sin \phi_q - \delta \phi r \cos \beta_q) \mathbf{i}_q^* + (-r \sin \beta_q \delta \beta_q \\ & + \delta \theta \cos \phi_q r \sin \beta_q) \mathbf{j}_q^* + (r \cos \beta_q \\ & \times \delta \beta_q - \delta \theta \cos \phi_q r \cos \beta_q) \mathbf{k}_q^* \end{aligned} \quad (\text{C.7})$$

ブレードに働く空気力を求めるにあたって、揚力成分のみを考えて、二次元準定常理論を用いると、

$$\begin{aligned} F_{Aq} dr = & \frac{1}{2} \rho a c r^2 \dot{\phi}^2 dr \left[\theta_0 + \frac{\theta}{\dot{\phi}} \cos \phi_q - \frac{\dot{\beta}_q}{\dot{\phi}} \right] \\ & \times [-\sin \beta_q \mathbf{i}_q^* + \cos \beta_q \mathbf{k}_q^*] \end{aligned} \quad (\text{C.8})$$

仮想仕事は

$$\delta W = \sum_{q=0}^{Q-1} \int_0^R \mathbf{F}_{Aq} \cdot \delta \mathbf{u}_q dr + [M_Y \mathbf{i} + M_Z \mathbf{k}] \cdot [\delta \theta \mathbf{j} + \delta \phi \mathbf{k}] \quad (\text{C.9})$$

β_q , θ , ϕ について変分をとると

$$Q_{Bq} = \frac{1}{8} \rho a c R^4 \dot{\phi}^2 \left[\theta_0 + \frac{\theta}{\dot{\phi}} \cos \phi_q - \frac{\dot{\beta}_q}{\dot{\phi}} \right] \quad (\text{C.10})$$

$$Q_\theta = -\frac{1}{8} \rho a c R^4 \dot{\phi}^2 \left[\theta_0 + \frac{\theta}{\dot{\phi}} \cos \phi_q - \frac{\dot{\beta}_q}{\dot{\phi}} \right] \cos \phi_q + M_Y \quad (\text{C.11})$$

$$Q_\phi = M_Z \quad (\text{C.12})$$

ラグランジュの方程式は

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T_B}{\partial \dot{\beta}_q} \right) - \frac{\partial T_B}{\partial \beta_q} + \frac{\partial U}{\partial \beta_q} &= Q_{Bq} \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T_B}{\partial \dot{\theta}} \right) + \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T_B}{\partial \dot{\phi}} \right) + \frac{\partial U_q}{\partial \theta} &= Q_\theta \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T_B}{\partial \dot{\phi}} \right) - \frac{\partial T_B}{\partial \phi} &= Q_\phi \end{aligned}$$

具体的に書くと、

$$\begin{aligned} I_B (\ddot{\beta}_q - \ddot{\theta} \cos \phi_q + 2 \dot{\phi} \dot{\theta} \cos^2 \beta_q \sin \phi_q + \dot{\phi}^2 \sin \beta_q \cos \beta_q \\ - \dot{\theta}^2 \sin \beta_q \cos \beta_q \sin^2 \phi_q) \\ - \frac{1}{8} \rho a c R^4 (\theta_0 \dot{\phi}^2 + \dot{\phi} \dot{\theta} \cos \phi_q - \dot{\phi} \dot{\beta}_q) + K \beta_q = 0 \end{aligned} \quad (\text{C.13})$$

$$\begin{aligned} I_p \ddot{\theta} + W l \dot{\theta} - I_B (\sum \ddot{\beta}_q \cos \phi_q - \ddot{\theta} \sum \cos^2 \phi_q \\ + 2 \dot{\phi} \dot{\theta} \sum \cos^2 \beta_q \sin \phi_q \cos \phi_q + \dot{\phi}^2 \sum \sin \beta_q \cos \beta_q \\ \times \cos \phi_q - 2 \dot{\phi} \sum \sin^2 \beta_q \sin \phi_q \dot{\beta}_q - 2 \dot{\theta} \sum \sin \beta_q \\ \times \cos \beta_q \sin^2 \phi_q \dot{\beta}_q - \dot{\theta} \sum \sin^2 \beta_q \sin^2 \phi_q + \dot{\phi} \sum \sin \beta_q \\ \times \cos \beta_q \sin \phi_q) + \frac{1}{8} \rho a c R^4 (\theta_0 \dot{\phi}^2 \sum \cos \phi_q \\ + \dot{\theta} \dot{\phi} \sum \cos^2 \phi_q - \dot{\phi} \sum \dot{\beta}_q \cos \phi_q) = M_Y \end{aligned} \quad (\text{C.14})$$

$$\begin{aligned} I_B (-2 \dot{\phi} \sum \sin \beta_q \cos \beta_q \dot{\beta}_q - 2 \dot{\theta} \sum \dot{\beta}_q \cos^2 \beta_q \sin \phi_q \\ - \ddot{\theta} \sum \sin \beta_q \cos \beta_q \sin \phi_q + \dot{\theta}^2 \sum \cos^2 \beta_q \sin \phi_q \cos \phi_q \\ + \ddot{\phi} \sum \cos^2 \beta_q) = M_Z \end{aligned} \quad (\text{C.15})$$

次いで、ロータのシャフト軸まわりの回転角速度 $\dot{\phi}$ が一定値 Ω である場合について、 β , $\dot{\beta}/\Omega$, $\dot{\theta}/\Omega$, $\ddot{\theta}/\Omega^2$ が微小であるときに、3 次以上の微小量を省略すると、

$$\begin{aligned} T_B = & \frac{I_B}{2} (-2 \Omega \dot{\theta} \sum \beta_q \sin \phi_q + \Omega^2 \sum (1 - \beta_q^2) \\ & + \sum \dot{\beta}_q^2 - 2 \dot{\theta} \sum \dot{\beta}_q \cos \phi_q + \dot{\theta}^2 \sum \cos^2 \phi_q) \end{aligned} \quad (\text{C.16})$$

となり、これを用いると、運動方程式は、

$$\begin{aligned} I_B (\ddot{\beta}_q - \ddot{\theta} \cos \phi_q + 2 \Omega \dot{\theta} \sin \phi_q + \Omega^2 \beta_q) \\ - \frac{1}{8} \rho a c R^4 (\theta_0 \Omega^2 + \Omega \dot{\theta} \cos \phi_q - \Omega \dot{\beta}_q) + K \beta_q = 0 \end{aligned} \quad (\text{C.17})$$

$$\begin{aligned} I_p \ddot{\theta} + W l \dot{\theta} - I_B (\sum \ddot{\beta}_q \cos \phi_q - \ddot{\theta} \sum \cos^2 \phi_q \\ + 2 \Omega \dot{\theta} \sum \sin \phi_q \cos \phi_q + \Omega^2 \sum \beta_q \cos \phi_q) \\ + \frac{1}{8} \rho a c R^4 (\theta_0 \Omega^2 \sum \cos \phi_q + \Omega \dot{\theta} \sum \cos^2 \phi_q \\ - \Omega \sum \dot{\beta}_q \cos \phi_q) = M_Y \end{aligned} \quad (\text{C.18})$$

$$\begin{aligned} I_B (-2 \Omega \sum \beta_q \dot{\beta}_q - 2 \dot{\theta} \sum \dot{\beta}_q \sin \phi_q - \ddot{\theta} \sum \beta_q \sin \phi_q \\ + \dot{\theta}^2 \sum \sin \phi_q \cos \phi_q) = M_Z \end{aligned} \quad (\text{C.19})$$

これらは、先に導いた厳密な運動方程式に於て $\dot{\phi} = \Omega$ とし、且つ 3 次以上の微小量を省略したものと当然のことながら一致する。

付録 D 強制振動について求めた減衰係数

ブレードの枚数 Q が3枚以上で, I_B に比べて I_p が十分大きなロータを考える。このロータに外からピッチングモーメント M_Y とトルク M_Z を加えて, 且つ, $\theta = \bar{\theta} \sin pt$ となるような運動を続けさせる場合を考えよう。付録 A で定義したように, 減衰係数は

$$M_\theta \equiv \frac{-1}{\pi \bar{\theta}^2 p} \int_0^{2\pi/p} M_Y(t) \bar{\theta} dt \quad (D.1)$$

で定められる。ここに $p \equiv \sqrt{WL/I_p}$ である。

(C.17) 式を書きなおして, $r = \rho ac R^4 / I_B$, $C_k = K / I_B \Omega^2$ を用いる

$$\begin{aligned} \ddot{\beta} + \gamma/8 \cdot \Omega \dot{\beta} + (1 + C_k) \Omega^2 \beta &= \ddot{\theta} \cos \phi \\ -2\Omega \dot{\theta} \sin \phi + \gamma/8 \cdot \Omega \dot{\theta} \cos \phi + \gamma/8 \cdot \Omega^2 \theta_0 & \quad (D.2) \end{aligned}$$

とフラッピングの強制振動解は,

$$\begin{aligned} \beta &= B_1 \left\{ -\left(\frac{1}{2} \bar{\theta} p^2 + \Omega \bar{\theta} p\right) \sin(\phi + pt - \lambda_1) \right. \\ &\quad \left. + \frac{r}{16} \Omega \bar{\theta} p \cos(\phi + pt - \lambda_1) \right\} + B_2 \left\{ \left(\frac{1}{2} \bar{\theta} p^2 \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \Omega \bar{\theta} p\right) \sin(\phi - pt - \lambda_2) + \frac{r}{16} \Omega \bar{\theta} p \cos(\phi - pt - \lambda_2) \right\} \\ &\quad + \frac{(\gamma/8) \theta_0}{1 + C_k} \quad (D.3) \end{aligned}$$

ここに

$$B_1 = \frac{1}{\sqrt{\{(1 + C_k) \Omega^2 - (\Omega + p)^2\}^2 + (\gamma/8)^2 \Omega^2 (\Omega + p)^2}} \quad (D.4)$$

$$B_2 = \frac{1}{\sqrt{\{(1 + C_k) \Omega^2 - (\Omega - p)^2\}^2 + (\gamma/8)^2 \Omega^2 (\Omega - p)^2}} \quad (D.5)$$

$$\cos \lambda_1 = \{(1 + C_k) \Omega^2 - (\Omega + p)^2\} B_1,$$

$$\sin \lambda_1 = (\gamma/8) \Omega (\Omega + p) B_1 \quad (D.6)$$

$$\cos \lambda_2 = \{(1 - C_k) \Omega^2 - (\Omega - p)^2\} B_2,$$

$$\sin \lambda_2 = (\gamma/8) \Omega (\Omega - p) B_2 \quad (D.7)$$

(C.18) 式を (D.1) 式に代入すると,

$$\begin{aligned} M_\theta &= \frac{-1}{\pi \bar{\theta}^2 p} \int_0^{2\pi/p} \left\{ \frac{1}{8} \rho ac R^4 (\theta_0 \Omega^2 \sum \cos \phi \right. \\ &\quad \left. + \Omega \dot{\theta} \sum \cos^2 \phi - \Omega \sum \dot{\beta} \cos \phi) \bar{\theta} - I_B (\sum \ddot{\beta} \cos \phi \right. \\ &\quad \left. - \ddot{\theta} \sum \cos^2 \phi + 2\Omega \dot{\theta} \sum \sin \phi \cos \phi \right. \\ &\quad \left. + \Omega^2 \sum \beta \cos \phi) \bar{\theta} \right\} dt \quad (D.8) \end{aligned}$$

(D.8) 式の右辺第1項はブレードに働らく空気力がピッチング軸まわりに発生するモーメントの寄与であり, 右辺第2項はブレードに働らく慣性力がピッチング軸まわりに発生するモーメントの寄与である。(D.8) 式は本文中の (1.22) 式と丁度対応するものである。(D.8) 式に (D.3) 式を代入して計算を実行すると,

$$\begin{aligned} M_\theta &= -\frac{Q}{16} \rho ac R^4 \Omega - \frac{Q}{16} \rho ac R^4 \left[\left\{ \frac{1}{2} (\Omega + p) p \cos \lambda_1 \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + (\Omega + p) \Omega \cos \lambda_1 - \frac{r}{16} (\Omega + p) \Omega \sin \lambda_1 \right\} B_1 \right. \\ &\quad \left. + \left\{ -\frac{1}{2} (\Omega - p) p \cos \lambda_2 + (\Omega - p) \Omega \cos \lambda_2 \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{r}{16} (\Omega - p) \Omega \sin \lambda_2 \right\} B_2 \right] + \frac{Q}{2} I_B \Omega \\ &\quad \times \left[\left\{ -\frac{1}{2} (2\Omega + p) \frac{p^2}{\Omega} \sin \lambda_1 - p(2\Omega + p) \sin \lambda_1 \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{r}{16} p(2\Omega + p) \cos \lambda_1 \right\} B_1 + \left\{ -\frac{1}{2} (2\Omega - p) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \times \frac{p^2}{\Omega} \sin \lambda_2 + p(2\Omega - p) \sin \lambda_2 \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{r}{16} p(2\Omega - p) \cos \lambda_2 \right\} B_2 \right] \quad (D.9) \end{aligned}$$

(D.9) の右辺第1項, 第2項, 第3項は夫々(1.23)式の右辺第1項, 第2項, 第3項と対応する。更に計算を続けると, $p \equiv p/\Omega$ を用いれば,

$$\begin{aligned} M_\theta &= -\frac{Q}{2} C_k I_B \Omega \left\{ \frac{\left(\frac{1}{2} p + 1\right) (\gamma/8) (1 + p) + (\gamma/16) \{(1 + C_k) - (1 + p)^2\}}{\{(1 + C_k) - (1 + p)^2\}^2 + (\gamma/8)^2 (1 + p)^2} \right. \\ &\quad \left. + \frac{(1 - p/2) (\gamma/8) (1 - p) + (\gamma/16) \{(1 + C_k) - (1 - p)^2\}}{\{(1 + C_k) - (1 - p)^2\}^2 + (\gamma/8)^2 (1 - p)^2} \right\} \quad (D.10) \end{aligned}$$

付録 E 自由振動の場合の減衰

$$\lambda_R = \frac{M_\theta}{2I_p} \quad (E.1)$$

ブレードの枚数 Q が3枚以上で, I_B に比べて I_p が十分大きなロータを考える。このロータがピッチングの自由振動をする時に, ピッチングの特性根を求め。特性根の実部が付録 D で求めた M_θ と次式の関係にあることを示すことができる。

ピッチングが自由振動である場合には, ロータに外部からトルク M_Z だけが加えられ, ロータのシャフト軸まわりの回転角速度が一定値 Ω に保たれる。この場合の運動方程式は,

$$I_B (\ddot{\beta}_q - \ddot{\theta} \cos \phi_c + 2\Omega \dot{\theta} \sin \phi_q + \Omega^2 \beta_q)$$

$$-\frac{1}{8}\rho ac R^4(\theta_0\Omega^2 + \Omega\dot{\theta}\cos\psi_q - \Omega\dot{\beta}_q) + K\beta_q = 0 \quad (\text{E.2})$$

$$\begin{aligned} I_p\ddot{\theta} + Wl\dot{\theta} - I_B(\sum\beta_q\cos\psi_q - \dot{\theta}\sum\cos^2\psi_q \\ + 2\Omega\dot{\theta}\sum\sin\psi_q\cos\psi_q + \Omega^2\sum\beta_q\cos\psi_q) \\ + \frac{1}{8}\rho ac R^4(\theta_0\Omega^2\sum\cos\psi_q + \Omega\dot{\theta}\sum\cos^2\psi_q \\ - \Omega\sum\dot{\beta}_q\cos\psi_q) = 0 \end{aligned} \quad (\text{E.3})$$

$$\begin{aligned} I_B(-2\Omega\sum\beta_q\dot{\beta}_q - 2\dot{\theta}\sum\dot{\beta}_q\sin\psi_q - \dot{\theta}\sum\beta_q\sin\psi_q \\ + \dot{\theta}^2\sum\sin\psi_q\cos\psi_q) = M_z \end{aligned} \quad (\text{E.4})$$

実は (E.4) は上述の運動を続ける為外部から加えるべきトルクを規定する式である。

(E.2) と (E.3) は変数 t を $\sin\psi$, $\cos\psi$ の形で係数に含んだ線形の連立微分方程式である。そこで変数変換

$$\beta_q = a_{0(t)} - a_{1(t)}\cos\psi_q - b_{1(t)}\sin\psi_q \quad (\text{E.5})$$

を行なってみる。

$$\begin{aligned} \dot{\beta}_q &= \dot{a}_0 - (\dot{a}_1 + b_1\Omega)\cos\psi_q - (\dot{b}_1 - a_1\Omega)\sin\psi_q \\ \dot{\beta}_q &= \dot{a}_0 - (\dot{a}_1 + 2b_1\Omega - a_1\Omega^2)\cos\psi_q - (\dot{b}_1 - 2a_1\Omega \\ &\quad - b_1\Omega^2)\sin\psi_q \end{aligned}$$

特に $Q \geq 3$ の場合には

$$\sum\cos\psi_q\dot{\beta}_q = -\frac{Q}{2}(\dot{a}_1 + 2b_1\Omega - a_1\Omega^2)$$

$$\sum\cos\psi_q\dot{\beta}_q = -\frac{Q}{2}(\dot{a}_1 + b_1\Omega)$$

$$\sum\cos\psi_q\beta_q = -\frac{Q}{2}a_1$$

(E.2) 式に代入して, $\sin\psi_q$, $\cos\psi_q$ のかかっている項とそうでない項にわけると,

$$\begin{aligned} I_B\ddot{a}_0 + \frac{1}{8}\rho ac R^4\Omega\dot{a}_0 + (I_B\Omega^2 + K)a_0 \\ = \frac{1}{8}\rho ac R^4\Omega^2\theta_0 \end{aligned} \quad (\text{E.6})$$

$$a_1 = A_1 e^{i\Omega t}, \quad b_1 = B_1 e^{i\Omega t}, \quad \theta = \Theta e^{i\Omega t} \quad \text{とおくと,}$$

$$\begin{vmatrix} \lambda^2 + (\gamma/8)\lambda + C_k & 2\lambda + \gamma/8 & \lambda^2 + (\gamma/8)\lambda \\ 2\lambda + \gamma/8 & -(\lambda^2 + (\gamma/8)\lambda + C_k) & 2\lambda \\ \lambda^2 + (\gamma/8)\lambda & 2\lambda + \gamma/8 & (1 + 2L/Q)\lambda^2 + (\gamma/8)\lambda + 2p^2L/Q \end{vmatrix} = 0$$

即ち

$$\begin{vmatrix} \lambda^2 + (\gamma/8)\lambda + C_k & 2\lambda + \gamma/8 & \lambda^2 + (\gamma/8)\lambda \\ 2\lambda + \gamma/8 & -(\lambda^2 + (\gamma/8)\lambda + C_k) & 2\lambda \\ -\kappa & 0 & \lambda^2 + p^2 \end{vmatrix} = 0 \quad (\text{E.14})$$

の根のうち2つは

$$\lambda = \delta \pm (p + \epsilon)i \quad (\text{E.15})$$

である。ここで

$$\kappa \equiv C_k Q / (2L) \quad (\text{E.16})$$

$$\begin{aligned} -I_B(\ddot{a}_1 + 2b_1\Omega - a_1\Omega^2) - \frac{1}{8}\rho ac R^4\Omega(\dot{a}_1 + b_1\Omega) \\ - (I_B\Omega^2 + K)a_1 - I_B\ddot{\theta} - \frac{1}{8}\rho ac R^4\Omega\dot{\theta} = 0 \end{aligned} \quad (\text{E.7})$$

$$\begin{aligned} -I_B(\ddot{b}_1 - 2a_1\Omega - b_1\Omega^2) - \frac{1}{8}\rho ac R^4\Omega(\dot{b}_1 - a_1\Omega) \\ - (I_B\Omega^2 + K)b_1 + 2I_B\Omega\dot{\theta} = 0 \end{aligned} \quad (\text{E.8})$$

(E.3) に代入すると,

$$\begin{aligned} I_p\ddot{\theta} + Wl\dot{\theta} - I_B\left\{-\frac{Q}{2}\ddot{a}_1 + 2b_1\Omega - a_1\Omega^2\right\} - \frac{Q}{2}\ddot{\theta} \\ - \frac{Q}{2}\Omega^2 a_1\left\{+\frac{1}{8}\rho ac R^4\left\{\frac{Q}{2}\Omega\dot{\theta} \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. + \frac{Q}{2}\Omega(\dot{a}_1 + b_1\Omega)\right\}\right\} = 0 \end{aligned} \quad (\text{E.9})$$

$L \equiv I_p/I_B$ を用いて, (E.6), (E.7), (E.8), (E.9) を整理すると,

$$\ddot{a}_0 + \gamma/8\Omega\dot{a}_0 + (1 + C_k)\Omega^2 a_0 = (\gamma/8)\Omega^2\theta_0 \quad (\text{E.10})$$

$$\begin{aligned} \ddot{a}_1 + \gamma/8\Omega\dot{a}_1 + C_k\Omega^2 a_1 + 2\Omega\dot{b}_1 + (\gamma/8)\Omega^2 b_1 \\ + \dot{\theta} + (\gamma/8)\Omega\dot{\theta} = 0 \end{aligned} \quad (\text{E.11})$$

$$\begin{aligned} 2\Omega\dot{a}_1 + (\gamma/8)\Omega^2 a_1 - \dot{b}_1 - (\gamma/8)\Omega\dot{b}_1 - C_k\Omega^2 b_1 \\ + 2\Omega\dot{\theta} = 0 \end{aligned} \quad (\text{E.12})$$

$$\begin{aligned} \ddot{a}_1 + (\gamma/8)\Omega\dot{a}_1 + 2\Omega\dot{b}_1 + (\gamma/8)\Omega^2 b_1 + (1 + 2L/Q)\dot{\theta} \\ + (\gamma/8)\Omega\dot{\theta} + 2p^2L/Q\Omega^2\theta = 0 \end{aligned} \quad (\text{E.13})$$

(E.10) は独立していて, コーキングが $(\gamma/8)(1 + C_k)$ におちつくことを意味している。(E.11), (E.12), (E.13) は定数係数の線形連立微分方程式である。

(E.3) 式はピッチングの運動方程式である。 I_B に比べて I_p 十分大きいので, ピッチング運動は, 周期 $2\pi/p$ のシニョソイダルな運動に近いはずである。(E.11), (E.12), (E.13) から得られる特性方程式の根のうち2つは,

$$\delta\Omega \pm (p + \epsilon)\Omega i$$

と書くことができるはずである。勿論 δ と ϵ は p に比べて十分小さくなる。

は L が十分大きいので微小量である。

(E.15) を (E.14) に代入し, $\kappa, \delta, \varepsilon$ が微小量であると考え、高次の微小量を省略することによって, δ と ε を決定することができる。

$$\delta = \frac{\left\{ -\kappa p(C_k - p^2) + (\gamma/8)^2 p + 4p \right\} [4(C_k - p^2)(\gamma/8)p + 8(\gamma/8)p] + \kappa [(\gamma/8)p^2 - (C_k - p^2)(\gamma/8)]}{[4(C_k - p^2)(\gamma/8)p + 8(\gamma/8)p]^2 + [2\{(C_k - p^2)^2 - (\gamma/8)^2 p^2\} + 2\{(\gamma/8)^2 - 4p^2\}]} \quad (\text{E.17})$$

$$\varepsilon = \frac{\left\{ -\kappa [p(C_k - p^2) + (\gamma/8)^2 p + 4p] [2\{(C_k - p^2)^2 - (\gamma/8)^2 p^2\} + 2\{(\gamma/8)^2 - 4p^2\}] - \kappa [(\gamma/8)p^2] \right\}}{[4(C_k - p^2)(\gamma/8)p + 8(\gamma/8)p]^2 + [2\{(C_k - p^2)^2 - (\gamma/8)^2 p^2\} + 2\{(\gamma/8)^2 - 4p^2\}]} \quad (\text{E.18})$$

(D.10) より

$$\frac{M_\theta}{2I_p \Omega} = \frac{\left\{ -\kappa [(2+p)(\gamma/8)(1+p) + (\gamma/8)\{(1+C_k) - (1+p)^2\}] [\{(1+C_k) - (1-p)^2\}^2 + (\gamma/8)^2(1-p)^2] \right\}}{4[\{1+C_k\} - (1+p)^2]^2 + (\gamma/8)(1+p)^2 [\{(1+C_k) - (1-p)^2\}^2 + (\gamma/8)^2(1-p)^2]} \quad (\text{E.19})$$

(E.17) と (E.19) が一致することを示す。

(E.17) の分母は,

$$\begin{aligned} & 16(C_k - p^2)^2(\gamma/8)^2 p^2 + 64(C_k - p^2)(\gamma/8)^2 p^2 + 64(\gamma/8)^2 p^2 + 4\{(C_k - p^2)^2 - 4p^2\}^2 \\ & + 8\{(C_k - p^2)^2 - 4p^2\}(\gamma/8)^2(1-p^2) + 4(\gamma/8)^4(1-p^2)^2 \\ & = 4\{(C_k - p^2)^2 - 4p^2\}^2 + 4(\gamma/8)^4(1-p)^2 + 8(C_k - p^2)^2(\gamma/8)^2(1+p^2) + 64(C_k - p^2)(\gamma/8)^2 p^2 \\ & + 64(\gamma/8)^2 p^2 - 32p^2(\gamma/8)^2(1-p^2) \end{aligned}$$

(E.19) の分母は

$$\begin{aligned} & 4\{(C_k - p^2)^2 - 4p^2\}^2 + 4\{(C_k - p^2) - 2p\}^2(\gamma/8)^2(1-p)^2 \\ & 4\{(C_k - p^2) + 2p\}^2(\gamma/8)^2(1+p)^2 + 4(\gamma/8)^4(1-p^2)^2 \\ & = 4\{(C_k - p^2)^2 - 4p^2\}^2 + 4(\gamma/8)^4(1-p^2)^2 + 8(C_k - p^2)^2(\gamma/8)^2(1+p^2) + 64(C_k - p^2)p(\gamma/8)^2 p \\ & + 32p^2(\gamma/8)^2(1+p^2) \end{aligned}$$

由って (E.17) と (E.19) の分母は等しい。

(E.17) の分子は

$$\begin{aligned} & -\kappa [4(C_k - p^2)^2(\gamma/8)p^2 + 8(\gamma/8)(C_k - p^2)p^2 + 4(C_k - p^2)(\gamma/8)^3 p^2 + 8(\gamma/8)^3 p^2 + 16(C_k - p^2)(\gamma/8)p^2 \\ & + 32(\gamma/8)p^2 - 2(\gamma/8)p^3(C_k - p^2)^2 + 2(\gamma/8)^3 p^4 - 2(\gamma/8)^3 p^2 + 8(\gamma/8)p^4 + 2(C_k - p^2)^3(\gamma/8) \\ & - 2(\gamma/8)^3 p^2(C_k - p^2) + 2(C_k - p^2)(\gamma/8)^3 - (C_k - p^2)8p^2(\gamma/8) + 4(\gamma/8)(C_k - p^2)^2 \\ & - 4(\gamma/8)^3 p^2 + 4(\gamma/8)^3 - 16(\gamma/8)p^2] \\ & = -\kappa [2(\gamma/8)(C_k - p^2)^3 + (\gamma/8)(C_k - p^2)^2(2p^2 + 4) + (\gamma/8)^3(C_k - p^2)(2 + 2p^2) \\ & + 16(\gamma/8)(C_k - p^2)p^2 + (\gamma/8)^3(2p^4 + 2p^2 + 4) + (\gamma/8)(8p^4 + 16p^2)] \end{aligned}$$

(E.19) の分子は

$$\begin{aligned} & -\kappa [(\gamma/8)(p^2 + p + 2) + (\gamma/8)(C_k - p^2)] [(C_k - p^2)^2 + 4p(C_k - p^2) + (\gamma/8)^2(1-p)^2 + 4p^2] \\ & -\kappa [(\gamma/8)(p^2 - p + 2) + (\gamma/8)(C_k - p^2)] [(C_k - p^2)^2 - 4p(C_k - p^2) + (\gamma/8)^2(1+p)^2 + 4p^2] \\ & = -\kappa [2(\gamma/8)(C_k - p^2)^3 + 2(\gamma/8)(C_k - p^2)^2 + (\gamma/8)8p^2(C_k - p^2) + 2(\gamma/8)^3(p^2 + 2)(1+p^2) \\ & + 4(\gamma/8)^3(-p^2) + 2(\gamma/8)^3(C_k - p^2)(1+p^2) + 8p^2(\gamma/8)(p^2 + 2) + 8p^2(\gamma/8)(C_k - p^2)] \\ & = -\kappa [2(\gamma/8)(C_k - p^2)^3 + (\gamma/8)(C_k - p^2)^2(2p^2 + 4) + (\gamma/8)^3(C_k - p^2)(2 + 2p^2) + 16(\gamma/8)(C_k - p^2)p^2 \\ & + (\gamma/8)^3(2p^4 + 2p^2 + 4) + (\gamma/8)(8p^4 + 16p^2)] \end{aligned}$$

由って (E.17) と (E.19) の分子は等しい。

$$\therefore \frac{M_\theta}{2I_p \Omega} = \delta \quad (\text{E.20})$$

即ち特性方程式の根の実部は $M_\theta/2I_p$ に等しい。

付録 F 強制振動の場合のエネルギーの収支

強制振動（付録D参照）の場合に外部から加えられたモーメント M_Y と M_Z がなす仕事は如何にして消費されるかについて調べてみる。（D.3）で求めたフラッピングを用いて、 $\sum \dot{\beta}_q \cos \phi_q$, $\sum \dot{\beta}_q \cos \phi_q$, $\sum \beta_q \cos \phi_q$, $\sum \beta_q \dot{\beta}_q$, $\sum \dot{\beta}_q \sin \phi_q$, $\sum \beta_q \sin \phi_q$ を計算するといずれも $\sin pt$ と $\cos pt$ の線形結合であることがわかる。従って強制振動の場合は周期 $2\pi/p$ が存在することがわかる。

1 周期 $[0, 2\pi/p]$ の間にピッチングモーメント M_Y がなした仕事を計算する。ピッチングの方程式（C.18）を用いると、

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi/p} M_Y \dot{\theta} dt &= \int_0^{2\pi/p} I_p \ddot{\theta} \dot{\theta} dt + \int_0^{2\pi/p} \omega l \dot{\theta} \dot{\theta} dt - I_B \int_0^{2\pi/p} (\sum \ddot{\beta}_q \cos \phi_q - \ddot{\theta} \sum \cos^2 \phi_q + 2\Omega \dot{\theta} \sum \sin \phi_q \cos \phi_q \\ &\quad + \Omega^2 \sum \beta_q \cos \phi_q) \dot{\theta} dt + \frac{1}{8} \rho a c R^4 \int_0^{2\pi/p} (\theta_0 \Omega^2 \sum \cos \phi_q + \Omega \dot{\theta} \sum \cos^2 \phi_q - \Omega \sum \dot{\beta}_q \cos \phi_q) \dot{\theta} dt \\ &= -\frac{1}{8} \rho a c R^4 \int_0^{2\pi/p} \sum (\theta_0 \Omega^2 + \Omega \dot{\theta} \cos \phi_q - \Omega \dot{\beta}_q) (\dot{\beta}_q - \dot{\theta} \cos \phi_q) dt \\ &\quad - I_B \int_0^{2\pi/p} (\sum \ddot{\beta}_q \cos \phi_q - \ddot{\theta} \sum \cos^2 \phi_q + 2\Omega \dot{\theta} \sum \sin \phi_q \cos \phi_q + \Omega^2 \sum \beta_q \cos \phi_q) \dot{\theta} dt \\ &\quad + \frac{1}{8} \rho a c R^4 \int_0^{2\pi/p} \sum (\theta_0 \Omega^2 + \Omega \dot{\theta} \cos \phi_q - \Omega \dot{\beta}_q) \dot{\beta}_q dt \end{aligned} \quad (F.1)$$

第3項をフラッピングの方程式（C.17）を用いて書きかえると、

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi/p} M_Y \dot{\theta} dt &= -\frac{1}{8} \rho a c R^4 \int_0^{2\pi/p} \sum (\theta_0 \Omega^2 + \Omega \dot{\theta} \cos \phi_q - \Omega \dot{\beta}_q) (\dot{\beta}_q - \dot{\theta} \cos \phi_q) dt \\ &\quad - I_B \int_0^{2\pi/p} \sum \ddot{\beta}_q \cos \phi_q - \ddot{\theta} \sum \cos^2 \phi_q + 2\Omega \dot{\theta} \sum \sin \phi_q \cos \phi_q + \Omega^2 \sum \beta_q \cos \phi_q) \dot{\theta} dt \\ &\quad + I_B \int_0^{2\pi/p} \sum (\ddot{\beta}_q - \ddot{\theta} \cos \phi_q + 2\Omega \dot{\theta} \sin \phi_q + \Omega^2 \beta_q) \dot{\beta}_q dt + K \int_0^{2\pi/p} \sum \dot{\beta}_q \dot{\beta}_q dt \end{aligned} \quad (F.2)$$

1 周期 $[0, 2\pi/p]$ の間にトルクのなした仕事を計算する。トルクの方程式（C.19）を用いると、

$$\int_0^{2\pi/p} M_Z \Omega dt = I_B \int_0^{2\pi/p} (-2\Omega \sum \beta_q \dot{\beta}_q - 2\dot{\theta} \sum \dot{\beta}_q \sin \phi_q - \ddot{\theta} \sum \beta_q \sin \phi_q + \dot{\theta}^2 \sum \sin \phi_q \cos \phi_q) dt \quad (F.3)$$

所が、（C.16）によって、

$$\begin{aligned} &-I_B \int_0^{2\pi/p} (\sum \ddot{\beta}_q \cos \phi_q - \ddot{\theta} \sum \cos^2 \phi_q + 2\Omega \dot{\theta} \sum \sin \phi_q \cos \phi_q + \Omega^2 \sum \beta_q \cos \phi_q) \dot{\theta} dt \\ &+ I_B \int_0^{2\pi/p} \sum (\ddot{\beta}_q - \ddot{\theta} \cos \phi_q + 2\Omega \dot{\theta} \sin \phi_q + \Omega^2 \beta_q) \dot{\beta}_q dt \\ &+ I_B \int_0^{2\pi/p} (-2\Omega \sum \beta_q \dot{\beta}_q - 2\dot{\theta} \sum \dot{\beta}_q \sin \phi_q - \ddot{\theta} \sum \beta_q \sin \phi_q + \dot{\theta}^2 \sum \sin \phi_q \cos \phi_q) dt \\ &= \int_0^{2\pi/p} \frac{dT_B}{dt} dt = 0 \end{aligned} \quad (F.4)$$

（C.6）より

$$K \int_0^{2\pi/p} \sum \beta_q \dot{\beta}_q = \int_0^{2\pi/p} \frac{dU}{dt} dt = 0 \quad (F.5)$$

$$\therefore \int_0^{2\pi/p} M_Y \dot{\theta} dt + \int_0^{2\pi/p} M_Z \Omega dt = -\frac{1}{8} \rho a c R^4 \int_0^{2\pi/p} \sum (\theta_0 \Omega^2 + \Omega \dot{\theta} \cos \phi_q - \Omega \dot{\beta}_q) (\dot{\beta}_q - \dot{\theta} \cos \phi_q) dt \quad (F.6)$$

即ち外力のなした仕事はブレードが空気を動かして消費する仕事に等しいことがわかる。又（F.1）と（F.6）より

$$\begin{aligned} &-I_B \int_0^{2\pi/p} (\sum \ddot{\beta}_q \cos \phi_q - \ddot{\theta} \sum \cos^2 \phi_q + 2\Omega \dot{\theta} \sum \sin \phi_q \cos \phi_q + \Omega^2 \sum \beta_q \cos \phi_q) \dot{\theta} dt \\ &= -\frac{1}{8} \rho a c R^4 \int_0^{2\pi/p} \sum (\theta_0 \Omega^2 + \Omega \dot{\theta} \cos \phi_q - \Omega \dot{\beta}_q) \dot{\beta}_q dt - \int_0^{2\pi/p} M_Z \Omega dt \end{aligned} \quad (F.7)$$

ピッチダンピングの表示式 (D.8) にあらわれた, ブレードに働らく慣性力に起因する項は, ブレードがフラッピングに際して空気を動かして消費する仕事

$$-\frac{1}{8}\rho ac R^4 \int_0^{2\pi/p} \sum (\theta_0 \Omega^2 + \Omega \dot{\theta} \cos \phi_q - \Omega \dot{\beta}_q) \dot{\beta}_q dt$$

からトルクのなす仕事 $\int_0^{2\pi/p} M_z \Omega dt$ を引いたものであることがわかる。

付録 G 自由振動の場合のエネルギーの収支

ピッチングは特性方程式 (E.14) の根によって規定され周期をもつ。ピッチングの 1 周期 $[0, \tau]$ の間に, トルク M_z のなした仕事を計算すると,

$$\int_0^\tau M_z \Omega dt = I_B \int_0^\tau (-2\Omega \sum \beta_q \dot{\beta}_q - 2\dot{\theta} \sum \dot{\beta}_q \sin \phi_q - \ddot{\theta} \sum \beta_q \sin \phi_q + \dot{\theta} \sum \sin \phi_q \cos \phi_q) dt \quad (G.1)$$

$[0, \tau]$ の間におこる振子の全エネルギーの変化は,

$$(T_{p(\tau)} - T_{p(0)}) + (U_{p(\tau)} - U_{p(0)}) = \int_0^\tau I_p \ddot{\theta} \dot{\theta} dt + \int_0^\tau W l \dot{\theta} \dot{\theta} dt$$

ピッチングの方程式 (E.3) を用いて書きなおすと,

$$\begin{aligned} (T_{p(\tau)} - T_{p(0)}) + (U_{p(\tau)} - U_{p(0)}) &= I_B \int_0^\tau (\sum \ddot{\beta}_q \cos \phi_q - \ddot{\theta} \sum \cos^2 \phi_q + 2\Omega \dot{\theta} \sum \sin \phi_q \cos \phi_q + \Omega^2 \sum \beta_q \cos \phi_q) \dot{\theta} dt \\ &\quad - \frac{1}{8} \rho ac R^4 \int_0^\tau (\theta_0 \Omega^2 \sum \cos \phi_q + \Omega \dot{\theta} \sum \cos^2 \phi_q - \Omega \sum \dot{\beta}_q \cos \phi_q) \dot{\theta} dt \\ &= I_B \int_0^\tau (\sum \ddot{\beta}_q \cos \phi_q - \ddot{\theta} \sum \cos^2 \phi_q + 2\Omega \dot{\theta} \sum \sin \phi_q \cos \phi_q + \Omega^2 \sum \beta_q \cos \phi_q) \dot{\theta} dt \\ &\quad + \frac{1}{8} \rho ac R^4 \int_0^\tau \sum (\theta_0 \Omega^2 + \Omega \dot{\theta} \cos \phi_q - \Omega \dot{\beta}_q) (\dot{\beta}_q - \dot{\theta} \cos \phi_q) dt \\ &\quad - \frac{1}{8} \rho ac R^4 \int_0^\tau \sum (\theta_0 \Omega^2 + \Omega \dot{\theta} \cos \phi_q - \Omega \dot{\beta}_q) \dot{\beta}_q dt \end{aligned} \quad (G.2)$$

第 3 項をフラッピング方程式 (C.17) を用いて書きかえると,

$$\begin{aligned} (T_{p(\tau)} - T_{p(0)}) + (U_{p(\tau)} - U_{p(0)}) &= \frac{1}{8} \rho ac R^4 \int_0^\tau \sum (\theta_0 \Omega^2 + \Omega \dot{\theta} \cos \phi_q - \Omega \dot{\beta}_q) (\dot{\beta}_q - \dot{\theta} \cos \phi_q) dt \\ &\quad + I_B \int_0^\tau (\sum \ddot{\beta}_q \cos \phi_q - \ddot{\theta} \sum \cos^2 \phi_q + 2\Omega \dot{\theta} \sum \sin \phi_q \cos \phi_q + \Omega^2 \sum \beta_q \cos \phi_q) \dot{\theta} dt \\ &\quad - I_B \int_0^\tau \sum (\ddot{\beta}_q - \ddot{\theta} \cos \phi_q + 2\Omega \dot{\theta} \sin \phi_q + \Omega^2 \beta_q) \dot{\beta}_q dt - K \int_0^\tau \sum \beta_q \dot{\beta}_q dt \end{aligned}$$

所が (C.16) によって

$$\begin{aligned} &I_B \int_0^\tau (\sum \ddot{\beta}_q \cos \phi_q - \ddot{\theta} \sum \cos^2 \phi_q + 2\Omega \dot{\theta} \sum \sin \phi_q \cos \phi_q + \Omega^2 \sum \beta_q \cos \phi_q) \dot{\theta} dt \\ &- I_B \int_0^\tau \sum (\ddot{\beta}_q - \ddot{\theta} \cos \phi_q + 2\Omega \dot{\theta} \sin \phi_q + \Omega^2 \beta_q) \dot{\beta}_q dt \\ &- I_B \int_0^\tau (-2\Omega \sum \beta_q \dot{\beta}_q - 2\dot{\theta} \sum \dot{\beta}_q \sin \phi_q - \ddot{\theta} \sum \beta_q \sin \phi_q + \dot{\theta}^2 \sum \sin \phi_q \cos \phi_q) dt \\ &= - \int_0^\tau \frac{dT_B}{dt} dt - K \int_0^{2\pi} \sum \beta_q \dot{\beta}_q = - \int_0^\tau \frac{dU}{dt} dt \end{aligned}$$

$$\therefore (T_{p(\tau)} - T_{p(0)}) + (U_{p(\tau)} - U_{p(0)}) + (T_{B(\tau)} - T_{B(0)}) + (U_{(\tau)} - U_{(0)})$$

$$= \frac{1}{8} \rho ac R^4 \int_0^\tau \sum (\theta_0 \Omega^2 + \Omega \dot{\theta} \cos \phi_q - \Omega \dot{\beta}_q) (\dot{\beta}_q - \dot{\theta} \cos \phi_q) dt + \int_0^\tau M_z \Omega dt \quad (G.3)$$

即ち系の全エネルギーの変化は外力のなした仕事に等しい。(G.2) と (G.3) より,

$$-I_B \int_0^\tau (\sum \ddot{\beta}_q \cos \phi_q - \ddot{\theta} \sum \cos^2 \phi_q + 2\Omega \dot{\theta} \sum \sin \phi_q \cos \phi_q + \Omega^2 \sum \beta_q \cos \phi_q) \dot{\theta} dt = (T_{B(\tau)} - T_{B(0)}) + (U_{(\tau)} - U_{(0)})$$

$$-\int_0^{\tau} M_z \Omega dt - \frac{1}{8} \rho a c R^4 \int_0^{\tau} \sum (\theta_0 \Omega^2 + \Omega \dot{\theta} \cos \psi_q - \Omega \dot{\beta}_q) \dot{\beta}_q dt \quad (\text{G.4})$$

即ち $-I_B \int_0^{\tau} (\sum \dot{\beta}_q \cos \psi_q - \dot{\theta} \sum \cos \psi_q + 2\Omega \dot{\theta} \sum \sin \psi_q \cos \psi_q + \Omega^2 \sum \beta_q \cos \psi_q) \dot{\theta} dt$ は、ブレードがフラッピングに際して空気を動かして消費する仕事から、トルクのなす仕事と、ブレード部分のもつ全エネルギーの減少分 $(T_{B(0)} - T_{B(\tau)}) + (U_{(0)} - U_{(\tau)})$ を引いたものに等しい。

付録 H ロータの回転速度の変動について

(1.23) 式によって求めたピッチダンピングはロータの回転速度が一定値 Ω に保たれているという仮定の下で導いたものである。しかし、このような運動を維持する為にはトルク M_z をモータに供給しなければならない。モータによってトルク M_z が加えられず、回転角速度が変動するとして、その大きさはどの程度かについてふれておく。(C.19) 式に (D.3) 式を代入して計算を行なうと、

$$\begin{aligned} M_z = & QI_B \bar{\theta}^2 p^2 \Omega^4 B_1 B_2 \{ 2p [(r/8)^2 + 1 - (p/2)^2] \sin(2pt - \lambda_1 + \lambda_2) + (\gamma/8) p^2 \cos(2pt - \lambda_1 + \lambda_2) \} \\ & + QI_B \bar{\theta}^2 p^2 \Omega^2 B_1 \left\{ -\frac{1}{2} \left[(1+p/2)(1+2p) \sin(2pt - \lambda_1) - \frac{\gamma}{16} (1+2p) \cos(2pt - \lambda_1) \right] \right\} \\ & + QI_B \bar{\theta}^2 p^2 \Omega^2 B_2 \left\{ -\frac{1}{2} \left[(1-p/2)(1-2p) \sin(2pt + \lambda_2) + \frac{\gamma}{16} (1-2p) \cos(2pt + \lambda_2) \right] \right\} \\ & + QI_B \bar{\theta}^2 p^2 \Omega^2 B_1 \left\{ \frac{1}{2} \left[\left(1 + \frac{p}{2}\right) \sin \lambda_1 + \frac{\gamma}{16} \cos \lambda_1 \right] \right\} + QI_B \bar{\theta}^2 p^2 \Omega^2 B_2 \left\{ \frac{1}{2} \left[\left(1 - \frac{p}{2}\right) \sin \lambda_2 + \frac{\gamma}{16} \cos \lambda_2 \right] \right\} \end{aligned} \quad (\text{H.1})$$

$\Omega^4 B_1 B_2$, $\Omega^2 B_1$, $B_2 \Omega^2$, が夫々 1 程度であり, $\gamma/8$ は 1 より小さく, p が 0.2 程度であるから, M_z は $QI_B \bar{\theta}^2 p^2$ 程度である。実験に於てはモータに付加される電圧が一定に保たれるようになっているので, ロータがピッチングを行なう時に Ω は若干変動する。仮に Ω が $\Omega - \Delta\Omega$ に減少すると, モータの発生するトルクが増すほかに, ロータの空力的抵抗によって消費されるトルクが減少し, Ω の変動を抑制する。モータの発生するトルクの増分を考慮しない時にさえ,

$$\frac{\Delta\Omega}{\Omega} = \frac{QI_B \bar{\theta}^2 p^2}{2C_Q \pi \rho R^5 \Omega^2} \doteq \frac{1}{10^3} \quad (\text{H.2})$$

実際はモータの発生するトルクが増加するので, Ω の変動はなお小さくなる。

- | | | |
|---------|---|------------------------|
| TR-249 | 一般化 Newton-Raphson 法の計算機容量問題に対する改良最適化アルゴリズム
Modified Optimization Algorithm for Computer Storage Problems in Generalized Newton-Raphson Method | 1971年10月 志 甫 徹 |
| TR-250 | はりの大変形解析
Large Deflection of Cantilever Beams | 1971年10月 多田保夫, 日下和夫 |
| TR-251 | 対称スピニング衛星のニューテーション運動による慣性力の場とそのニューテーションダンパへの応用
Inertial Force Field Due to Nutational Motion of Spinning Axi-Symmetric Satellite and Its Application to Nutation Damper | 1971年11月 村上 力, 狼 嘉 彰 |
| TR-252T | A Study of Subsonic Two-Dimensional Wall-Interference Effects in a Perforated Wind Tunnel with Particular Reference to the NAL 2m×2m Transonic Wind Tunnel Inapplicability of the Conventional Boundary Condition | 1971年12月 Masao EBIHARA |
| TR-253 | 圧縮性流れにおける翼型抗力の計算
A Calculation of Profile Drag of Airfoils in Compressible Flow | 1971年11月 石田洋治 |
| TR-254 | 翼と不連続境界との干渉について
Interference Between Wing and Surface of Velocity Discontinuity | 1971年11月 犬丸矩夫 |
| TR-255 | 地球の重力の作用下にある人工衛星の運動に関する研究
The Study on the Motion of an Artificial Satellite in the Earth's Gravitational Field | 1971年12月 武内澄夫, 松島弘一 |

航空宇宙技術研究所報告256号

昭和46年11月発行

発行所 航空宇宙技術研究所
東京都調布市深大寺町1880
電話武蔵野三鷹(0422)47-5911(大代表) ㊞182

印刷所 株式会社 東京プレス
東京都板橋区桜川 2-27-12
