

航空宇宙技術研究所報告

TECHNICAL REPORT OF NATIONAL AEROSPACE LABORATORY

TR-380

対称スピン衛星の軸方向ジェットによるスピン軸方向
制御と制御中におけるスピン軸の挙動について*

村 上 力 ・ 狼 嘉 彰 ・ 中 島 厚

1974 年 8 月

航空宇宙技術研究所
NATIONAL AEROSPACE LABORATORY

目 次

1. まえがき	1
記 号	2
2. 剛体の回転運動に関する予備知識	2
3. 制御原理	3
4. ジェットのタイミング決定法	4
4.1 大円コース法	5
4.2 ラムライン法(等角コース法)	6
4.2.1 メルカートル図法	6
4.2.2 スピン軸方向の熱的許容範囲	7
4.2.3 ラムライン法の長所	7
4.2.4 ラムライン法のタイミング決定法	7
4.2.5 ラムラインの経路長	8
4.3 1回のジェットによる変向角($\Delta\tau$)	9
5. スピン軸の挙動	9
5.1 大円法の場合	9
5.1.1 ニューティションのビート現象	11
5.2 ラムライン法の場合	11
5.3 ジェットがインパルスでない場合	13
6. シミュレーション例	14
例1 ビート模様	15
例2 ラムラインと大円コースの比較	15
7. あとがき	17
引用文献	17
付 録	19

対称スピン衛星の軸方向ジェットによるスピン軸方向 制御と制御中におけるスピン軸の挙動について*

村 上 力** 狼 嘉 彰** 中 島 厚**

Spin Axis Control of an Axi-Symmetric Satellite Using an Axial Gas Jet and Spin Axis Behavior During Control

by Chikara MURAKAMI, Yoshiaki OHKAMI
and Atsushi NAKAJIMA

ABSTRACT

There are two main methods of spin axis control; the Rhumb Line Method and the Great Circle Method. In this paper, both methods are discussed and the ways of determining the jet firing time are also described. Spin axis behavior during reorientation maneuver is analyzed, and it is shown that its pattern represents a sort of beat phenomena. To clarify the influence of a non-impulsive jet on nutational behavior of the spin axis, the authors propose a method of replacing the jet by an equivalent impulsive jet. This method provides a powerful tool to analyze the spin axis behavior during reorientation maneuver.

Finally, the computer simulation results show that the Rhumb Line Method using a sun sensor as a jet timing reference is practically by far superior to the Great Circle Method.

1. まえがき

大半のスピン衛星はガスジェットによってスピン軸の方向を変えるが、とくにアポジモータを噴くためのスピン軸方向の変更と、アポジモータ噴射後にスピン軸を軌道面の法線方向に平行に変更する場合は、100 deg 前後の変更となり、これらをReorientation Maneuver (以下RMと略称)と称している。RMはなるべく速やかに終了する必要があるため、ガスジェットをパルス

状にスピン周期ごとに続けざまに噴いてスピン軸を変向する。従って当然ニューテーションが発生するが、このニューテーションの大きさは、姿勢決定、ジェットの大きさの決定、後述する慣性モーメント比の決定、ニューテーションダンパの設計などに重要な関係を有する。そのため、RM中のスピン軸の挙動を熟知しておく必要がある。RMのやり方には各種の提案があるが、その代表的なものには：(i) 2インパルス法^{1,2)}と称してニューテーションを二発目のインパルスで打消して姿勢変更をする方法、(ii) 慣性モーメント比を1.5にしてニューテーションの発生を押さえながら姿勢変更をする方

* 昭和49年5月31日 受付

** 宇宙研究グループ

法⁸⁾, (iii) 大円コース法, (iv) ラムライン法,⁴⁾ (v) Sch-miederの方法,⁵⁾ (vi) Porcelli 等の方法,⁶⁾ などがある。(i)の方法はガスジェットを2組必要としたり, 1組の場合にはタイミングの待ち時間が長いなどで実用化されず, (ii)も慣性モーメント比が1.5に限定され, しかもこのような大きな数値は軌道投入後に何らかの重量物を展開しなければ実現困難であるために実用例を聞いていない。(v)は最後のジェット噴射終了時にニューティションをゼロまたはほぼゼロに収める方法であるが, 姿勢センサとタイミングの関係や燃料消費に多少の難点があると思われる。(vi)は慣性モーメント比が1よりほかに小さいロケットの制御に主眼を置いてあるために, 目標近傍でスピン軸の変向とニューティションの低減の両動作を併用した面白い方法であるが, 目標近傍以前のやり方は本質的には(iii)または(iv)と同様である。(iii)は基本的方法であり, しかも最も実用的な(iv)にも関係しているので, 本論文では主としてこれら(iii), (iv)について述べる。

記 号

$\vec{D}_0, \vec{D}_1, \vec{D}_2, \dots$ 各インパルスジェット噴射時の角運動量ベクトルの位置ベクトル

$\vec{f}_0, \vec{f}_1, \vec{f}_2, \dots$ 各インパルスジェット噴射時のスピン軸の位置ベクトル

f : 判別式 $= (\vec{I} \times \vec{F}) \cdot \vec{S}$

f_i : 判別式 $= (\vec{I} \times \vec{S}) \cdot \vec{F}$

\vec{f}_i : ジェット噴射開始時のスピン軸の位置ベクトル

\vec{f}_t : ジェット噴射終了時のスピン軸の位置ベクトル

\vec{F} : 目標方向の単位ベクトル

\vec{H} : 衛星の全角運動量ベクトル $= I_z \omega_z \vec{k} + I_\perp \vec{\omega}_\perp$

H_1 : スピン軸と直角方向の角運動量 $= I_\perp \omega_\perp$

H_2 : スピン軸方向の角運動量 $= I_z \omega_z$

H_0 : 衛星の全角運動量の初期値

$\Delta \vec{H}$: ジェットによる \vec{H} の増分

\vec{I} : 初期方向単位ベクトル

I_x, I_y, I_z : それぞれ x, y, z 軸の慣性モーメント

I_\perp : 対称衛星において $= I_x = I_y$

$\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$: それぞれ x, y, z 軸方向の単位ベクトル

L : ラムラインの経路長

\vec{N} : 北極方向の単位ベクトル

n : ジェット噴射回数

R : \vec{H}/H_0 が慣性座標または衛星座標に対して画く円弧の半径

\vec{S} : 太陽方向の単位ベクトル

t_j : ジェット噴射時間 $= \alpha / \omega_z$

t_v : 基準時刻からジェット噴射時刻迄の待時間 (タ

イミング時間)

\vec{T} : ジェットによるトルク

\vec{T}_0 : インパルストルクの時間積分値

x, y, z 軸 : 衛星座標系, z 軸はスピン軸

X, Y, Z 軸 : 赤道座標系, X 軸は春分点, Z 軸は北極方向

α : ジェット噴射のスピン角

β : 大円からのラムラインのズレ角

γ : 慣性モーメント比 $= I_z / I_\perp$

$\delta(t)$: デルタ関数

η : 弦長と弧長の比

η_n : 有限のパルス巾をインパルスに置き換えた時のニューティションに及ぼす効率

θ : ニューティション角 $= \tan^{-1}(H/H_z)$

または北極距離 (赤緯の余角)

θ_{max} : 最大ニューティション角

ν : ラムラインと子午線の交角

ν° : 太陽方向に対する目標方向の幾何学的方位角

ν_t : 噴射タイミングの時間に対応するスピン角
 $= t_v \cdot \omega_z$

τ : 必要修正角 (大円コース法による経路長)

$\Delta \tau$: 1回のインパルスによる移動角

τ_{si} : 太陽と初期値との間の大円弧長

τ_{sf} : 太陽と目標値との間の大円弧長

ϕ : $= (r-1) 2\pi$

$\vec{\phi}$: 慣性空間に対するニューティション角速度ベクトル

ϕ : 赤経 (経度)

ϕ_i : $= (r-1) \omega_z t_j$

$\vec{\omega}$: 衛星の角速度ベクトル $= \omega_x \vec{j} + \omega_y \vec{j} + \omega_z \vec{k}$

$\vec{\omega}_\perp$: xy 平面内の衛星の角速度ベクトル成分

$= \omega_x \vec{j} + \omega_y \vec{j}$

$\vec{\omega}$: 衛星座標から見たニューティション角速度ベクトル

RM : Reorientation Maneuver

上添字 j は $(j-1)$ 番目を, G は幾何学的量を表わす。

下添字 s, i, f はそれぞれ $\vec{S}, \vec{I}, \vec{F}$ の量を示し, L は太陽を北極とする場合を表わす。

2. 剛体の回転運動に関する予備知識

衛星を剛体とし, その重心 O を通る直交3軸を慣性主軸を選んで x, y および z 軸とし, z 軸をスピン軸とする。また, 各軸方向の単位ベクトルをそれぞれ \vec{i}, \vec{j} および \vec{k} とする。各軸まわりの慣性モーメント I_x, I_y および I_z のうち, I_x と I_y は相等しく (対称衛星) これ

を I_{\perp} とする。衛星の角速度 $\vec{\omega}$ の 3 軸成分を ω_x, ω_y および ω_z とする。外力のない状態では衛星の角運動量ベクトル $\vec{H} (= I_z \omega_z \vec{k} + I_{\perp} \vec{\omega}_{\perp})$, ただし $\vec{\omega}_{\perp} = \omega_x \vec{i} + \omega_y \vec{j}$ は慣性空間に対して不動であり, 対称衛星のスピン軸すなわち z 軸は \vec{H} まわりに円錐運動 (ニューティション) をし, $\vec{\omega}$ も円錐運動をする。⁷⁾ \vec{H} , $\vec{\omega}$ および \vec{k} はすべて同一平面内にあり, 慣性モーメント比 $\gamma \equiv I_z / I_{\perp} > 1$ ならば \vec{H} は $\vec{\omega}$ と \vec{k} にはさまれ, $\gamma < 1$ ならば $\vec{\omega}$ が \vec{H} と \vec{k} にはさまれる。 $\gamma > 1$ の場合の円錐運動のベクトル図は図1のようになる。この図においては

$$H_{\perp} \equiv I_{\perp} \omega_{\perp}$$

$$H_z \equiv I_z \omega_z$$

$$\theta = \tan^{-1}(H_{\perp}/H_z)$$

である。いま, $\vec{\omega}$ を \vec{H} 方向と $z(\vec{k})$ 方向の成分に分解し, それぞれ $\dot{\phi}$ および $\dot{\Omega}$ とすると, 図から

$$\dot{\phi} = \omega_{\perp} / \sin \theta$$

$$\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{H_{\perp}}{H_z} = \frac{I_{\perp} \omega_{\perp}}{I_z \omega_z} = \frac{\omega_{\perp}}{\gamma \omega_z}$$

$$\therefore \dot{\phi} = \gamma \omega_z / \cos \theta \quad (1)$$

$$\dot{\phi} \cos \theta - \dot{\Omega} = \omega_z$$

$$\therefore \dot{\Omega} = (\gamma - 1) \omega_z \quad (2)$$

$\dot{\phi}$ はスピン軸が, 慣性空間に固定された \vec{H} 軸まわりに円錐運動 (ニューティション) するときの角速度, つまり慣性空間から見たニューティション角速度である。他方, $\dot{\Omega}$ はスピン軸の慣性空間に対する角速度ではなく, スピン軸と \vec{H} 軸で構成する平面を基準にとった角速度である。この平面は \vec{H} 軸を回転軸として $\dot{\phi}$ の回転速度で慣性空間に対して回転し, スピン軸に対しては $\dot{\phi} \cos \theta = \gamma \omega_z$ の

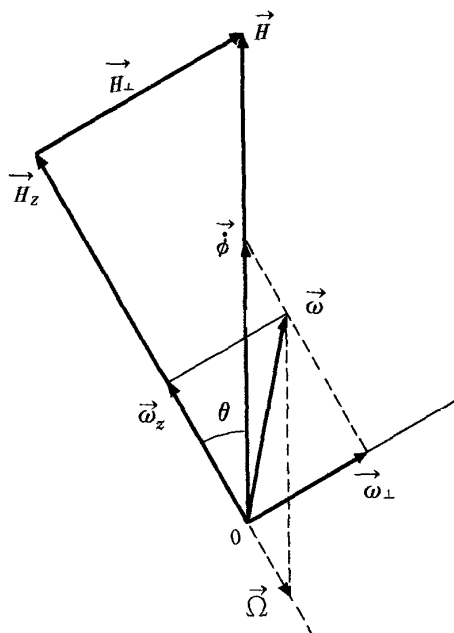


図1 ニューティション角速度の説明図

成分を有する。これと(2)式の一 $\dot{\Omega}$ とを合成したものが当然ながら ω_z になる。 $\dot{\Omega}$ はまた機体座標から見たニューティション角速度であり, $\gamma > 1$ ならば $\dot{\phi}$ と逆符号, $\gamma < 1$ ならば同符号であることに留意すべきである。なお, $\gamma = 1$ ならば $\dot{\Omega} = 0$ となって \vec{H} 軸がスピン軸になってニューティションは存在しない。本論文ではニューティション角 θ は微小であるものとして解析を進める。従って(1)式は

$$\dot{\phi} \approx \gamma \omega_z \quad (1')$$

となり, 1 回スピンしている間に円錐運動は γ 回の回転をすることがわかる。

3. 制御原理

ガスジェットによって発生するトルクを \vec{T} とし, これをインパルスとすれば

$$\vec{T} = \vec{T}_0 \delta(t) \quad (3)$$

ただし, T_0 はインパルスの積分値または大きさを表わす。衛星の角運動量 \vec{H} の慣性空間に対する変化率はジェットによって印加されるトルク \vec{T} に等しいから

$$\frac{d\vec{H}}{dt} = \vec{T}_0 \delta(t) \quad (4)$$

両辺を積分して

$$\vec{H} - \vec{H}_0 = \Delta\vec{H} = \vec{T}_0 \quad (5)$$

ただし $\Delta\vec{H}$ はジェットによる \vec{H} の増分で $\Delta H \ll H_0$ とする。すなわち図2に示すように \vec{T}_0 によって \vec{H} は初期の \vec{H}_0 に $\Delta\vec{H}$ だけ加わって $\Delta\tau \equiv \Delta H / H_0$ だけ方向を変えて新しい \vec{H} に瞬間的に変る。ただし $\vec{H}_0 \perp \vec{T}_0$ つまり後述するように, 本論文ではジェットによって発生するトルクがスピン軸に直交する場合 (axial jet) だけを論ずる。ところで衛星は慣性を有するからスピン軸は瞬間的にこの新

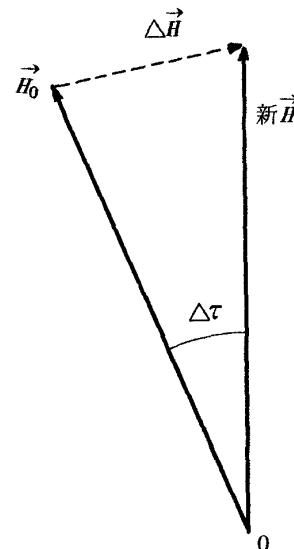


図2 ジェットトルクによる角運動量ベクトルの変化

しい \vec{H} に一致することではなく、この \vec{H} を軸とする円錐運動（ニューティション）を開始する。安定な衛星（ $\gamma > 1$ ）ならばニューティションダンパによってスピン軸はこの新 \vec{H} にスパイラル状に漸近する。⁸⁾また、衛星に搭載したセンサから衛星の姿勢を検出する場合も、通常は太陽および地球センサを使う関係上、衛星がニューティションをしている場合には瞬間的スピン軸方向よりも時間平均的スピン軸方向が地上局で算出される。⁹⁾ところで \vec{H} は前述のようにスピン軸が画く円錐の中心線であるから、スピン軸の平均方向とも云える。ガスジェット \vec{T} によって \vec{H} を変えることはいわばスピン軸の平均方向を変えることになるから、 \vec{H} 方向がスピン軸の R.M. に於ける最終目標方向になるように $\Delta\vec{H}$ を加えるべきであり、それには \vec{T} を発生するタイミングを適正に決定することが必要となる。

スピン軸方向の変化を表現するには、衛星の重心を中心とする単位球面を考え、この球面とスピン軸や \vec{H} との交点の軌跡を調べるのが便利である。 \vec{H} がこの単位球面に画く軌跡が大円である場合が後述する大円コース法である。 \vec{H} の軌跡に沿っての長さは $\Delta\vec{H}$ の回数に比例するので（ T_0 は毎回等しいとする）、ガスジェットの消費そのものをも表現することになる。大円コース法は \vec{H} の初期方向（ \vec{H}_0 ）と、目標方向（ \vec{H}_T ）との間を大円に沿って移動するから、この経路は最短であるために燃料消費が最小であり、解析も割合に単純である。併し、太陽とか地球などの天体の存在方向をスピンで検出して基準時刻を発生し、これをもとにジェットのタイミングパルスを発生する通常のやり方では、大円コース法は後述するように一般的にタイミングが毎回異なる欠点がある。基準時刻は航海法でいえば北極方向の検出に相当し、タイミング時刻は基準方向からの衛星の回転角（スピン角）に相当するから、航海法でいう北方（または子午線方向）を基準にとった方位角に相当する。ラムライン（Rhumb Line）法は航海法では軌跡が子午線に等角に交わり続けるので、例えば磁気コンパスが一定値になる方向に進むのであるが、衛星の場合には基準時刻に対してタイミング時刻が常に一定である場合を指す。一般的に後者は前者（大円コース法）に一致せず、経路が長くなるのでそれだけ燃料の消費は増大する。

4. ジェットのタイミング決定法

以下の解析においては慣性座標系として赤道座標系を採用する（原点は地球中心から衛星重心に平行移動をする）。これは春分点方向をX軸により、北極方向をZ軸とし、X、Zに直交するY軸を右手系を構成するように

選ぶ。XY平面は赤道面に平行である。この座標系に対する任意の方向は赤経と赤緯で表現するが、赤経を ϕ とし、赤緯の余角（北極距離ともいう）を θ とする。初期、目標および太陽の方向の単位ベクトル \vec{T} 、 \vec{F} 、 \vec{S} に対してそれぞれ (ϕ_i, θ_i) 、 (ϕ_f, θ_f) 、 (ϕ_s, θ_s) のように小文字の下添字を用いた記号で表現するものとする。

次にタイミングの基準として本論文では太陽方向を採用する。この基準方向は地球中心でも他の天体でも同じことであるから一般性は失われない。衛星に搭載する太陽センサは通常、スピン軸を含む平面内に取付けられたスリットから受光し、もう一つの異なる取付角度のスリットからも受光して両者の時間差から太陽方向に対するスピン軸方向を算定する。⁹⁾ 本論文では前者のスリットからの受光瞬間、すなわちこのスリット面を含む衛星の子午面が太陽を含んだ瞬間を基準時刻にとる。簡単のため、このスリット面は衛星のxz平面のうち、+x軸方向にあり、ジェットノズルはy軸上にあってトルクは+x軸方向成分しか持たないものとする。従って基準時刻にジェットをインパルス状に噴けば、 $\Delta\vec{H}$ は \vec{H} を太陽方向 \vec{S} の方向に近づけることになる。センサのスリットとジェットの取付けの相対位置（角度）がいま述べたものと異なる場合には、異なった角度をスピン角速度で割って得られた時間だけ補正すれば事足りる。図3は本論文における基準太陽センサとジェットノズルの取付け関係を示したものである。

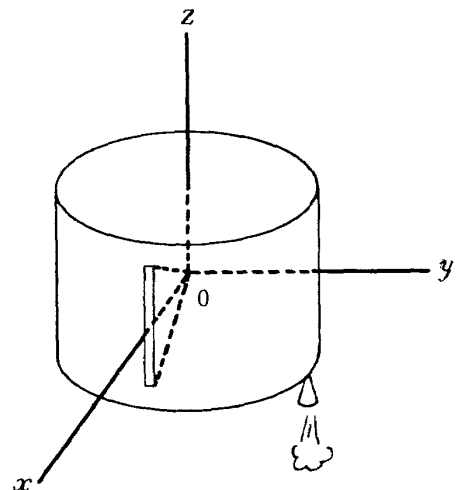


図3 衛星モデル（ジェットノズルと基準太陽センサの取付け位置）

まず必要修正角 τ を求める。必要修正角とは \vec{T} と \vec{F} の両方向の成す角で、前述の単位球では \vec{T} と \vec{F} のそれぞれの先端が球面上にあり、この両者を大円で結んだ大円弧長となる。北極方向（Z方向）が球面と交わる点を \vec{N} と

して \vec{N} , \vec{I} および \vec{F} が構成する球面三角形 (図4 参照) について余弦定理を適用すると

$$\begin{aligned} \cos \tau &= \cos \theta_i \cos \theta_f + \sin \theta_i \sin \theta_f \cos (\phi_i - \phi_f) \\ \therefore \tau &= \text{Cos}^{-1} [\cos \theta_i \cos \theta_f + \sin \theta_i \sin \theta_f \cos (\phi_i - \phi_f)] \\ 0 &\leq \tau \leq \pi \end{aligned} \quad (6)$$

大円コースの場合には \vec{F} がこの大円弧に沿って移動するから, この τ をジェット1回当りの修正量 (または移動角) $\Delta \tau$ で割ったものが大円コースの場合の必要なジェット噴射回数となる。

4.1 大円コース法

まず太陽方向に対する目標方向の幾何学的方位角 ν° を求める。すなわち $\angle SIF = \nu^\circ$ において図5の球面三角形 SIF に余弦定理を適用すると

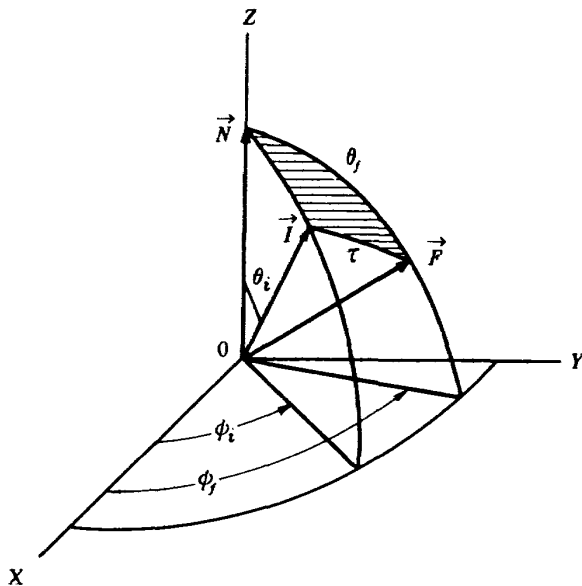


図4 \vec{N} , \vec{I} , \vec{F} の角度関係

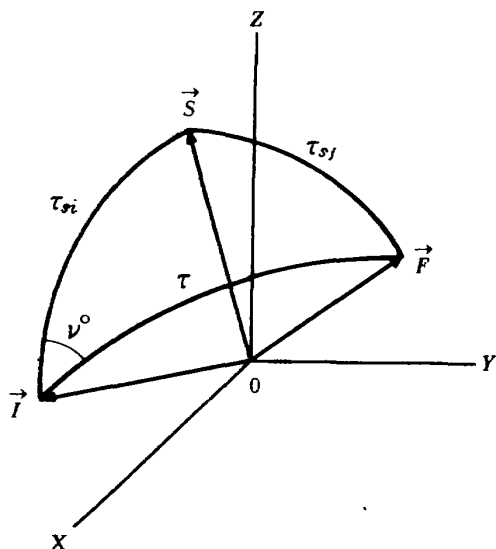


図5 \vec{S} , \vec{I} , \vec{F} の角度関係

$$\tau_{si} = \text{Cos}^{-1} [\cos \theta_s \cos \theta_i + \sin \theta_s \sin \theta_i \cos (\phi_s - \phi_i)] \quad (7)$$

$$\tau_{sf} = \text{Cos}^{-1} [\cos \theta_s \cos \theta_f + \sin \theta_s \sin \theta_f \cos (\phi_s - \phi_f)] \quad (8)$$

$$\nu^\circ = \text{Cos}^{-1} \left[\frac{\cos \tau_{sf} - \cos \tau \cos \tau_{si}}{\sin \tau \cdot \sin \tau_{si}} \right] \quad (9)$$

ν° は最初のジェットに対する方位角であり, 第2発目以降の角度とは大円法では一般に等しくない。 ν° は幾何学的な角度であるが, 噴射タイミングの時間に対応する角度 ν_t はセンサのスリットが \vec{S} を検出してから, このスリットがスピンをする方向に回転して \vec{F} を含むまでの時間 t_s に相当する。 $t_s \cdot \omega_z = \nu_t$ の関係にあるから, 例えば図5の場合は明らかに $\nu_t = 360^\circ - \nu^\circ$ である。同図で \vec{S} と \vec{F} が入れ換ったとすれば $\nu_t = \nu^\circ$ となる。この判定は $\nu^\circ \approx 0, \pi$ として次のようにする: $\vec{I} \times \vec{F}$ は \vec{I} と \vec{F} とで構成する平面の法線ベクトルを表わす。 \vec{S} のこの法線ベクトルの方向成分が正か負かを判定すれば, \vec{S} の先端が \vec{I} と \vec{F} で構成する平面のどちら側にあるかが判明することになるから

$$(\vec{I} \times \vec{F}) \cdot \vec{S} = f \quad (10)$$

とにおいて

$$f > 0 \quad \text{なら} \quad \nu_t = 2\pi - \nu^\circ \quad (11')$$

$$f < 0 \quad \text{なら} \quad \nu_t = \nu^\circ \quad (12)$$

となる。 $f = 0$ の場合, すなわち $\nu^\circ = 0$ または π のときには図6のように(a), (b)および(c)の三通りが考えられる。

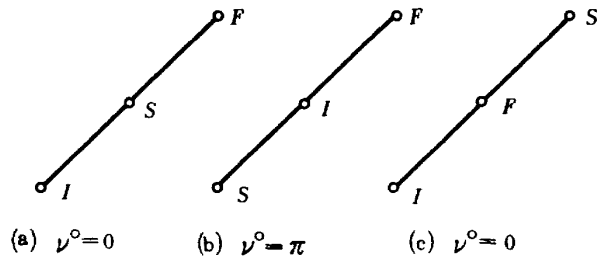


図6 \vec{S} , \vec{I} , \vec{F} が同一平面に含まれる場合の ν°

\vec{S} はスピン軸方向と一致すると基準時刻が発生できなくなるので, (a)は不可能である。(b), (c)の場合でも \vec{S} は \vec{I} や \vec{F} に一致することはない。(b), (c)を検討すると結局は(11), (12)式のどちらでもよいわけであるが, $\nu_t = 0$ は後述するように実際的にはコマンドが不可能であるから(11)式にした方が実用上無難である。即ち

$$f \geq 0 \quad \text{なら} \quad \nu_t = 2\pi - \nu^\circ \quad (11')$$

$$f < 0 \quad \text{なら} \quad \nu_t = \nu^\circ \quad (12')$$

ν_t も ν° と同様に大円コース法では一般的に毎回異なった値をとる。スピン軸変向中は, 後述するようにニュートーションが発生するのでスピン軸方向が連続的には計測不可能であるから, n 回噴射するとして, 初期値 $\vec{I} = \vec{H}_0 / H_0$ だけは与えられるが, それ以外の $(n-1)$ 個の

角運動量ベクトル方向の単位ベクトル $\vec{I}_1, \vec{I}_2, \vec{I}_3, \dots, \vec{I}_{n-1}$ は大円上に $\Delta\tau$ きざみに算出せざるを得ない。いわば開ループ方式またはプログラム方式の制御に頼ることになる。スピン軸の実際方向を計算して ν_i を計算することは可能ではあるが、式が極めて煩雑になることと、後述するようにニューティションは割合に微小であることから、スピン軸方向を角運動量ベクトル方向で近似しても誤差は殆ど無視できる。

(9)式においては τ_{sf} だけは毎回不変である（地球公転は無視）が、 τ と τ_{si} は噴射毎に \vec{I} が移動するから毎回異なる。(j-1) 番目のタイミング角 ν_i^j を求めることにする。図 7 から直ちに

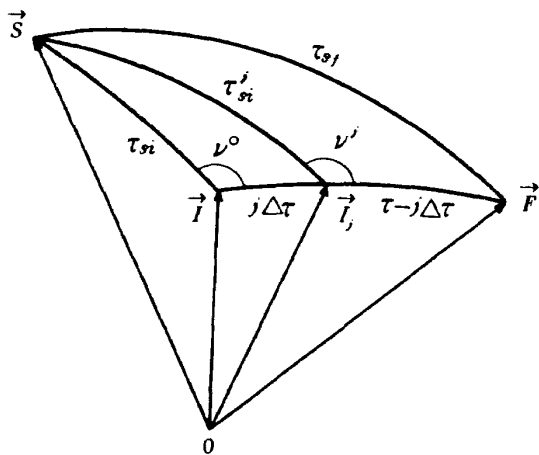


図 7 (j-1) 番目のジェット噴射時の角度関係

$$\cos \tau_{si}^j = \cos \tau_{si} \cos(j\Delta\tau) + \sin \tau_{si} \sin(j\Delta\tau) \cos \nu^0 \quad (13)$$

これを(9)式に代入して ν^0 の代りに ν^j を求めるのであるが、その際に τ は $\tau - j\Delta\tau$ に変わり、 τ_{si} は τ_{si}^j に置き換えて次式を得る：

$$\nu^j = \cos^{-1} \left[\frac{\cos \tau_{sf} - \cos(\tau - j\Delta\tau) \cos \tau_{si}^j}{\sin(\tau - j\Delta\tau) \sin \tau_{si}^j} \right] \quad (14)$$

$$0 \leq \nu^j \leq \pi, \quad j=0, 1, 2, \dots, n-1$$

タイミング角 ν_i^j は (11'), (12') 式に従って決定される。大円法の計算手順を要約すると：

(1) $\vec{I}(\phi_i, \theta_i)$, $\vec{F}(\phi_f, \theta_f)$, $\vec{S}(\phi_s, \theta_s)$ を与える。実際には \vec{I} はトラッキング局などで搭載センサのテレメータで得られた信号の処理から推定され、 \vec{F} は打上げ前に予め決定されたアポジモータ噴射方向として与えられ（多少変更されることもある）、 \vec{S} は天体運行であるから時刻さえ与えられれば直ちに算出可能な値である。

(2) 必要修正角量 τ の計算 (6) 式による。

(3) 必要パルス数 $n = \lceil \tau / \Delta\tau \rceil$

(4) τ_{sf} (8) 式), τ_{si}^j (13) 式) から ν^j (14) 式) を求め (11'), (12') 式から ν_i^j を算出する。

この ν_i^j の値を ω_z で割った値 t_{ν}^j がインパルスジェットの噴射タイミングを与える。この t_{ν}^j ($j=0, 1, \dots, n-1$) は地上の計算機にメモリされ、コマンドとして地上から送信するのであるが、実際にはセンサとジェットノズルの相対的取付角、ジェットの作動遅れ、電波の往復に要する伝送時間なども考慮に入れる必要がある。

4.2 ラムライン法 (等角コース法)

ラムライン (rhumb line) 法は loxodrome 法とも呼ばれ、¹⁰⁾ 航海法で広く利用されている。この方式は球面上で基準方向 (例えば子午線) に対して等角度で進行する単純なものであるが、この進路はメルカトル図法で面くと直線になる特徴がある。本法の特徴を知る上からメルカトル図法について若干の予備知識を必要とする。

4.2.1 メルカトル図法

地球儀などからよくわかるように、緯度線は地球の自転 (スピン) 軸に直交する平面内にあり、極から赤道を経て他極へ球面上を一定の距離に画かれている。一方、経度線または子午線はスピン軸を含む平面内にあり、緯度線と直交している。緯度線の間隔は経度線に沿って一定であるのに対し、経度線は緯度線に沿って一定ではあるが、極に近づくにつれて間隔は狭くなる。従って地図を平面上に画く場合に経度と緯度を直交させて画き、しかも等間隔にすれば赤道付近はほぼ正確に画かれるが、赤道から離れるにつれて経度線の間隔が球面上のものよりも拡大される。つまり地形が南北にすづまりの形になる。これをすづまりにしないように、経度線間隔の拡大率と同率に緯度線の間隔を拡大する方式がメルカトル図法である。

経度を ϕ 、北極距離 (緯度の余角) を θ とし、メルカトル図の東西を x 、南北を y で表現すると

$$x = \phi \quad (15)$$

これによって x は $1/\sin \theta$ だけ拡大されたことになるから y も同じ拡大を施すと

$$y = - \int_{\pi/2}^{\theta} \frac{d\theta}{\sin \theta} = - \ln \left(\tan \frac{\theta}{2} \right) \quad (16)$$

で与えられる。この補正によって地球儀上の任意の微小な地形はメルカトル図上で完全に相似形に写像されることになる。従って子午線と一定角で交わる曲線、即ちラムラインはメルカトル図では直線になることは自明である。それに反して大円は子午線や赤道のような特別のもの以外は直線にはならない。

航海ではセンサの基準が北極の場合が多いから、メルカトル図がラムライン法に直接使用可能である。併

し衛星のスピン軸方向制御では、本論文のように太陽方向を基準方向としているから、太陽方向を極とする球面についてメルカトル図に変換する必要がある。太陽を極にとれば（以下、これを北極に選ぶ）、北極距離が太陽方向とスピン軸方向との間の角度を表わすことになる。スピン軸が赤道にあることは、太陽から衛星への照射角が衛星のスピン軸に直角になることを意味する。

4.2.2 スピン軸方向の熱的許容範囲

衛星は一般的に熱設計上、太陽照射が禁じられる場所があり、アポジモータもその一例である。スピン衛星ではドラム形のものが多く、その円筒面に太陽電池が貼り付けられているものが多い。以上の理由などから、衛星に対する太陽光の照射角はスピン軸に直角であることが最も望ましいことではあるが、実用上、直角の前後に $\pm 30^\circ$ とか $\pm 23.5^\circ$ 程度の許容範囲が与えられている。従って、 $\pm 23.5^\circ$ が許容範囲であれば、太陽方向を北極とする新しいメルカトル図上での衛星のスピン軸の許容領域は赤道を含む南北両回帰線以内ということになる。タイミングの基準が太陽以外の天体であれば、その天体を極とするメルカトル図を画けば、ラムラインはやはり直線にはなるが、熱的許容範囲はもはや南北両回帰線のような単純な直線では表現されない。この点からすれば太陽をタイミングの基準に選ぶことは甚だ有利である。

衛星は地上から打上げられるときに、最終段ロケットの切り離しの時と、アポジモータ噴射時の姿勢が前述の許容領域に収まるように打上げの日時を選ぶ。この条件（ほかに、姿勢センサなどの条件）を満足する日時のことを launch window と称している。従って launch window の条件を満足していることは、前述の太陽を北極とする球面上では、ロケットの切り離しとアポジモータの噴射時の二つの姿勢は完全に南北両回帰線内に収まっていることになる。問題はその途中およびアポジモータ噴射後にスピン軸を軌道面に直角に立てる場合などでスピン軸を変向する際に、この熱的許容領域をハミ出すかどうかということである。ラムライン法ではメルカトル図上で直線になるから、初期と最終の姿勢が許容領域内にあれば、その途中ではニュートーションが無視できれば絶対にこの領域をはみ出すことはない。大円法では途中でこの条件を破ることがあり得る（後述するシミュレーション例で示す）。この領域内の二点を、大円法で結んで、しかも途中でこの領域をはみ出さない経路長は、ラムライン経路長と殆ど差がないことは容易に推察できる。

4.2.3 ラムライン法の長所

ラムライン法は前述のように熱的制約に対して有する

長所の他に、タイミングの補正が容易であるという長所も持っている。以下、タイミング補正法に関して若干述べる：

実際に姿勢変更する場合に、ジェット推力の時間的波形、むだ時間の推定誤差、実際のコマンドの伝送時間などを含む総合的誤差によって、姿勢変更は目標方向からずれ、必ずしも理論上のラムラインに沿うとは限らない。そのために、姿勢変更は一気に目標迄変更せずに、3回位に分割しているのが実情のようである。¹¹⁾ 従って姿勢変更は全体の経路長の $1/3$ とか $1/2$ 位の処で一応中断し、その時の姿勢を計測して前述のメルカトル図上に記入し、初期点と結ぶ。その結んだ直線がいわば実際の経路で、これと理論上の経路とのズレによってタイミングの補正が容易にできる。同時に実際の経路長と噴射回数から1回当りの経路長： $\Delta\tau$ の補正も可能である。以上の補正はラムラインが直線になる特徴を生かしたためである。

以上を要約してラムライン法の長所を列記すると次のようになる：

- 1) 等タイミングなので地上からのコマンドが容易
- 2) 熱的制約条件を途中で破る心配がない
- 3) メルカトル図から、タイミングの補正が容易

4.2.4 ラムライン法のタイミング決定法

図8において \vec{S} を北極とした場合の北極距離 θ_i と経度 ϕ_i を、 \vec{I} と \vec{F} について求める。

$$\theta_{ii} = \tau_{si} = \text{Cos}^{-1}[\cos \theta_s \cos \theta_i + \sin \theta_s \sin \theta_i \cos(\phi_s - \phi_i)] \quad ((7)\text{式より})$$

$$\theta_{if} = \tau_{sf} = \text{Cos}^{-1}[\cos \theta_s \cos \theta_f + \sin \theta_s \sin \theta_f \cos(\phi_s - \phi_f)] \quad ((8)\text{式より})$$

$$\phi_{ii} = 0 \quad (\phi_i \text{の基準にとる})$$

$$\phi_{ii}^c = \text{Cos}^{-1}[(\cos \tau - \cos \tau_{si} \cos \tau_{sf}) / (\sin \tau_{si} \sin \tau_{sf})] \quad (17)$$

ただし ϕ_{if}^c は幾何学的大きさを表わし、 $0 \leq \phi_{if}^c \leq \pi$ で

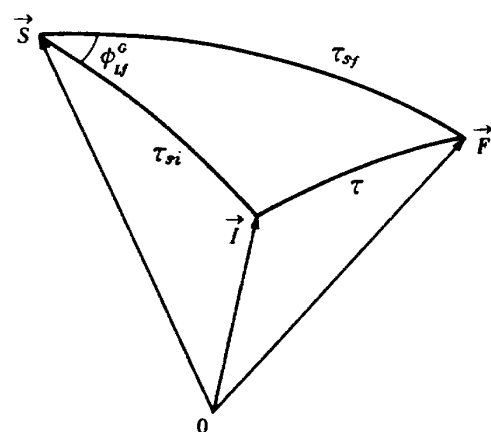


図8 \vec{S} を北極とする場合の角度関係

ある。実際の経度 ϕ_{lf} には東経と西経があり、東経を正符号、西経を負符号で表現するものとして、その符号の判定法を以下に略述する。

\vec{S} が北極で \vec{I} を含む経度線を経度の基準としているから、 \vec{S} と \vec{I} とで造られる平面のどちら側に \vec{F} が存在するかによって符号が決定される。いま

$$f_L = (\vec{I} \times \vec{S}) \cdot \vec{F} \quad (18)$$

とおけば、 f_L の符号によって ϕ_{lf}^c の符号は次のように決定されることは容易にわかる：

$$f_L > 0 \quad \text{なら} \quad \phi_{lf} = -\phi_{lf}^c \quad (19)$$

$$f_L < 0 \quad \text{なら} \quad \phi_{lf} = \phi_{lf}^c \quad (20)$$

$$f_L = 0 \quad \text{なら}$$

$$\left. \begin{array}{l} \tau_{si} + \tau_{sf} + \tau = 2\pi \\ \text{または} \quad \tau \geq \tau_{si}, \tau_{sf} \end{array} \right\} \text{のとき} \quad \phi_{lf} = \pi \quad (21)$$

$$\text{上記の両条件以外のとき} \quad \phi_{lf} = 0 \quad (22)$$

(21), (22) 式の誘導は付録 I に示した。

以上で太陽方向を北極とする球面上での北極距離 θ_L と経度 ϕ_L が求められたので、次にこれらを (15), (16) 式に従ってメルカトル図に写像する：

$$x_i = \phi_{li} = 0 \quad (23)$$

$$y_i = -\ln \left(\tan \frac{\theta_{li}}{2} \right) \quad (24)$$

$$x_f = \phi_{lf} \quad (25)$$

$$y_f = -\ln \left(\tan \frac{\theta_{lf}}{2} \right) \quad (26)$$

この 2 点 (x_i, y_i) , (x_f, y_f) を結ぶ直線が子午線に対する角度 ν_L^c は

$$\nu_L^c = \tan^{-1} \frac{x_f}{y_f - y_i} = \tan^{-1} \frac{\phi_{lf}}{\ln \left(\frac{\tan \frac{\theta_{li}}{2}}{\tan \frac{\theta_{lf}}{2}} \right)} \quad (27)$$

$|\nu_L^c| < \pi$ (\tan^{-1} は計算機の ATAN2 を使う)* ν_L^c は主値であるから、子午線の北極方向から反時計方向に見た実用上の角度 ν_L は図 9 から明らかなように、 F が西半球にあれば $|\nu_L^c|$ がそのまま ν_L になり、 F が東半球の場合にはセンサのスキャン方向 (スピン方向、この場合は反時計) の関係から大回りをする必要になり、 ν_L は $2\pi - |\nu_L^c|$ で与えられる。これをまとめると：

$$\phi_{lf} \geq 0 \quad \text{なら} \quad \nu_L = 2\pi - |\nu_L^c| \quad (28)$$

$$\phi_{lf} < 0 \quad \text{なら} \quad \nu_L = |\nu_L^c| \quad (29)$$

この ν_L はラムライン上ではどこでも一定であるから、毎回この ν_L に相当するタイミング ν_L / ω_z が基準時刻に対する噴射時刻になる。

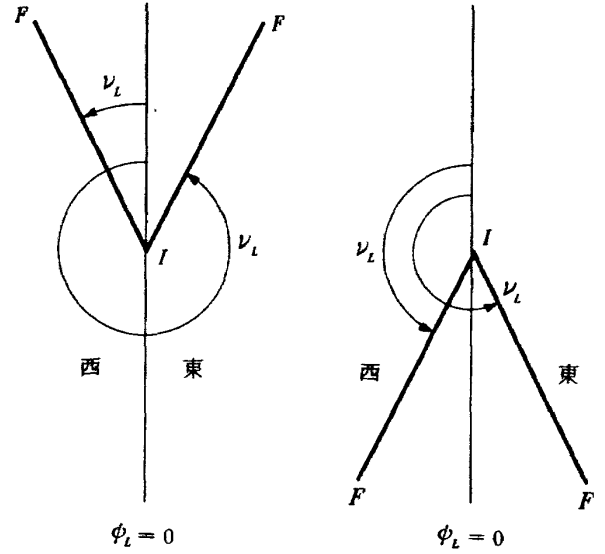


図 9 タイミング角 ν_L の説明図

4.2.5 ラムラインの経路長

ラムラインの経路長は一般に大円の経路長 (角) τ よりも小さくはない。ジェット噴射回数 n_L もこれに従って増大する傾向にある。

メルカトル図においては、図の拡大率は経度 x には無関係で、緯度 y のみに依存する。ラムラインの経路長を L とすると

$$1) \quad |\nu_L| \neq \pi/2 \quad \text{の場合}$$

$$dL = \sin \theta_L ds$$

$$ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = |\sec \nu_L| \cdot |dy|$$

$$dy = -\operatorname{cosec} \theta_L d\theta_L$$

$$\therefore dL = |\sec \nu_L| \int_{\theta_{lf}}^{\theta_{li}} \sin \theta_L \cdot \operatorname{cosec} \theta_L \cdot d\theta_L$$

$$\therefore L = |(\theta_{li} - \theta_{lf}) \sec \nu_L| \quad (30)$$

$$2) \quad |\nu_L| = \pi/2 \quad \text{の場合}$$

このときは同緯度線上であるから

$$L = |\phi_{lf}| \sin \theta_L \quad (31)$$

必要なジェット噴射回数 n_L は

$$n_L = L / \Delta \tau \quad (32)$$

以上のラムライン法に関する計算手順を要約すると次のようになる：

- 1) $\vec{I}(\phi_i, \theta_i)$, $\vec{F}(\phi_f, \theta_f)$, $\vec{S}(\phi_s, \theta_s)$ を与える。
- 2) \vec{S} を北極とし、 \vec{S} と \vec{I} で作られる子午線を経度のゼロとする新しい単位球上の経度 (ϕ_L), 北極距離 (θ_L) に \vec{I} , \vec{F} を (7), (8), (17)~(22) 式によって変換する。もちろん \vec{S} は (0, 0) でよい。

* (27) 式の主値 $|\nu_L^c| < \pi/2$ であるが、計算機の ATAN2 を使うことによって、分子、分母の正負に応じて $|\nu_L^c| < \pi$ までが主値となりうる。

3) \vec{F} , \vec{T} をメルカトル図上に画く。それには $\vec{T} = (x_i=0, y_i)$, $\vec{F} = (x_f, y_i)$ を (24)~(26) 式から求める。

4) 噴射タイミング角 ν_i の計算: 3) の図から分度器で求めてもよいし, (27)~(29) 式から求めてもよい。

5) ラムライン経路長 L を (30), (31) 式から求め, 必要なジェット回数 n_i を (32) 式から求める。

実際の噴射タイミングは, 大円の場合と同様の時間遅れを勘案して決定する必要のあることは当然である。

4.3 1回のジェットによる変向角 ($\Delta\tau$)

前述まではジェットはインパルスとしてタイミングを計算してきたが, 実際にはインパルスと見做せないことが多い。即ちジェット噴射中に無限小でないかなり大きなスピン角を経過する。このスピン角は $30^\circ \sim 90^\circ$ にも達する。このように噴射時間を割に大きくする主な理由は:

1) スピン角が小さい (噴射時間が短い) と大きな噴射速度 (I_{sp}) が得られない: 効率が悪い。

2) RM のような大変向に必要なジェット回数が極めて大きくなり, 時間がかかることになる。

3) ジェット回数が大きいと電磁弁の寿命を縮める。スピン中にはジェットノズルの回転に従ってトルク方向は慣性空間に対してスピン速度で回転することになる (ニューティションは微小として無視) から, $\Delta\vec{H}/H_0$ は円弧を画くことになる。1 スピン周期だけ噴射を続けると $\Delta\vec{H}/H_0$ は円を画いて, 円を閉じた瞬間で噴射を終了することになる。従ってこの場合には \vec{H} は元の \vec{H} に戻ったことになるから, 結果的にはジェットを噴かない場合に等しく, 変向には全く寄与しない。任意のスピン角 α だけ噴射すれば, \vec{H}/H_0 は角度 α の円弧を画く。変向は最終の \vec{H} で与えられるから, 変向に寄与するのは図 10 に示すように弧長ではなく弦長である。弧長は燃料消費量にそのまま比例する。 \vec{H}/H_0 が画く円弧の半径 R に対して

$$R \frac{d\alpha}{dt} = R\omega_z = \frac{d}{dt} \left(\frac{H}{H_0} \right)$$

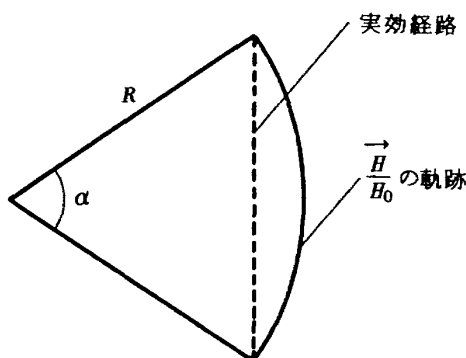


図 10 有限時間ジェットによる角運動量ベクトルの経路

$$\frac{dH}{dt} = T \quad \text{であるから}$$

$$R = \frac{T}{\omega_z H_0} \quad (33)$$

以上から弦長と弧長を求めると:

$$\text{弦長} = 2R \sin \frac{\alpha}{2} = \frac{2T}{\omega_z H_0} \sin \frac{\alpha}{2} \quad (34)$$

$$\text{弧長} = R\alpha = \frac{T\alpha}{\omega_z H_0} \quad (35)$$

変向の効率を η とすると

$$\eta = \frac{\text{弦長}}{\text{弧長}} = \frac{\sin \frac{\alpha}{2}}{\alpha/2} \quad (36)$$

$\alpha = 90^\circ$ では $\eta = 0.90$, $\alpha = 60^\circ$ では $\eta = 0.955$ となって損失は意外に少ない。結局 1 回の噴射による実効的変向角 $\Delta\tau$ は (34) 式に等しく

$$\Delta\tau = \frac{2T}{\omega_z H_0} \sin \frac{\alpha}{2} \quad (37)$$

で与えられるから, 必要なジェット噴射回数は大円法ならば (6) 式の T を, ラムライン法ならば (30), (31) 式の L を (37) 式の $\Delta\tau$ で割って得られた数に近い整数となる。

5. スピン軸の挙動

ジェットを噴射すると第 2 章で述べたように, 角運動量ベクトル \vec{H} とスピン軸は一般的に一致しなくなるから, 当然ニューティションが発生する。この章ではスピン軸方向制御中にどのようなニューティションになるかを解析する。

ここでは仮定としてガスジェットはインパルス噴射とする。インパルスでない場合, 即ち有限のスピン角で噴射する場合もインパルスで置換えられる方法はあるが¹²⁾, これに関しては後述する。

5.1 大円法の場合

大円法では \vec{H} は大円上を移動するが, スピン軸は \vec{H} のまわりを大小の円錐を画きながら移動する。ニューティションが微小 (円錐が細い) と仮定すると, スピン軸は大円コースの近傍から大きく離れることはない。大円コースに沿った単位球面上の細長い球面の一部を真直に伸ばして平面で近似し, 大円コースを実軸にとり \vec{H} の出発点に相当するコースの出発点を原点を選ぶ。原点から実軸に直角に虚軸をとって \vec{H}/H_0 の経路やスピン軸の経路を複素平面上で表示する Schmiieder¹³⁾ の方式を採用する。

1 回のインパルス噴射による \vec{H} の変化分 $\Delta\vec{H}$ による \vec{H} の角度変化は図 2 に示したように $\Delta\tau (= \Delta H/H_0)$ である。 \vec{H}/H_0 を実軸に沿って移動するのが大円法であるから, 当然ながらこの場合のトルク方向は正の実軸方向で

あり、スピニング中にトルク方向が正の実軸方向になった瞬間毎に（1 スピンに1回のチャンスがある）トルクを発生することによって \vec{H}/H_0 は $\Delta\tau$ ずつ目標に近づくことになる。

スピン軸が \vec{H} をまわる慣性空間から見たニューティン角速度 $\dot{\phi}$ は (1), (1') 式から

$$\dot{\phi} = \gamma \omega_z / \cos \theta \approx \gamma \omega_z \quad (\gamma = I_z / I)$$

で与えられる。安定な衛星 ($\gamma > 1$) では1回スピニングをする間にニューティン角は1回以上の γ 回することになる。即ち $\phi = (\gamma - 1)2\pi$ だけ余分に回る。この動作は毎回のジェットでも行なわれる。つまりジェットを噴き終ってから1回ニューティン角を ϕ だけニューティン角した瞬間に1回だけスピニングをしたことになり、トルク方向が再び正の実軸方向に向く。この関係を前述の複素平面上で表現すると、原点 \vec{D}_0 においてスピン軸は \vec{H} に一致しているものとして（つまり \vec{D}_0 にある）、 $\vec{D}_1, \vec{D}_2, \dots, \vec{D}_n$ がジェットを1, 2, ..., n 回噴射したあとの \vec{H}/H_0 の位置を表わす。スピン軸位置を \vec{f} で表現すると \vec{f}_0 は初期位置 (\vec{D}_0) で、 $\vec{f}_1, \vec{f}_2, \dots, \vec{f}_{n-1}$ は2, 3, ..., n 回目のジェット噴射時の位置を表わす（図11）。具体的に云えば、 \vec{D}_0 と \vec{f}_0 は初期点であるから一致するものとし、トルクが正の実軸方向を向いた瞬間に

ジェット噴射し、 \vec{H}/H_0 は \vec{D}_0 から \vec{D}_1 に瞬間的に移動し（ $\vec{D}_1 - \vec{D}_0 = \Delta\tau$ ）、 \vec{D}_1 を中心とし $\vec{D}_1\vec{f}_0$ を半径とするニューティン角が発生する。このニューティン角はスピン軸 f が1回転と ϕ だけ \vec{D}_1 を回転して \vec{f}_1 点に到達した瞬間に1スピンしたことになり、トルク方向が再び正の実軸方向に向く。その瞬間に第2回のジェットを噴射して \vec{D}_1 から \vec{D}_2 に \vec{H}/H_0 は再び $\Delta\tau$ だけ移動し、今度は \vec{D}_2 を中心に $\vec{D}_2\vec{f}_1$ を半径とするニューティン角に切り変わる。 \vec{f} が \vec{f}_1 から1回転と ϕ だけ回転して \vec{f}_2 に到達した瞬間に3回目のジェットを噴射して \vec{H}/H_0 は \vec{D}_2 から \vec{D}_3 に移動し、 \vec{f} は $\vec{D}_3\vec{f}_2$ を半径とする円周上のニューティン角に切り変わる……。以下、この関係を複素表示する：

$$\begin{aligned} \vec{f}_0 &= \vec{D}_0 = 0, \quad \vec{D}_1 = \Delta\tau, \quad \vec{D}_2 = 2\Delta\tau, \quad \dots, \quad \vec{D}_n = n\Delta\tau \\ \vec{f}_1 &= \vec{D}_1 + (\vec{f}_0 - \vec{D}_1) e^{j\phi} = \Delta\tau (1 - e^{j\phi}) \\ \vec{f}_2 &= \vec{D}_2 + (\vec{f}_1 - \vec{D}_2) e^{j\phi} = \Delta\tau (1 - e^{j\phi}) (2 + e^{j\phi}) \\ \vec{f}_3 &= \vec{D}_3 + (\vec{f}_2 - \vec{D}_3) e^{j\phi} = \Delta\tau (1 - e^{j\phi}) (3 + 2e^{j\phi} + e^{j2\phi}) \\ &\vdots \\ \vec{f}_n &= \Delta\tau (1 - e^{j\phi}) \{ n + (n-1)e^{j\phi} + (n-2)e^{j2\phi} + \dots + e^{j(n-1)\phi} \} \\ &= \Delta\tau \{ n - e^{j\phi} (1 - e^{jn\phi}) / (1 - e^{j\phi}) \} \end{aligned} \quad (38)$$

$$\therefore \vec{f}_n - \vec{D}_n = \Delta\tau (-\sin \frac{n}{2}\phi / \sin \frac{1}{2}\phi) e^{j \frac{n+1}{2}\phi} \quad (39)$$

(38), (39) 式の誘導に関しては付録Ⅱを参照されたい。

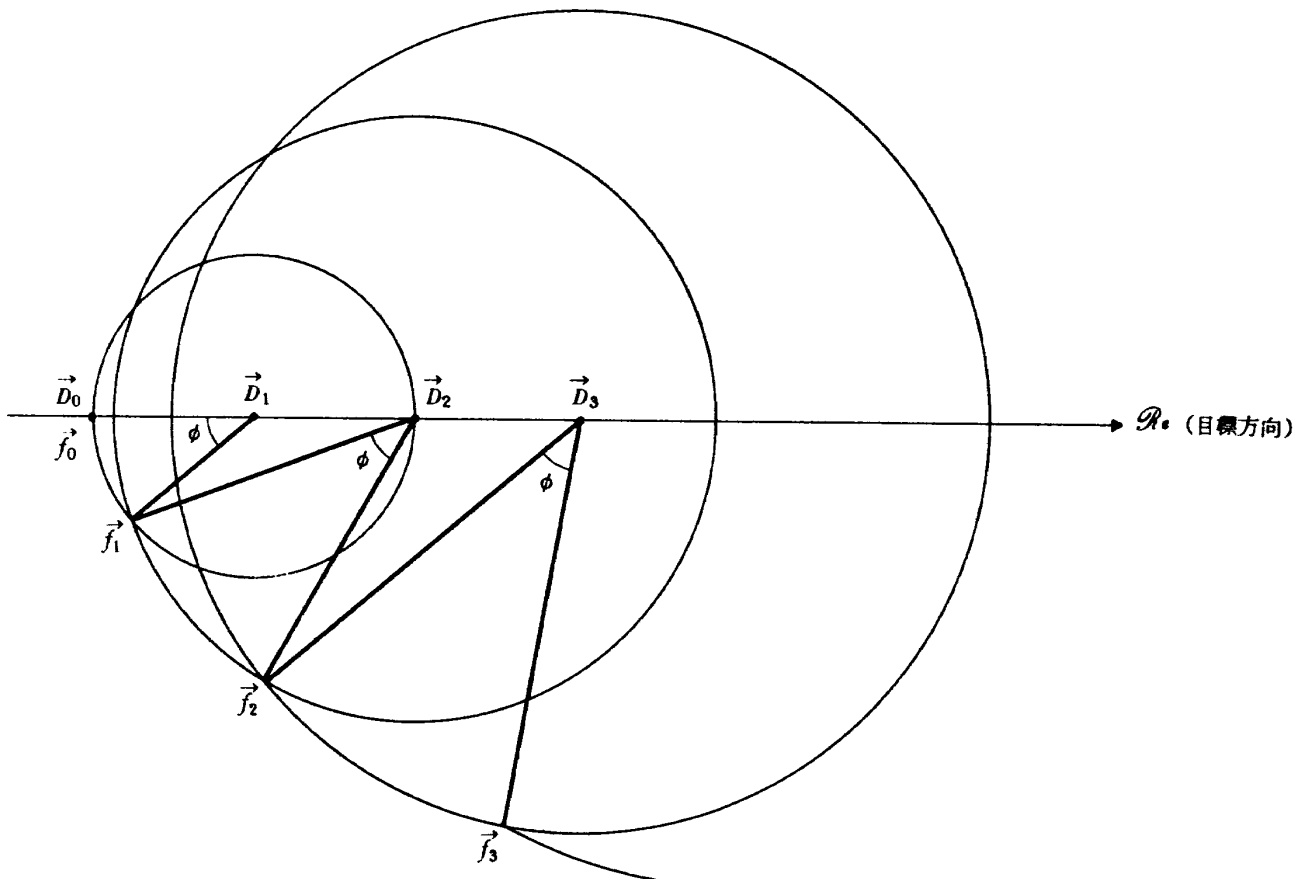


図11 大円法による reorientation maneuver におけるスピン軸の軌跡

(39)式は n 回目の噴射を終って次の $(n+1)$ 回目の噴射に入った瞬間のニューティションの大きさと位相を表現している。大きさに関しては n 回目の噴射終了時と全く等しいから、位相を無視してこの大きさだけに注目すると

$$\overline{f_n D_n} = \Delta\tau \left| \sin \frac{n}{2} \phi / \sin \frac{1}{2} \phi \right| \quad (40)$$

であるから、 $|\sin \frac{1}{2} n \phi|$ に比例した大きさになる。したがってニューティションの大きさはジェット回数に關係して正弦波状に変化する一種の模様を画くことがわかる。図11は、 $\Delta\tau$ と ϕ （または γ ）が与えられれば容易に作図可能なものであるから、スピン軸の挙動は作図からもわかる。ここでは(39)式に従って挙動を解析的に論ずる。

ニューティションを最大または最小にするジェット回数 n の値は $|\sin \frac{n}{2} \phi|$ が1に近い 0 に近いことによって決まる（ n は整数であるから $|\sin \frac{n}{2} \phi|$ は必ずしも1やゼロにはならない）。 n が極値を与えるのは

$$\frac{n}{2} \phi = k \cdot \frac{\pi}{2} \quad (k \text{ は正の整数}) \quad (41)$$

となるから、 $\phi = (\gamma-1)2\pi$ を代入して

$$n = \frac{k}{2(\gamma-1)} \quad \begin{matrix} k=1, 3, 5, \dots \text{最大} \\ k=2, 4, 6, \dots \text{最小} \end{matrix} \quad (42)$$

最大ニューティション θ_{max} は

$$\theta_{max} = \Delta\tau / \sin \frac{1}{2} \phi \quad (43)$$

で与えられる。

(42)、(43)式はスピン軸制御、姿勢決定、ジェットの大きさ決定、ニューティションダンバの設計にとって重要なものである。例えば与えられた変更角 τ に対して n が(42)式に従ってニューティション最小となるような回数に選べるように $\Delta\tau$ を調整（噴射のスピン角 α を調整する、後述）することも可能である。¹⁴⁾ また、姿勢変更（RM）中の姿勢推定値として \vec{H} を代用した時の制御誤差の推定にも利用できる。¹⁵⁾ さらに、ニューティションダンバはニューティション角がある角度以上になると機能しないこともあるので、¹⁶⁾ 姿勢制御中にその条件を満足するかどうかを(43)式によって判定することも可能である。

5.1.1 ニューティションのビート現象

(39)式について検討してみる。スピン軸の画く軌跡は図11を見ると一種のビート模様と考えられそうである。ビートとすると(39)式の $\sin \frac{1}{2} n \phi$ はビートの包絡線に相当する筈であり、 $\frac{1}{2} n \phi$ は二つの相似た周波数による時間的位相角の差の $1/2$ に等しい筈である。RM中の周波数はスピン速度とニューティション速度である。即ち n を変数（例えば時間とみる）にとれば、スピンの位相角は $2\pi n$ であり、ニューティション角は $\gamma 2\pi n$ である。

従って両者の差の $1/2$ を計算すると

$$|2\pi n - \gamma 2\pi n| / 2 = |\gamma - 1| 2\pi n / 2 = \phi n / 2$$

となるから包絡線の位相角に一致する。

5.2 ラムライン法の場合

ラムライン法の場合は大円法の場合のように簡単には解析できない。その理由は、大円近傍の位置はそのまま大円近傍の曲面を真直ぐな細長い平面内の座標系で表現できるが、ラムラインは一般的に大円と異なるから真直ぐな平面に展開できない。メルカトル図から簡単に推察できるが、極点に近づくとラムラインはスパイラル状に巻付くようになるから、コース近傍の平面を同一平面に展開することは、いわばリンゴの皮をナイフでむいて平板上に並べたような形となる。従って平板に並べてからも真直ぐにはならず、スパイラルに近い形になることが予想され、コースを実軸で近似するわけには行かない。以下、次のような仮定を施すことにする：

毎回のジェット噴射による \vec{H}/H_0 の変化分 $\Delta\tau$ の経路は大円の一部と見做す。従ってラムラインはジェット回数分の長さ $\Delta\tau$ の大円弧を折線接続したものと見ることとする。折線の折れ角を β とすると図12の球面三角形に対して正弦定理を適用して次式を得る（付録Ⅲ参照）。

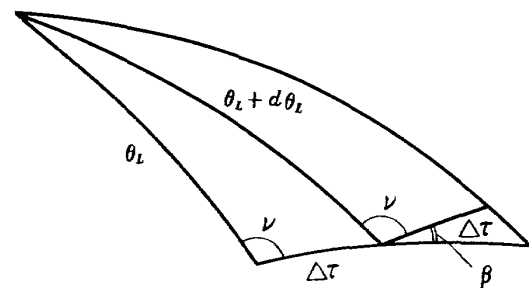


図12 大円からのラムラインのズレ角 β の説明図

$$\begin{aligned} \beta &= \Delta\tau \cot \theta_L \cdot \sin \nu \\ &= \Delta\tau \cot (\theta_{Li} - n \Delta\tau \cos \nu) \sin \nu \end{aligned} \quad (44)$$

ここで ν はラムラインと子午線との交角、 n はジェット回数である。この式から明らかなように β は一定でなく、 θ_L 即ち経路の位置によって変化をする。ただし経度には無関係であり、また、 $\nu = \pm \frac{\pi}{2}$ ならば θ_L は n に無関係になって β は一定である（ラムラインが緯度線になる）。

従ってラムライン法の場合は1スピン後さらに β だけのスピン角を余分にとってはいじめて必要なトルク方向になるから、ニューティションは1回転と $\phi = (\gamma-1)2\pi$ 、つまり $2\pi\gamma$ のほか、 $\gamma\beta$ だけ余分に回転することになる。ニューティションの大きさだけを解析するには折線では不便なので、折線を直線に直して検討することにする。

図13においてスピン軸Aはトルクが \mathcal{R}_e 方向を向いた時の位置であるとする。その時から1スピンすると1回ニューティションしてAを通り越してB点に達した時に再びトルク方向は \mathcal{R}_e 方向を向く。トルク方向が β だけ更にスピンしている間にスピン軸はB点からC点に達し、この瞬間に次のインパルスが発生してニューティションの中心がD点からE点に移動する(図の(a)変換前)。次に変換法を述べる。E点をしてD点を中心に β だけ逆回転すると \mathcal{R}_e 軸上のE'点に移動する。同時にC点も β だけ逆回転した点をC'点とする。つまり $\triangle DCE$ を β だけD点を中心に逆回転させたものを $\triangle DC'E'$ とおいたことになる(図の(b)変換後)。 $\angle BDC' = \gamma\beta - \beta = (\gamma-1)\beta$ となり、C'点でインパルストルクを発生してニューティションの中心がE'点に移動したと考えてもニューティションの大きさには全く不都合はない。結局インパルス噴射のタイミングは大円の場合の ϕ に対してラムラインでは $\phi + (\gamma-1)\beta$ ごとに噴射したことに対応する。問題は β が一定でないということである。 β が一定であればニューティションの大きさの式、(40)式は、 ϕ を $\phi + (\gamma-1)\beta$ で置換えればそのまま通用することになる。同様にニューティションの最大・最小を与えるジェット回数 n の式、(42)式も次のようになる：

$$n = \frac{k}{2(\gamma + \frac{\gamma-1}{2\pi}\beta - 1)} \quad \begin{array}{l} k=1, 3, 5, \dots \text{最大} \\ k=2, 4, 6, \dots \text{最小} \end{array} \quad (45)$$

この式では γ が $\gamma + \frac{\gamma-1}{2\pi}\beta$ に変化した場合の大円法に等しい。

ところで、 β は変化することはするが、 β 自身が微小であるからニューティション振幅も、その大小を示す回数 n も β によって殆ど変化せず、大円法の場合の式が近似的にそのまま使用可能なことを以下に示す。

(44)式から β の最大値を与える θ_i と ν の値は次の値であることが容易にわかる： $|\theta_i|$ は許容範囲内で最小の値即ち $(90^\circ - 30^\circ)$ とか $(90^\circ - 23.5^\circ)$ の赤道から一番離れた時であり、一方 ν は明らかに $\pm 90^\circ$ である。これは $\theta_i = (90^\circ - 23.5^\circ)$ の場合にはラムラインが北回帰線上に沿っていることを示し、 β が最大でかつ一定である。 $\theta_i = (90^\circ - 30^\circ)$ 、 $\nu = 90^\circ$ の場合の β を求める。 $\Delta\tau = 0.01$ rad ($\approx 0.57^\circ$, 1発のジェットによる変向角, 静止通信衛星シンコムでは 0.22° ¹⁷⁾)として $\beta = 0.00577$ rad $= 0.33^\circ$ となる。 $\gamma = 1.1$ とすると $\phi = 36^\circ$, これが $\phi + (\gamma-1)\beta = 36^\circ + 0.033^\circ$ となるのであるが、ニューティションの最大値を与える(43)式では分母にしか効いてこないから $(\gamma-1)\beta = \Delta\phi$ においてこれを微小とすれば

$$\left\{ \sin \frac{1}{2}(\phi \pm \Delta\phi) \right\}^{-1} \approx \left(\sin \frac{1}{2}\phi \right)^{-1} \left(1 \mp \frac{\Delta\phi}{2} \cot \frac{1}{2}\phi \right) \quad (46)$$

右辺に前述の値を代入すると

$$\frac{\Delta\phi}{2} \cot \frac{1}{2}\phi = 0.00089$$

つまりニューティションの最大値は大円の場合の0.09%にも満たない程度の誤差にしかならない。具体的には、この場合の最大ニューティション角が大円の場合の 1.845° に対して 1.842° か 1.848° にしかならない。同様に最大、最小のニューティションを与える n に対しても(45)式と(42)式の比をとると $\beta/2\pi = 0.0009$ となることから、例えば n が1000発に対して1発の増減が出る程度にしかならない。とくに、ラムラインが赤道を横切るような場合には β が赤道で符号を変えるから、 β の影響は殆ど無視できる：この場合は大円もラムラインも殆ど一致する経路となることから当然である。

結論としてスピン軸方向の大きな変更(RM)中におい

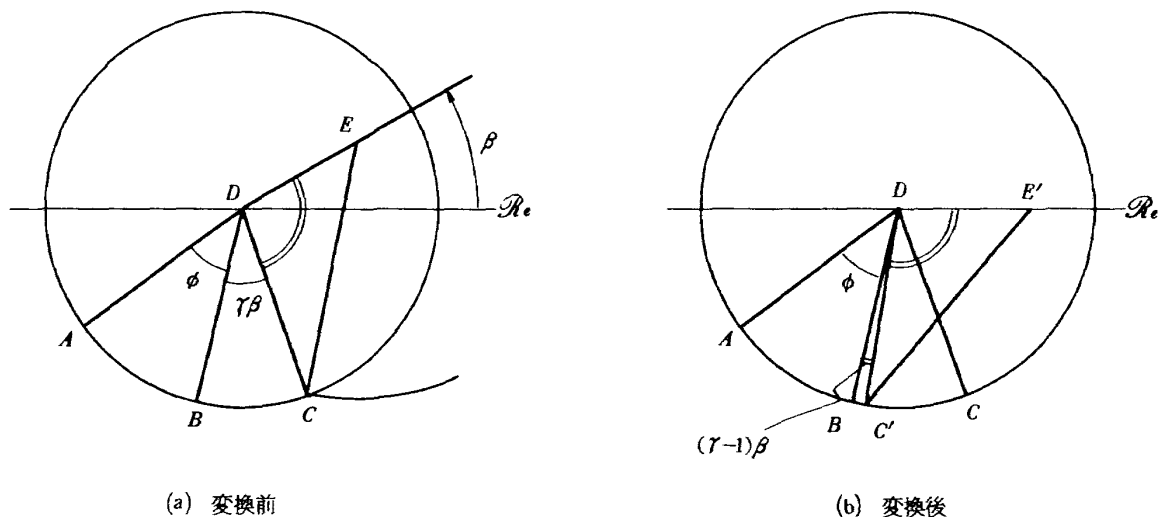


図13 ラムラインから同じニューティションを発生する大円コースへの変換法

ては、ジェットが極端に大きくなければ($\Delta\tau$ が微小)、大円法の場合のニューティションの大きさの関係式は殆どそのまま利用できる。即ち、RMなどにおいて途中で1度姿勢を計測し直す場合にニューティションが微小な状態でジェットを打切るためのジェット回数 n の計算や、途中でのニューティションの最大振幅などの計算に対しては、(42)、(43)式は極めて近似度の良好な式として使える。

5.3 ジェットがインパルスでない場合

ガスジェットの噴射時間は4.3節で述べたように、スピン角で $30^\circ \sim 90^\circ$ の場合が多いのでインパルスと見做すのは無理である。本節ではこの問題を論ずる。

ガスジェットを連続的に一定の推力で噴射すると、トルク方向がスピン速度で回転するから $\Delta\vec{H}$ を接続して行くと円になる。いま仮りに、 \vec{H} を中心にスピン速度 ω_z と逆方向に回転する座標系を考える。この座標系ではトルク方向が一定となるから $\Delta\vec{H}$ は常に同一方向となり、接続すると直線になる。スピン軸は \vec{H} のまわりを慣性空間に対しては $\gamma\omega_z$ で回転するのであるが、新座標系に対しては $(\gamma-1)\omega_z$ で回転することになる。同時に、この座標系から見ると衛星はスピンをしないことになる。衛星の重心を中心とする単位球面と、初期の \vec{H} との交点とし、この点で単位球に接する平面を新座標面を選び、トルク方向を実軸に、それと直角方向を虚軸にとる。図11と同様にスピン軸位置を \vec{f} で表現する。 \vec{H} 軸の位置は \vec{D} で表現するが、初期点 \vec{D}_0 は原点となる。ジェット噴射により \vec{D} は実軸上を正方向に等速運動することになるが、ここでは \vec{D} を不動とし、逆に \vec{f} が逆方向に等速運動をすると考えて \vec{D} と \vec{f} の相対運動を論ずる上で不都合はない。つまり \vec{D} は噴射によっても不動であるが、 \vec{f} は $(\gamma-1)\omega_z$ の回転運動に \vec{D} の本来の等速運動の逆符号のものを重畳した運動に置換えることによって問題は極めて簡単になることを以下に示す。

連続ジェットを連続した微小インパルス列に置換えて各インパルス $\Delta\vec{H}$ による \vec{H} の移動角を $\Delta\vec{\tau} \equiv \Delta\vec{H}/H_0$ とする。いま単一のインパルスだけに着目して他のインパルスが無い場合を考えて見る。そのインパルスが噴射した瞬間に \vec{f} は $\vec{f}-\Delta\vec{\tau}$ に急変し(その代り \vec{D} は原点のまま不変)、このベクトルを \vec{f}_i ($\equiv \vec{f}-\Delta\vec{\tau}$)と記すと、 \vec{f}_i は前と同様に原点まわりを $(\gamma-1)\omega_z$ の角速度で回転を続ける。例えば時間 t を経過したあとの \vec{f}_i の位置は \vec{f}_i を原点まわりに $(\gamma-1)\omega_z t \equiv \phi$ だけ回転した位置に来る。従って結果的にはもとの \vec{f} を ϕ だけ回転し、同時に $-\Delta\vec{\tau}$ も ϕ だけ回転したものをベクトル加算しても同じことになる。

ジェットをスピン角 α に相当する時間 $t_j \equiv \alpha/\omega_z$ だけ連続噴射した場合に話を進める。連続ジェットを構成する各インパルストルクに対応する \vec{f} の変化分 $-\Delta\vec{\tau}$ は各々の噴射後に $(\gamma-1)\omega_z$ の角速度で回転するから、最終インパルスを噴いた瞬間には $\Sigma-\Delta\vec{\tau}$ は一つの円弧を描くことになる。この円弧の一端は実軸方向に平行であり、他端は負の実軸方向を $(\gamma-1)\omega_z t_j \equiv \phi_j$ だけ回転した方向となる。 $-\Delta\vec{\tau}$ を接続したものは円弧であるが、 $|\Sigma-\Delta\vec{\tau}|$ は円弧の両端を結ぶ弦長を表わす。この弦は明らかに円弧の中央点に接する方向を有する。このことから連続ジェットによるニューティションへの影響は、噴射時間中の中央時刻において、今述べた弦長に相当する大きなインパルスを1発だけ噴いて、中央時刻から連続噴射の場合の噴射終了時刻までニューティションさせた場合と全く等価である。

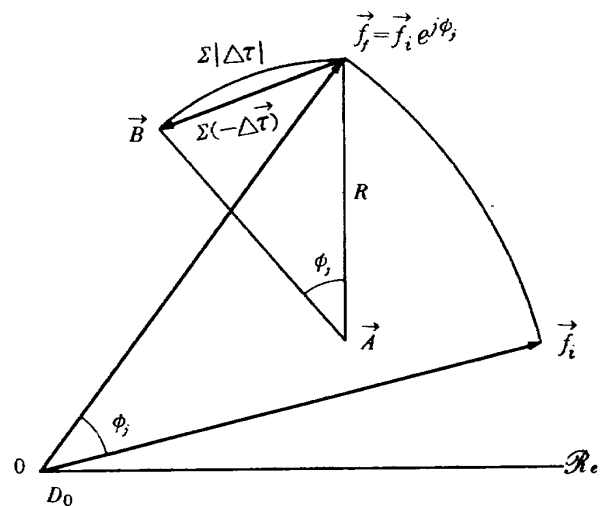


図14 単発有限時間ジェットによるニューティションへの影響の説明図

以上の関係を幾何学的に求める。図14において \vec{f}_i はジェット噴射開始時のスピン軸位置で、ジェットを噴かなければ t_j 時間後には \vec{f}_f に到達する、つまり

$$\vec{f}_f = \vec{f}_i e^{j(\gamma-1)\omega_z t_j} = \vec{f}_i e^{j\phi_j} \quad (47)$$

\vec{f}_i で噴射開始して \vec{f}_f で噴射終了すると前述の $-\Delta\vec{\tau}$ を接続したものは図の $\widehat{f_f B}$ となる(「は省略」)。 $\widehat{f_f B}$ の中心を \vec{A} とすると明らかに $\angle B A f_f = \phi_j$ である。ところでこの円弧の長さは $\Sigma|\Delta\vec{\tau}|$ であるから

$$\text{弧長} = \Sigma|\Delta\vec{\tau}| = \int_0^{t_j} \frac{T}{H} dt = \frac{T}{H} t_j \quad (48)$$

円弧の半径を R とすると、この弧長は $R\phi_j$ に等しいから

$$R\phi_j = \frac{T}{H} t_j \quad (49)$$

$$\therefore R = \frac{T}{H} \frac{t_j}{\phi_j} \quad (50)$$

従ってこの円弧の弦長 $\overline{Bf_j}$ は

$$\overline{Bf_j} = 2R \sin \frac{\phi_j}{2} = R \phi_j \frac{\sin \frac{\phi_j}{2}}{\frac{\phi_j}{2}} \quad (51)$$

または

$$\text{弦長} = \text{弧長} \times \frac{\sin \frac{\phi_j}{2}}{\frac{\phi_j}{2}} \quad (52)$$

この弦の方向は前述のように円弧の中央点の接線方向であるから負の実軸方向を $\phi_j/2$ だけ回転した方向になる。故にこの弦をベクトルで表現すると

$$\begin{aligned} \overrightarrow{f_j B} &= -(\text{弦長}) \times e^{j \frac{\phi_j}{2}} \\ \therefore \overrightarrow{B} &= \overrightarrow{f_j} + \overrightarrow{f_j B} = \overrightarrow{f_j} e^{j \phi_j} - (\text{弦長}) \times e^{j \frac{\phi_j}{2}} \\ &= \left(\overrightarrow{f_j} e^{j \frac{\phi_j}{2}} - (\text{弦長}) \right) e^{j \frac{\phi_j}{2}} \quad (53) \end{aligned}$$

(53)式の意味するところは、前述のように、初期の f つまり $\overrightarrow{f_i}$ を噴射しないままに噴射時間の半分に相当する迄待って、その瞬間に1発のインパルスを噴射し、そのあと残りの半分の時間を経過(回転)したものに等価であることを示している。ところで、(52)式の弦長と弧長について説明するが、弧長はジェット噴射による角運動量ベクトル \overrightarrow{H} の方向変化が直線的に、または最も有効に行なわれた場合の最大の変化角を表わす。他方、弦長はニューテーションの変化に実効的に寄与する \overrightarrow{H} の実効変化角と見てよい。(52)式の係数はその効率に相当する。ここで述べた効率はスピン軸方向制御中の角運動量ベクトル \overrightarrow{H} が慣性空間に対して画く円弧に対する弦長の比とは異なることに注意されたい。慣性空間から見た \overrightarrow{H} の変化はインパルス噴射でない場合には $\Delta \overrightarrow{\tau}$ がスピン速度 ω_z で回転する(前述の座標では \overrightarrow{H} を固定した \overrightarrow{f} の変化、 $-\Delta \overrightarrow{\tau}$ は $(\gamma-1)\omega_z$ で回転する)から、スピン角 $\omega_z t_j = \alpha$ に対応する \overrightarrow{H} の変向の効率は4.3節で述べた(36)式であって(52)式の係数とは異なる。併し円弧長は両者が異なった半径と円弧角を有するにも拘らず相等しいことは当然である。今、(52)式の係数を η_n とおく：

$$\eta_n \equiv \frac{\sin \frac{\phi_j}{2}}{\frac{\phi_j}{2}} = \frac{\sin \{(\gamma-1) \frac{\alpha}{2}\}}{(\gamma-1) \alpha/2} \quad (54)$$

$\gamma=1.1$ として $\alpha=90^\circ$ と 60° の場合を計算すると、 $\eta_n=0.9990$ と 0.9995 である。(36)式の η では 0.90 と 0.955 であるから η_n の方は極めて効率が良く、 $\gamma=1$ の場合には $\eta_n=1$ としてよい。併し、完全に平板形の衛星では $\gamma=2$ となるから $\eta_n=\eta$ となる。極端な例として $\alpha=360^\circ$

つまり1スピン周期にわたって噴射すると \overrightarrow{H} は元に戻るから当然 $\eta=0$ であるのに対し、 $\eta_n=0.9836$ となって殆ど効率は落ちない($\gamma=1.1$ として)。このことから \overrightarrow{H} を変えずにニューテーションを制御する¹⁸⁾可能性は充分納得できる。

以上の結果から、インパルスでないジェットのの場合のスピン軸制御に及ぼす影響を要約すると次のようになる。 \overrightarrow{H} の実効的変向角量は効率が(36)式の η となってこれに乗じたものが実際の噴射時間に対する変向角となる。この点は4.3節で述べた事柄を繰返すだけで、要するに $\Delta \tau$ として(37)式を使用することを意味する。併し、ニューテーションの大きさへの影響は $\gamma=1$ の衛星では $\alpha=90^\circ$ 程度までの噴射に対しては $\Delta \tau$ は弧長すなわち(35)または(49)式を使って差支えないが、厳密にはこれらの式に(54)式の η_n を乗じたものを $\Delta \tau$ としてニューテーションの大きさを論ずべきである。これ迄 $\Delta \tau$ を各種のものについて混用してきたが、大小関係を示せば1回のジェットによる各種の大きさは

$(\overrightarrow{H} \text{ の実効変向角}) < (\text{ニューテーション寄与角}) < (\Delta H/H \text{ の弧長})$ となる。併し $\alpha=60^\circ$ 位以下ならば3者は殆ど等しい。厳密性を要求される場合には例えば(39)、(40)、(43)、(44)式などの $\Delta \tau$ は(52)式を使用すべきである。(52)式をスピン角 α で表現すると

$$\Delta \tau = \frac{T}{H} \frac{\alpha}{\omega_z} \cdot \frac{\sin \{(\gamma-1) \frac{\alpha}{2}\}}{(\gamma-1) \frac{\alpha}{2}} \quad (55)$$

または $H=I_z \omega_z$ を使って

$$\Delta \tau = \frac{T \alpha}{I_z \omega_z^2} \cdot \frac{\sin \{(\gamma-1) \alpha/2\}}{(\gamma-1) \alpha/2} \quad (56)$$

6. シミュレーション例

以下に述べる計算機シミュレーション例では一貫して次の数値を使った。そのうち、慣性モーメントは宇宙開発事業団の筑波宇宙センタにある模擬衛星にほぼ近い値をとった。

$$I_x = I_y = I_z = 11.2 \text{ (kg} \cdot \text{m}^2 \text{)}$$

$$I_z \equiv I_s = 12.5 \text{ (kg} \cdot \text{m}^2 \text{)}$$

$$I_s/I_z = \gamma = 1.116$$

$$\omega_z = 1.257 \text{ (rad/s)} = 12 \text{ (r.p.m.)}$$

$$\text{噴射ジェットのパルス幅 } \tau_f = 0.4 \text{ (sec)}$$

サンセンサのスリット面は xz 平面内で $x > 0$ 側トルク $\overrightarrow{\tau}$ は x 軸の正方向のみ

衛星のダイナミクスは衛星本体の3自由度回転と、ダンバの1自由度運動を定式化し、衛星座標系で $\omega_x, \omega_y, \omega_z$ を解き、同時にオイラー角と $\omega_x, \omega_y, \omega_z$ との関係を表わす kinematics を解いて慣性空間に対する姿勢角、

とくにスピン軸方向を求めた。その際、オイラー角の第2角が特異点近傍に近づくことは避けられないので、2組のオイラー角系 (β 系 = 3-1-2系と γ 系 = 3-1-3系) を用意して特異点の $\pi/10$ 以内に近づく と他の系に自動的に切替えるようにした。¹⁹⁾

例1 ビート模様

赤道面内の円軌道にある衛星のスピン軸を北極方向に向ける例について述べる。衛星から見て地球中心方向がヨー軸、軌道面法線方向 (この場合は北極方向) をピッチ軸、軌道の接線方向で衛星の移動する方向をロール軸にとる (これは最も良く使われる方式)。スピン軸の初期方向を目標方向 (北極) からピッチ、ロールの順に、ともに $\pi/6 = 30^\circ$ のズレのある方向に選んだ。センサとしてこの場合には地平線センサを用いて地球中心方向が与えられた。ニューティン・ダンパは搭載していない。結局、必要修正角 τ は 41.4° で、トルクが $0.932 \text{ kg}\cdot\text{m}$ で必要ジェット回数 n は 30 であった。シミュレーション結果を図 15 に示す。この図は北極方向から投影したもので、制御方式は大円法である。前述したビート模様が明瞭に出ている。(42) 式によれば $k=7$ では $n=30.17$ となるから $n=30$ はほぼ残留ニューティンが最大で、その値 θ_{max} は (43) 式から 3.87° と与え

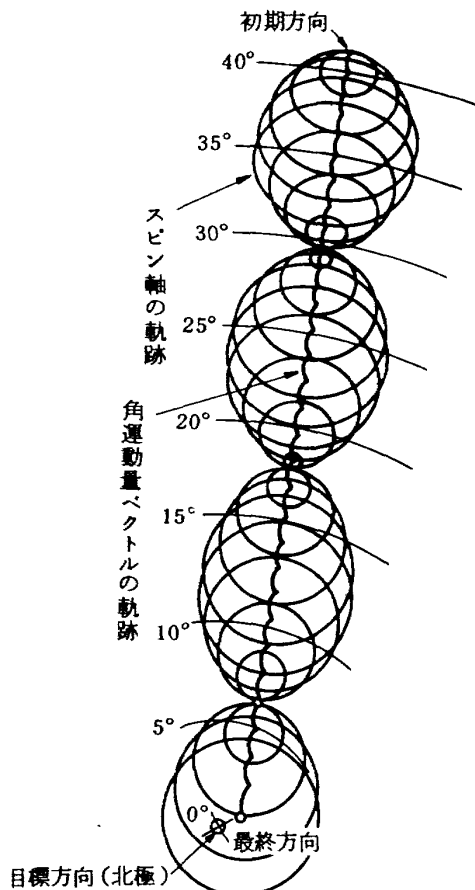


図 15 ガスジェットによるスピン軸方向制御のシミュレーション

られるが、シミュレーション結果でも殆ど一致しているのがわかる。サンセンサのスリット位置に slidingmass 型ニューティン・ダンパをスピン軸方向に取付けた場合でも (静止時におけるおもりの y 軸に対する慣性モーメントは I_y の 0.0112 倍で tuned-damper とする) 実効的な H と γ の微小な変化に伴う経路、軌跡の微小な変化と、最終のニューティンが時間とともにスパイラル状に減衰して行くこと以外に変化はなかった。図 15 では大円コースは直線になり、図示していないがラムラインは逆にゆるいカーブとなる。

例2 ラムラインと大円コースの比較

この例では衛星を静止軌道に投入する際のペリジーク時の姿勢 (\vec{T}) から、アポジモータ噴射時に必要な姿勢 (\vec{F}) までスピン軸を変更するという、かなり実際的に可能性の高い場合について両者の比較を行なった。方向表示を (赤経, 北極距離) で表現する。太陽方向 \vec{S} は $(-48.35^\circ, 108^\circ)$ とした。 $\vec{T} = (-148.35^\circ, 60^\circ)$, $\vec{F} = (46.65^\circ, 75^\circ)$ とし、トルク $T = 1.4 \text{ kg}\cdot\text{m}$ と、かなり大きい値を仮定した (これはジェット回数を少なくして計算時間の短縮をねらったためである)。計算の結果、必要修正角 τ は 132.73° である。ジェット回数 n はラムラインでは 67 回、大円法では 65 回となった。両者の角運動量ベクトルの移動を示したのが図 16 と図 17 である。図 16 は天球を天の北極から見下したステレオ投影法によって \vec{S} , \vec{T} , \vec{F} の位置と、角運動量ベクトルの理論経路を示し、同時に \vec{S} を北極にした時の新しい赤道と新しい南回帰線を示したものである。図 17 は \vec{S} を北極とする新しい球面をメルカトル図に写像し、角運動量ベクトルの経路のシミュレーション結果を示したものである。両コース共にほぼ目標方向に移動したが、行き過ぎが見られる。この理由は積分の時間キザミが荒いためであることが判明した (ジェットの矩形波の角が積分誤差を大きくする)。目標方向に対するズレは 4.2.3. で述べたように、実際には 2~3 回に変向を分割して補正を施すから問題はない。次にニューティンの状態を検討する。メルカトルに写像したあとの両方法のスピン軸軌跡の後半だけを示したのが図 18 である。(42) 式に $\gamma = 1.116$ を代入し、 k に適当な整数を代入して n が最終値 (ラムラインでは 67, 大円では 65) に近くなるものを拾うと下表のようになる:

k の 値	13	14	15	16
ニューティン	最大	最小	最大	最小
(42) 式 の n	56.03	60.34	64.66	68.97
n を 四 拾 五 入 した 整 数	56	60	65	69

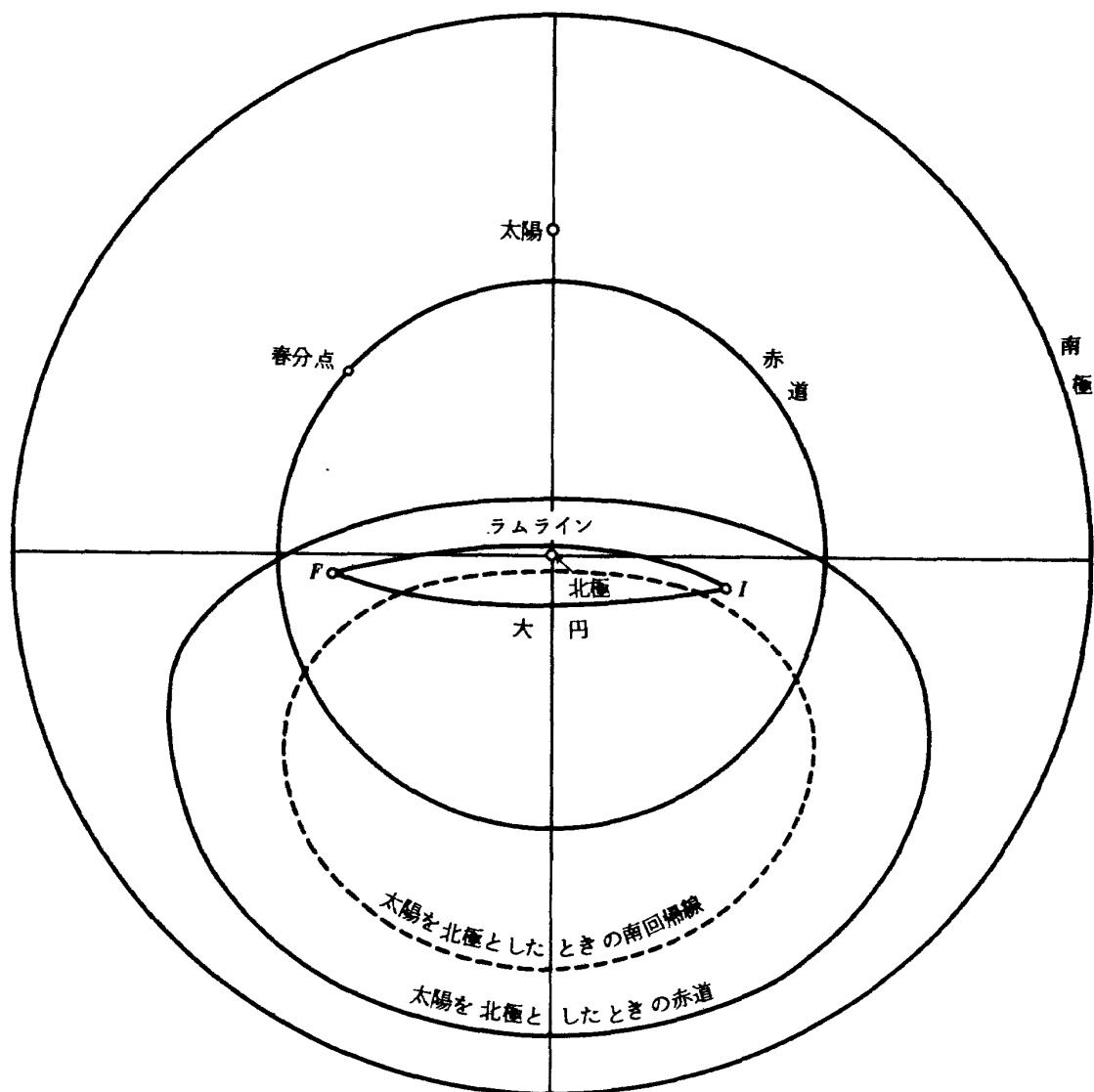


図 16 北極から見たステレオ投影法によるラムラインと大円の比較（理論経路）

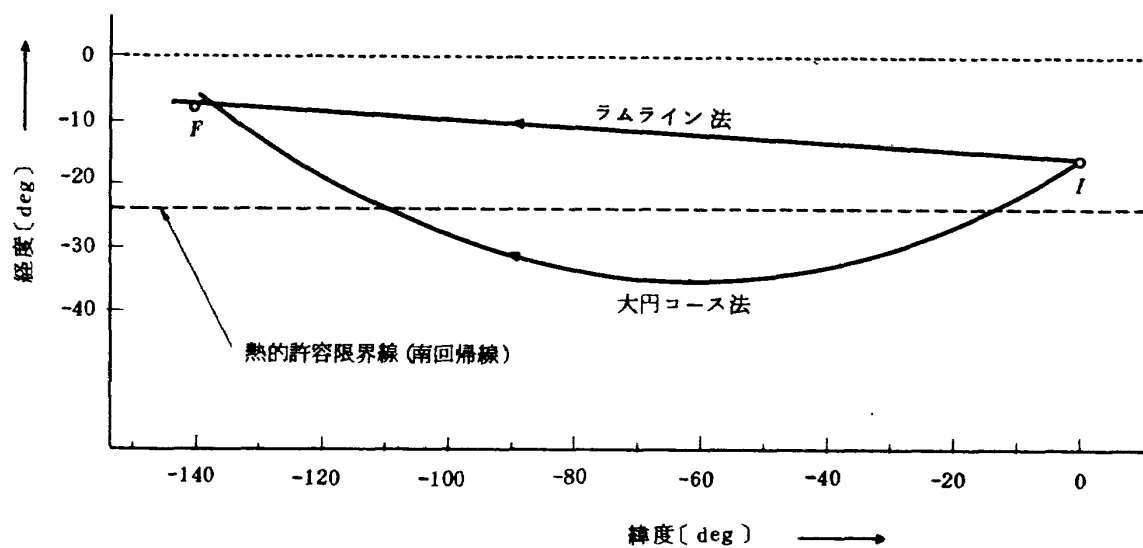


図 17 ラムライン法と大円法による角運動量ベクトルの軌跡
（太陽方向を北極とするメルカトル図法）

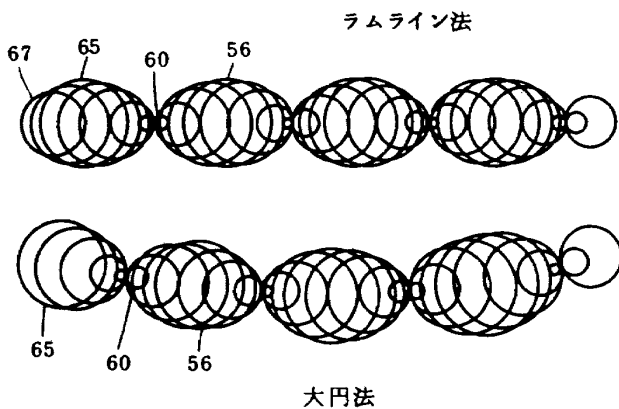


図18 ラムライン法と大円法のニューテーション
(スピン軸軌跡)の比較(数字はジェットの回数)

図18の大円コースの場合の最小値は60よりむしろ61の方が当たっている他は、ほぼ理論値通りである。ラムラインの方は最小値もほぼ大円コースの理論値に合っている。このことはニューテーションに関しては両方式に殆ど差のないことの例証ともみなせる。両方式の大きな差は経路である。ジェット回数は高々3%の差しかないのに大円法は3%の節約のために熱的制約を大きく破っているのがわかる。ラムラインは予想通りの直線となった。

以上、両者の比較から、数%の燃料損失があるとはいえ、ラムライン方式が実用的には断然優れていると云える。

7. あとがき

対称スピン衛星のスピン軸方向を軸方向ジェットで制御するためのジェットタイミング決定法を詳述した。太陽をタイミングの基準とする場合のラムライン法が大円法に比べて実用的に極めて優れていることをシミュレーション例とともに示した。ガスジェット噴射によるニューテーションの挙動を詳細に論じ、リオリエンテーション・マヌーバにおいてはスピン軸がビート模様を画くことを示した。

引用文献

- 1) Grubin, C.: Two-Impulse Attitude Reorientation of an Asymmetric Spinning Vehicle, J. Spacecraft, Vol. 4, No. 3 (1967) pp. 306-310.
- 2) Wheeler, P.C.: Two-Pulse Attitude Control of an Asymmetric Spinning Satellite, AIAA Paper, 63-338, (1963).
- 3) LeCompte, G.W. and Bland, J.G.: Simply Mechanized Attitude Control for Spinning Vehicles, J. Spacecraft, Vol. 1, No. 6, (1964)

pp. 593-598.

- 4) Greene, R.H.: Early Bird Placement in a Stationary Orbit: Launch and Control System Maneuvers, AIAA Paper, No. 66-262 (1966).
- 5) Schmieder, L.: Optimale Ausrichtung von rotationssymmetrischen drallstabilisierten Körpern in Abhängigkeit vom Trägheitsmomentenverhältnis, Raumfahrtforschung, Heft 3/70 (1970) pp. 103-107.
- 6) Porcelli, G. and Connolly, A.: Optimal Attitude Control of a Spinning Space-Body - A Grafical Approach, IEEE Trans. on Automatic Control, Vol. AC-12, No. 3 (1967) pp. 241-249.
- 7) 例えば原島 鮮: 力学, p.183. 裳華房, (1959)
- 8) 例えば Singer, S.F. 編: Torques and Attitude Sensing in Earth Satellites, Reiter, G.S. and Thomson, W.T.: Rotational Motion of Passive Space Vehicle, pp. 2-5, Academic Press, (1964).
- 9) Hanson, C.W. and Brown, J.V.: Attitude Determination for the Skynet and NATO Synchronous Communications Satellite, AIAA Paper No. 72-544 (1972).
- 10) 4)と同じ
- 11) Syncom Projects Office: Syncom Engineering Report Volume I, NASA TR R-233 (1966), p. 36.
- 12) 村上 力, 中島 厚: 対称スピン衛星の軸方向ガスジェットによるスピン軸の挙動, 第17回宇宙科学技術連合講演会講演集(1973年10月), pp.211-214
- 13) 5)と同じ
- 14) 田中俊輔, 四宮康雄, 鬼塚 博: 姿勢制御試験設備—3—姿勢制御シミュレーション, 第17回宇宙科学技術連合講演会講演集(1973年10月), pp.187-190
- 15) 川戸信明, 二宮敬虔: ガスジェットと水平線センサーを用いたスピン軸制御法, 第17回宇宙科学技術連合講演会講演集(1973年10月), pp.215-218
- 16) 村上 力, 狼 嘉彰: 対称スピン衛星用ニューテーション・ダンパの解析, 航技研資料TM-207 (1971), pp.8-9
- 17) Syncom Projects Office: Syncom Engineering Report Volume II, NASA TR R-252 (1967), p. 67.
- 18) 村上 力, 中島 厚: 対称スピン衛星のガスジェットによるニューテーション能動制御, 航技研究報告 TR-344 (1973)

- 19) 狼 嘉彰：オイラー角表示による座標変換のアルゴリズム，航技研報告 TR-305 (1972)，pp. 6-9

これら兩式中の τ_{si} , τ_{sj} , τ の3者は常に π より小さい正の角度でなければならないことは Cos^{-1} が主値であるから当然である。ところでこれら3者は互に共通部分を持たずに円 (2π) を3分割する場合 (付図(a)) と、そうでなく共通部分を持ち、円のうちで占有されない部分を有する場合 (付図(b)) に分けられる。(a)の場合には $\tau_{sj} < \pi$ であるから、円を \vec{S} とその延長線 (図の破線) で2等分割すると \vec{F} は \vec{T} の反対側の半円内に含まれることは明らかである。従ってこの場合には $\phi_U = \pm\pi$ となり、(21)式では正号を採用したものである。(b)の場合には3者のうちの最大のを、残りの2者で分割した形となる (図では τ_{si} を最大とする場合)。従って3者のうちのどれかが間に挟まれた形となる。明らかに \vec{S} が挟まれた場合は (21)式となり、これは τ が最大の場合である。 \vec{S} が挟まれない場合には当然 $\phi_U = 0$ となる。

まず(38)式の upper から lower への誘導をする。upper は

$$\vec{f}_n = \Delta\tau(1 - e^{j\phi}) \{ n + (n-1)e^{j\phi} + (n-2)e^{j2\phi} + \dots \\ \dots + e^{j(n-1)\phi} \}$$

この式の $\{ \}$ 内の $n, (n-1), \dots, 1$ を分解して第1項を第1行に、第2項を第2行に……第 n 項を第 n 行に書くと：

$$\{ \} = 1 + 1 + 1 + \dots + 1$$

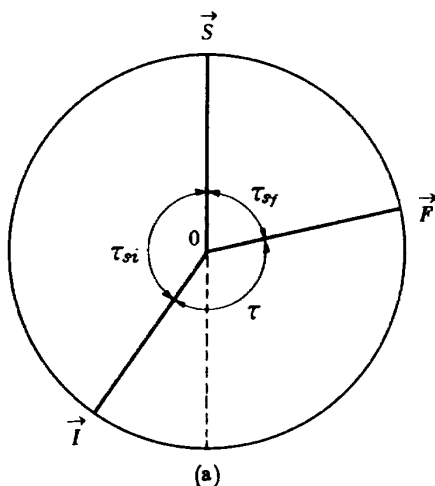
$$e^{j\phi} + e^{j\phi} + \dots + e^{j\phi}$$

$$e^{j2\phi} + \dots + e^{j2\phi}$$

$$\dots$$

$$\dots$$

$$e^{j(n-1)\phi}$$



付図 $\vec{S}, \vec{I}, \vec{F}$ が同一平面に含まれる場合

$$\begin{aligned} \{ \} &= 1 + (1+e^{j\phi}) + (1+e^{j\phi}+e^{j2\phi}) + \dots \\ &\dots + (1+e^{j\phi}+e^{j2\phi} + \dots + e^{j(n-1)\phi}) \\ &= \frac{1-e^{j\phi}}{1-e^{j\phi}} + \frac{1-e^{j2\phi}}{1-e^{j\phi}} + \frac{1-e^{j3\phi}}{1-e^{j\phi}} + \dots + \frac{1-e^{jn\phi}}{1-e^{j\phi}} \\ &= \left(n - e^{j\phi} \frac{1-e^{jn\phi}}{1-e^{j\phi}} \right) / (1-e^{j\phi}) \end{aligned}$$

$\therefore \bar{f}_n = \Delta\tau \{ n - e^{j\phi}(1 - e^{jn\phi}) / (1 - e^{j\phi}) \} \dots\dots (38)$ 下式
 (39)式の誘導は $\bar{D}_n \equiv n\Delta\tau$ を念頭において上式から

$$\begin{aligned}\vec{f}_n - \vec{D}_n &= -\Delta\tau \frac{1 - e^{jn\phi}}{1 - e^{j\phi}} \cdot e^{j\phi} \\ &= -\Delta\tau \frac{e^{-jn\phi/2} - e^{jn\phi/2}}{e^{-j\phi/2} - e^{j\phi/2}} \cdot e^{j(\phi + n\phi/2 - \phi/2)} \\ &= -\Delta\tau \frac{\sin \frac{n}{2}\phi}{\sin \frac{1}{2}\phi} \cdot e^{j\frac{n+1}{2}\phi} \quad (39)\end{aligned}$$

図 11 の球面三角形に正弦定理を適用すると

$$\frac{\sin(\theta_L + d\theta_L)}{\sin\nu} = \frac{\sin\theta_L}{\sin(\pi - \nu - \beta)} \quad (\text{A1})$$

$d\theta_i$ と β は微小であるから

$$\frac{\sin \theta_i + d \theta_i \cos \theta_i}{\sin \nu} = \frac{\sin \theta_i}{\sin \nu + \beta \cos \nu} \quad (\text{A2})$$

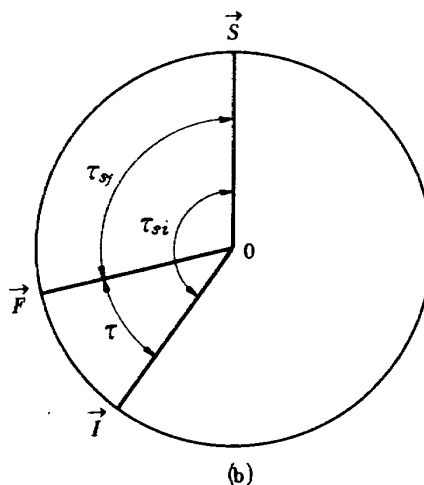
$$\text{如て, } d\theta_i = -\Delta\tau \cos\nu \quad (\text{A3})$$

であるから (A2) 式に代入して高次微小項を無視して

$$\begin{aligned} \beta \cos \nu \cdot \sin \theta_i - \Delta \tau \cos \nu \cos \theta_i \sin \nu &= 0 \\ \therefore \beta &= \Delta \tau \cot \theta_i \cdot \sin \nu \end{aligned} \quad (\text{A4})$$

(A3)式を積分して

$$\int_{\theta_{i-1}}^{\theta_i} d\theta_i = - \int_{\tau=0}^{n\Delta\tau} \cos \psi \cdot d\tau$$



$$\therefore \theta_i = \theta_{li} - n\Delta\tau \cos\psi \quad (\text{A5})$$

これを (A4) 式 (これは (44) 式の上式と同じ) に代入すると (44) 式が得られる:

$$\beta = \Delta\tau \cot(\theta_{li} - n\Delta\tau \cos\psi) \sin\psi \quad (44)$$

航空宇宙技術研究所報告 380号

昭和49年8月発行

発行所 航空宇宙技術研究所
東京都調布市深大寺町1880
電話武蔵野三鷹(0422)47-5911(大代表)〒182

印刷所 株式会社 共 進
東京都杉並区久我山4-1-7(羽田ビル)
