

UDC 629.783:  
629.7.054:  
629.7.07

# 航空宇宙技術研究所報告

TECHNICAL REPORT OF NATIONAL AEROSPACE LABORATORY

TR-587

超低高度人工衛星DASのための加速度計を用いた  
搭載型航法システム

森 英 彦

1979 年 10 月

航空宇宙技術研究所  
NATIONAL AEROSPACE LABORATORY

## 目 次

1. 序 論 .....	1
2. 記 号 .....	3
3. DAS 軌道の永年変化の概略 .....	4
4. $J_2$ 項による周期摂動 .....	6
5. 大気抵抗による軌道の変化 .....	11
5.1 大気抵抗による軌道減衰の近似式の精度 .....	11
5.2 大気抵抗による周期摂動 .....	13
6. 大気密度モデルと加速度計測による高度推定 .....	16
6.1 大気密度モデル .....	16
6.2 基礎大気密度の関数発生 .....	18
6.3 加速度計による高度推定 .....	20
7. 最低高度検出による軌道推定 .....	22
8. 最小二乗法による推定 .....	25
8.1 最小二乗法 .....	25
8.2 最小二乗法の適用(予測式(6.14)を用いる場合) .....	27
8.3 最小二乗法による軌道要素の推定 .....	31
9. 結 論 .....	37
参考文献 .....	38
付録A 摂動力を受ける場合の衛星軌道の方程式 .....	39
A 1 軌道面内でのみ摂動力を受ける場合の方程式 .....	39
A 2 Euler Hill 方程式 .....	40
A 3 軌道のベクトル方程式を用いる方法 .....	41
付録B 地球重力ポテンシャルの摂動項による軌道への影響 .....	42
付録C 大気抵抗による軌道の変化 .....	43
C 1 Euler Hill方程式による軌道減衰の解法 .....	43
C 2 一周毎の軌道減衰 .....	44
C 3 地球と共に回転する大気の影響 .....	45

# 超低高度人工衛星DASのための加速度計を用いた 搭載型航法システム\*

森 英彦\*\*

## An Onboard Navigator for the Extremely Low Altitude Satellite DAS Utilizing Accelerometers

By Hidehiko MORI

### ABSTRACT

The main mission of the DAS (Dive and Ascent Satellite) flying at an extremely low altitude with perigee near 110 km is to measure the atmospheric characteristics directly at the bottom of the ionosphere. Continuous observation and prediction of the perigee altitude is required to attain the mission. This paper proposes an onboard navigation system utilizing accelerometer data in the neighborhood of perigee. Simplified algorithms applied to a small size onboard computer are presented.

The solutions of the Euler Hill equations for the perturbation of orbits due to the earth's oblateness and air drag are examined in comparison with the simulated results obtained from the numerical integration of the rigorous differential equations. A method for approximating Jacchia's atmospheric density model by a simple function of altitude, with the exospheric temperature as a parameter, is described. Then, an analytic formula to express the air drag on the satellite in the neighborhood of perigee is presented. The time of perigee passage, the perigee radius and the semi major axis are derived directly from the formula utilizing the accelerometer data concerning the maximum drag force. The method of least squares applied to this formula reveals the estimation of the parameters of the approximated density model with the accelerometer data in 4 minutes passing perigee, as well as the estimation of orbital elements, except the longitude of ascending node, with the accelerometer data in 6 minutes passing perigee.

### 1. 序 論

超低高度人工衛星 DAS (Dive and Ascent Satellite) は、近地点高度を 110 km 前後にとり、近地点周辺における大気の観測を行なうことを主要なミッションとする衛星である。1975 年以来航空宇宙技術研究所で検討が進められてきた。

高度に対する大気密度の勾配は非常に急峻で大気組成の様な低高度においてはほぼ 17 km 毎に一桁小さくな

るという対数的な減少傾向を示す。高度が上り拡散圈に入ると、分子量の小さい成分が支配的になり、高度に対する大気密度の勾配もゆるやかになると共に、太陽照射の有無により平衡状態が異なるため大気密度も大幅に変化する。この傾向が顕著に現われるのは高度 130 km を越えるあたりで、DAS の目指す近地点 110 km 前後は過渡的な領域に属す。

人工衛星の近地点高度を 110 km 前後にとることは、大気によって生ずる熱および軌道減衰などのために人工衛星がとりうる軌道としてのほぼ極限に近く、衛星に要求される特性も通常とはかなり異なってくる。

衛星にかかる熱および抗力は、高度に対する大気密度

---

\* 昭和54年6月22日 受付

\*\* 宇宙研究グループ

の勾配が大きいことにより、軌道全体からみると近地点近傍でインパルス状に加わると概念的には考えてよく、それだけに近地点高度に非常に敏感に左右される。

衛星設計上もっとも厳しい条件となるのは空気力によって太陽電池に生ずる熱である。太陽電池が直接空気の流れにさらされるような場合には破損する可能性がある。また破損されないまでも温度が過度に上ると、太陽電池の発電効率が落ちるために、かんじんの近地点高度におけるミッション遂行が制約を受けることになる。DASの場合は太陽電池を保護し、内部機器への熱入力が過大にならないよう防熱板をとりつけた形を用いている。しかしこの形状でも近地点を110kmとすることは熱的には臨界点に近い<sup>1)</sup>

この防熱板を有効に働かせるためには、近地点通過時に防熱板を進行方向に向けるような制御が要求される。現在計画しているスピン安定方式では空気力によるニュートーションにより一周毎に姿勢の残留の誤差を生ずるので、毎回太陽センサ、地球センサ等を用いて修正することが必要になる。

第二には大気抗力による軌道の減衰が上げられる。抗力が近地点でインパルス状に加わるため、近地点高度の低下は遠地点高度の低下に比べて極めて小さく、軌道減衰は主として遠地点側で起る。近地点の減衰を回復するためには姿勢制御用と同様のガスジェットを用いるが、遠地点の低下を回復するためにDASは推力中断可能な固体モータ(TMCロケット)を装備し、ある限度以下になったとき遠地点を数度にわたって引上げる計画である。それでも装備できるTMCモータの大きさに限度があるため、近地点高度を110kmに保てば、衛星の寿命は一週間以上とはならない。もし近地点高度に誤差を生じると軌道減衰に狂いが生じてTMCモータ運用の計画が乱れミッションに支障をきたす。

以上のごとく近地点を110kmにとる衛星においては、通常の衛星では体験しない大気の影響を受けるため、航法および制御の操作を一周毎に行なうというリアルタイム性が強く要求される。これを現行の我国の管制システムを用いて行なうことはかなり困難がある。まずDASが低軌道をとるかつ我国のレーダの分布が限られているために観測可能な時間が著しく小さいことである。レーダ地点の真上を通過しても近地点高度110kmでは5分、遠地点高度1000kmでも17分程度しか観測できない。地上局を増田、勝浦、マーシャル、クリスマスにとり近地点緯度を日本上空から離れた設定の場合でも、周回数の半分近くはこのレーダ網にかからない。近地点緯度を日本上空に近くとると可視率はもっと悪くなる。

ミッションモードにおいて近地点高度を110kmに下げる操作を行なうときは遠地点で逆推力をふかし、近地点が過度に下らないか確認する必要がある。もしこのとき、軌道決定後近地点が過度に下ることが推定されれば、近地点高度を上げるための操作を緊急処置として行なわなければならない。遠地点から近地点に到達するまでの時間は45～50分である。近地点を上げる操作はこの $\frac{1}{2}$ くらいの時間迄に行なうことが望ましいので、軌道決定および指令を20分で済ませなければならない。現存の我国の軌道決定プログラムはこのような要求をみたすものではないので、これを実現するためには短時間で軌道決定をし、指令をオンラインで発生させるようなシステムを作ることが必要である<sup>5)</sup>。そしてこのようなシステムが実現できたとしてもレーダ分布の制約から可視時間が定まるために、近地点位置の指定がなされて、ミッションからの要求による軌道設定の自由度が極度に限定されることになる。

また近地点を110kmにとったあと、もし次の2、3周の間レーダ網で捕えられない場合には、大気密度のゆらぎに関するデータが完全ではないのでその間に軌道が過度に減衰し回復不能になる恐れがある。

このようなDASを地上系のみで観測、運用を行なうことは困難を伴うとともにミッションの制約も強くすることになる。これを解決するために考えられるのは、バックアップシステムとしての搭載型航法系を用いるか、またはTDRSS(Tracking & Data Relay Satellite System)のような追跡システムを用いるかである<sup>6)</sup>。TDRSSが実現すれば可視率はずっと高くなり、運用上ばかりでなくミッションデータ伝送の上でも好都合である。しかし、TDRSSが遠方にあるためアンテナに指向性を持たせることが要求され、送信電力も大きくなければならないので衛星設計上大きな制約が加わる。TDRSSの実現性が不明な現状では、現行の管制システムをバックアップする意味での搭載型運用システムを考えておく方が無難であろう。

DASにおける搭載型運用システムの必要性は以上のような背景によっている。本報告の内容はそのうち搭載系による軌道決定に関する部分である。もっとも簡単な形では加速度計で近地点通過時の最大減速度を検出し、ある限度を越える減速度を検出すれば次の遠地点でガスジェットを噴出し近地点高度を上げるような指令を発生するシステムを考えることができる。さらに周回毎の最大減速度時刻を記憶すれば、その差をとることにより軌道周期を推定することができる。また加速度計計測値から推定される高度変化と軌道要素とを関係づけることによ

り軌道要素推定のために最小二乗推定法を適用すること  
も考えられる。本報告はできるだけ具体的な数値を用い  
てこのような方法の実現可能性を検討することを目的と  
している。

搭載型である以上航法システムに対する重量および消  
費電力への制限が加わるのは当然である。本報告で提案  
する計算式は非常に簡単なので処理時間および精度につ  
いてはどのような計算機でも問題はない、しかしプログ  
ラム可能であること、メモリを持っていること等電子計  
算機としての機能は要求されるので、衛星に搭載可能な  
計算機の実現を前提としている。衛星搭載型の電子計算  
機は、現在のところ日本国内では実現に至っていないが、  
すでにそのような試みはいくつかなされている。また、  
DAS の短寿命、極限試験衛星の性格を考えると、搭載型  
計算機の開発をも一つのミッションと考えた計画の遂行  
も不可能ではないと考えている。

米国におけるこの種の衛星としては Explorer があり、  
近地点高度を 135 km にとった飛しょうを行なっている。  
これはミッションは類似であるが、軌道面に垂直なスピ  
ン軸をもつ防熱板のない衛星であるため、軌道高度 135  
km 程度が限度であり、DAS よりは上空の大気観測を目  
的としている。軌道減衰が DAS ほど激しくはない、また  
米国ではレーダ観測点をよい地点に選べるという背景も  
あって、観測可能性を高めるために微小推力で軌道周期  
を変更し、地上系のみで観測運用を行なっている。

しかしながらこの米国の例においても加速度計を用い  
た推力測定結果を地上に送り、地上系による軌道推定の  
補助に用いている。また加速度計測定結果による大気密  
度の事後解析も行なっており、その結果でも加速度計に  
よる高度推定および運用系構成の可能性は指摘されてい  
る<sup>7)</sup>

## 2. 記 号

$a$	軌道長半径	[km]
$\mathbf{a}_j$	$\mathbf{A}$ の行ベクトル	
$A$	$=4\pi a^2 B \rho_p$	[km]
$A'$	$=B \rho_p n^2 a^2$	[km/s <sup>2</sup> ]
$\mathbf{A}$	$\mathbf{A}_i$ を行ベクトルとする $n \times k$ マトリクス	
$\mathbf{A}'$	パラメータ $\xi_j'$ を用いたときの $\mathbf{A}$	
$\mathbf{A}_i$	時刻 $t_i$ における $\xi$ に関する $y_c(\bar{\xi}, t_i)$ の勾配	
$B$	$=C_D S/2m$ , 弾道係数	[m <sup>2</sup> /kg]
$C_D$	衛星の抵抗係数	
$C_H$	大気抵抗に対する周期摂動を表わす式において 最低高度における下降速度を調節するための定 数	

$D$	単位質量当たりの大気抵抗	[km/s <sup>2</sup> ]
$e$	離心率	
$\mathbf{e}$	離心率のベクトル	
$E$	離心近点離角	[rad]
$E I_i$	$=\exp(-\beta) I_i(\beta)$ ( $i=0, 1, 2, \dots$ )	
$f$	$=x_D/K_D$	
$\mathbf{f}$	衛星に働く単位質量当たりの摂動力	[km/s <sup>2</sup> ]
$f_h$	$\mathbf{f}$ の $z_H$ 軸成分	[km/s <sup>2</sup> ]
$f_N$	$\mathbf{f}$ の軌道面内垂直内側方向成分	[km/s <sup>2</sup> ]
$f_r$	$\mathbf{f}$ の $x_H$ 軸方向成分	[km/s <sup>2</sup> ]
$f_T$	$\mathbf{f}$ の軌道接線方向成分	[km/s <sup>2</sup> ]
$f_\theta$	$\mathbf{f}$ の $y_H$ 軸方向成分	[km/s <sup>2</sup> ]
$F_{10.7}$	波長 10.7 cm の太陽光フラックス	
$\bar{F}_{10.7}$	$F_{10.7}$ の太陽三回転にわたっての平均	
$h$	$= \mathbf{h} $	[km <sup>2</sup> /s <sup>2</sup> ]
$\mathbf{h}$	衛星の単位質量当たりの角運動量ベクトル	[km <sup>2</sup> /s <sup>2</sup> ]
$H_a$	基準軌道の遠地点高度	[km]
$H_i$	大気密度データ区分点における高度	[km]
$H_m$	実軌道最低高度	[km]
$H_p$	基準軌道の近地点高度	[km]
$H_s$	大気密度モデルのスケール高度	[km]
$H(t)$	実軌道の時刻 $t$ における高度	[km]
$i$	軌道傾斜角	[rad]
$I_i(\beta)$	$i$ 次の変形された Bessel 関数 ( $i=0, 1, 2, \dots$ )	
$J_2$	地球の重力ポテンシャルにおける 2 次の Zonal 項の係数	
$k_i$	$=k(H_i)$	[1/km]
$k_m$	軌道最低点における $k(H)$	[1/km]
$k_p$	$=-(\partial \rho / \partial H) / \rho$ ( $H=H_p$ )	[1/km]
$k(H)$	$=-(\partial \rho / \partial H) / \rho(H)$ , スケール高度の逆数	[1/km]
$K$	$=J_2 R_\oplus^2 / a$	[km]
$K_D$	$=2B \rho_m a^2$	[km]
$K_H$	$x_H(t)$ を表わす $\sin nt$ の係数	[km]
$K_P$	地磁気指数	
$L$	衛星緯度	[rad]
$L_P$	基準軌道近地点における緯度	[rad]
$m$	衛星質量	[kg]
$M$	平均近点離角	[rad]
$n$	平均運動	[rad/min]
$N$	衛星の地球回り周回数	
$p$	semilatus rectum	[km]
$r$	基準軌道の地心距離	[km]
$\mathbf{r}$	地心から衛星に向うベクトル	[km]

$r_p$	近地点における基準軌道の地心距離	[km]	$\delta_s$	太陽赤経	[rad]
$R_e$	赤道面地球半径	[km]	$\Delta \log \rho$	基礎大気密度を $\rho$ とするときの $\log_{10} \rho$ の変動分	
$R_L$	緯度 $L$ における地球半径	[km]	$\Delta \ln \rho$	基礎大気密度を $\rho$ とするときの $\log_e \rho$ の変動分	
$R_\oplus$	地球半径	[km]	$\Delta \hat{\xi}$	最小二乗法により推定されるパラメータの誤差	
$S$	衛星の基準断面積	[km <sup>2</sup> ]	量 $\Delta \xi_j$ からなる $k$ 次のベクトル		
$t$	近地点または昇交点を原点とする時間	[min]	$\varepsilon$	衛星のもつ単位質量当たりのエネルギー (km <sup>2</sup> /s <sup>2</sup> )	
$t_m$	実軌道高度最低点通過時刻	[min]	$\varepsilon \xi_j$	パラメータ $\xi_j$ に対して設定された基準誤差	
$t_p$	近地点通過時刻	[min]	$\theta$	衛星の緯度引数	[rad]
$T$	周期	[min]	$\theta^*$	衛星の真近点離角	[rad]
$T$	最小二乗法適用区間の半分	[min]	$\theta_m^*$	実軌道最低高度における真近点離角	[rad]
$T_C$	外圏温度の夜間最低値	[°K]	$\mu$	重力加速度定数	[km <sup>3</sup> /s <sup>2</sup> ]
$T_L$	地点温度	[°K]	$\xi$	推定すべき $k$ 個のパラメータからなるベクトル	
$T_\infty$	外圏温度	[°K]	$\bar{\xi}$	$\xi$ に対する予測値	
$U_\oplus$	地球の重力ポテンシャル	[km <sup>2</sup> /s <sup>2</sup> ]	$\hat{\xi}$	測定値を用いて推定される $\xi$	
$v$	衛星の速度	[m/s]	$\xi'_j$	スケーリング変換された $\xi_j$	
$\mathbf{v}$	衛星の速度ベクトル	[m/s]	$\rho$	摂動を受けた軌道の基準軌道からの誤差ベクトル	[km]
$v_A$	大気に対する衛星の相対速度	[m/s]	$\rho_i$	$= \rho(H_i)$	[kg/km <sup>3</sup> ]
$\bar{v}_x$	$J_2$ 項による速度摂動の $X_H$ 軸成分	[m/s]	$\rho_m$	軌道最低高度における大気密度	[kg/km <sup>3</sup> ]
$\bar{v}_x$	初期値誤差の伝播誤差の $X_H$ 軸成分	[m/s]	$\rho(H)$	高度 $H$ における大気密度	[kg/km <sup>3</sup> ]
$\bar{v}_y$	$J_2$ 項による速度摂動の $y_H$ 軸成分	[m/s]	$\omega$	近地点引数	[rad]
$\bar{v}_y$	初期値誤差の伝播誤差の $y_H$ 軸成分	[m/s]	$\omega_H$	Euler Hill 座標系の慣性空間に対する回転角速度	[rad/s]
$x$	$\rho$ の $x_H$ 軸成分	[km]	$\mathcal{Q}$	昇交点赤経	[rad]
$\bar{x}$	$J_2$ 項による位置摂動の $x_H$ 軸成分	[km]	$\mathcal{Q}_r$	地点赤緯	[rad]
$\bar{x}$	初期値誤差の伝播誤差の $x_H$ 軸成分	[km]	$\mathcal{Q}_s$	太陽赤緯	[rad]
$x_H$	Euler Hill 座標系 $x$ 軸				
$x_D(t)$	大気抵抗による地心距離の摂動	[km]			
$x_a(t)$	$x_D(t)$ の永年摂動に関する項	[km]			
$x_P(t)$	$x_D(t)$ の周期摂動に関する項	[km]			
$x_H(t)$	$x_D(t)$ の最低高度における下降速度修正のための項	[km]			
$y$	$\rho$ の $y_H$ 軸成分	[km]			
$\bar{y}$	$J_2$ 項による位置摂動の $y_H$ 軸成分	[km]			
$\bar{y}$	初期値誤差の伝播誤差の $y_H$ 軸成分	[km]			
$y_H$	Euler Hill 座標系 $y$ 軸				
$y_C(\bar{\xi}, t_i)$	時刻 $t_i$ におけるパラメータの予測値 $\bar{\xi}$ を用いて計算される観測量				
$y_M(t_i)$	時刻 $t_i$ における観測量				
$z$	$\rho$ の $z_H$ 軸成分	[km]			
$z(\bar{\xi})$	$z_i(\bar{\xi})$ からなる $n$ 次の列ベクトル				
$z_i(\bar{\xi})$	時刻 $t_i$ における観測量と予測値から計算される観測量との差				
$z_H$	Euler Hill 座標系 $z$ 軸				
$\alpha_i$	$= (\partial k / \partial H)_{H=H_i}$	[1/km <sup>2</sup> ]			
$\beta$	$= k_m a e$				
$\delta_r$	地点赤経	[rad]			

### 3. DAS 軌道の永年変化の概略

DAS の軌道の概略についてはすでに数値計算による報告がなされている<sup>3)</sup>。本報告で搭載型航法システムに用いることを意図しているのは、付録 A, B, C に示すような解析的手法である。解析解は近似を用いるので長期にわたる高精度を要求される軌道発生には不向きであるが、DAS のように変化が激しく、短期的な予測が必要な場合には適している。簡単な代数計算で解がえられずとも、軌道変化のメカニズムが見通しのよい形でえられる利点がある。本章では付録 B および C に示す理論により、DAS の軌道に現われる永年の変化の概略について調べておく。

まず重力ポテンシャルの  $J_2$  項によって昇交点赤経  $\mathcal{Q}$  と近地点引数  $\omega$  とに変化が生じ

$$\frac{d\mathcal{Q}}{dN} = -3\pi J_2 \frac{R_\oplus^2}{(1-e^2)^2 a^2} c_i \quad (3.1)$$

$$\frac{d\omega}{dN} = 3\pi J_2 \frac{R_\oplus^2}{(1-e^2)^2 a^2} \left(2 - \frac{5}{2} s_i^2\right) \quad (3.2)$$

となる。 $a$  は長半径,  $e$  は離心率,  $R_{\oplus}$  は地球半径,  $i$  は軌道傾斜角,  $J_2$  は地球重力ポテンシャルの主要項の係数であり,  $c_i$  は  $\cos i$ ,  $s_i$  は  $\sin i$  の略記である。

$d/dN$  は軌道周回毎の変化量を示す。

大気による軌道減衰を, 大気の地球自転に伴う回転を無視して, 長半径  $a$  および近地点高度  $H_p$  について表わすと次式のようになる。

$$\frac{da}{dN} = -A \exp(-\beta) [I_0(\beta) + 2e I_1(\beta)] \quad (3.3)$$

$$\frac{dH_p}{dN} = -A \exp(-\beta) (1-2e) [I_0(\beta) - I_1(\beta)] \quad (3.4)$$

$$A = 4\pi a^2 B \rho_p, \quad \beta = k a e$$

$$\exp(-\beta) I_0(\beta) = \frac{1}{(2\pi\beta)^{1/2}} \left[ 1 + \frac{1^2}{1!(8\beta)} + \frac{1^2 \cdot 3^2}{2!(8\beta)^2} + \dots \right]$$

$$\exp(-\beta) I_1(\beta) = \frac{1}{(2\pi\beta)^{1/2}} \left[ 1 - \frac{1 \cdot 3}{1!(8\beta)} - \frac{1^2 \cdot 3 \cdot 5}{2!(8\beta)^2} \dots \right]$$

ただし  $B$  は弾道係数,  $\rho_p$  は大気密度,  $k$  は大気密度モデルにおける基準高度の逆数であり,  $I_0$  および  $I_1$  は変形された Bessel 関数である。

もし大気が地球自転と同速度  $\omega_{\oplus}$  で回転すると仮定すると, 上記の  $a$  および  $H_p$  の変化率は共に  $1-2\omega_{\oplus} c_i / n$

倍したものになる。またこの場合には軌道傾斜角にも変化を生じ,

$$\frac{di}{dN} = -\pi a \frac{\omega_{\oplus}}{n} B \rho_p S_i \exp(-\beta) \cdot \left[ (1+C_{2\omega}) I_0(\beta) - \frac{2}{\beta} C_{2\omega} I_1(\beta) \right] \quad (3.5)$$

となる。

これらの変化量の概略値をえるため, DAS のミッション軌道の中から代表的な数値を選び, 次のように設定する。

$$H_p = 110 \quad [\text{km}]$$

$$H_a = 600, 1000, 2000 \quad [\text{km}]$$

$$i = 70 \quad [\text{deg}]$$

$H_a$  は遠地点高度である。この設定により直ちに  $\dot{Q}$  と  $\dot{\omega}$  の変化率が求められる。

さらに大気抵抗による軌道減衰を求めるために次のような設定値を用いる。

$$\rho_p = 9.937 \times 10^{-8} \quad [\text{kg/m}^3]$$

$$k = 0.1580 \quad [1/\text{km}]$$

$$B = 0.00616 \quad [\text{m}^2/\text{kg}]$$

弾道係数  $B$  は DAS の質量  $m$  を 250 [kg], 直径  $d$  を 1.4

表 3.1 DAS 軌道の永年変化の概略

$H_a$ [km]	600	1000	2000
$a$ [km]	6733.16	6933.16	7433.16
$e$	0.036387	0.064184	0.127133
$\frac{dQ}{dN}$ [rad]	$-3.138 \times 10^{-3}$	$-2.976 \times 10^{-3}$	$-2.653 \times 10^{-3}$
[deg]	-0.1798	-0.1705	-0.1520
$\frac{d\omega}{dN}$ [rad]	$-1.902 \times 10^{-3}$	$-1.799 \times 10^{-3}$	$-1.584 \times 10^{-3}$
[deg]	-0.1090	-0.1031	-0.0908
$A$	348.584	369.600	424.831
$\beta$	36.8942	67.0121	142.307
$\exp(-\beta) I_0(\beta)$	0.0659022	0.0488250	0.0334717
$\exp(-\beta) I_1(\beta)$	0.0650168	0.0484614	0.0333542
$\frac{da}{dN}$ [km]	-26.29	-19.20	-17.77
$\frac{dH_a}{dN}$ [km]	-0.2862	-0.1171	-0.03723
$n$ [rad/s]	$1.14273 \times 10^{-3}$	$1.09364 \times 10^{-3}$	$0.98517 \times 10^{-3}$
$2 \frac{\omega_{\oplus}}{n} c_i$	0.04353	0.04548	0.05049
$\frac{di}{dN}$ [rad]	$7.525 \times 10^{-5}$	$6.039 \times 10^{-5}$	$4.953 \times 10^{-5}$
[deg]	$4.312 \times 10^{-3}$	$3.460 \times 10^{-3}$	$2.838 \times 10^{-3}$

[m], 抵抗係数  $C_D$  を 2.0 とし  $B = C_D S / 2m$  により計算した数値である。基準面積  $S$  は  $\pi d^2 / 4$  である。この設定により (3.3) および (3.4) を用いて  $a$  および  $H_p$  の周回りの変化量が求められる。

さらに近地点引数を

$$\omega = 30 \quad [\text{deg}]$$

と設定すると (3.5) を用いて大気の内転速度による衛星の軌道傾斜角変化量が求められる。

このプロセスを追っての計算例を表 3.1 に示す。計算に用いた定数値は以下の通りである。

$$R_{\oplus} = 6378.16 \quad [\text{km}]$$

$$J_2 = 0.001082$$

$$\mu = 3.98604 \times 10^5 \quad [\text{km}^3/\text{s}^2]$$

$$\omega_{\oplus} = 0.727221 \times 10^{-4} \quad [\text{rad/s}]$$

重力ポテンシャルの主要項 (以下  $J_2$  項と略称する) に関する変化量を記述する式は一般に用いられており、よい精度をもっていることが知られている。しかし軌道長半径  $a$  の二乗の項を含んでいるため、 $a$  に誤差を含んでいればその二倍の率の誤差を生ずることになる。

大気抵抗による軌道減衰に関する量  $da/dN$  および  $dH_p/dN$  は、(3.3) および (3.4) がもっと高い高度での適用を考えて作られた式なので、正確であるとはいえない。地球の内転による影響を考慮すると、いずれも  $1 - 2 \frac{\omega_{\oplus}}{n} c_i$  倍になるので 4 ~ 5 % 減になる。しかしこの補正を必要とするほどの精度が (3.3) および (3.4) でえられているかどうかは問題である。

大気の内転に伴う回転による軌道傾斜角  $i$  の変化率は、 $J_2$  項による  $Q$  および  $\omega$  の変化率と比べるとずっと小さい。

#### 4. $J_2$ 項による周期摂動

DAS の軌道の初期解析<sup>3)</sup> では、ケプラー運動を用いて近地点で衛星の位置および速度を計算し、初期値としてシミュレーションプログラムに与えた。この結果、 $J_2$  項の影響により、実現される軌道は想定したケプラー運動に対して最大 20 km もの地心距離変化を示すことが指摘された。加えて緯度による地球半径の変化も存在するため、地球表面からの軌道高度は複雑な変化を示し、高度最低点を予測することが困難となっていた。この問題は DAS の運用計画のためばかりでなく、航法系構成に関しても重要なので本章において解析的に取扱う。

問題点を明瞭にするために、初期解析の場合と設定を

やゝ変えて、赤道面軌道と極軌道についてまずシミュレーションを行なった<sup>\*</sup>。シミュレーションの方法としては、初期点の局所地球半径に高度 200 km を加えた半径の円軌道を考え、摂動力が加わらない場合の軌道すなわちケプラー運動を基準軌道として計算し、つぎに同じ初期条件を用いて重力ポテンシャルに  $J_2$  項を加えた場合の軌道を計算した。初期解析の場合と同じように、後者の高度から基準運動の高度を差引いて示したのが図 4.1 である。

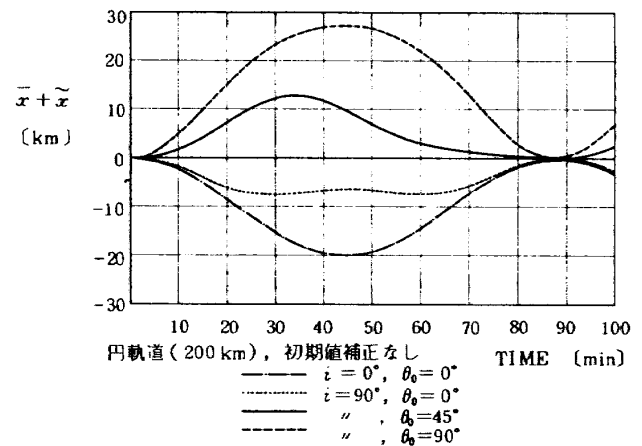


図 4.1 ケプラー運動を仮定して初期値を与えたときの  $J_2$  項による高度の摂動

極軌道の場合は、初期点  $\theta_0$  を  $0^\circ$ ,  $45^\circ$ ,  $89^\circ$  の三種類にとっている。

高度のゆらぎは極軌道で初期点を北極上にとったときが一番大きく、高度差 28 km におよぶ。このゆらぎの原因が  $J_2$  項を入れたことにあることは明らかであるが、これを直ちに  $J_2$  項による摂動とみなすのは適切ではない。付録 B によれば、 $J_2$  項が存在するときの軌道面内の摂動は (B10), (B11) により次式で表わされる。

$$\bar{x} = \frac{1}{2} K \left( 1 - \frac{3}{2} s_i^2 + \frac{1}{2} s_i^2 c_{2\theta} \right) \quad (4.1)$$

$$\bar{y} = \frac{1}{8} K s_i^2 s_{2\theta} \quad (4.2)$$

$$K = J_2 a \left( \frac{R_{\oplus}}{a} \right)^2$$

ただし  $\bar{x}$ ,  $\bar{y}$  は Euler Hill 座標系の  $x_H$ ,  $y_H$  軸方向の摂動である。 $x_H$  軸は地球中心から衛星に向けた方向、 $y_H$  軸は  $x_H$  に垂直に進行方向にとった座標軸である。

Euler Hill 座標系は角速度  $\omega_H = (0, 0, n)$  をもつ回転座標系であるから、位置摂動  $\mathbf{p} = (x, y, z)$  の慣性空間に関する変化率、すなわち速度の摂動は

\* 本章および次章におけるシミュレーションには、大坪氏が初期解析に関連して作られたプログラムを使わせていただいた。



$$\dot{\rho}|_I = \dot{\rho}|_H + \omega_H \times \rho \quad (4.3)$$

で表わされる。成分表示すると

$$\begin{pmatrix} \dot{\bar{x}} \\ \dot{\bar{y}} \\ \dot{\bar{z}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{\bar{x}} \\ \dot{\bar{y}} \\ \dot{\bar{z}} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ n \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \\ \bar{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{\bar{x}} - n\bar{y} \\ \dot{\bar{y}} + n\bar{x} \\ \dot{\bar{z}} \end{pmatrix} \quad (4.4)$$

すなわち

$$\dot{\bar{v}}_x = -\frac{5}{8}nKs_i^2s_{2\theta} \quad (4.5)$$

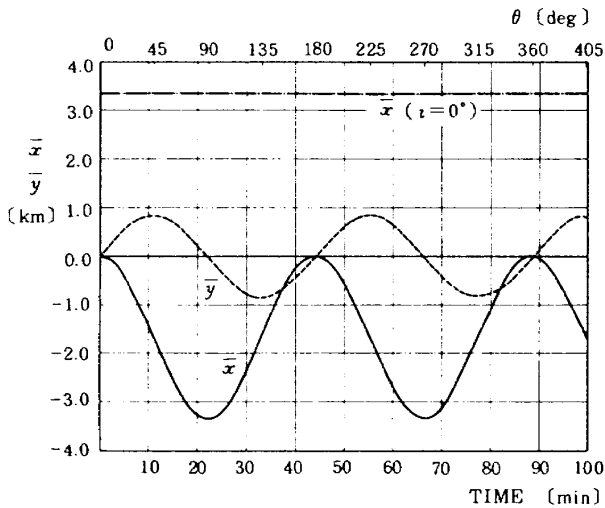
$$\dot{\bar{v}}_y = \frac{1}{2}nK(1 - \frac{3}{2}s_i^2 + s_i^2c_{2\theta}) \quad (4.6)$$

となる。

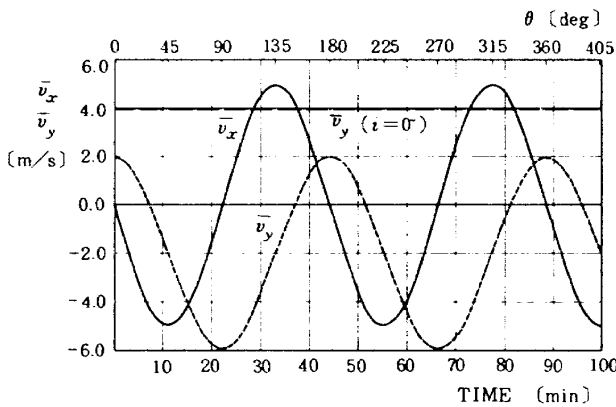
本節初めに示した円軌道のうち、赤道面軌道の場合は  $i=0^\circ$  であるから

$$\bar{x} = 3.3395 \text{ [km]}, \quad \bar{y} = 0$$

$$\bar{v}_x = 0, \quad \bar{v}_y = 3.9518 \text{ [m/s]}$$



a. 位置摂動



b. 速度摂動

図 4.2 赤道面円軌道および極円軌道に現われる  $J_2$  項による摂動

となる。すなわち赤道面上 200 km 高度の円軌道を基準軌道とすると、 $J_2$  項による摂動を受けた軌道はそれより 3.3395 km 軌道半径の大きい円軌道となる。

つぎに 200 km 高度極円軌道の場合について、初期点を昇交点にとった場合の  $\bar{x}$ ,  $\bar{y}$ ,  $\bar{v}_x$ ,  $\bar{v}_y$  の軌道に沿っての変化を図 4.2 a, b に示す。 $J_2$  項による極円軌道への摂動は、赤道面上すなわち図 4.2 の  $\theta=0$  においては、 $\bar{x}$  および  $\bar{v}_y$  のみに現われ他は 0 となる。したがってこの場合は、赤道面円軌道の場合と同じく、 $\bar{x}$  および  $\bar{v}_y$  のみについて初期値補正を施せば、基準軌道に対応する摂動を受けた軌道がえられる。極円軌道において  $\theta=0$  以外の点、たとえば  $\theta=45^\circ, 90^\circ$  等においては  $\bar{x}$ ,  $\bar{y}$ ,  $\bar{v}_x$ ,  $\bar{v}_y$  のいずれもが 0 ではない。したがって、これらの点からシミュレーションを開始する場合には、基準軌道に対応する初期値の中にこの摂動量をうまくとり込まなければえられる軌道は基準軌道に単にこの摂動分を加えたものではなくなる。

シミュレーションの初期値にこの修正を施さなかったとしよう。このとき初期値誤差は  $-\bar{x}_0$ ,  $-\bar{y}_0$ ,  $-\bar{v}_{x0}$ ,  $-\bar{v}_{y0}$  であるから、伝播誤差は (A18) により

$$\begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \\ \tilde{v}_x \\ \tilde{v}_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-c_{nt} & s_{nt} & \frac{1}{n}s_{nt} & \frac{2}{n}(1-c_{nt}) \\ 2s_{nt}-3nt & -1+2c_{nt} & -\frac{2}{n}(1-c_{nt}) & \frac{4}{n}s_{nt}-3t \\ -ns_{nt}-3n^2t & n-n_{nt} & 2-c_{nt} & -2s_{nt}+3nt \\ nc_{nt}-n & -ns_{nt} & -s_{nt} & 2c_{nt}-1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \bar{x}_0 \\ \bar{y}_0 \\ \bar{v}_{x0} \\ \bar{v}_{y0} \end{pmatrix} \quad (4.7)$$

となる。ただし  $t$  の原点は初期点である。初期点を基準軌道の近地点に選べば、擬似円運動の仮定により  $nt \simeq \theta^*$  と置きかえてもよい。

したがって初期値補正を行わない場合のシミュレーションによって発生される軌道は、基準軌道から  $\bar{x} + \tilde{x}$ ,  $\bar{y} + \tilde{y}$ ,  $\bar{v}_x + \tilde{v}_x$ ,  $\bar{v}_y + \tilde{v}_y$  だけずれることになる。図 4.1 のたて軸、すなわち高度のずれを  $\bar{x} + \tilde{x}$  と書いたのはこの理由による。

赤道面円軌道の場合、シミュレーションにおいて初期値補正を施さなかったとすると、基準軌道からのずれは

$$\bar{x} + \tilde{x} = 3.3395(-3 + 3c_{nt}) \quad [\text{km}]$$

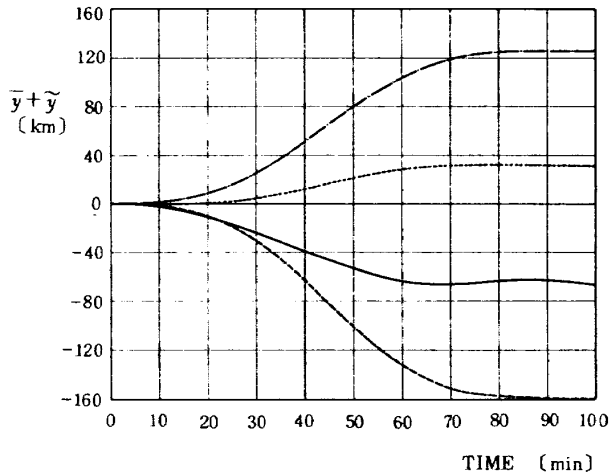
$$\bar{y} + \tilde{y} = 3.3395(6nt - 6s_{nt}) \quad [\text{km}]$$

$$\bar{v}_x + \tilde{v}_x = 3.9518 \times 3s_{nt} \quad [\text{m/s}]$$

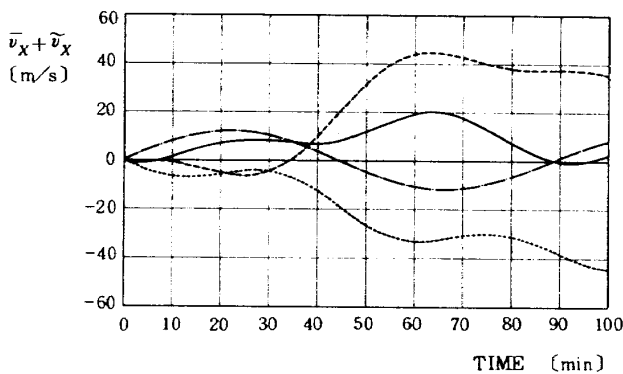
$$\bar{v}_y + \tilde{v}_y = 3.9518(3 - 3c_{nt}) \quad [\text{m/s}]$$

という形になる。 $\bar{x} + \tilde{x}$ については図4.1に示したシミュレーション結果(一点鎖線)と線の太さの範囲で一致する。

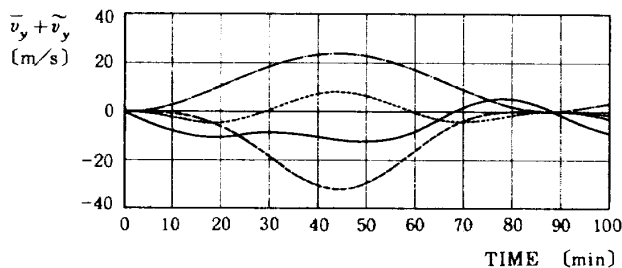
極円運動の場合についても、初期値補正をしなかったとして、そのときの基準軌道からのずれ $\bar{x} + \tilde{x}$ ,  $\bar{y} + \tilde{y}$ ,  $\bar{v}_x + \tilde{v}_x$ ,  $\bar{v}_y + \tilde{v}_y$ を(4.1), (4.2), (4.5), (4.6) および



a.  $\bar{y} + \tilde{y}$



b.  $\bar{v}_x + \tilde{v}_x$



c.  $\bar{v}_y + \tilde{v}_y$

—  $i = 0^\circ, \theta_0 = 0^\circ$   
 ---  $i = 90^\circ, \theta_0 = 0^\circ$   
 .....  $i = 90^\circ, \theta_0 = 45^\circ$   
 - · -  $i = 90^\circ, \theta_0 = 90^\circ$

図 4.3 シミュレーションにおいて初期値補正をしなかった場合の基準軌道からのずれ

(4.7)を用いて解析的に求め、赤道面の場合とあわせて示すと図4.3のようになる。 $\bar{x} + \tilde{x}$ の解析解についてはシミュレーション結果図4.1とほぼ完全に一致するため図は省略した。

シミュレーションプログラムの出力から $\bar{y} + \tilde{y}$ ,  $\bar{v}_x + \tilde{v}_x$ ,  $\bar{v}_y + \tilde{v}_y$ に相当する量を算出することも可能である。まず初期値補正を行なわなかった場合の軌道、および $J_2$ 項を含まない基準軌道の二通りに対して緯度 $L$ が算出されているので、それぞれについて

$$\theta = \sin^{-1}(\sin L / \sin i) \quad (4.8)$$

により緯度引数を計算し、両者の差に局地地球半径を乗ずることにより $\bar{y} + \tilde{y}$ がえられる。 $\bar{v}_y + \tilde{v}_y$ は単純な二ケースの速度差からよい近似値がえられる。また地心方向の速度がそれぞれについて出力されているので、この差から $\bar{v}_x + \tilde{v}_x$ をえることが考えられる。しかしこの量は、その時刻におけるEuler Hill座標系の原点における地心方向速度ではなく、それから $\bar{y} + \tilde{y}$ だけずれた点での地心方向速度である。したがって、座標系の回転に関する修正を加えると、これはけっきょく

$$\bar{v}_x + \tilde{v}_x + n(\bar{y} + \tilde{y}) = \dot{\bar{x}} + \dot{\tilde{x}}$$

に相当することがわかる。

$\bar{y} + \tilde{y}$ および $\bar{v}_y + \tilde{v}_y$ については $\bar{x} + \tilde{x}$ の場合と同様シミュレーション結果は、解析解と図4.3のグラフ上ほぼ線の太さの範囲で一致している。 $\dot{\bar{x}} + \dot{\tilde{x}}$ についても比較をするとよい一致をみることが確認されている。

さてそれではつぎに、近似解(4.1)~(4.4)を用いてシミュレーションに対する初期値補正を行なうことにより、 $J_2$ 項による摂動を受けた軌道をシミュレーションでどの程度うまく再現できるかについて検討しよう。Euler Hill座標系で表わされる補正量 $\bar{x}$ ,  $\bar{y}$ ,  $\bar{v}_x$ ,  $\bar{v}_y$ (表4.1)を厳密にシミュレーションの初期値にとりこむことは、用いたプログラムでは困難なので、次のような近似的方法をとった。

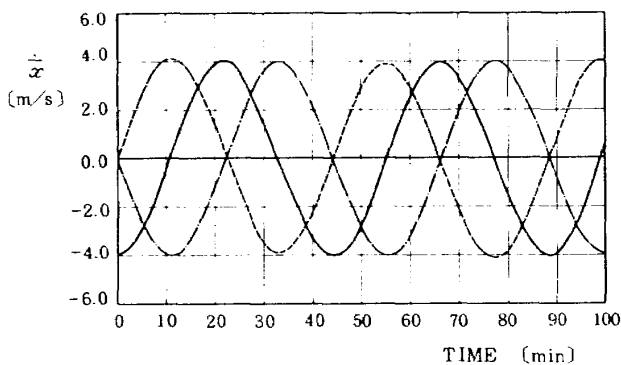
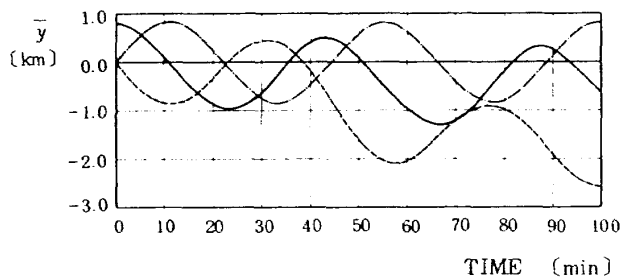
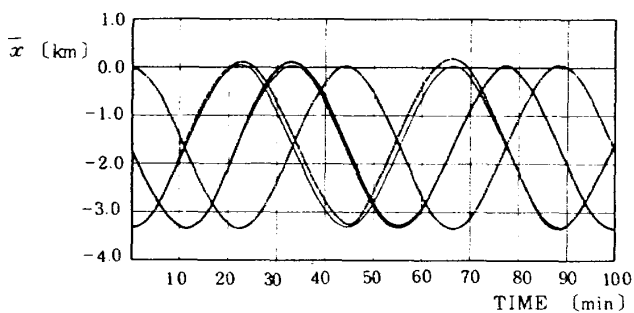
- i) 基準軌道の初速の進行方向および地心距離方向成分に $\bar{v}_x$ ,  $\bar{v}_y$ を加え、摂動を受ける軌道の初速とする。
- ii) 基準軌道の初期緯度引数にその点における $\bar{y}/r$ を加え、摂動を受ける軌道の初期緯度引数 $\theta'_0$ とする。
- iii) 基準軌道の初期地心距離に $\bar{x}$ を加えた量を摂動を受ける軌道の初期地心距離 $r'_0$ とする。

この方法をまず先に用いた赤道面円軌道および極円軌道の例に適用してみた。 $J_2$ 項を含み初期値補正を施したシミュレーション結果と基準軌道との同時刻の出力を用いて、先に行なったと同様の方法により、 $\bar{x}$ ,  $\bar{y}$ ,  $\dot{\bar{x}}$ ,  $\dot{\bar{y}}$ を求めた。赤道面円軌道の場合は基準軌道に対して半径が3.34 km, 速度が3.95 m/s大きな円運動になるとい

表 4.1 円軌道初期点における $J_2$ 項による摂動

ケース	1	2	3	4
$i$	$0^\circ$	$90^\circ$	$90^\circ$	$90^\circ$
$\omega$	$0^\circ$	$0^\circ$	$45^\circ$	$90^\circ$
$\bar{x}$ [m]	$0.33395 E+4$	$0.10171 E-2$	$-0.16654 E+4$	$-0.33250 E+4$
$\bar{y}$ [m]	0.0	0.0	$0.83318 E+3$	$0.29027 E+2$
$\bar{v}_{x0}$ [m/s]	0.0	0.0	$-0.49417 E+1$	$-0.17259 E+1$
$\bar{v}_{y0}$ [m/s]	$0.39518 E+1$	$0.19765 E+2$	$-0.19755 E+1$	$-0.59307 E+1$

う解析解と完全に一致する結果がえられた。極円軌道の三つのケースに対する計算結果については図 4.4 に示す。

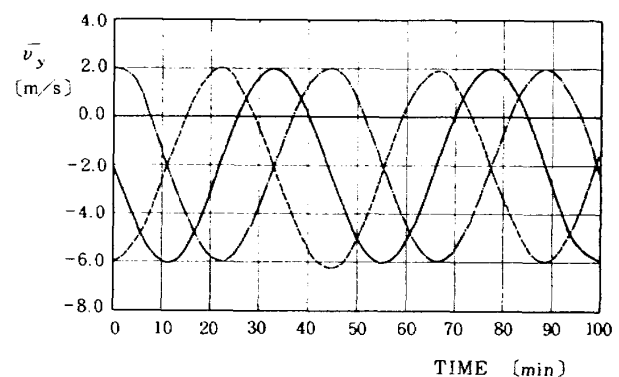
c.  $\dot{x}$ 

まず $\bar{x}$ および $\bar{v}_y$ については解析解とよく一致している。 $\bar{x}$ の場合のみは解析結果を細線で同じグラフ上に重ねて示してある。 $\bar{y}$ については $\omega=0^\circ$ の場合のみ解析解と一致するが、 $\theta_0=45^\circ, 90^\circ$ の場合は負の側へドリフトする傾向を示す。 $\dot{x}$ については解析解の $\bar{v}_x$ と比べるとちょうど4/5の振幅をとっている。そこで

$$\bar{v}_x = \dot{\bar{x}} - n\bar{y}$$

に対して(4.6), (4.7)を適用してみると $\dot{\bar{x}}$ と $-n\bar{y}$ との比は4:1になっている。したがって $\dot{\bar{x}}$ は正確な結果であることがわかる。

けっきょく $\bar{y}$ 以外については、このような補正方法でも解析解とシミュレーション結果は、図示する範囲でよく一致する。 $\bar{y}$ については、初期値補正を行なわなかったときの結果図 4.3(a)からも明らかなように、初期値設定誤差に対して伝播誤差が大きくなりやすい。円軌道に対してEuler Hill方程式の解は十分の精度をもっているため、この $\bar{y}$ に生ずる誤差はシミュレーションにおける初期値補正方法に厳密さが欠けていることによると考

d.  $\dot{y}$ 

---  $i=89^\circ, \theta_0=0^\circ$   
 --- " ,  $\theta_0=45^\circ$   
 --- " ,  $\theta_0=90^\circ$

図 4.4 極円軌道(高度 200 km)に対してシミュレーションよりえられる $J_2$ 項摂動量

表 4.2 DAS 軌道初期点における  $J_2$  項による摂動

$i$	$70^\circ$
$\omega$	$30^\circ$
$\bar{x}_0$	$-0.32856 \ E+3$
$\bar{y}_0$	$0.60527 \ E+3$
$\bar{v}_{x0}$	$0.40544 \ E+0$
$\bar{v}_{y0}$	$0.33131 \ E+1$

えられる。

さてそれでは今回対象となる離心率をもった DAS の軌道に対して同じ方法を適用してみると、解析解とシミュレーションの結果とにどの程度の差異が現われるであろうか。

標準的な DAS 軌道のうちから

$$H_p = 110 \quad (\text{km})$$

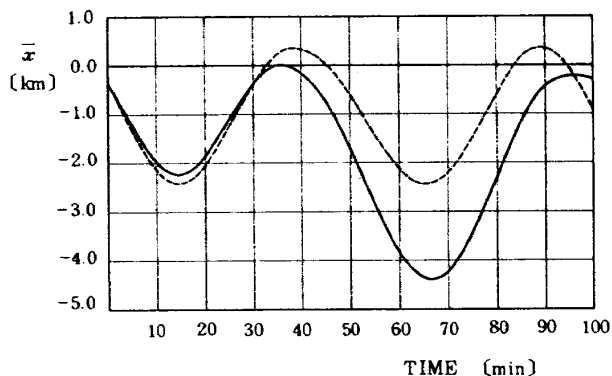
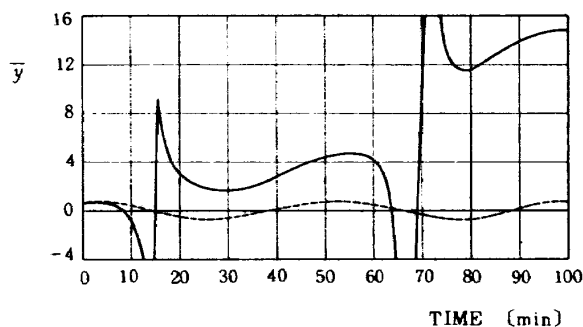
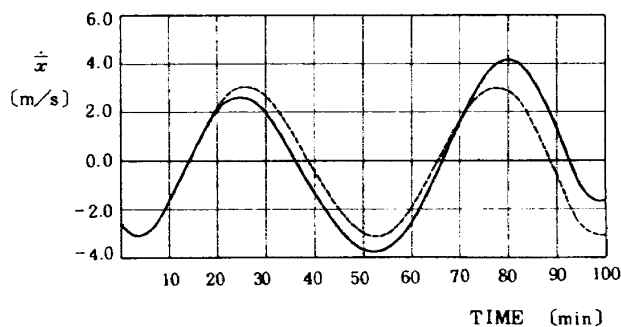
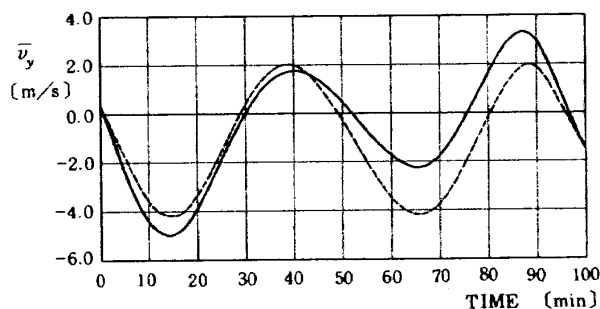
$$H_a = 1000 \quad (\text{km})$$

$$\omega = 30^\circ$$

$$i = 70^\circ$$

を例として選んだ。表 4.2 はこの軌道の近地点における  $J_2$  項による摂動量の Euler Hill 方程式の解による計算値である。この摂動量を初期値に対する補正量として円軌道の場合と同様の方法により補正を施したときえられるシミュレーション結果と基準軌道との差をとって解析解と比較したのが図 4.5 である。この場合、解析解は擬似円運動の仮定をもって解かれているので当然誤差を含んでいる。図 4.5 における両者の差は、この解析解の一周にわたっての誤差と、シミュレーションの初期値設定の誤差の伝播分とが重畳している。図 4.2 と図 4.3 との比較からも明らかなように、初期値設定の誤差は拡大されて伝播するので、この場合の両者の差にも初期値誤差の伝播分がかなり入っていると考えられる。

$y$  に非常に大きな誤差が現われる。ことに緯度最高点  $\pm 70^\circ$  を通過する点  $t=15$  および  $67 \text{ min}$  に特異性が現われる。これは  $y$  を求めるために (4.8) を用いたためと思われるが、円軌道においては現われなかったもので、正確な理由はわからない。 $y$  に大きな誤差を生ずると、緯度差による地球半径の相異による高度誤差を生じ、地表面からの高度の差として算出した  $x$  に実際以上の大きな誤差を生じている可能性がある。 $J_2$  項の影響だけをみるためには、 $x$  は地心距離の差にとるべきであったが、後の航法系構成のためには高度の推定精度が必要であるため地表面からの高度差でとっている。したがって  $y$  の誤差の大きい時間帯における  $x$  の誤差はやゝ過大になっていると考え

a.  $\bar{x}$ b.  $\bar{y}$ c.  $\dot{\bar{x}}$ d.  $\dot{\bar{y}}$ 

----- 解析解  
 ——— シミュレーション結果と  
 基準軌道との差

図 4.5 DAS 軌道に対する  $J_2$  項による摂動

てよい。この点を含めて考えると  $y$  を除く他の  $x$ ,  $\dot{x}$ ,  $\ddot{y}$  等は比較的よい一致をみている。

ことに本報告における応用上問題となるのは近地点前後の高度の摂動の精度であるが、近地点後 30 min 程度では一致度がよく、近地点前でも同様の精度が見込まれる。したがって離心率をもった DAS 軌道に対しても、近地点前後の短時間に対しては Euler Hill 方程式の解による高度摂動の表現はよい近似を与えると考えてよい。

またケプラー運動を用いてミッション計画をたて、シミュレーションによって確認しようとする場合に、本章で用いたような初期値補正を行えば、完全な対応はとれないまでも、初期値誤差の伝播による両者の過度な軌道の差異を防ぐことができる。

本章では、 $J_2$  項の周期摂動についての全般的な見通しを与えるために簡明な方法を用いた。この問題をより厳密に論ずるためには一般摂動理論を用いなければならない。一般摂動論においては、摂動を受けた軌道の各時刻における接触楕円の要素を接触軌道要素、またこれから摂動を除去した軌道の要素を平均軌道要素と呼び、この両者の解析的な変換式が与えられている<sup>10)</sup>。接触軌道要素から周期摂動のみを除去した軌道要素を平均軌道要素と呼ぶ場合も多いが、ここでは便宜上前者を用いることとする。

接触軌道要素からケプラー運動の関係式を用いて算出される位置および速度は、同時刻の実軌道のそれと一致する。したがって実軌道を現わしているシミュレーション結果（特殊摂動法による解）は接触軌道要素と等価と考えるとよい。一般摂動論における平均軌道要素と接触軌道要素との関係は、本章における基準軌道と摂動を受けた場合の軌道との関係に類似している。一般摂動論を用いて Euler Hill 方程式の解を検証すること、とくに離心率の影響を論ずることは可能であるし、また必要でもある。しかしながら平均軌道要素で表わされる軌道と Euler Hill 方程式で用いた基準軌道とが一致していないために、直接的に一般摂動論の結果を用いることができず、かなり複雑な数式を扱う必要がある。見通しをたてる上では Euler Hill 方程式の解でも十分なので、この問題は次の機会に譲ることとする。

## 5. 大気抵抗による軌道の変化

### 5.1 大気抵抗による軌道減衰の近似式の精度

第 3 章に示した大気抵抗に対する軌道減衰の近似式が軌道予測の立場からどの程度の精度をもつかについて検討する。この近似解はもともと衛星の軌道寿命を、近地点のもっと高い軌道について大ざっぱに推定するために作られた式なので、DAS の軌道予測に適用するためには

精度上の詳細検討が必要である。

前章で述べたように、 $J_2$  項による摂動を受けた軌道と基準軌道とでは高度にして数 km の差を生ずる。したがって基準軌道を用いて計算された近地点高度をそのまま近似式に適用した場合は、この数 km の高度差の影響が出る可能性がある。110 km 付近の高度では 10 km 毎に大気密度が 5, 6 倍になるくらいに敏感なので、軌道減衰量を正確に予測するためには大気密度が最大となる地表面からの実際の軌道の高度が最低となる点を探さねばならない。この最低点は単に  $J_2$  項による変動ばかりでなく、緯度による地球半径の変化もからんでくるので簡単には求まらない。これについては軌道予測の問題と合わせて 7 章で論ずる。ここでは地表面からの軌道最低点を合わせることでできた場合、軌道減衰の式がどのような精度をもつかについて検討する。

DAS 軌道の初期解析<sup>3)</sup>において、地表面からの最低高度に対する軌道減衰量が求められているので、この最低高度を近似式における近地点と一致させ、遠地点高度を 1000 km として計算した結果を図 5.1 に示す。実線が初期解析におけるシミュレーション結果であり、破線が近似式の計算結果である。用いた設定はほぼ 4.1 節に等しい。ただし初期解析においては、 $J_2$  項による初期値補正を行っていないので、前章で記したような意味での遠地点高度の狂いはある。しかし遠地点の多少の違いは軌道減衰量にはあまり影響を与えないので無視してもよい。また初期解析では、初期近地点緯度を北緯 35° としているので、近地点引数は

$$\omega = \sin^{-1}(\sin 35^\circ / \sin 70^\circ) = 37.62^\circ$$

であって、4 章で解析解のために設定した  $\omega = 30^\circ$  とはやゝずれている。しかし地表面からの高度を等しくとれば、これによる誤差もほとんど生じない。

大気密度は初期解析では 120 km までは U. S. Standard Atmosphere Supplements 1966 により解析的に、120 km 以上については Models of Earth Atmosphere, NASA SP-8021(1969) に外圏温度を 1200°K としたときのデータに基づいて数点を与え、内挿法によりその間のデータを発生させている。近似式の方は 1971 年の Jacchia<sup>10)</sup> の基礎表として算出されている数値のうち外圏温度 1000°K の場合の数値を用いている。両者を大気減衰の関係する低高度について図示すると図 5.2 のごとくである。高度 110~150 km における両者の差は十分に小さくなっている。

遠地点高度の減衰量は図 5.1 にみる通り近似式を用いた場合もシミュレーション結果とかなりよく一致している。近地点高度の減衰は、量としては小さいが、率にす

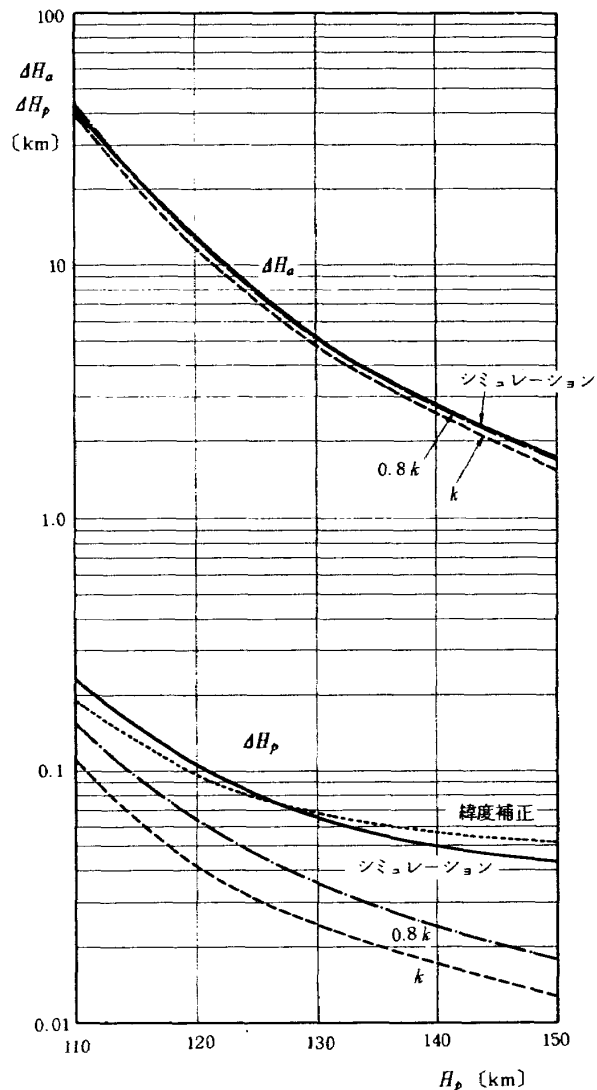


図 5.1 大気抵抗による遠地点および近地点高度の減衰 ( $H_a=1000$  km)

ると大きい、近地点における誤差が大きい理由は二つ考えられる。その一は近似解をもとめるための仮定として、大気密度を近地点における接線で扱っていることによる。接線で表わされる大気密度は、実際の大気密度より高高度になるにしたがって小さくなる。したがって近似式がこの仮定のもとについて正確な解を与えていれば、近地点および遠地点での減衰量は小さくなる。しかし大気抗力は近地点近傍で圧倒的に強いので、この周辺の近信がよければ主として遠地点側で生じる軌道の減衰については精度は比較的よい。逆に遠地点側での大気抵抗がきく近地点高度減衰の精度は悪くなる。

接線近似の誤差を補正するためには、接線の勾配を小さくして高高度における大気密度を増すことが考えられる。近地点高度120kmにおける大気密度の接線とその勾配を0.8倍にしたときの直線近似を図5.2に示す。この

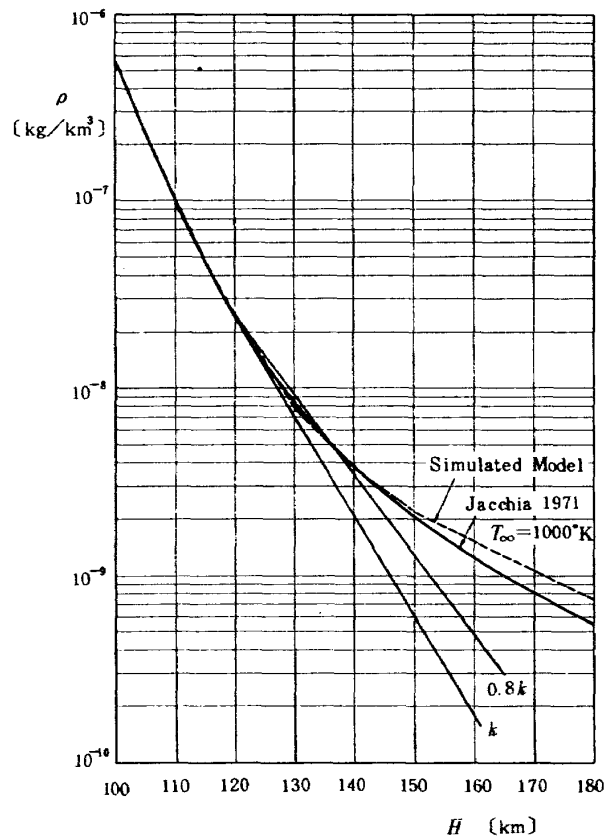


図 5.2 初期解析および近似式で用いた大気密度

勾配を種々に変えた場合の近地点および遠地点高度の減衰量を表5.1に示す。ともに勾配を小さくすることにより補正効果がある。ことに遠地点高度の減衰の誤差は、勾配を0.8倍にするとりに近くなる。

大気密度の直線近似の勾配を0.8倍して他の近地点高度に対しても減衰量を近似式で求めた結果は図5.1に一点鎖線で示してある。遠地点高度減衰については各近地点高度に対してよい補正効果を示している。近地点高度減衰についても率としては遠地点側よりも大きな補正がなされている。しかしまだ十分にシミュレーション結果に近くはない。

表 5.1 大気密度直線近似モデルの勾配と近地点および遠地点高度減衰

	$\frac{dH_p}{dN}$	$\frac{dH_a}{dN}$
$k_0$	0.042	11.43
$0.9 k_0$	0.049	12.00
$0.8 k_0$	0.067	12.72
$0.7 k_0$	0.072	13.60
シミュレーション	0.110	13.00

この誤差が残っている大きな理由、すなわち近地点高度減衰誤差の第二の理由は、シミュレーション側では  $J_2$  項を含んでいるため近地点の緯度に変化を生じ、局地地球半径を通して近地点高度に生じた変化を近似式の方で評価していなかったことによる。第3章の結果によれば、近地点引数  $\omega$  の変化は約  $-0.1^\circ$  である。近地点高度 120 km,  $\omega = 37.6^\circ$  の場合について計算してみると 0.034 km の近地点高度減衰に相当する。これは近地点地心距離の変化ではないが、地表面からの高度として表現するときには考慮に入れなければならない量である。この補正を施すと地球表面からの近地点高度の減衰量として図 5.1 の点線をえる。近地点高度によらず修正量は一定であるが、対数目盛であるため近地点高度の低い方では小さく、高い方では大きく現われる。

以上の検討の結果を要約すると次のように云うことができる。大気密度を直線近似するときの勾配を 0.8 倍程度にとることおよび近似式における  $\rho_p$  を求める高度として地表面からの最低点を用いることによりかなりよい精度で軌道減衰の近似値がえられる。近地点高度 110 km, 遠地点高度 1000 km の軌道に対する軌道減衰の近似式の精度は遠地点側でやく 1 km, 近地点で 50 m 程度である。また  $\rho_p$  を求めるときに用いる地表面からの高度には、近地点緯度の変化の影響を反映させることが必要である。

## 5.2 大気抵抗による周期摂動

付録の(C10)式によれば、大気抵抗に対する Euler Hill 方程式は次の形に帰結する。

$$\ddot{x} + n^2 x = -2B\rho_p n^2 a^2 I_0(\beta) \exp(-\beta) t - 4B\rho_p n^2 a^2 \exp(-\beta) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} I_k(\beta) \sin k n t \quad (5.1)$$

このうち永年摂動を生ずるのは右辺第一項および  $k=1$  の項であり、その解が

$$x_a(t) = 2B\rho_p a^2 \exp(-\beta) \{-I_0(\beta) n t + I_1(\beta) n t \cos n t\} \quad (5.2)$$

となることはすでに述べた。

$k=2$  以下の項による周期解を求めると次のようになる。

$$\begin{aligned} x_p(t) &= 4B\rho_p a^2 \exp(-\beta) \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k(k^2-1)} I_k(\beta) \sin k n t \\ &= 2B\rho_p a^2 \exp(-\beta) \left\{ \frac{1}{3} I_2(\beta) \sin 2 n t \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{12} I_3(\beta) \sin 3 n t + \frac{1}{30} I_4(\beta) \sin 4 n t + \dots \right\} \end{aligned} \quad (5.3)$$

(5.1)に対する齊次方程式の解は  $c_1$  および  $c_2$  を定数とすると

$$x_H(t) = c_1 \sin n t + c_2 \cos n t \quad (5.4)$$

の形である。

(5.1) の解は (5.2), (5.3), (5.4) の和によって与えられるが、初期条件として

$$x(0) = 0, \quad \dot{x}(0) = 0$$

を課すと、(5.4)は

$$x_H(t) = K_H \sin n t \quad (5.5)$$

$$K_H = -2B\rho_p a^2 \exp(-\beta) \left\{ -I_0(\beta) + I_1(\beta) + \frac{2}{3} I_2(\beta) + \frac{3}{12} I_3(\beta) + \frac{4}{30} I_4(\beta) + \dots \right\}$$

の形になる。したがって大気による摂動は (5.2), (5.3), (5.5) を用いて

$$x_D(t) = x_a(t) + x_p(t) + x_H(t) \quad (5.6)$$

で与えられる。

実際にこの式を適用するに当っては、前節に述べたと同様の理由で、(5.6)の原点は基準軌道の近地点よりも地表面からの最低高度通過時刻  $t_m$  にとる方がよい。したがって以下では(5.6)の代りに

$$x_D(t) = x_a(t-t_m) + x_p(t-t_m) + x_H(t-t_m) \quad (5.7)$$

という形で用いる。

$k \geq 2$  に対する  $I_k(\beta)$  については漸化式

$$I_k(\beta) = I_{k-1}(\beta) - \frac{2k}{\beta} I_k(\beta) \quad (5.8)$$

が成立つので、すべて  $I_0(\beta)$  および  $I_1(\beta)$  の項で表現できる。 $I_k(\beta)$  までを書くと

$$\begin{aligned} I_2(\beta) &= I_0(\beta) - \frac{2}{\beta} I_1(\beta) \\ I_3(\beta) &= \left(1 + \frac{1}{\beta^2}\right) I_1(\beta) - \frac{2^2}{\beta} I_0(\beta) \\ I_4(\beta) &= \left(1 + \frac{2^3 \cdot 3}{\beta^2}\right) I_0(\beta) - \frac{2^3}{\beta} \left(1 + \frac{2 \cdot 3}{\beta^2}\right) I_1(\beta) \end{aligned}$$

である。同じ  $\beta$  の値に対しては  $k$  が小さいほど  $I_k(\beta)$  は大きな値をとるが、 $\beta$  が大きくなるにつれてすべての  $I_k(\beta)$  は  $I_0(\beta)$  に漸近する。

第4章で用いたのと同じ軌道

$$H_p = 110 \text{ km}$$

$$H_a = 1000 \text{ km}$$

$$i = 70^\circ$$

$$\omega = 30^\circ$$

に対して計算すると、 $\beta = k a e = 67.012$  であり  $\exp(-\beta)$   $I_k(\beta)$  は表 5.2 のようになる。このときの  $x_a(t-t_m)$ ,  $x_p + x_H(t-t_m)$ ,  $x_D(t-t_m)$  を、近地点を中心にはさむほぼ一周期に対してプロットすると図 5.3 のようになる。この場合  $t_m \simeq -0.45$  [min] である。

さてそれでは(5.7)式は、大気抵抗を受けるときの実際の軌道をどの程度の精度で表現しているであろうか。これについて再びシミュレーションを用いて検証を行なった。検証の方法としてはまずシミュレーションにおいて

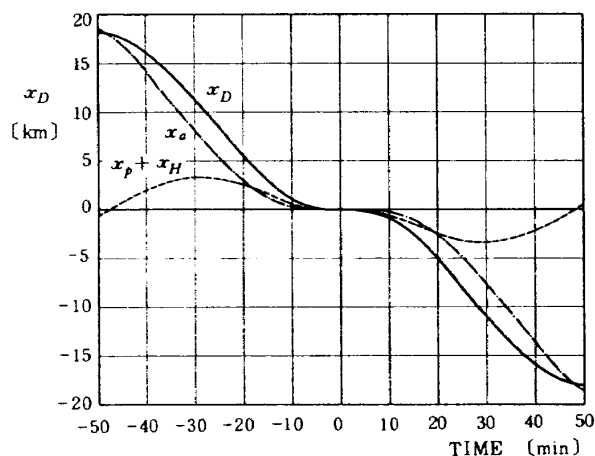


図 5.3 大気抵抗による地心距離の摂動

$$H_p = 110.6 \text{ [km]}$$

$$H_a = 1115.0 \text{ [km]}$$

$$i = 70^\circ$$

$$\omega = 30^\circ$$

という軌道設定で、ケプラー運動を仮定して近地点における初期点を求め、計算を行なった。大気抵抗による摂動だけを比較するため  $J_2$  項は除去してある。3.5 周までの近地点および遠地点高度を表 5.3 に示す。近地点および遠地点の時刻は出発点と同緯度を通過する時刻として検出した。

理論との比較を行なうために基準となるケプラー運動としては、遠地点から近地点を経て次の遠地点に達するまでの一周を一つの基準軌道として用いることとした。したがって表 5.3 に示す 3.5 周分に対しては表 5.4 に示す 3 個の基準軌道を作ることができる。基準軌道の近地点は表 5.3 の近地点高度をそのまま用い、遠地点は各周回に対して始点および終点の遠地点の平均をとった。

この基準軌道を用いて減衰のない軌道をシミュレーションにより求め、上記の減衰のある軌道シミュレーションとの高度差をとってシミュレーションによる軌道減衰を求めた。高度差の絶対値を図 5.4 に実線で示す。  $t > 0$  すなわち近地点通過後に対しては実際は負の値である。一見すると近地点をはさんで左右対称のようであるが、近地点付近においては微妙なずれのあることが認められる。遠地点に近づくとこの差が開くことはなく、全体的にはむしろよい対称性を保つ。

Euler Hill 方程式の解(5.7)については、同じ図 5.4 に破線で示す。この場合の  $t_M$  は各ケースとも 27 秒前後で大きくは変わらない。実線で示したシミュレーション結果に比べると、解析解はどの場合も近地点前後における立上りが遅い。この理由は(5.4)の係数をきめるとき、

表 5.2  $\exp(-\beta) I_k(\beta)$ 

$k$	$\exp(-\beta) I_k(\beta)$
0	0.048825
1	0.048460
2	0.047380
3	0.045556
4	0.043301

表 5.3 大気抵抗がある場合の近地点遠地点高度の変化

時 間	$H(t_p)$	$H(t_a)$
0 : 0, 0	110.600	
0 : 48, 20		1100.37
1 : 36, 40	110.379	
2 : 24, 55		1062.37
3 : 13, 0	110.217	
4 : 0, 55		1023.04
4 : 48, 55	110.032	
5 : 36, 40		982.30

表 5.4 大気抵抗がある場合の軌道に対する基準軌道

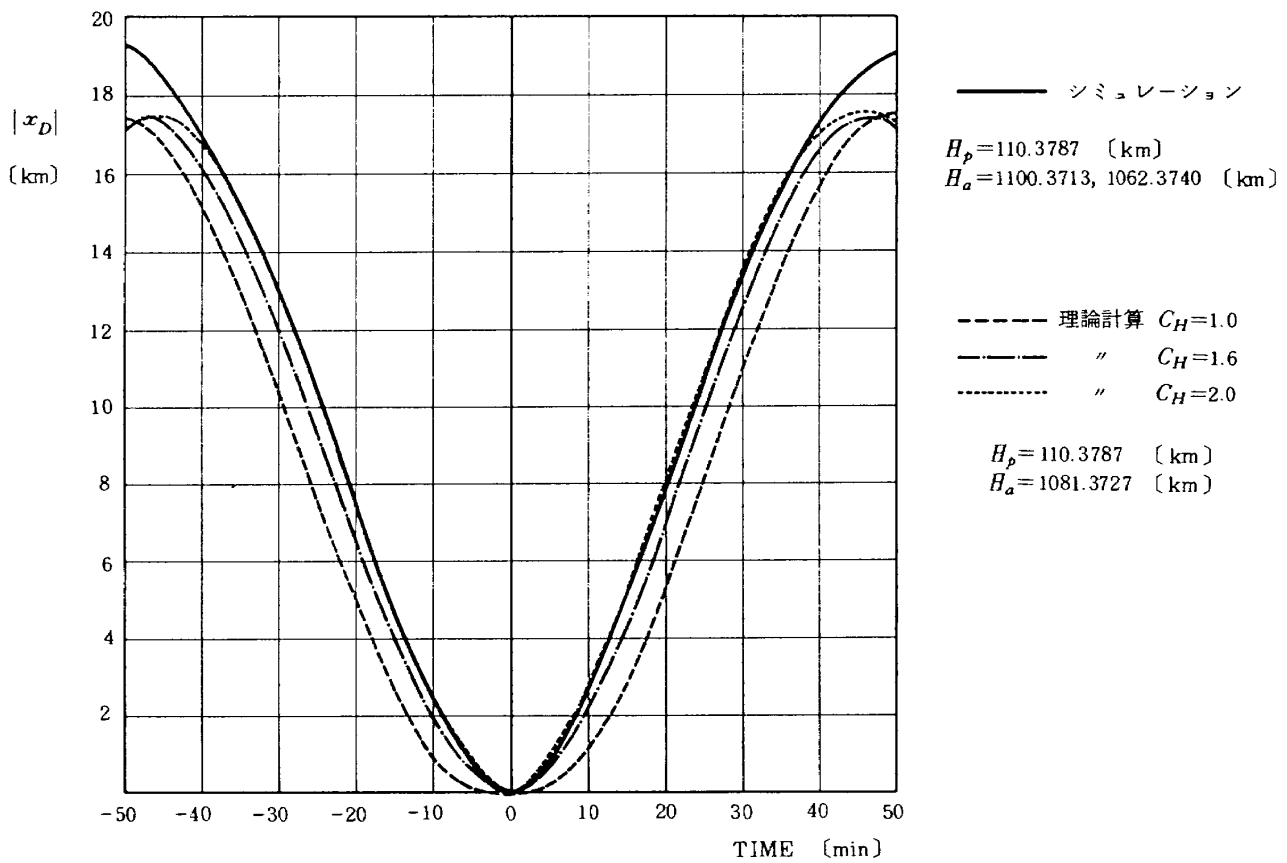
周回 番号	$H_p$	$H_a$
1	110.379	1081.37
2	110.217	1048.71
3	110.032	1002.67

$\dot{x}_D(t_m) = 0$  という条件を用いたが、遠地点側から近地点に向けて飛んできてくる実際の軌道では、それまでの大気抵抗の影響により  $\dot{x}(t_m) = 0$  とはならないことによっている。実際表 5.4 の各ケースについて近地点を出発点としてシミュレートしてみると、 $\dot{x}(t_m) \approx \dot{x}(0) = 0$  の条件が入るので、近地点出発直後の軌道は解析解とよく一致する。

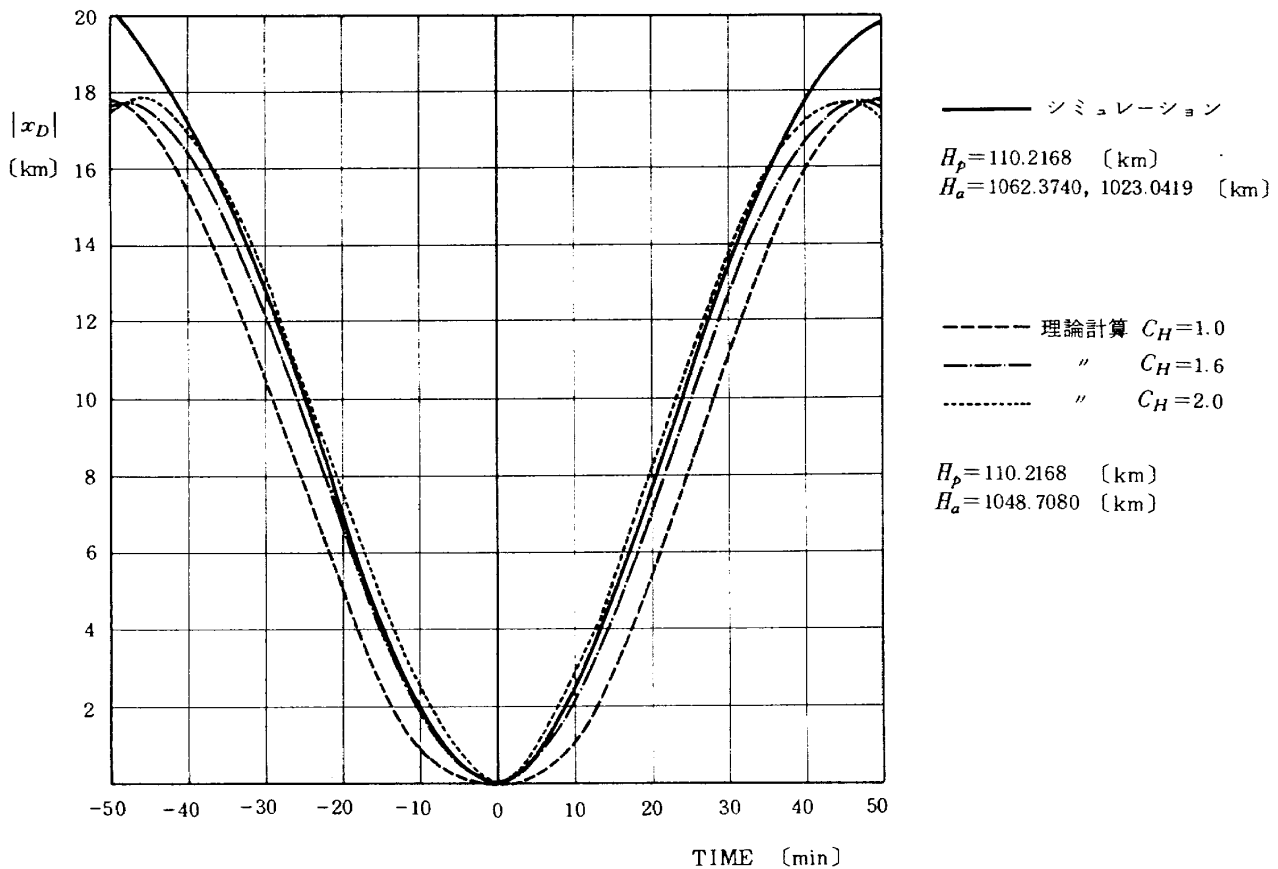
シミュレーション結果からえられる地表面からの最低高度における降下速度の摂動  $\dot{x}(t_m)$  と基準軌道近地点における降下速度の摂動  $\dot{x}(0)$  とを表 5.5 左欄に示す。いずれの場合もこの両者はあまり違いのない値をとる。

解析解においてもこの効果を導入するために、(5.5)の  $K_H$  に係数  $C_H$  を乗じた形で

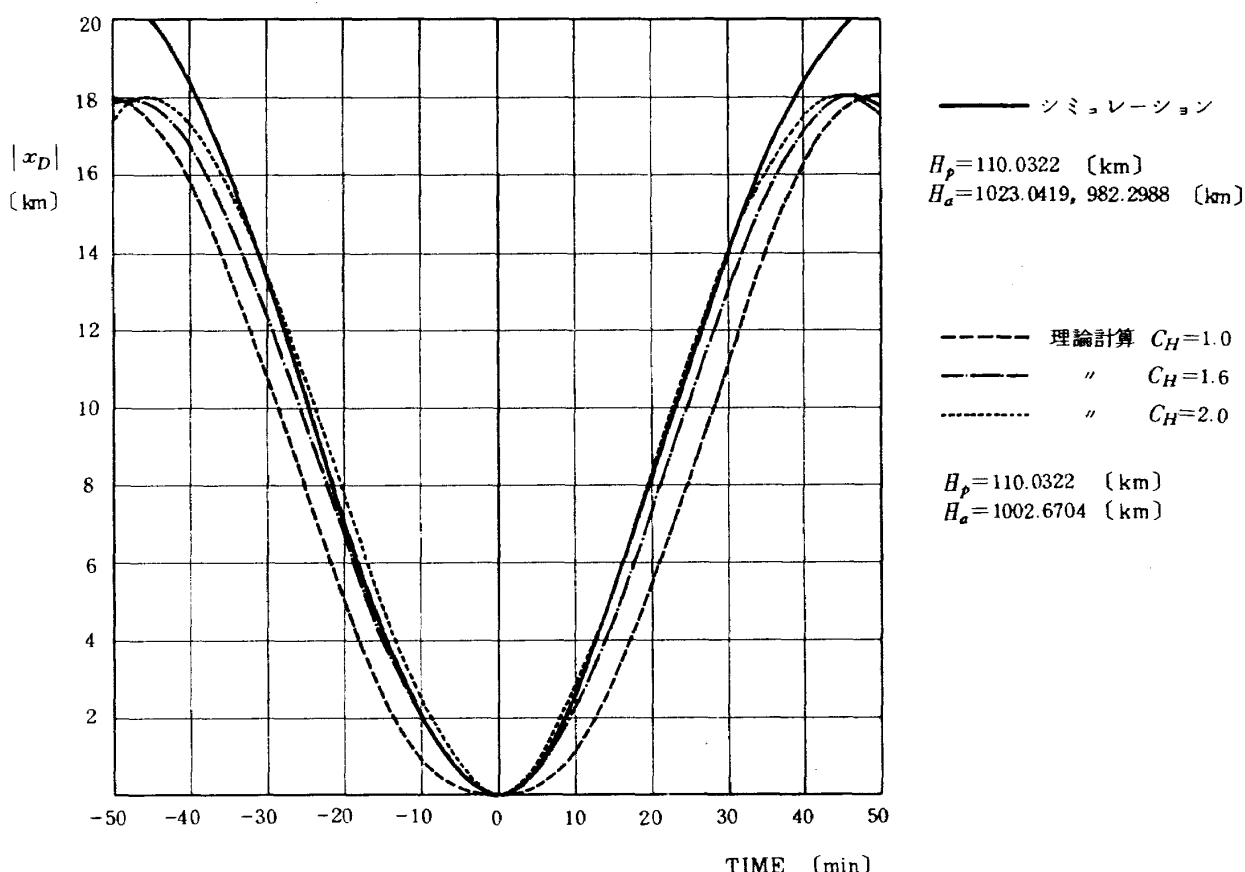




a. 第1周回



b. 第2周回



c. 第3周回

図 5.4 軌道減衰についてのシミュレーション結果および解析解の比較

表 5.5 最低高度通過時および近地点における地心方向速度

周回番号	$\dot{x}(t_M)$	$\dot{x}(0)$	$\dot{x}_D(t_M)$	
			$C_H=1.6$	$C_H=2.0$
1	-0.588	-0.773	-1.801	-3.002
2	-0.995	-1.063	-1.831	-3.052
3	-1.604	-1.666	-1.865	-3.108

$$K_H' = C_H K_H \quad (5.9)$$

を  $x_H(t-t_m)$  の係数として用いた。  $C_H=1.0$  のときは  $\dot{x}_D(t_m)=0$  である。  $C_H$  を 1.6, 2.0 にしたときの  $\dot{x}_D(t_m)$  を表 5.4 左欄に、またこのときの  $x_D(t)$  の変化を図 5.4 に一点鎖線および点線で示す。単に  $\dot{x}_D(t_m)$  を  $\dot{x}(t_m)$  に一致させるだけでは、図に示す摂動量の近似は十分でない。解析解の限界である。しかし  $\dot{x}_D(t_m)$  を大きめにとること、すなわち  $C_H$  を 1.8 程度にとることにより、ここに示した例では一律にかなりの精度向上をはかることができる。

(5.7) 式の信頼性を高めるためには、もっと多くのケースについて正確な検証を行なわなければならない。また今回除去した  $J_2$  項の摂動を入れた総合評価を行なうことも必要である。しかし DAS の航法系への適用のみについて考えれば、軌道条件がある程度定まっている、適用範囲が近地点前後 ±10 分程度でよい等の条件があるため、数値実験を繰返すことにより、(5.7) 式あるいはそれに少し補正を加える程度で目的とする精度がえられることは十分に期待できる。

## 6. 大気密度モデルと加速度計測による高度推定

### 6.1 大気密度モデル

前章では大気密度モデルについては固定して考えた。実際上は高度が同じでも、日時、緯度等の条件が変れば大気密度は一定ではない。できるだけ正確な大気密度モデルをえることは、前章の軌道変化の精度をよくするためにもまた加速度計を用いた高度推定を行なうためにも必要である。

まず大気密度モデルを緯度に関係なく高度の関数とし

て表現することが適切かという疑問が湧く。緯度によって異なる局地地球半径および地表面における重力加速度の影響が現われないかという疑問である。しかしこれについては緯度によらず高度の関数として考えることが妥当とされている。その理由は大気は地球と共に回転していると仮定したとき生ずる遠心力と重力ポテンシャルの摂動項とが相殺して、地表面上で気体分子に働く地球中心方向の力が緯度によらずほぼ一定になるということによる。厳密には大気の地球中心に対する角速度は高度により必ずしも地球自転角速度と一致せず、緯度方向の流れもある。また太陽活動の影響、地磁気等当然緯度によって異なっている要素とも関わっているため、実際のメカニズムはもっと複雑である。しかしながら、基本的には大気を地表面からの高度の関数として表わし、緯度の影響はパラメータとして入れる考え方は一般的でもありまた妥当とも思われる。

90 km 以下の組成が一樣で混合状態のよい大気においては、密度は理想気体に関する法則により

$$\rho(H) = \rho_0 \exp \left( -\frac{H-H_0}{H_s} \right) \quad (6.1)$$

という形になることが導かれる。 $H_s$  はスケール高度 (Density Scale Height) と呼ばれる。大気の圧力  $p$  の点上に一樣な非圧縮ガス柱を立てることを仮想すると、圧力  $p$  を生ずるためのガス柱の高さが  $H_s$  となることによる。90 km 以下では  $H_s$  はほぼ一定値で約 8 km である。

高度 100 km を越えて、大気が拡散の平衡状態の傾向を示すにつれてこのようなモデルは適合しなくなるが、近似的にこのモデルを用いる場合も多い。この場合  $H_s$  は

$$-\frac{1}{H_s} = \left( \frac{\partial \rho}{\partial H} / \rho \right)_{\rho=\rho_0} \quad (6.2)$$

で定義される。これはまた

$$-\frac{1}{H_s} \simeq \frac{\log \rho - \log \rho_0}{\log e (H-H_0)} \quad (6.3)$$

の  $H \rightarrow H_0$  の極限としても表わされ、半対数紙上で図 5.2 のように大気密度をプロットしたときの  $H_0$  における接線の勾配は  $-\log e / H_s$  に等しい。本報告では便宜的に  $k=1/H_s$  という記号を用いている。

前章の近似計算において最低点高度に対する大気密度  $\rho_p$  およびスケール高度  $H_s$  としては、Jacchia が算出した外圏温度 (Exospheric Temperature) 1000°K のときの基礎表の数値を用いた。しかし実際の大気密度は種々の原因により変動している。

Jacchia は各種の変動に対する補正法を整備して、特定の日時および緯度における上空の大気密度を正確に算出する方法を提示している。しかしながら計算量および

データ量を考えると、Jacchia の方法をそのまま搭載システムに適用することは困難である。したがって前章までに述べた解析解の精度に見合う程度で、大気密度の補正を行なうことを目的とすべきである。そのためどの程度のデータを保有すべきかまた補正計算をどのようにするかを検討することは、搭載型アルゴリズムにとって重要な問題となる。

Jacchia が文献 11 において大気密度を求める例題を載せているので、概要を知るためにこのうち高度 140 km の場合について引用する。

1969 年 1 月 20 日 19<sup>h</sup> 11<sup>m</sup> U.T., 地点は北緯 45°, 西経 120° (地点時刻 11 時) における大気密度を求めることとする。地磁気指数 (Planetary Geomagnetic Index)  $K_p$  が 0 のときの外圏温度の夜間最低値 (Global Minimum Temperature)  $T_c$  は次式で求められる。

$$T_c = 379^\circ + 3.24^\circ \bar{F}_{10.7} + 1.3^\circ (F_{10.7} - \bar{F}_{10.7}) \quad (6.4)$$

$F_{10.7}$  は波長 10.7 cm の太陽光フラックスで、太陽の EUV 照射の指標となるものであり、観測によって求められる。観測値の影響は一日遅れで大気温度  $T_c$  に現われる。 $\bar{F}_{10.7}$  は太陽の三回転にわたっての平均値である。指定日におけるこれらの数値は  $\bar{F}_{10.7} = 155$ ,  $F_{10.7} = 136$  であったため、上式より  $T_c = 856.5^\circ\text{K}$  となる。

つぎに 1 月 20 日、太陽赤緯  $\delta_0 = -20.0^\circ$ , 地点赤緯  $\delta_r = 45^\circ$ , 地点時刻 L.S.T. = 11 時というデータを与えると次式により地点温度 (Local Temperature)  $T_L = 991.80^\circ\text{K}$  が求められる。

$$T_L = T_N \left( 1 + \frac{T_D - T_N}{T_N} \cos^n \frac{\tau}{2} \right) \quad (6.5)$$

$$T_D = T_C (1 + R \cos^m \eta), \quad \eta = \frac{1}{2} |\delta_r - \delta_s|$$

$$T_N = T_C (1 + R \sin^m \theta), \quad \theta = \frac{1}{2} |\delta_r + \delta_s|$$

$$\tau = H + \beta + p \sin(H + \gamma), \quad H = \mathcal{Q}_r - \mathcal{Q}_s$$

$$m = 2.2, \quad \beta = -37^\circ$$

$$n = 3.0, \quad p = 6^\circ$$

$$R = 0.3, \quad \gamma = 43^\circ$$

ただし  $\mathcal{Q}_r$  および  $\mathcal{Q}_s$  はそれぞれ地点赤緯および太陽赤経である。

地磁気の影響は 6, 7 時間前の観測データから求められる地磁気指数  $K_p$  を用いて表わすことができる。200 km 以上の高度では、温度変化  $\Delta T_\infty$  だけの修正でよいが、それ以下に対しては外圏温度の変動  $\Delta T_\infty$  と直接大気密度への修正量  $\Delta \rho$  との二系統から入る。当日の観測データによると  $K_p = 2.0$  であり、修正式

$$\Delta \log \rho = 0.012 K_p + 1.2 \times 10^{-5} \exp(K_p) \quad (6.6)$$

$$\Delta T_\infty = 14^\circ K_p + 0.02 \exp(K_p) \quad (6.7)$$

を用いると  $\Delta \log \rho = 0.024$ ,  $\Delta T_\infty = 28^\circ\text{K}$  となる。

結果としてまず外圏温度  $T_{\infty} = T_l + \Delta T_{\infty} = 1020^{\circ}$  がきまる。外圏温度が与えられると、各高度における温度および組成割合を算出することができ、これを用いて低高度から順に大気密度を積算していくことによって指定された高度における概略の大気密度をえることができる。これを基礎大気密度と呼ぶことにする。

この基礎大気密度を求める過程は大気構造の大略をきめる部分であって関係式も複雑であり、数値積分を含む点で計算上もっとも手数のかかる部分である。Jacchiaはこの計算結果を30数頁にわたる数表にまとめ基礎表と呼んで論文の巻末に掲載している。前章の図 5.2 に示した大気密度のグラフはこの基礎表の数値を用いている。先にきまった  $T_{\infty} = 1020^{\circ}\text{K}$  に対する基礎大気密度としては基礎表を用いると  $\log \rho = -11.413$  がえられる。これに地磁気による修正分  $\Delta \log \rho = 0.024$  を加えると  $\log \rho = -11.389$  となる。

実際の大気密度はこのようにしてえられた基礎大気密度に他の変動要因、すなわち半年周期変動 (Semi Annual Variation), 季節・緯度によるヘリウムの変動 (Seasonal-latitude Variations of Helium), 熱圏下層における季節・緯度変動 (Seasonal-latitude Variations of the Lower Thermosphere) 等の影響を加えたものである。このうち前二者は高度 140 km あたりでは顕著に現われない。その代り三番目の季節・緯度変動が低高度において大きな影響を与える。t を修正ユリウス日とするとこの影響は

$$\Delta \log \rho = SP \sin^2 \delta_r \quad (6.8)$$

$$S = 0.014 (H - 90) \exp \{-0.0013 (H - 90)^2\}$$

$$P = \sin(2\pi\Phi + 1.72), \quad \Phi = (t - 36204)/365.2422$$

の形で与えられる。 $H = 140 \text{ km}$  に対しては  $S = 0.027$ , 1月20日に対して  $P = 0.882$  である。したがって  $\Delta \log \rho = 0.012$  となり、最終的な大気密度は  $\log \rho = -11.377$  すなわち  $\rho = 4.2 \times 10^{-12} \text{ [gr/cm}^3\text{]}$  となる。

以上が Jacchia の作成したアルゴリズムによって大気密度を求める手順である。搭載システムでこの大気密度発生を行なうことを考えると外圏温度から基礎大気密度をえる過程が問題となる。すべての関係式を用いて数値積分を搭載型計算機で行なうことは不可能である。最近当研究所の武内氏によりこの数値積分の過程を解析的に処理する方法についての研究がなされよい精度がえられている。しかしそれでも計算量が多くなるため本報告で意図するような用途には向いていない。むしろ Jacchia が作成した基礎表の必要部分を搭載システムで関数発生させる方が航法系構成の便宜からいっても実際である。この方法を次節で論ずる。

上記の過程を処理できれば、あとの部分は本節に記した計算式だけでよいので搭載型計算機でも十分処理できる内容である。

## 6.2 基礎大気密度の関数発生

基礎表のうちから DAS 軌道の関係する部分の数点について、大気密度とスケール高度とをとり出してみると表 6.1 のごとくである。

表 6.1 外圏温度および高度による大気密度およびスケール高度の変化

a) $\log \rho$ (gr/cm <sup>3</sup> )		
$H$ (km)	$T_{\infty} = 500^{\circ}\text{K}$	$T_{\infty} = 1900^{\circ}\text{K}$
110	-10.001	-10.005
150	-11.903	-11.577
200	-13.096	-12.331
1000	-17.320	-15.822

b) $H_s$ (km)		
$H$ (km)	$T_{\infty} = 500^{\circ}\text{K}$	$T_{\infty} = 1900^{\circ}\text{K}$
110	6.15	6.45
150	14.34	19.79
200	22.06	40.21
1000	528.82	140.57

外圏温度の  $500^{\circ}\text{K}$  と  $1900^{\circ}\text{K}$  とは Jacchia が計算している上限と下限とであり、現実の外圏温度がこれをはみ出すことはない。このうち低高度に於ける部分と図にすると、大気密度については図 6.1 のごとくなり、 $k = 1/H_s$  については図 6.2 のようになる。低高度になるほど外圏温度変化に対する大気密度の変化は小さくなる。高度 110 km ではほとんど外圏温度による変化はない。しかし高度が 150 km まで上ると、外圏温度が  $500^{\circ}$  から  $1900^{\circ}$  までの変化に対して  $\Delta \log \rho = 0.326$  すなわち大気密度は約 2 倍程度になり、 $H_s$  は 1.38 倍になる。

DAS の航法システムに対しては、高度 100~200 km 程度の大気密度およびスケール高度がえられれば十分なので、検討をこの領域だけに限定する。領域が狭まれば、適当な間隔で分布させた高度および外圏温度に対する大気密度およびスケール密度のデータを記憶し、中間点におけるデータは補間により発生させればよい。もっとも簡単な補間法としては線形補間すなわち折線近似が用いられる。大気密度を図 6.1 のグラフ上で折線近似すれば、 $k$  については図 6.2 において階段関数的に近似すること

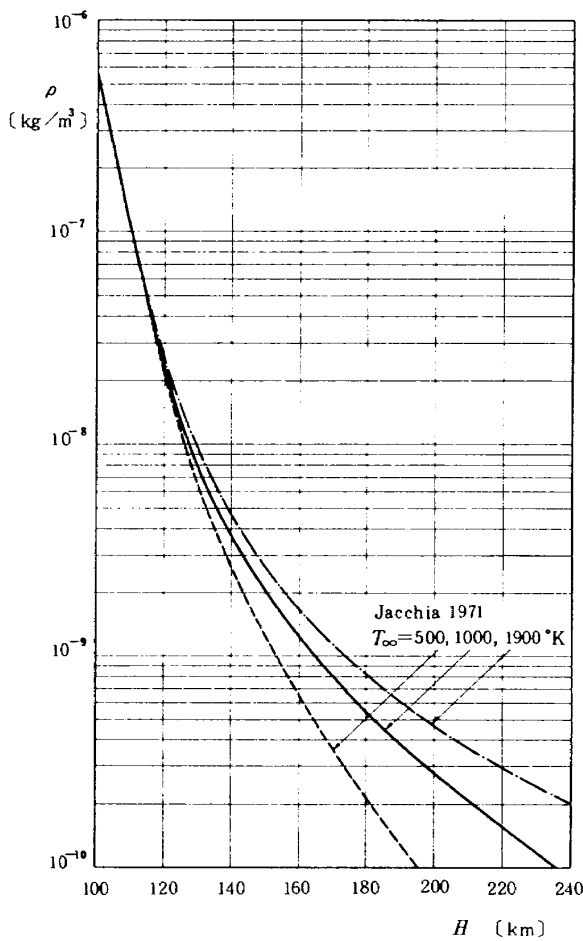
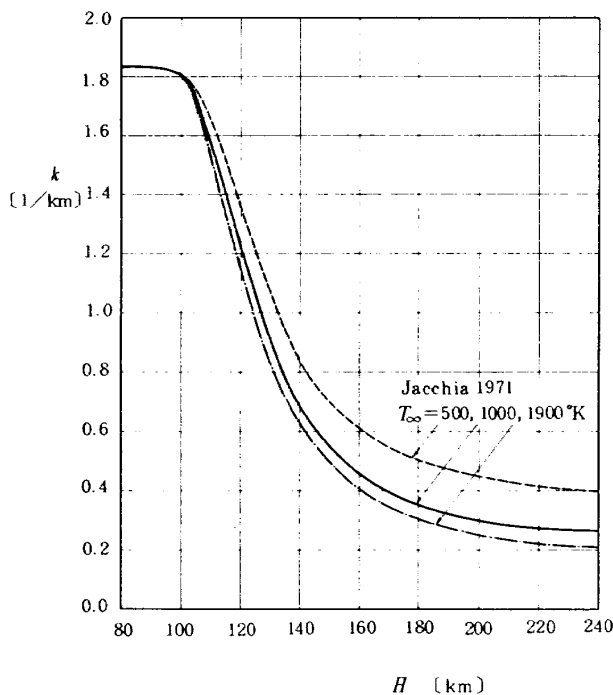


図 6.1 外圏温度および高度による基礎大気密度の変化

図 6.2 高度に対する  $k$  の変化

を意味する。しかし図 6.2 の  $k$  は階段関数で近似するよりも折線近似を用いる方がよい。大気密度とは独立に  $k$  について線形補間を用いることも考えられるが、それよりも  $k$  についての折線近似を大気密度の補間式に関係づける方が望ましい。そのため次のような補間式を考える。

いまある高度  $H_i$  点における  $k$  の接線の勾配  $\alpha$  を

$$\alpha_i = (\partial \alpha / \partial H)_i$$

として、 $H_i$  を含む適当な  $H$  の範囲に対して  $k(H)$  を

$$k(H) = k_i - \alpha_i (H - H_i) \quad (6.9)$$

で近似する。この  $k(H)$  に対応する大気密度  $\rho(H)$  については次式で定義する。

$$\begin{aligned} \rho(H) &= \rho(H; \rho_i, H_i, k_i) \\ &= \rho_i \exp \left[ -k_i (H - H_i) + \frac{1}{2} \alpha_i (H - H_i)^2 \right] \end{aligned} \quad (6.10)$$

(6.9) および (6.10) に対しては

$$k(H) = - \left( \frac{\partial \rho}{\partial H} \right) / \rho(H) \quad (6.11)$$

が成立する。これは  $k$  の定義式 (6.2) が (6.9) および (6.10) の近似の有効な範囲にわたって連続的にみたされることを意味する。

また (6.10) の  $\rho(H)$  については、近似有効区間において一意性の条件

$$\rho(H; \rho_{i1}, H_{i1}, k_{i1}) = \rho(H; \rho_{i0}, H_{i0}, k_{i0}) \quad (6.12)$$

$$\rho_{i1} = \rho(H_{i1}; \rho_{i0}, H_{i0}, k_{i0})$$

$$k_{i1} = k_{i0} - \alpha_i (H_{i1} - H_{i0})$$

も成立する。

えられた補間式は、 $k$  の近似が良好な区間においては  $\rho(H)$  の近似度もよい。また点に対してではなくある程度の区間に対して成立する近似式なので、区間内での変分操作を行なう場合に有利である。簡単な式なので高度 100~200 km において (6.1) に代わる式として有効である。しかしながら (6.10) に対して軌道減衰の解析解を求めることは困難である。

例として  $H_i = 110$  km,  $T_\infty = 1000^\circ\text{K}$  の場合について適用してみると

$$\rho_i = 9.937 \times 10^{-8} \quad (\text{kg/m}^3)$$

$$k_i = 0.15798 \quad (1/\text{km})$$

$$\alpha_i = 0.0035 \quad (1/\text{km}^2)$$

であって、 $k$  の近似は 100~130 km の範囲でよい。(図 6.2) これに対応して  $\rho(H)$  も図 6.3 に示すように 100~130 km において Jacchia の大気密度曲線とよく一致している。

実際には図示する一致度以上の精度が必要とされるので、もっと (6.9) および (6.10) の適用区間を細分割しなければならない。外圏温度に関する変化分も考慮すると

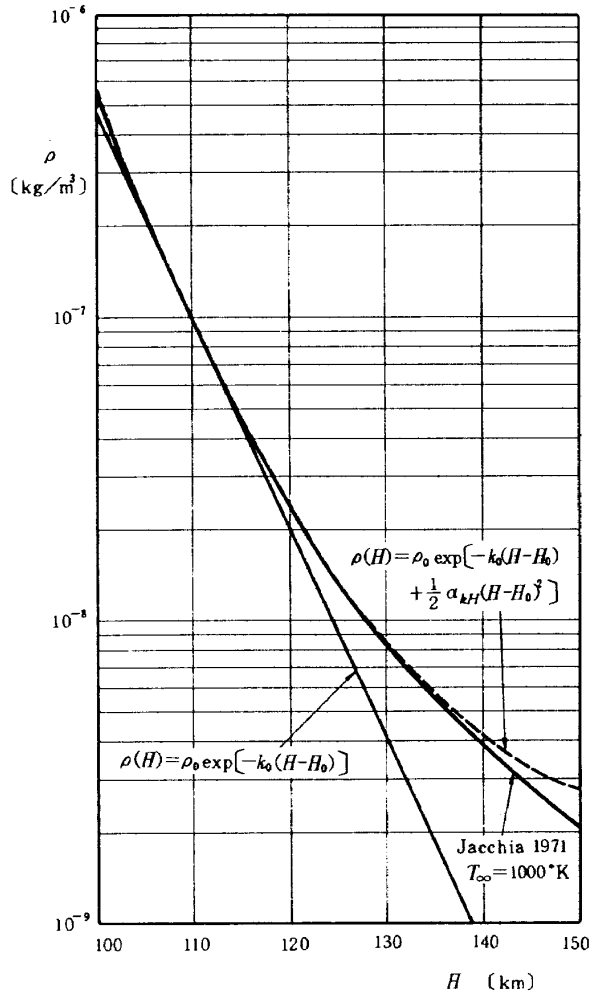


図 6.3 (6.10) 式による大気密度の近似  
( $H_0 = 110$  km)

データ形式は

$$H_i, T_{\infty j}, \rho_{ij}, k_{ij}, \alpha_{ij}$$

という形の二次元アレイになり、区間を再分割することによってデータ量は増大する。しかし DAS のミッション用として高度 200 km までに限定すれば、搭載型計算機の記憶容量に制約がある場合でも問題となるほどではない。

### 6.3 加速度計による高度推定

軌道要素の概略の予測が可能であり、これにより適合する大気密度モデル(6.10)がえられているものとする。ただし外圏温度による変化についても、内挿法により該当する外圏温度に対する  $\rho_i, k_i, \alpha_i$  がえられているものと仮定する。このとき加速度計により大気抵抗  $D$  が計測されると、大気抵抗の式

$$D = B \rho v^2 \quad (6.13)$$

および高度と大気密度との関係式(6.10)によって高度  $H$  を算出することができる。

この二式をまとめて書くと

$$D = B \rho_i v^2 e^{-k_i(H-H_i) + \frac{1}{2} \alpha_i (H-H_i)^2} \quad (6.14)$$

であり、対数をとって整理すると

$$\frac{1}{2} \alpha_i (H-H_i)^2 - k_i (H-H_i) - \ln\left(\frac{D}{B \rho_i v^2}\right) = 0 \quad (6.15)$$

となる。 $H-H_i$  について解くと

$$H-H_i = \frac{k_i}{\alpha_i} - \sqrt{\left(\frac{k_i}{\alpha_i}\right)^2 + \frac{2}{\alpha_i} \ln\left(\frac{D}{B \rho_i v^2}\right)} \quad (6.16)$$

をえる。 $k_i \gg \alpha_i$  の仮定が成立つ場合は

$$\begin{aligned} H-H_i &\simeq \frac{k_i}{\alpha_i} - \frac{k_i}{\alpha_i} \left\{ 1 - \left(\frac{\alpha_i}{k_i}\right)^2 \frac{1}{\alpha_i} \ln\left(\frac{D}{B \rho_i v^2}\right) \right\} \\ &= -\frac{1}{k_i} \ln\left(\frac{D}{B \rho_i v^2}\right) \end{aligned}$$

となって大気密度モデルとして(6.1)を用いた場合の結果と一致する。

(6.15) を解くとき、 $v^2$  は予測された軌道要素によって決まる定数として扱った。 $H-H_i$  も軌道要素が与えられれば予測可能な量という点では同等である。したがって計測値から(6.15)を用いて  $H-H_i$  が推定できるためには軌道要素の変化に対して  $\ln v^2$  の感度が  $H-H_i$  に比べてずっと鈍いことが前提とされている。実際いま  $v^2$  に  $\Delta(v^2)$  の変動があり

$$v^2 = v_0^2 + \Delta(v^2)$$

と表わされたとする。このとき

$$\begin{aligned} \ln v^2 &= \ln v_0^2 + \frac{\partial \ln v^2}{\partial v^2} \bigg|_{v^2=v_0^2} \Delta(v^2) \\ &= \ln v_0^2 + \frac{\Delta(v^2)}{v_0^2} \end{aligned}$$

であるから、(6.16)を通してこれによって生ずる誤差を  $\Delta H_v$  とすると

$$\Delta H_v = \frac{1}{k_0} \frac{\Delta(v^2)}{v_0^2} \quad (6.17)$$

となる。ケプラー運動を仮定すれば  $v^2$  は

$$v^2 = \frac{\mu}{a} \frac{1+e^2+2e \cos \theta^*}{1-e^2} \quad (6.18)$$

で表わされる。 $\Delta v^2$  を発生する主要因は  $a$  の予測誤差と考えられるから  $a = a_0 + \Delta a$  として  $\Delta(v^2)/v^2$  を書きかえと

$$\Delta H_v = -\frac{1}{k_0} \frac{\Delta a}{a_0} \quad (6.19)$$

となる。

$H_p = 110$  km,  $H_a = 1000$  km,  $\Delta a = 10$  km とすると近地点周辺では  $\Delta H_v = -0.009$  km, 高度 200 km では  $\Delta H_v = -0.048$  km 程度になる。後で示すようにこの数値は他の誤差要因の影響に比べるとずっと小さな数値なので、

(6.15)において $v^2$ を定数として扱ったことは妥当視される。

さてそれでは(6.16)により $H-H_i$ を決定する場合の誤差を生ずる要因について検討しよう。加速度計自体は非常に精度のよいものであるから、測定値 $D$ は誤差を含まないと仮定してよい。

弾道係数 $B=C_D S/(2m)$ のうち質量 $m$ および断面積 $S$ についてはほぼ正確な数値が把握できる。抵抗係数 $C_D$ は衛星の形状、迎角によってきまる<sup>2)</sup>。人工衛星では一般に $2.0 \pm 0.5$ 程度の値をとるが、DASの近地点付近における遷移流の領域では数値算定のための確立された理論がなく、地上実験による測定も困難であるため正確を期しがたい。またDASの場合、防熱板の効果を高めるために、三軸制御またはスピン安定により大気層通過時の迎角をできるだけ小さくするよう考えられてはいる。しかし完全に迎角を0にするわけにはいかないので、迎角による $C_D$ の変化も問題となる。 $C_D$ については軌道上でなんらかの形の係数決定法をとることが必要であろう。

大気密度モデルについても同様の問題がある。120 km以下の大気密度モデルについては1969年のNASAモデルには含まれていず、120 kmの基礎大気密度モデルについても1971年のJacchiaのモデルとでは $\Delta \log \rho = 0.003$ の違いがある。130, 140 kmに対しては $\Delta \log \rho = 0.03$ 程度の相異が認められる。また加速度計による大気抵抗測定から推定された大気密度とJacchiaモデルとの喰違いについても報告されている<sup>14)</sup>。したがって1971年のJacchiaモデルが現在のところ最善ではあっても、まだ完全に確立されたモデルとはいえない。高度110~200 kmの大気密度測定自体もDASの主要ミッションの一つと考えるべきなのかもしれない。しかしそのためにまずJacchiaのモデルをできるだけ忠実に実現することは必要であろう。

Jacchiaの計算式のうち(6.4)に現われる10.7 cmの太陽光フラックス $F_{10.7}$ は80~170程度の範囲で変動を示す。この変動は結果として最大50°K程度の外圏温度の変化につながる。130 km以下では外圏温度の50°Kの変化は $\Delta \log \rho = 0.005$ 程度であり、許容できる誤差に近い。しかし200 kmでは $\Delta \log \rho = 0.02$ 程度になるので地上からのコマンドによりこのデータを毎日送信することが必要になる。その場合にはこの誤差を1/10以下にすることは可能であろう。

$K_p$ の値については、おおよそ0~5の間で変動する。中間値として2.5程度の数値を入れておけば $\Delta \log \rho = \pm 0.05$ 程度の誤差を生ずるので一番大きな誤差要因となりうる。しかもこの変動は高度によらずほぼ均等に現わ

れるので低高度においては影響として大きいといわざるをえない。 $K_p$ についても毎日の測定値を地上からコマンドとして送信する必要がある。地上からのコマンドをえれば、この誤差はやはり1/10以下におさめられるであろう。

熱圏下層に対する季節・緯度変動は、補正しなければ高度110 km付近で最大になり、 $\Delta \log \rho = \pm 0.1$ くらいまでなる。しかし150 km以上になると無視できる。補正式のうち $P$ は季節ごとの長周期の変動を表わしているので、DASのミッションの期間中は $P = \text{const}$ と考えてもよい。したがって補正が必要なのは高度、緯度に依存する $S$ のみであるが、高度、緯度は搭載システムで発生できるのでこの補正は自律的行なえる。

以上を総合すると、地上から一日に一度のコマンドにより $F_{10.7}$ および $K_p$ を更新すれば、大気密度の変動による誤差レベルは $\Delta \log \rho = \pm 0.005$ 程度におさえることができる。外圏温度および高度に対する大気密度を発生する過程での補間間隔もこの程度の精度におさめるようにとれば、実際の大気密度から基礎大気密度を求める過程における誤差を $\Delta \log \rho = \pm 0.01$ 以内におさえることは可能と思われる。

以上で誤差要因の大略が把握されたので、これに対する高度誤差について考える。まず $\rho_i$ の誤差に対する $H-H_i$ の感度を求めるために(6.14)を $\ln \rho_i$ について偏微分すると

$$\frac{\partial H}{\partial \ln \rho_i} = \frac{1}{k_i - \alpha_i (H - H_i)}$$

をえる。したがって誤差 $\Delta \ln \rho_i$ によって $H-H_i$ の推定値に生ずる誤差 $\Delta H_p$ は

$$\Delta H_p = \frac{1}{k_i - \alpha_i (H - H_i)} \Delta \ln \rho_i \quad (6.20)$$

となる。同様にして $\Delta k_i$ ,  $\Delta \alpha_i$ に起因する誤差は

$$\Delta H_k = - \frac{H - H_i}{k_i - \alpha_i (H - H_i)} \Delta k_i \quad (6.21)$$

$$\Delta H_\alpha = \frac{1}{2} \frac{(H - H_i)^2}{k_i - \alpha_i (H - H_i)} \Delta \alpha_i \quad (6.22)$$

となる。

$B$ の評価誤差による高度誤差の生じ方は $\rho_i$ に対する場合とまったく同じで(6.20)の $\rho_i$ を $B$ で置換えると $\Delta H_B$ がえられる。これは大気抵抗を表す式の中で $B$ と $\rho_i$ がたねに $B \rho_i$ という形で現われるためである。逆にいうと $\alpha_i$ ,  $k_i$ に誤差がなく、一組の $\rho_i$ ,  $k_i$ ,  $\alpha_i$ が適用される範囲で $B$ が一定値をとる。すなわち迎角の変化がないと仮定すると、大気抵抗 $D$ および高度 $H-H_i$ が与えられても $\rho_i$ と $B$ とを分離して求めることはできない。したがって

$B\rho_i$ を一つの誤差源とみなして扱う方がよいといえる。そのためには(6.20)の代りに

$$\Delta H_{B\rho} = \frac{1}{k_i - \alpha_i(H - H_i)} \Delta \ln B\rho_i \quad (6.20)'$$

という形を用いることにする。

前節の数値例において、高度 $H_i = 110$  kmとして設定したモデル(6.10)の適用区間が130 kmまでであるとする。このとき $\Delta \log B\rho_i = 0.01$ 、すなわち

$$\Delta \ln B\rho_i = \Delta \log B\rho_i / \log e = 0.023$$

に対応する高度誤差を求めると、高度110 kmでは0.145 km、高度130 kmでは0.261 kmの誤差となる。

$$\Delta \ln B\rho_i = \frac{\partial \ln B\rho_i}{\partial B\rho_i} \Delta(B\rho_i) = \frac{\Delta(B\rho_i)}{B\rho_i}$$

であるから $\Delta \log B\rho_i = 0.01$ の誤差は $B$ または $\rho_i$ に2.3%の評価誤差があった場合に相当している。

つぎに $k_i$ 、 $\alpha_i$ に1%の誤差があったとして、130 kmにおける高度誤差を求めると $\Delta H_k = -0.359$  km、 $\Delta H_\alpha = 0.08$  kmとなる。 $\Delta H_k$ は $\Delta \log B\rho_i = 0.01$ に対する高度誤差よりやや大きめの誤差を生ずる。実際上 $k_i$ を1%の誤差内に納めることは困難なので、一組の $\rho_i$ 、 $k_i$ 、 $\alpha_i$ の適用区間をもっと小さくとることが必要である。

もし大気密度モデル(6.10)の適用区間を $\Delta H_k$ および $\Delta H_\alpha$ を無視できる程度に小さくとしたものとする(6.20)'は近似的に

$$\Delta H_{B\rho} = \frac{1}{k_i} \Delta \ln B\rho_i \quad (6.23)$$

で表わされる。各高度において一率に $\Delta \log B\rho_i = 0.01$ だけの大気密度誤差または $B$ の誤差があるとして外圏温度別に(6.23)により $\Delta H_{B\rho}$ を求めると図6.4のようになる。

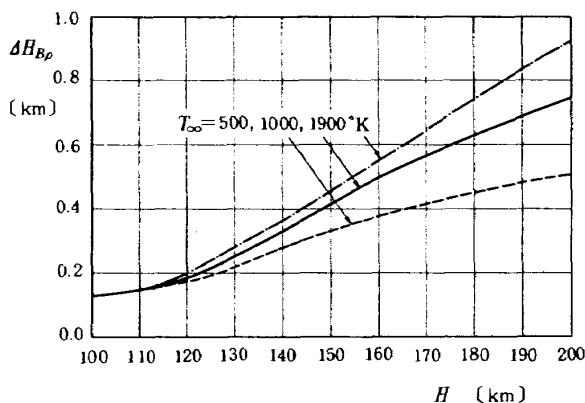


図 6.4 弾道係数および大気密度モデルの誤差を $\Delta \log B\rho = 0.01$ と仮定したときの高度推定誤差

## 7. 最低高度検出による軌道推定

軌道の高さ変化を記述する式は、4章、5章の関係式および6.2の大気密度モデル等である。二次のZonal項および大気抵抗による軌道の摂動に加えて、緯度による地球半径の変化分を考慮すると、軌道の地表面からの高度は次式で表現できる。

$$H = r + \bar{x} - R_L + x_D \quad [\text{km}] \quad (7.1)$$

$r$ は基準軌道における衛星の地心距離、 $\bar{x}$ は $J_2$ 項による軌道高度の摂動、 $R_L$ は緯度の関数としての地球半径、 $x_D$ は大気抵抗による軌道高度の摂動であり、それぞれ次式で表わされる。

$$r = \frac{a(1-e^2)}{1+ec_{\theta^*}} \quad [\text{km}] \quad (7.2)$$

$$\bar{x} = \frac{1}{2} K \left( 1 - \frac{3}{2} s_i^2 + \frac{1}{2} s_i^2 c_{2\theta} \right) \quad [\text{km}] \quad (7.3)$$

$$R_L = R_e (K_1 + K_2 c_{2L} - K_3 c_{4L}) \quad [\text{km}] \quad (7.4)$$

$$x_D = K_D \cdot f \quad [\text{km}] \quad (7.5)$$

ただし

$$R_e = 6378.16 \quad [\text{km}]$$

$$K_1 = 0.99832706$$

$$K_2 = 0.167645 \times 10^{-2}$$

$$K_3 = 0.352 \times 10^{-5}$$

$$K = J_2 R_e^2 / a \quad [\text{km}]$$

$$\rho_m = \rho_p \exp \left[ -k_p (H_m - H_p) + \frac{1}{2} \alpha_p (H_m - H_p)^2 \right] \quad [\text{kg/km}^3]$$

$$k_m = k_p - \alpha_p (H_m - H_p) \quad [1/\text{km}]$$

$$K_D = 2 B \rho_m a^2 \quad [\text{km}]$$

$$f = -EI_0(\beta) \theta_m + EI_1(\beta) \theta_m c_{\theta m} + \frac{1}{3} EI_2(\beta) s_{2\theta m} + \frac{1}{12} EI_3(\beta) s_{3\theta m} + \frac{1}{30} EI_4(\beta) s_{4\theta m} - c_H (-EI_0(\beta) + EI_1(\beta) + \frac{2}{3} EI_2(\beta) + \frac{1}{4} EI_3(\beta) + \frac{2}{15} EI_4(\beta)) s_{\theta m}$$

$$\beta = k_m a e$$

である。 $EI_i(\beta)$  ( $i=1, 2, \dots$ ) は  $\exp(-\beta) I_i(\beta)$  の略記であり、(3.4)式の下および(5.8)により与えられる。

また基準軌道に関して次の関係式を用いる。

$$e = 1 - r_p / a$$

$$n = \sqrt{\mu / a^3} \times 60 \quad [\text{rad/min}]$$

$$M = n(t - t_p) \quad [\text{rad}]$$

$$\theta^* = M + 2e \sin M \quad [\text{rad}]$$

$$\theta = \theta^* + \omega \quad [\text{rad}]$$

$$L = \sin^{-1}(\sin i \sin \theta) \quad [\text{rad}]$$

大気抵抗による摂動を表現する式の $\rho_m$ および $\theta_m$ は、(7.1)式から $x_D$ を除去した式に関して軌道に沿っての最小値を与える $H$ すなわち $H_m$ を求め、その $H_m$ に対する大



気密度およびその点を原点とする衛星の地球中心まわりの回転角として求める。 $\theta_m^* = H = H_m$  なるときの真近点離角とするとこの関係式は次のように記述することができる。

$$H_m = H(\theta_m^*) = \min_{\theta^*} (r + \bar{x} - R_L) \quad (7.6)$$

$$\theta_m = \theta^* - \theta_m^* \quad (7.7)$$

大気抵抗による摂動を表わす式において  $\theta^*$  の代りに  $\theta_m$  を用いた意味は、(5.6) の代りに (5.7) を用いた意味に等しい。また  $\rho_m$ ,  $k_m$  を記述する式で  $H_p$ ,  $\rho_p$ ,  $k_p$ ,  $\alpha_p$  を用いたのは便宜的な記法であって、 $H_m$  および  $H_p$  を大気密度モデル (6.10) の有効範囲に含めば任意の  $H_i$  における特性値でもよい。

(7.1) 式を前章で用いた例

$$H_p = 110 \quad [\text{km}]$$

$$H_a = 1000 \quad [\text{km}]$$

$$i = 70^\circ$$

$$\omega = 30^\circ$$

について計算してみよう。ここで  $H_p$  および  $H_a$  は基準軌道の近地点および遠地点における高度であって、実軌道のそれではない点に注意を要する。 $i$  と  $\omega$  とによって初期点緯度における地球半径  $R_L$  がえられると

$$a = \frac{H_a + H_p}{2} + R_L$$

$$\tau_p = H_p + R_L$$

により、基準軌道の長半径および近地点地心距離がきまる。この  $a$  および  $\tau_p$  を用いて (7.1) 以下の式により軌道が求められる。

計算結果を近地点前後 4 分間について図示すると図 7.1 のようになる。 $r - R_{Lp}$  は近地点における地球半径  $R_{Lp}$  を基準としたときの基準軌道の高度である。 $r - R_L$  は基準運動の地表面からの高度であり、緯度による地球半径

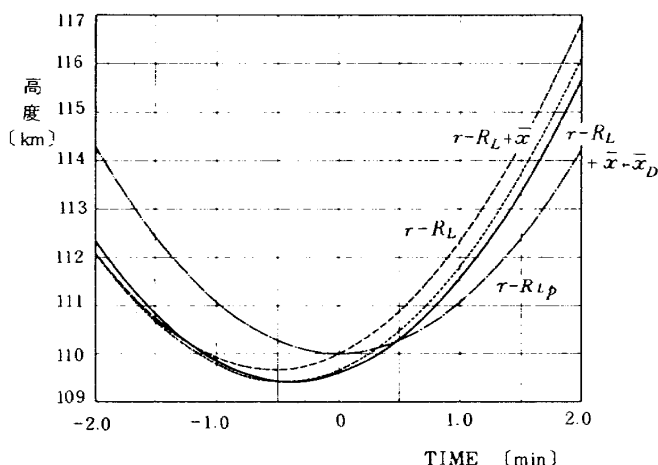


図 7.1 近地点付近における高度の変化

の変化を考慮してある。 $r - R_L + \bar{x}$  は  $J_2$  項による摂動の補正を加えた高度、 $r + \bar{x} - R_L + x_D$  はさらに大気抵抗による摂動をも加えた軌道の地表面からの高度であり、実際の衛星の飛しょう高度を表わしている。

測地学的な衛星の高度の定義は、地球を回転楕円体とみなして、衛星から地表に向っておろした垂線の長さとしてされている。(7.1) 式による高度の表現は衛星の地心距離から地心半径を差引いた距離であり、これとは厳密には一致しない。高度 110 km 程度では最大 40~50 m 程度の差が生じる。Jacchia モデルにおける高度が厳密に測地学的な高度を指すのか、(7.1) 式でよいのかは明らかではない。あるいはモデルの精度からいって、この高度の定義による差は問題にならないのかもしれない。もし Jacchia モデルに厳密に測地学的な高度が要求されるならば本節の設定は改めなければならない。しかしその場合も (7.1) 式の代りに測地学的な高度の関係式を追うことは数式を複雑にして望ましくない。それよりも (7.1) 式を用いて、定義の違いによる分は地心半径  $R_L$  の緯度による修正項の係数  $K_2$  および  $K_3$  を調節することにより吸収し、近似精度を上げるようにする方が現実的である。したがって以下では (7.1) 式のままでの取扱いについて述べる。

基準軌道を記述する六要素としては、軌道長半径  $a$ 、近地点地心距離  $r_p$ 、近地点通過時刻  $t_p$ 、近地点引数  $\omega$ 、軌道傾斜角  $i$ 、昇交点赤経  $Q$  等が挙げられる。これらについてはすべてここまでの検討により代数的に一周毎の変化に対する予測値を計算する方法をえている。

3 章の結果で、遠地点高度が 1000 km の場合について一周毎の変化量の概略をまとめてみると  $\Delta a = -20 \text{ km}$ ,  $\Delta r_p = -0.2 \text{ km}$ ,  $\Delta \omega = 0.1^\circ$ ,  $\Delta i = 0.003^\circ$ ,  $\Delta Q = -0.2^\circ$  の程度である。 $\Delta t_p$  は周期の変動として算出すると、 $a$  の変化  $\Delta a = -20 \text{ km}$  に対して  $\Delta t_p = -0.42 \text{ min} = -25 \text{ sec}$  の程度である。

地表面からの高度計測値を用いて指定できると考えられる軌道要素は、その変化が (7.1) 式に顕著に現われる軌道要素すなわち (7.2)~(7.5) 式に含まれる変数でなければならない。 $a$ ,  $r_p$ ,  $t_p$ ,  $\omega$  等が推定により予測値を改善できる軌道要素である。軌道傾斜角  $i$  は (7.3) および (7.4) に含まれているので原理的には推定対象になりうる。しかし 3 章でも示したごとく大気抵抗によって生ずる変化は微小であり、高度計測値からこの微小変化をとり出すことは困難なので地上観測によって決定することとし、搭載型推定においては定数として扱う。

残る昇交点赤経  $Q$  についてはこの加速度計測値と関係をもたないため推定対象となしえない。 $a$  および  $r_p$  が精度よく定まれば (3.1) 式によりそれと同等の精度で予測値

がえられるので、地上系のバックアップをえれば搭載系で直接計測手段をもたなくてもよい予測精度を保つことができると考えられる。

さて(7.1)式を用いて $a$ ,  $r_p$ ,  $t_p$ ,  $\omega$ 等の推定を行なうとすると最小二乗法が考えられる。しかしこれについては次章で扱うことにして、その前にもっと単純に大気抵抗が最大になる時刻を加速度計で検出することにより可能な推定内容について検討しておく。

推定を行なう前段階の条件として、地上におけるトラッキングおよびこれまで述べた解析式を用いて $a$ ,  $r_p$ ,  $\omega$ についての予測値がえられているものとする。この予測値を用いて(7.6)式によりまず $\theta_m^*$ が計算できる。 $\theta_m^*$ は表7.1に示すように $a$ ,  $r_p$ ,  $\omega$ の変化に対して感度の鈍い量であるから、予測値に基づいた計算値であっても信頼性が高い。

軌道高度最低点通過時刻 $t_m$ が加速度計により検出されたとする。このとき近地点通過時刻 $t_p$ は

$$\begin{aligned}\theta_m^* &= n(t_m - t_p) + 2e \sin n(t_m - t_p) \\ &\simeq n(1+2e)(t_m - t_p)\end{aligned}$$

により

$$t_p = t_m - \frac{1}{n(1+2e)} \theta_m^*$$

として求めることができる。

前章の結果によれば、0.145 kmの高度差は大気抵抗にすると2.3%の変化を生ずる。加速度計の精度は少なくとも5桁は期待できるので、この1/10程度の高度差は容易に検出することができる。図7.1を参照するとこの場合 $t_m$ の検出精度は1秒以下とみなされる。

一方 $\theta_m^*$ は表7.1に示すごとく、予測値における長半径の誤差を $\Delta a = 20$  kmとすると5%弱の誤差がある。図7.1に示す例では $t_m - t_p \simeq -0.45$  min = 27 sec程度であるから、これは1.3 secの $t_p$ 推定誤差につながる。したがって $a$ ,  $r_p$ ,  $\omega$ の予測誤差が表7.1に示す程度にとどまれば、 $t_p$ の推定は2.3 secの精度で行なうことができる。

$t_p$ 時刻における加速度計出力を記憶しておけば6.3節の結果を用いて、近地点通過時刻における高度 $H(t_p)$ を

推定することができる。このときの主たる誤差源は $C_D$ および $\rho_p$ の評価誤差である。この大きさを予測することは困難であるが、まとめて $\Delta \log B\rho_p = 0.01$ と仮定すると約0.15 kmの高度誤差につがる。 $H(t_p)$ から軌道要素 $r_p$ を計算するには(7.1)を用いればよい。この過程では $\Delta \omega$ による誤差が生ずる可能性がある。もし $\Delta \omega = 0.1^\circ$ とすると、 $r_p$ に約0.03 km程度の誤差を生ずる。まとめると $r_p$ の精度はやく0.2 km程度ということになるが、 $\Delta \log B\rho_p$ はもっと大きくなる可能性が強いので、上記の数値は一応の目安にしかない。

長半径 $a$ については減衰のある軌道について一周に対する $a$ を定義すること自体困難であるが、平均的な意味ではある近地点から次の近地点までの一周に対して

$$a = \left\{ \frac{\mu}{2\pi} (t_p - t_p') \right\}^{\frac{2}{3}} \quad (7.8)$$

として決めることができる。ただし $t_p$ および $t_p'$ は今回および前回の近地点通過時刻である。

軌道減衰に対する基準軌道としては、遠地点から次の遠地点までを一周と考える方が便利である。この場合は

$$a = \frac{1}{2} \left[ \left\{ \frac{\mu}{2\pi} (t_p - t_p) \right\}^{\frac{2}{3}} + \left\{ \frac{\mu}{2\pi} (t_p' - t_p') \right\}^{\frac{2}{3}} \right] \quad (7.9)$$

として $a$ を計算する。図7.2において、実線で実軌道を表わすものとすれば(7.9)の $a$ は一点鎖線で示す軌道を想定することになる。この場合の $a$ の精度は $t_p$ ,  $t_p'$ ,  $t_p''$ 等の推定精度による総合的な効果を4 sec程度にみなすと約3 km程度とみなすことができる。

以上により $a$ ,  $r_p$ ,  $t_p$ についての一つの推定法がえら

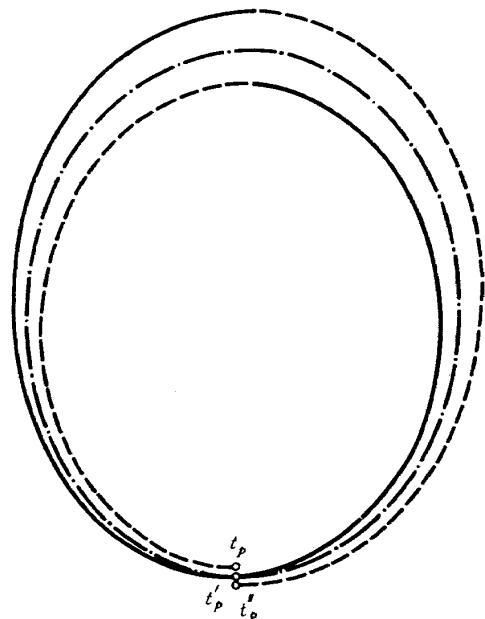


図7.2 遠地点から遠地点までの一周に対する基準軌道

表7.1  $a$ ,  $r_p$ ,  $\omega$ 等の予測値に誤差を含むときの $\theta_m^*$ の推定値

パターベーション	$\theta_m^*$ (deg)
なし	-1.9111
$\Delta a = 20$ km	-1.8269
$\Delta r_p = 1$ km	-1.9105
$\Delta \omega = 1$ deg	-1.9535

れた。 $\omega$ についてはこの方法では推定することができない。

## 8. 最小二乗法による推定

### 8.1 最小二乗法

推定すべき  $k$  個のパラメータからなるベクトルを  $\xi$ , 時刻  $t_i$  における観測値を  $y_M(t_i)$ , パラメータ  $\xi$  を用いて計算される観測値に相当する量を  $y_C(\xi, t_i)$  とする。

最小二乗推定は

$$z_i(\xi) = y_M(t_i) - y_C(\xi, t_i) \quad (i=1, 2, \dots, n) \quad (8.1)$$

として

$$\sum_{i=1}^n \left( \frac{z_i(\xi)}{\sigma_i} \right)^2 \quad (8.2)$$

を最小とする  $\xi = \hat{\xi}$  を求めようという問題である。ただし  $\sigma_i$  は  $z_i(\xi)$  の共分散である。

$\bar{\xi}$  を  $\xi$  に対する予測値とする。  $\xi = \bar{\xi} + \Delta \xi$  とすると

$$y_C(\xi, t_i) \simeq y_C(\bar{\xi}, t_i) + A_i \Delta \xi \quad (8.3)$$

$$A_i = \frac{\partial y_C(\bar{\xi}, t_i)}{\partial \xi}$$

と近似できるから

$$\begin{aligned} z_i(\xi) &\simeq y_M(t_i) - y_C(\bar{\xi}, t_i) - A_i \Delta \xi \\ &= z_i(\bar{\xi}) - A_i \Delta \xi \end{aligned} \quad (8.4)$$

となる。したがって

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \left( \frac{z_i(\xi)}{\sigma_i} \right)^2 &= \sum_{i=1}^n \left( \frac{z_i(\bar{\xi}) - A_i \Delta \xi}{\sigma_i} \right)^2 \\ &= \sum_{i=1}^n \left( \frac{z_i(\bar{\xi})}{\sigma_i} \right)^2 - 2 \sum_{i=1}^n \frac{\rho_i A_i}{\sigma_i^2} \Delta \xi \\ &\quad + \Delta \xi^T \left( \sum_{i=1}^n \frac{A_i^T A_i}{\sigma_i^2} \right) \Delta \xi \end{aligned} \quad (8.5)$$

となる。この式を  $\Delta \xi$  に関して最小化するために、 $\Delta \xi$  に関する上式の勾配を求めて 0 とすると次式がえられる。

$$\sum_{i=1}^n \frac{A_i^T A_i}{\sigma_i^2} \Delta \bar{\xi} = \sum_{i=1}^n \frac{A_i^T z_i}{\sigma_i^2} \quad (8.6)$$

いま

$$A = \begin{pmatrix} A_1 / \sigma_1 \\ A_2 / \sigma_2 \\ \vdots \\ A_n / \sigma_n \end{pmatrix}, \quad z(\bar{\xi}) = \begin{pmatrix} z_1(\bar{\xi}) / \sigma_1 \\ z_2(\bar{\xi}) / \sigma_2 \\ \vdots \\ z_n(\bar{\xi}) / \sigma_n \end{pmatrix} \quad (8.7)$$

とおくと(8.6)は次式のように書きかえられる。

$$A^T A \Delta \hat{\xi} = A^T z(\bar{\xi}) \quad (8.8)$$

$A_i$  は  $1 \times k$  の行ベクトルであるから  $A$  は  $n \times k$  ( $n \geq k$ ) のマトリクス,  $z(\bar{\xi})$  は  $n \times 1$  の列ベクトルである。

(8.8) を解いて  $\Delta \hat{\xi}$  がえられれば

$$\hat{\xi} = \bar{\xi} + \Delta \hat{\xi} \quad (8.9)$$

によって観測後の推定値がえられる。

代数式(8.8)が計算機によって解かれるための条件としては  $A^T A$  の最大・最小固有値比が計算機有効桁数より小さいことが一つの目安と考えられている。その理由は厳密ではないが以下のように説明できる。

$A^T A$  は非負値対称行列であるから、正則である限り固有値は正数であり、固有ベクトルは実数で互に直交する。 $A^T A$  の正規化された固有ベクトルからなるマトリクスを  $P$  とすると変換

$$\Delta \xi = P \Delta \eta \quad (8.10)$$

を用いて(8.8)は

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_k \end{pmatrix} \Delta \eta = P^T A^T z \quad (8.11)$$

となる。したがって右辺の各行が同レベルの大きさであると仮定すれば  $\Delta \eta_1 \cdots \Delta \eta_k$  の大きさの比は固有値の比になる。そしてその一次結合で与えられる  $\Delta \xi$  に  $\Delta \eta_i$  の全項の影響が十分に反映されるためには計算機の有効桁数が最大・最小固有値比よりも大きくなければならない。この説明は  $P^T A^T z$  の各行がほぼ同程度の大きさであることを前提としているため不正確であるが、上記の目安もこの程度の根拠にもとづく仮説であると考えておいてよい。

次に  $A^T A$  が与えられたとき、最大および最小の固有値がどのような形になるか調べておこう。 $A$  の各列からなるベクトルを考え  $a_1, a_2, \dots, a_k$  とする。 $a_j$  は  $j$  番目のパラメータに関する  $y_C$  の偏微分を観測時刻順に並べた  $n$  次のベクトルである。これを用いるとマトリクス  $A^T A$  は

$$A^T A = \begin{pmatrix} a_1^T \\ \vdots \\ a_k^T \end{pmatrix} (a_1 \cdots a_k) = \begin{pmatrix} \|a_1\|^2 & \cdots & (a_1, a_k) \\ \vdots & & \vdots \\ (a_1, a_k) & \cdots & \|a_k\|^2 \end{pmatrix} \quad (8.12)$$

と表現することができる。(8.9)は  $k$  個のベクトルに関するグラム行列であって、その行列式は  $k$  個のベクトルが互に一次独立であるか否かを判定するために用いられる。

$k$  個のパラメータの  $y_C$  に対する影響の与え方が相異しているほど各ベクトルは直交性が強く、 $(a_i, a_j)$  は 0 に近づく。仮にパラメータの選択が非常によくて  $a_i$  が完全に直交している場合を考えると  $(a_i, a_j) = 0$  となるので(8.12)は対角要素だけが残り、 $\|a_j\|^2$  が固有値になる。この場合を各パラメータの連成がない場合と呼ぶことにする。連成があっても小さい場合、すなわち  $(a_i, a_j)$  が 0 に近い場合は固有値は  $\|a_j\|^2$  とは一致しないけれど近い値をとる。連成が弱い場合、解は近似的に  $(a_j^T / \|a_j\|^2) z$  という形になる。したがってこの場合所要計算精度はむしろ固有値の平方根の比に依存することになる。

連成がある場合、連成がない場合に比べて固有値がど

のように移動するかについては第一種固有値問題として十分に検討が行なわれている<sup>17)</sup>。本問題に関して有用な二つの定理を引用する。

〔対角定理〕 (8.9)の最小固有値を $\lambda_{\min}$ ，最大固有値を $\lambda_{\max}$ とすると次の関係が成立する。

$$\lambda_{\min} < \min_j \|\mathbf{a}_j\|^2, \quad \max_j \|\mathbf{a}_j\|^2 \leq \lambda_{\max}$$

〔部分定理〕  $k$  個のパラメータを推定する場合の(8.9)の固有値を

$$\lambda_1 < \lambda_2 < \cdots < \lambda_k$$

とする。一方パラメータ数を減らして $l$ 個としたときの $\mathbf{A}^T \mathbf{A}$ の固有値を

$$\mu_1 < \mu_2 < \cdots < \mu_l \quad (l < k)$$

とする。このときつぎの不等式が成立する。

$$\lambda_1 \leq \mu_1 \leq \lambda_{k-l+1}, \quad \lambda_2 \leq \mu_2 \leq \lambda_{k-l+2}, \quad \cdots, \quad \lambda_l \leq \mu_l \leq \lambda_k$$

対角定理によれば最小固有値の上限および最大固有値の下限は共に $\|\mathbf{a}_j\|^2$ の最小値および最大値で抑えられている。それでは $\|\mathbf{a}_j\|^2$ の大小関係は対象とする物理系固有のものであろうか。 $\mathbf{a}_j$ は $j$ 番目のパラメータに関する $y_C$ の偏微分からなっているからパラメータのスケーリング，たとえば単位系のとり方によっても大小が変わる量である。各パラメータのスケーリングファクタとして $r_1, \cdots, r_k$ を用い

$$\xi_j = r_j \xi'_j \quad (j=1, \cdots, k) \quad (8.13)$$

とし，(8.3)以下の変分に関する部分をパラメータ $\xi'_j$ について考えることにすると

$$\mathcal{Y}(\xi, t_i) = y_C(\xi, t_i) + \frac{\partial y_C(\xi, t_i)}{\partial \xi'} \Delta \xi' \quad (8.14)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{Y}(\xi, t_i)}{\partial \xi'} &= \left( \frac{\partial y_C}{\partial \xi'_1}, \frac{\partial y_C}{\partial \xi'_2}, \cdots, \frac{\partial y_C}{\partial \xi'_k} \right) \\ &= \left( r_1 \frac{\partial y_C}{\partial \xi_1}, r_2 \frac{\partial y_C}{\partial \xi_2}, \cdots, r_k \frac{\partial y_C}{\partial \xi_k} \right) \end{aligned}$$

となる。したがって(8.8)に対応する式は

$$\mathbf{A}^T \mathbf{A}' \Delta \xi' = \mathbf{A}^T \mathbf{z}(\xi) \quad (8.15)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{A}' &= (r_1 \mathbf{a}_1, r_2 \mathbf{a}_2, \cdots, r_k \mathbf{a}_k) \\ \mathbf{A}^T \mathbf{A}' &= \begin{pmatrix} r_1^2 \|\mathbf{a}_1\|^2 & \cdots & r_1 r_k (\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_k) \\ \vdots & & \vdots \\ r_1 r_k (\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_k) & \cdots & r_k^2 \|\mathbf{a}_k\|^2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

という形になる。ここで $r_1, r_2, \cdots, r_k$ を $\mathbf{A}^T \mathbf{A}'$ の対角項がすべて1になるように選ぶことにする。すなわち

$$r_i = 1 / \|\mathbf{a}_i\| \quad (i=1, \cdots, k) \quad (8.16)$$

とすれば対角定理は単純に

$$\lambda_{\min} < 1 < \lambda_{\max}$$

の形になり，スケーリングの不適當さにより，過度に最大・最小固有値比を大きくすることを避けることができ

る。この場合もし連成がないならば固有値はすべて1になるので，固有値に生ずる大小関係は連成効果のみに依存するといえる。

石谷，玉木はカルマンフィルタの計算精度を上げるために共分散行列の対角項を正規化するという方法を用いている<sup>18)</sup>。本報告で述べた内容は形式は異なるが，これとまったく同じ意味をもっている。

さて具体的に(8.8)または(8.15)を解くには，まずそのまま代数方程式として解くことが考えられる。その他に列ベクトル $\mathbf{a}_j$ をSchmidtの直交化法により正規直交化したベクトル系 $\mathbf{q}_i$  ( $i=1, \cdots, k$ )を用いて解く方法がある<sup>19)</sup>。(8.8)について述べると，まず次式により正規直交化を行なう。

$$\begin{aligned} \mathbf{q}'_1 &= \mathbf{a}_1, & \mathbf{q}_1 &= \mathbf{q}'_1 / \|\mathbf{q}'_1\| \\ \mathbf{q}'_2 &= \mathbf{a}_2 - (\mathbf{a}_2, \mathbf{q}_1) \mathbf{q}_1, & \mathbf{q}_2 &= \mathbf{q}'_2 / \|\mathbf{q}'_2\| \\ &\cdots \cdots \cdots & & \\ \mathbf{q}'_k &= \mathbf{a}_k - \sum_{j=1}^{k-1} (\mathbf{a}_k, \mathbf{q}_j) \mathbf{q}_j, & \mathbf{q}_k &= \mathbf{q}'_k / \|\mathbf{q}'_k\| \end{aligned}$$

この関係式は次のように変形できる。

$$\left. \begin{aligned} \|\mathbf{q}'_1\| \mathbf{q}_1 &= \mathbf{a}_1 \\ (\mathbf{a}_2, \mathbf{q}_1) \mathbf{q}_1 + \|\mathbf{q}'_2\| \mathbf{q}_2 &= \mathbf{a}_2 \\ &\cdots \cdots \cdots \\ \sum_{j=1}^k (\mathbf{a}_k, \mathbf{q}_j) \mathbf{q}_j + \|\mathbf{q}'_k\| \mathbf{q}_k &= \mathbf{a}_k \end{aligned} \right\} \quad (8.17)$$

したがって $\mathbf{q}_j$  ( $j=1, \cdots, k$ )を列ベクトルとするマトリクス $\mathbf{Q}$ および

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} \|\mathbf{q}'_1\| & & \\ (\mathbf{a}_2, \mathbf{q}_1) & \|\mathbf{q}'_2\| & \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ (\mathbf{a}_k, \mathbf{q}_1) & (\mathbf{a}_k, \mathbf{q}_2) & \cdots & \|\mathbf{q}'_k\| \end{pmatrix} \quad (8.18)$$

を定義すると，(8.17)により次式が成立する。

$$\mathbf{A} = \mathbf{Q} \mathbf{B}^T \quad (8.19)$$

(8.8)式は $\mathbf{A} \Delta \hat{\xi} = \mathbf{z}$ と $\mathbf{a}_j$  ( $j=1, \cdots, k$ )とが直交することを意味するが， $\mathbf{q}_j$  ( $j=1, \cdots, k$ )も $\mathbf{a}_j$ と同じ空間を生成するから

$$\mathbf{Q}^T \mathbf{A} \Delta \hat{\xi} = \mathbf{Q}^T \mathbf{z} \quad (8.20)$$

も成立する。この式に(8.19)を代入すると $\mathbf{Q}$ が直交マトリクスであることにより

$$\mathbf{B}^T \Delta \hat{\xi} = \mathbf{Q}^T \mathbf{z} \quad (8.21)$$

が成立する。(8.21)は漸化式の形になっているので $\Delta \hat{\xi}_k$ から順に求めていくことができる。

(8.8)式を解く場合 $(\mathbf{a}_i, \mathbf{a}_j)$ を係数とする連立方程式を解くのに対して，(8.21)を解く場合には正規化された $\mathbf{q}_j$ を用いて $(\mathbf{a}_i, \mathbf{q}_j)$ を係数とする漸化式を計算するだけなので有効桁数は少なくてもすむ。しかしこの場合にも

(8.8)の代わりに(8.15)に対応して正規化した $\mathbf{a}'_j$ を用い、 $(\mathbf{a}'_i, \mathbf{q}_j)$ を係数とする形で計算する方がさらに有効桁数を減らす可能性がある。

## 8.2 最小二乗法の適用(予測式(6.14)を用いる場合)

近地点周辺通過時の加速度計測値および予測式(6.14)の $H$ に(7.1)を代入した式を用いて、加速度変化に関するパラメータを最小二乗法によりきめることができる。

対象となるパラメータとしては軌道要素 $a, r_p, t_p, \omega$ 等の他に、弾道係数 $B$ 、軌道減衰の解析解中のパラメータ $C_H$ および大気密度モデルの不確定パラメータ $\rho_p, k_p, \alpha_p$ 等である。これらはすべて高度の予測式(7.1)に関係している。一般の高度における大気密度パラメータ $\rho_i, k_i, \alpha_i$ を(6.14)を用いて推定することは、上記不確定パラメータのすべてを(7.1)を通じて観測ノイズ源として含むことになるので適当ではない。したがって(6.14)を近地点を含む区間のみに限定すれば

$$D = B \rho_p v^2 e^{-k_p(H-H_p) + \frac{1}{2} \alpha_p(H-H_p)^2} \quad (8.22)$$

となり、最小二乗法適用可能区間もこの範囲だけになる。この場合6.3節でも述べたように $B$ および $\rho_p$ は区別できないので、一つの不確定パラメータとして扱われることになる。簡単のため $\rho_p$ だけに不確定部分を代表させ、確定パラメータ $B v^2$ を除いて $\gamma_C$ を

$$\rho = \rho_p \exp^{-k_H(H-H_p) + \frac{1}{2} \alpha_p(H-H_p)^2} \quad (8.23)$$

として検討を行なうことにする。したがって $\rho_p$ の誤差に関して云われることは、 $B \rho_p$ の誤差について云われていることだという理解をとっておく。

検討に用いる設定値は7.1および6.2と同じである。推定すべきパラメータおよびその数値を列記すると以下のようになる。

$$\begin{aligned} a &= 6928.47 & [\text{km}] \\ r_p &= 6483.47 & [\text{km}] \\ t_p &= 0 & [\text{min}] \\ \omega &= 30^\circ \\ \rho_p &= 9.937 \times 10 & [\text{kg/km}^3] \\ k_p &= 0.157977 & [1/\text{km}] \\ C_H &= 1.7 \end{aligned}$$

前節の定式化に従えば、上記8パラメータからなるベクトルが $\mathbf{z}$ であり、(8.23)の $\rho$ が $\gamma_C(\mathbf{z}, t_i)$ である。時間間隔としては(8.23)が有効な範囲という制約から近地点を中心とする $\pm 2 \text{ min}$  計  $4 \text{ min}$ をとる。この場合の軌道高度の変化は図7.1の通りで、大気密度 $\rho$ は十分に精度で(8.23)で近似できる。

上記の8パラメータすべてを含む場合に対して、(8.12)で表わされる $\mathbf{A}^T \mathbf{A}$ を作り、対角要素と固有値とを比較した結果を表8.1に示す。表にはさらに(8.13)の変換により対角項を正規化したマトリクス $\mathbf{A}'^T \mathbf{A}'$ の固有値も示してある。 $\mathbf{A}^T \mathbf{A}$ についてみると、大きな固有値については連成を無視した場合の近似

$$\|\mathbf{a}_i\|^2 \approx \lambda_i$$

に近い感じが出ている。また対角定理が満たされていることもわかる。この場合最大・最小固有値比は $0.386 \times 10^{21}$ となっていてFACOM 230 66/75の倍長演算精度18.3桁を越えているのでこの計算機を用いても(8.8)を解くことはできない。

正規化したマトリクス $\mathbf{A}'^T \mathbf{A}'$ については最大・最小固有値比が $0.104 \times 10^{18}$ となる。条件的にはこの計算機で解けそうな数値であるが、実際(8.15)の形を解いてみるとよい結果はえられなかった。この場合の固有値の配列順序は固有値の求め方に依存し、 $\mathbf{A}^T \mathbf{A}$ の場合のように必ずしも対応するモードを代表する固有値とはいえない。

表8.1  $\mathbf{A}^T \mathbf{A}$ の対角要素と固有値および $\mathbf{A}'^T \mathbf{A}'$ の固有値(8パラメータ)

パラメータ	$\ \mathbf{a}_j\ ^2$	固有値	正規化固有値
$a$	0.18763 $D-1$	0.23360 $D-11$	0.18674 $D-5$
$r_p$	0.16054 $D+4$	0.10273 $D-3$	0.44380 $D+1$
$t_p$	0.77893 $D+4$	0.65774 $D+4$	0.39909 $D-15$
$\omega$	0.29184 $D+6$	0.23268 $D+6$	0.22322 $D-11$
$\rho_p$	0.67362 $D+1$	0.22144 $D-14$	0.42586 $D-16$
$k_p$	0.15867 $D+6$	0.24947 $D+5$	0.13318 $D+1$
$\alpha_p$	0.65834 $D+6$	0.85413 $D+6$	0.12718 $D+0$
$C_H$	0.78622 $D+2$	0.67207 $D-10$	0.21030 $D+1$
最大値/最小値		0.38572 $D+21$	0.10421 $D+18$

表 8.2  $A^T A$  の対角要素と固有値および  $A'^T A'$  の固有値 (軌道 4 パラメータ)

パラメータ	$\ a_j\ ^2$	固有値	正規化固有値
$a$	0.52578 $D-2$	0.99179 $D-5$	0.36671 $D+1$
$r_p$	0.84232 $D+3$	0.90512 $D-1$	0.25344 $D+1$
$t_p$	0.44986 $D+4$	0.43579 $D+4$	0.10988 $D+1$
$\omega$	0.15228 $D+6$	0.15326 $D+6$	0.74093 $D-7$
最大値/最小値		0.16662 $D+11$	0.34206 $D+8$

表 8.3  $A^T A$  の対角要素と固有値および  $A'^T A'$  の固有値 (大気密度 4 パラメータ)

パラメータ	$\ a_j\ ^2$	固有値	正規化固有値
$\rho_p$	0.33354 $D+1$	0.28266 $D+1$	0.23897 $D+1$
$k_p$	0.10601 $D+6$	0.15176 $D+5$	0.67863 $D+0$
$\alpha_p$	0.54140 $D+6$	0.63224 $D+6$	0.83491 $D-1$
$C_H$	0.44405 $D+2$	0.37552 $D+2$	0.84819 $D+0$
最大値/最小値		0.22368 $D+6$	0.28622 $D+2$

8 パラメータ全部を推定対象とすることが困難なので、次にパラメータを 2 つのブロックに分けて適用を試みた。一つは軌道要素  $a, r_p, t_p, \omega$  からなり、他の一つは大気密度パラメータに軌道減衰定数の  $C_H$  を加えた  $\rho_p, k_p, \alpha_p, C_H$  からなるブロックである。このそれぞれに対する  $\|a_j\|^2, A^T A$  の固有値,  $A'^T A'$  の固有値を表 8.2 および 8.3 に示す。

最大・最小固有値比から判断すると、いずれの場合も FACOM 230-60/75 の倍精度演算を用いれば十分に解くことが可能である。単精度演算 7.8 桁を用いると、 $a, r_p, t_p, \omega$  に関する推定では正規化した場合に限界点に当り、正規化しない場合は不可能となる。 $\rho_p, \alpha_p, k_p, C_H$  に対しては単精度で解くことが可能であり、正規化した場合は 16 ビットマシンでも解ける可能性がある。

表 8.2 および 8.3 に示す例では、表 8.1 の例と同じく観測点数は 9 点とっているが、この場合は変数が 4 個ずつなので、観測点数は 4 点まで減らすことができる。観測点数は 4 点まで減らすことができる。観測点数を変えて計算してみたが、固有値はほとんど変化しなかった。観測点数を変えても各列ベクトル  $a_j$  の一次独立性に対してはほとんど影響がない。(8.8) の代数方程式の解きやすさは、観測点数を変数の数と一致させた場合、すなわち

$$A d\hat{\xi} = z(\hat{\xi})$$

の解きやすさともほぼ同じであるといえることができる。

二つのブロックに分けて推定を行なう場合、(8.8) ある

いは (8.15) がたとえば代数的に解けても、定数と仮定した他のブロックに含まれるパラメータの誤差が推定値に過度に影響を与えるようでは有効な推定とはならない。この点を検討するために各パラメータについて妥当と思われる誤差レベルを設定し、その影響を調べる。

大気密度パラメータについては Jacchia モデルの実現精度として  $d \log \rho = 0.01$  という数値がえられた。この誤差は  $\rho$  の率にすると 2.3% に相当する。実際には  $B$  の誤差分も  $\rho$  の誤差に代表させてあるのでその分を考慮するともっと大きな値になる。しかしながら検討が進めばこの誤差は小さくなるのが期待できるので、推定における最良の精度を与える意味での  $\rho_p, k_p, \alpha_p$  の基準誤差としてそれぞれの値の 1% を仮定しておく。 $C_H$  についても基準誤差として 1% をとっておく。すなわち次の数値を設定する。

$$\epsilon \rho_p = 0.9937 \quad D0 \quad (\text{kg/km}^3)$$

$$\epsilon k_p = 0.1580 \quad D-2 \quad (1/\text{km})$$

$$\epsilon \alpha_p = 0.35 \quad D-4 \quad (1/\text{km}^2)$$

$$\epsilon C_H = 0.17 \quad D-1$$

これだけの誤差があるとき軌道要素推定に対してどのような影響を生ずるかを表 8.4 に示す。(8.8) の変数  $\xi$  を  $a, r_p, t_p, \omega$  にとり、上記パラメータ誤差に起因するシステムノイズの影響を計算したものである。すなわち  $y_M(t_i)$  としては (8.23) に誤差を含まない  $\rho_p, k_p, \alpha_p, C_H$  を用い、 $y_C(\bar{\xi}; t_i)$  としてはこれに上記の  $\epsilon \rho_p,$

表 8.4 軌道要素推定に与える大気密度定数誤差の影響

	$\epsilon \rho_p$	$\epsilon k_p$	$\epsilon \alpha_p$	$\epsilon C_H$
$\Delta a$	0.231 D+0	-0.941 D+0	-0.233 D+1	0.879 D-2
$\Delta r_p$	0.235 D+0	-0.128 D+1	0.713 D+0	0.592 D-3
$\Delta t_p$	-0.757 D-2	0.559 D-1	-0.289 D-1	-0.172 D-2
$\Delta \omega$	-0.130 D-1	0.961 D-1	-0.532 D-1	-0.263 D-4

表 8.5 大気密度定数推定に与える軌道要素誤差の影響

	$\epsilon a$	$\epsilon r_p$	$\epsilon t_p$	$\epsilon \omega$
$\Delta \rho_p$	0.486 D-1	0.158 D+1	0.344 D-1	0.363 D+0
$\Delta k_p$	-0.598 D-3	0.393 D-3	-0.411 D-4	0.116 D-3
$\Delta \alpha_p$	0.253 D-4	-0.172 D-5	0.272 D-5	-0.864 D-6
$\Delta C_H$	-0.147 D-1	0.105 D-2	-0.167 D+0	0.103 D-1

$\epsilon k_p$ ,  $\epsilon \alpha_p$ ,  $\epsilon C_H$ 等を加えた値を用いた。 $a$ ,  $r_p$ ,  $t_p$ ,  $\omega$ には誤差を入れていない。線形化された系であり、ノイズは主として $z$ を経由して与えられるので上記誤差が定数倍になれば結果も定数倍になると考えてよい。また $a$ ,  $r_p$ ,  $t_p$ ,  $\omega$ に誤差がある場合も重ね合わせにより上記ノイズの影響はほぼこの通り現われると考えてよい。

表 8.4 によれば  $\Delta a$  の推定に現われる誤差は  $6\alpha_p$  による影響がもっとも強く  $-2.33$  km である。 $\Delta r_p$  に対しては  $k_p$  で  $-1.28$  km,  $\Delta t_p$  に対しては  $\epsilon k_p$  で  $0.05$  min =  $3$  sec,  $\Delta \omega$  に対してはやはり  $\epsilon k_p$  で  $0.096$  rad =  $5.5^\circ$  である。 $\rho_p$ ,  $k_p$ ,  $\alpha_p$ ,  $C_H$  の誤差のうち軌道要素推定にもっとも影響を与えないのは  $C_H$  であって,  $\epsilon C_H$  がこの 10 倍の大きさすなわち 10% の誤差を含んでも大気密度定数の 1% 誤差の場合よりも小さい。

一周毎の軌道要素の変化量は,  $a$  については  $-20$  km,  $r_p$  は  $-0.1$  km,  $\omega$  は  $0.1^\circ$  といった数値であった。また 7 章の推定法ではうまくいけば  $t_p$  の精度は  $2$  sec,  $r_p$  は  $0.2$  km,  $a$  は  $3$  km 程度の精度がえられた。この数値に比較すると, 上記の軌道要素に現われる数値は非常に大きいといわざるをえない。ことに  $\Delta \omega$  および  $\Delta r_p$  の推定に現われる誤差は過大であったこのような最小二乗法の適用法が適切でないことがわかる。

さてそれでは逆に, 地上トラッキング等をも併用して軌道要素に関する推定がよい精度で行なわれるとき, 加速度観測データから  $\rho_p$ ,  $k_p$ ,  $\alpha_p$ ,  $C_H$  を推定する場合について検討しよう。この場合定数として扱われる軌道要素の最小誤差は, 上述の数値を考慮して次のように仮定

する。

$$\epsilon a = 0.2 \text{ D+1} \quad [\text{km}]$$

$$\epsilon r_p = 0.1 \text{ D+0} \quad [\text{km}]$$

$$\epsilon t_p = 1 \text{ [sec]} = 0.1667 \text{ D-1} \quad [\text{min}]$$

$$\epsilon \omega = 0.1^\circ = 0.1745 \text{ D-2} \quad [\text{rad}]$$

この誤差に起因するシステムノイズによる  $\Delta \rho_p$ ,  $\Delta k_p$ ,  $\Delta \alpha_p$ ,  $\Delta C_H$  に現われる誤差を表 8.5 に示す。 $\Delta \rho_p$  に対してもっとも影響を与えるのは  $\epsilon r_p$  であって  $1.58 \text{ kg/km}^3$ ,  $\Delta k_p$  および  $\Delta \alpha_p$  に対しては  $\epsilon a$  であって, それぞれ  $-0.598 \times 10^{-3} \text{ 1/km}$  および  $0.253 \times 10^{-4} \text{ 1/km}^2$ ,  $\Delta C_H$  に対しては  $\epsilon t_p$  で  $-0.167$  となる。

軌道要素の誤差によって大気密度定数の推定に現われる誤差は十分小さく, 先に設定した 1% 誤差  $\epsilon \rho_p$ ,  $\epsilon k_p$ ,  $\epsilon \alpha_p$  とほぼ同程度の誤差である。したがって軌道要素の精度を上記程度で得ることができれば, 加速度計観測値を用いた最小二乗法により, Jacchia モデルの解析的表現精度に相当する程度のパラメータ推定を行なうことができることになる。 $\Delta C_H$  に現われる誤差は  $C_H$  の 10% 程度であるが,  $\epsilon C_H$  の軌道要素に与える影響が小さいことを考えるとこの推定も有効であると考えられる。

表 8.6 には  $\epsilon \rho_p$ ,  $\epsilon k_p$ ,  $\epsilon \alpha_p$ ,  $\epsilon C_H$  のみが単独で誤差として  $y_C(\bar{\xi}, t_i)$  に入り, 他の誤差源がない場合の推定結果  $\Delta \rho_p$ ,  $\Delta k_p$ ,  $\Delta \alpha_p$ ,  $\Delta C_H$  を示す。当然のことながらよい再現精度を示す。微小な誤差は (8.3) 式として Taylor 展開の一次項のみをとっていることによっている。

表 8.4, 8.5, 8.6 の推定は, 最大・最小固有値の検出の場合と同じく観測区間 4 分間を 8 等分した 9 点観測値

表 8.6 大気密度定数誤差の推定による再現性

	$\epsilon \rho_p$	$\epsilon k_p$	$\epsilon \alpha_p$	$\epsilon C_H$
$\Delta \rho_p$	-0.994 D+0	-0.326 D-5	-0.303 D-6	0.103 D-4
$\Delta k_p$	-0.227 D-7	-0.158 D-2	0.103 D-7	-0.179 D-6
$\Delta \alpha_p$	0.168 D-7	0.260 D-5	-0.350 D-4	0.135 D-7
$\Delta C_H$	-0.701 D-4	0.668 D-6	0.330 D-7	-0.170 D-1

に対して推定を行なった結果である。同じ観測区間に対して4等分5観測点の例も計算したが、最大・最小固有値比の場合変化がなかったと同様に、仮数部1桁目が変わるほどの相異は生じなかった。

以上の計算において(8.3)式の $A_i$ の $j$ 要素 $A_{ij} = \partial y_C / \partial \xi_j$ は(7.1)~(7.7)および(8.23)を用いて数値的に

$$\frac{y_C(\xi_j + \Delta \xi_j) - y_C(\xi_j)}{\Delta \xi_j} \quad (8.24)$$

によって作るという方法を用いた。 $\Delta \xi_j$ としては一率に $\xi_j \times 10^{-6}$ ととり、倍精度演算を用いてほぼ6桁の精度を保つようにした。この $A_{ij}$ の発生方法はプログラムステップ数が短かくてすむという利点があるが、実際に搭載型計算機を用いて $A_{ij}$ を発生させる場合には、計算機の有効桁数が限定されているので有利とはいえない。

(8.20)を用いる場合、相反する二つの要求を満たすことが必要である。

1)  $\lim_{\Delta \xi_j \rightarrow 0}$  の効果を出すためには $\Delta \xi_j / \xi_j$ を小さくすること。

2) 量子化誤差を小さく抑えるためには、 $\Delta \xi_j / y_C$ と $(\partial y_C / \partial \xi_j) \Delta \xi_j / y_C$ とのうち小さい方が十分の桁数を持つようにすること。

もし $y_C$ が $\xi_j$ について線形に近い特性を持っていれば、

1) の $\Delta \xi_j / \xi_j$ は小さくなくてもよい結果がえられる。 $\Delta \rho_p$ ,  $\Delta k_p$ ,  $\Delta \alpha_p$ ,  $\Delta C_H$ の推定はこの例に近く、一率に $\Delta \xi_j / \xi_j = 10^{-1}$ にとる程度でほとんど解に影響を与えないくらいの結果がえられた。この場合はすべて $\partial y_C / \partial \xi_j > 1$ なので、 $\Delta \xi_j / y_C$ について考えると $y_C = \rho \approx 100$ , 最小の $\Delta \xi_j$ は $\Delta \alpha_p$ で $0.35 \times 10^{-3}$ であるから、 $\Delta \xi_j / y_C \approx 0.35 \times 10^{-5}$ となる。したがって $A_{ij}$ として2桁の精度を保つには計算機として8桁の精度が必要とされることになる。最大・最小固有値比からの要求が最低3桁程度でもよいことを考えると、この要求は望ましくない。

$A_{ij} = \partial y_C / \partial \xi_j$ を作る他の方法としては、解析的に $y_C$ の偏微分形を求めることが考えられる。(8.23)の $\rho_p$ ,  $k_p$ ,  $\alpha_p$ ,  $C_H$ に関する偏微分は

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial \rho_p} &= \rho \left( \frac{1}{\rho_p} - k \frac{\partial H}{\partial \rho_p} \right) \\ \frac{\partial \rho}{\partial k_p} &= \rho \left\{ -(H - H_p) - k \frac{\partial H}{\partial k_p} \right\} \\ \frac{\partial \rho}{\partial \alpha_p} &= \rho \left\{ \frac{1}{2} (H - H_p)^2 - k \frac{\partial H}{\partial \alpha_p} \right\} \\ \frac{\partial \rho}{\partial C_H} &= \rho k \frac{\partial H}{\partial C_H} \end{aligned} \right\} \quad (8.25)$$

となり、 $\partial H / \partial \xi_j$ を(7.1)~(7.7)を用いて解くことが必要になる。(7.6)は極小点が解析的に求まりにくいのでやや問題がある。しかしながら3桁程度の精度を狙うのであれば適当な近似により表現する方法がある。次節の例においてこの具体的な方法を述べる。

以上の結果、もし軌道要素の予測が良好になされていれば、 $T=2.0$ すなわち近地点前後4分間の加速度計計測値を用いて、大気密度定数 $B\rho_p$ ,  $k_p$ ,  $\alpha_p$ ,  $C_H$ 等を最小二乗法により搭載系において推定する可能性のあることがわかった。

これまで述べた内容と別に、大気密度定数 $B\rho_p$ ,  $k_p$ ,  $\alpha_p$ ,  $C_H$ の他に軌道要素のうち1個または2個を推定対象として加える可能性についても検討はしたが、良好な結果はえられなかった。

本節における検討の結果、加速度計計測値を用いて近地点周辺の大気密度の特性値を推定する方法の提案がなされたことになる。大気密度測定に関してこれまでになされている研究との関連について述べておこう。

衛星軌道の観測データから大気密度を推定するという試みは早くからなされ、大気密度モデル改良の原動力ともなってきた。1966年 King-Hele<sup>13)</sup> は一周毎の軌道減衰を表わす式(C19)と同等の式を軌道周期に関して導き、軌道周期の変化と大気密度との関係について定式化した。そして高度200~1000 kmに適用可能な方法として近地点よりスケール高度の $1/2$ だけ高い地点の大気密度を軌道周期の変化から算定するという方法を提案した。この考え方が大気密度推定の基礎をなしてきた。

一方加速度計を用いて軌道上任意地点の大気密度を測定するという方法も実行され、軌道減衰から推定する方



法との比較検討がなされてきた。200 km 以上の高度に対する大気密度モデルおよび測定方法については確立しつつある。

高度200 km以下の大気密度の測定結果は極めて少ない。その理由は第一に軌道減衰が激しいので、そのような軌道を飛ぶ衛星が少ないことによる。第二には大気密度がモデル(6.1)と著しく異なるためKing-Heleの理論が適合しずらく、軌道減衰の積分値から特定高度の大気密度を割り出すのが困難なことによると思われる。Rugge および Chin<sup>14)</sup>は近地点135 km、遠地点400 kmの衛星のトラッキングデータおよび加速度計測定データを用いて高度148 kmにおける大気密度の測定結果の比較を行ない、誤差2.5%の一致度をみている。またこの測定結果と Jacchia 1971年モデルとの比較も行なっているが、平均約10%、最大25%もの誤差を確認している。高度200 km以下の大気密度モデルに難があることは確かであるが、Rugge 等が行なっている数周回の軌道減衰値からKing-Hele式の大気密度を決定する測定方法にも問題があるように思われる。

このような実情を考えると、本節で提案したような大気密度モデルを搭載システムで決定する方法は、DAS ミッションの遂行上必要であるばかりでなく、高度200 km以下の大気密度モデルを確立するというミッションにも貢献しうる内容を含んでいる。ことに基礎大気密度を(6.10)の形で表現することにより、加速度計計測値を近地点付近の空間的に連続する大気密度特性記述に結びつけられる点は、測定データの整理上も有利であると思われる。

### 8.3 最小二乗法による軌道要素の推定

前節の結果、予測式として(8.23)を用いる方法は、 $B\rho_p$ ,  $k_p$ ,  $\alpha_p$ ,  $C_H$ 等の推定を行なうのにはよいが、軌道要素 $a$ ,  $r_p$ ,  $t_p$ ,  $\omega$ 等の推定には適していないことがわかった。その理由は、観測時間が短いため、軌道要素の摂動よりも大気密度数等の変動による加速度変化の方が顕著に現われるということによっている。軌道要素の推定を行なうためには、観測時間をもっと長くとらなければならない。

最小二乗法の予測式として(8.23)を用いる限りでは、観測時間を延ばすことは不可能である。(8.23)の代りに高度 $H$ を表わす式(7.1)を用いることを考えよう。この場合、計測値 $D$ から(6.14)を用いて高度 $H$ を算定するまでに含まれる $B\rho_i$ ,  $k_i$ ,  $\alpha_i$ 等の誤差による $H$ の誤差は観測ノイズとして扱われることになる。 $i$ は少なくとも10個程度はとることになるので、誤差が平均値0でランダムに分布すれば、最小二乗法適用により推定値に現われる

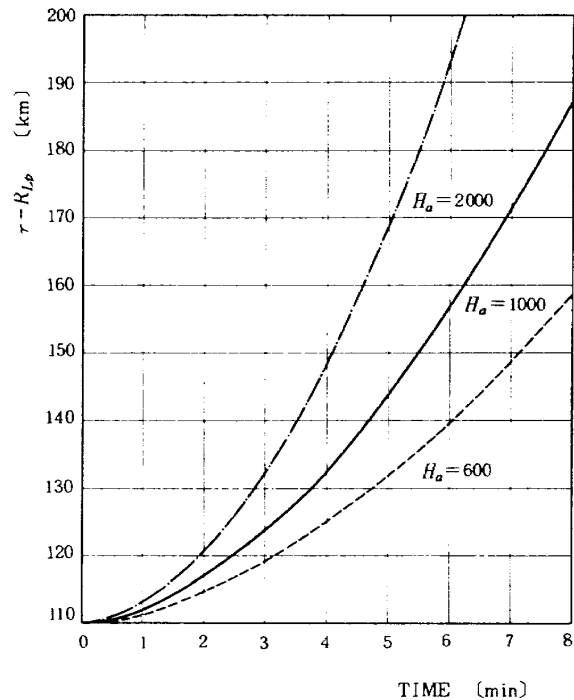


図 8.1 近地点高度110 kmのときの高度変化

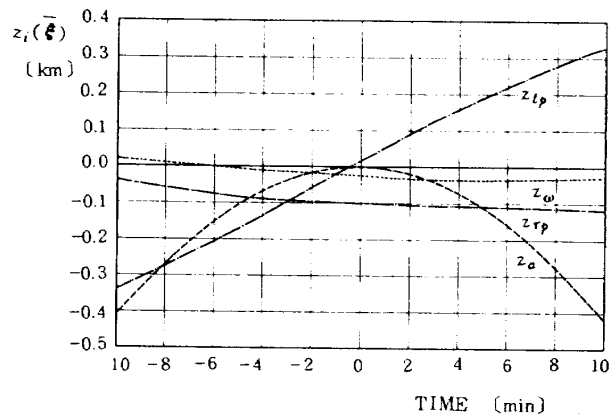


図 8.2  $\epsilon a$ ,  $\epsilon r_p$ ,  $\epsilon t_p$ ,  $\epsilon \omega$ のそれぞれを単独誤差源とするとときの $z_i(\bar{\epsilon})$

誤差の影響を減少させることができる。観測時間の上限は、搭載系に大気密度モデルのデータを保有できる高度までの上昇時間である。

図8.1に近地点高度を110 km、遠地点高度を600, 1000, 2000 kmにとったときのケプラー運動の高度を示す。いま大気密度を高度200 kmまで発生させられるものとするとき、遠地点高度1000 kmの場合、観測時間は、 $T=8$  min ととることができる。

前節で設定した $a$ ,  $r_p$ ,  $t_p$ ,  $\omega$ を(7.1)に代入した値を $y_M(t_i)$ 、 $a + \epsilon a$ ,  $r_p$ ,  $t_p$ ,  $\omega$ を(7.1)に代入してえられる値を $y_C(\bar{\epsilon}, t_i)$ とするとときえられる $z_i(\bar{\epsilon}) = y_M(t_i) - y_C(\bar{\epsilon}, t_i)$ を時間的連続にプロットすると図8.2の $z_a$

表 8.7 軌道要素推定に与える大気密度定数誤差の影響

a)  $T = 2.0$ 

	$\epsilon \rho_p$	$\epsilon k_p$	$\epsilon \alpha_p$	$\epsilon C_H$
$\Delta a$	-0.235 $D+0$	0.844 $D-1$	0.119 $D-2$	0.102 $D-1$
$\Delta r_p$	0.698 $D-1$	-0.250 $D-1$	-0.354 $D-3$	0.366 $D-3$
$\Delta t_p$	-0.353 $D-2$	0.126 $D-2$	0.178 $D-4$	-0.171 $D-2$
$\Delta \omega$	-0.521 $D-2$	0.187 $D-2$	0.264 $D-4$	-0.944 $D-5$

b)  $T = 8.0$ 

	$\epsilon \rho_p$	$\epsilon k_p$	$\epsilon \alpha_p$	$\epsilon C_H$
$\Delta a$	-0.197 $D+0$	0.715 $D-1$	0.101 $D-2$	0.806 $D-2$
$\Delta r_p$	0.657 $D-1$	-0.239 $D-1$	-0.337 $D-3$	0.554 $D-3$
$\Delta t_p$	-0.340 $D-2$	0.122 $D-2$	0.173 $D-4$	-0.171 $D-2$
$\Delta \omega$	-0.493 $D-2$	0.179 $D-2$	0.253 $D-4$	-0.215 $D-4$

のごとくになる。 $z_{rp}$ ,  $z_{tp}$ ,  $z_\omega$ も同様にしてえられる。この $z_j$ の時間的な変化の特徴がはっきりしているようなパラメータについては、最小二乗法によりよい解がえられる。前節の $T=2\text{min}$ に対する $a$ ,  $r_p$ ,  $t_p$ ,  $\omega$ の推定でよい結果がえられなかったのも、時間間隔が短かすぎるため $z_j$ の特徴がはっきり現われなかったためと考えられる。

まず(7.5)式を経由してシステムノイズとして影響を与える近地点大気密度定数の誤差 $\epsilon \rho_p$ ,  $\epsilon k_p$ ,  $\epsilon \alpha_p$ ,  $\epsilon C_H$ を前節と同じ値に設定し、これの軌道要素推定への影響を調べよう。 $y_C(\bar{\xi}, t_i)$ に $\epsilon \rho_p$ ,  $\epsilon k_p$ ,  $\epsilon \alpha_p$ ,  $\epsilon C_H$ を単独で入れた場合の軌道要素推定誤差 $\Delta a$ ,  $\Delta r_p$ ,  $\Delta t_p$ ,  $\Delta C_H$ を $T=2.0$ および $8.0$ の場合について表 8.7 に示す。 $T$ を変えることによる変化はほとんど認められない。

$T=2.0$ の場合について表 8.4 と比べると、 $y_C$ として(7.1)を用いることによって結果的に観測ノイズとして処理することになった分だけ影響が小さくなっていることがわかる。ことに表 8.4 ではもっとも大きな誤差要因となっていた $k_p$ および $\alpha_p$ の影響が小さくなっている。

$\epsilon \rho_p$ による影響が一番大きく、これについては表 8.4 とあまり変らない。しかしその値も前節で設定した軌道要素の基準誤差 $\epsilon a$ ,  $\epsilon r_p$ ,  $\epsilon t_p$ ,  $\epsilon \omega$ に比べると小さいかまたは同等の大きさにすぎない。したがって観測ノイズの影響を小さく抑えることができれば、この最小二乗法の適用は軌道要素推定の方法として有効であることがわかる。

大気密度モデル(6.10)の1個の $i$ に対する適用区間を十分に小さくとり、観測時間を長くすれば、平均化の作

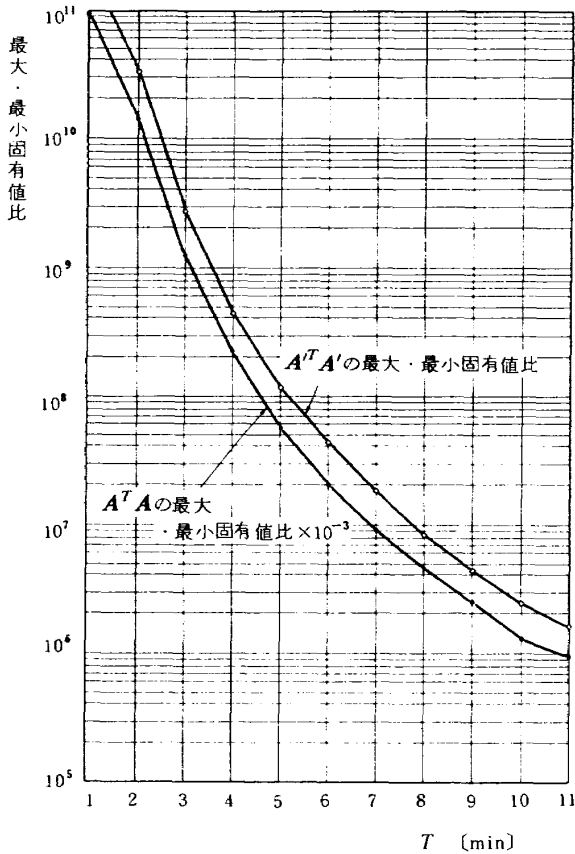
用があるので $\epsilon k_p$ ,  $\epsilon \alpha_p$ の影響とともに $\epsilon \rho_i$ ,  $\epsilon k_i$ ,  $\epsilon \alpha_i$ の影響をも小さくできる。したがって観測ノイズの影響を小さくできる可能性は強い。

大気密度モデル適用区分、観測時間、観測点数等と観測ノイズの影響との関係は興味ある問題であるが、正確に評価するためには大気密度の誤差モデルを設定したシミュレーション検討が必要である。現段階では準備不足なので、次の機会の検討事項とする。

$y_C$ として(7.1)の高度 $H$ を用いた場合の $A^T A$ および $A'^T A'$ の最大・最小固有値比の観測時間に対する変化を計算した結果を図 8.3 に示す。 $T=2\text{min}$ すなわち観測時間を近地点前後 2分ずつ計 4分間とした場合、正規化しなければ最大・最小固有値比は $1.5 \times 10^{10}$ 、正規化した場合は $3.3 \times 10^7$ となり、それぞれ $y_C = \rho$ とした前節の場合の $1.7 \times 10^{10}$ ,  $3.4 \times 10^7$ とほぼ合致している。

$T$ を増加するにしたがって、最大・最小固有値比は顕著な減少傾向を示し、計算機所要精度上からも観測時間を増すのが有利なことがわかる。また $A^T A$ を正規化して $A'^T A'$ の形にすることにより、すべての $T$ に対して一様に、最大・最小固有値比はほぼ 3桁小さくすることができる。結果としてたとえば $T=8$ を選べば、最大・最小固有値比は $8.4 \times 10^4$ となる。

搭載型計算機として一般的なワードサイズ 16ビットを用い倍長演算可能と仮定する。この場合の仮数部は 23ビット程度で、これにより表現できる最大数は $8.4 \times 10^6$ である。したがって $T=8$ とすれば 2桁の余裕があり、よい精度で(8.15)を解くことができる可能性を示している。 $A^T A$ を正規化しなければ最大・最小固有値比が $4.6 \times 10^6$

図 8.3  $A^T A$  および  $A'^T A'$  の最大・最小固有値比

であるから精度的に問題がある。

以上の検討において、微係数  $A_{ij}$  は前節と同様の発生法によった。しかし搭載型について考えるとこのような発生法には問題がある。 $\xi_1 = a$  が 6900 km であるため  $\Delta \xi_1 / \xi_1$  として少なくとも  $10^{-4}$  にとることが必要である。 $\Delta \xi_i / \xi_i$  を一率に  $10^{-4}$  にとると  $\xi_i = \omega$  に対して  $\Delta \xi_i / \xi_i$  が  $0.5 \times 10^{-6}$  となり、有効桁数 3 桁を考えると 10 桁の計算機精度が必要とされ好ましくない。これを回避するために解析的に偏微係数を求めると以下のようになる。

まず

$$\xi = \begin{pmatrix} a \\ r_p \\ t_p \\ \omega \end{pmatrix} \quad (8.26)$$

および

$$y_C(\xi, t_i) = H(t_i) = r + \bar{x} - R_L + x_D \quad (8.27)$$

より

$$A_i = \left( \frac{\partial H}{\partial a}, \frac{\partial H}{\partial r_p}, \frac{\partial H}{\partial t_p}, \frac{\partial H}{\partial \omega} \right) \quad (8.28)$$

であるから(8.28)の各要素を(7.2)~(7.7)を用いて表わすと次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial a} &= \frac{r - \bar{x}}{a} + \frac{\partial r}{\partial e} \frac{\partial e}{\partial a} + \left( \frac{\partial r}{\partial \theta^*} + \frac{\partial \bar{x}}{\partial \theta^*} \right) \frac{\partial \theta^*}{\partial a} - \frac{\partial R_L}{\partial L} \frac{\partial L}{\partial a} \\ &\quad + K_D \left( \frac{2f}{a} + k_f \frac{\bar{x}_p}{a} + \frac{\partial f}{\partial \beta} \frac{\partial \beta}{\partial a} + \frac{\partial f}{\partial \theta_m} \frac{\partial \theta^*}{\partial a} \right) \\ \frac{\partial H}{\partial r_p} &= \frac{\partial r}{\partial e} \frac{\partial e}{\partial r_p} + \left( \frac{\partial r}{\partial \theta^*} + \frac{\partial \bar{x}}{\partial \theta^*} \right) \frac{\partial \theta^*}{\partial r_p} - \frac{\partial R_L}{\partial L} \frac{\partial L}{\partial r_p} \\ &\quad + K_D \left( -k_f + \frac{\partial f}{\partial \beta} \frac{\partial \beta}{\partial r_p} + \frac{\partial f}{\partial \theta_m} \frac{\partial \theta^*}{\partial r_p} \right) \\ \frac{\partial H}{\partial t_p} &= \left( \frac{\partial r}{\partial \theta^*} + \frac{\partial \bar{x}}{\partial \theta^*} \right) \frac{\partial \theta^*}{\partial t_p} - \frac{\partial R_L}{\partial L} \frac{\partial L}{\partial t_p} \\ &\quad + K_D \left( \frac{\partial f}{\partial \theta_m} \frac{\partial \theta^*}{\partial t_p} \right) \\ \frac{\partial H}{\partial \omega} &= \frac{\partial \bar{x}}{\partial \theta^*} \frac{\partial \theta^*}{\partial \omega} - \frac{\partial R_L}{\partial L} \frac{\partial L}{\partial \omega} \\ &\quad + K_D \left( -k_f \frac{\partial H_p}{\partial \omega} + \frac{\partial f}{\partial \beta} \frac{\partial \beta}{\partial \omega} \right) \end{aligned} \right\} \quad (8.29)$$

ただし

$$\bar{x}_p = \frac{1}{2} K \left( 1 - \frac{3}{2} s_i^2 + \frac{1}{2} s_i^2 c_{2\omega} \right)$$

$$L_p = \sin^{-1}(\sin i \sin \omega)$$

$$\frac{\partial e}{\partial a} = \frac{1-e}{a}$$

$$\frac{\partial e}{\partial r_p} = -\frac{1}{a}$$

$$\frac{\partial \theta^*}{\partial a} = -\frac{3}{2a} M(1 + 2e c_M) + \frac{2(1-e)}{a} s_M$$

$$\frac{\partial \theta^*}{\partial r_p} = -\frac{2 s_M}{a}$$

$$\frac{\partial \theta^*}{\partial t_p} = -n(1 + 2e c_M)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \omega} = \frac{s_i s_\theta}{\sqrt{1 - s_i^2 s_\theta^2}}$$

$$\frac{\partial L}{\partial a} = \frac{\partial \theta^*}{\partial a} \cdot \frac{\partial L}{\partial \omega}$$

$$\frac{\partial L}{\partial r_p} = \frac{\partial \theta^*}{\partial r_p} \frac{\partial L}{\partial \omega}$$

$$\frac{\partial L}{\partial t_p} = \frac{\partial \theta^*}{\partial t_p} \frac{\partial L}{\partial \omega}$$

$$\frac{\partial r}{\partial e} = -\left( \frac{2e}{1-e^2} + \frac{c_\theta^*}{1+e c_\theta^*} \right) r$$

$$\frac{\partial r}{\partial \theta^*} = \frac{r_e s_\theta^*}{1+e c_\theta^*}$$

$$\frac{\partial \bar{x}}{\partial \theta^*} = -\frac{1}{2} K s_i^2 s_{2\theta}$$

$$\frac{\partial R_L}{\partial L} = R_e (-2K_2 s_{2L} + 4K_3 s_{4L})$$

$$\frac{\partial H_m}{\partial a} = -\frac{\bar{x}_p}{a}$$

$$\frac{\partial H_m}{\partial \omega} = \frac{1}{2} K s_i^2 s_{2\omega} + R_e (-2K_2 s_{2Lp} + 4K_3 s_{4Lp}) \frac{s_i c_\omega}{\sqrt{1-s_i^2 s_\omega^2}}$$

$$\frac{\partial \beta}{\partial a} = k_m + a e \alpha_p \frac{\partial H_m}{\partial a}$$

$$\frac{\partial \beta}{\partial r_p} = \alpha_p a e - k_m$$

$$\frac{\partial \beta}{\partial \omega} = \alpha_0 a e \frac{\partial H_m}{\partial \omega}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial \beta} = & -\frac{\partial EI_0}{\partial \beta} \theta_m + \frac{\partial EI_1}{\partial \beta} \theta_m c_{\theta m} + \frac{1}{3} \frac{\partial EI_2}{\partial \beta} s_{2\theta m} \\ & + \frac{1}{12} \frac{\partial EI_3}{\partial \beta} s_{3\theta m} + \frac{1}{30} \frac{\partial EI_4}{\partial \beta} s_{4\theta m} - \left[ -\frac{\partial EI_0}{\partial \beta} \right. \\ & \left. + \frac{\partial EI_1}{\partial \beta} + \frac{2}{3} \frac{\partial EI_2}{\partial \beta} + \frac{1}{4} \frac{\partial EI_3}{\partial \beta} + \frac{2}{15} \frac{\partial EI_4}{\partial \beta} \right] s_{\theta m} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial \theta_m} = & -EI_0 + EI_1 c_{\theta m} - EI_1 \theta_m s_{\theta m} + \frac{2}{3} EI_2 c_{2\theta m} \\ & + \frac{1}{4} EI_3 c_{3\theta m} + \frac{2}{15} EI_4 c_{4\theta m} - \left[ -EI_0 + EI_1 \right. \\ & \left. + \frac{2}{3} EI_2 + \frac{1}{4} EI_3 + \frac{2}{15} EI_4 \right] c_{\theta m} \end{aligned}$$

$$\frac{\partial EI_0}{\partial \beta} = -\frac{1}{\sqrt{8\pi\beta^3}} \left( 1 + \frac{3}{8\beta} \right)$$

$$\frac{\partial EI_1}{\partial \beta} = -\frac{1}{\sqrt{8\pi\beta^3}} \left( 1 - \frac{9}{8\beta} \right)$$

$$\frac{\partial EI_2}{\partial \beta} = \frac{\partial(EI_0)}{\partial \beta} - \frac{2}{\beta} \frac{\partial(EI_1)}{\partial \beta} + \frac{2}{\beta^2} EI_1$$

$$\frac{\partial EI_3}{\partial \beta} = \left( 1 + \frac{1}{\beta^2} \right) \frac{\partial EI_1}{\partial \beta} - \frac{4}{\beta} \frac{\partial EI_0}{\partial \beta} + \frac{4}{\beta^2} EI_0$$

$$\frac{\partial EI_4}{\partial \beta} = \left( 1 + \frac{24}{\beta^2} \right) \frac{\partial EI_0}{\partial \beta} - \frac{8}{\beta} \frac{\partial EI_1}{\partial \beta} + \frac{8}{\beta^2} EI_1$$

$X_D$ の微係数を求める過程で、 $H_m$ および $\theta_m$ の微係数を求める操作が必要とされるが、これを正確な形で求めるのは困難なので、近地点における高度

$$H(t_p) = r_p + \bar{x}_p - R_{Lp} \quad (8.30)$$

および $\theta^*$ の微係数で代用した。各パラメータの変化による $H_m$ および $\theta_m$ の変化と、 $H(t_p)$ および $\theta^*$ の変化とはあまり差がないと考えられる。

前節の(8.25)で必要であった $\partial H/\partial \rho_p$ 、 $\partial H/\partial k_p$ 、 $\partial H/\partial \alpha_p$ 、 $\partial H/\partial C_H$ 等については、(8.27)の $x_D$ の項のみが関係するので、 $H_m$ および $\theta_m$ に関する上記の近似を用いると、(8.29)の $K_D$ を係数とする項のみを含む形で求められる。

FACOM 230 60/75 の倍精度演算(有効桁数17.8)を用いて $\Delta \xi_j/\xi_j = 10^{-6}$ として数値的に求めた場合と、上記の解析式(8.29)を用いた場合との係数マトリクス $A$ の計算例を表8.8に示す。観測時間は $T=2.0$ すなわち近地点前後4分間とし、その区間を4等分して5点の観測点に関して求めている。数値解の方はほぼ6桁の精度をもつので、解析解のそれからのずれは $H_m$ および $\theta_m$ に関する近似の誤差と考えてよい。解析式の方の係数はほぼ3桁の精度をもっているが、数値的に求める方法でこれと同等の精度をえるためには $\Delta \xi_j/\xi_j = 10^{-4}$ 程度にすることが必要であった。

つぎにこの二つのマトリクスを用いた場合について誤

表 8.8 係数マトリクス  $A$

a) 倍精度演算による数値解  $\Delta \xi_j/\xi_j = 10^{-6}$  ( $T=2.0$ )

$$\begin{pmatrix} 0.84446 & D-2 & 0.95265 & D+0 & 0.36628 & D+1 & 0.10398 & D+2 \\ 0.21059 & D-3 & 0.98467 & D+0 & 0.13877 & D+1 & 0.12338 & D+2 \\ 0.10088 & D-3 & 0.10106 & D+1 & -0.86925 & D+0 & 0.13998 & D+2 \\ 0.24451 & D-2 & 0.10317 & D+1 & -0.30939 & D+1 & 0.15366 & D+2 \\ 0.91318 & D-2 & 0.10497 & D+1 & -0.52729 & D+1 & 0.16438 & D+2 \end{pmatrix}$$

b) 倍精度演算による解析解 ( $T=2.0$ )

$$\begin{pmatrix} 0.84645 & D-2 & 0.95257 & D+0 & 0.36629 & D+1 & 0.10375 & D+2 \\ 0.21139 & D-2 & 0.98463 & D+0 & 0.13878 & D+1 & 0.12329 & D+2 \\ 0.97615 & D-4 & 0.10106 & D+1 & -0.86923 & D+0 & 0.14002 & D+2 \\ 0.24303 & D-2 & 0.10318 & D+1 & -0.30939 & D+1 & 0.15385 & D+2 \\ 0.31045 & D-2 & 0.10498 & D+1 & -0.52729 & D+1 & 0.16472 & D+2 \end{pmatrix}$$

表 8.9 最小二乗法による倍精度演算推定値 ( $T=2.0$ )a)  $A$  の数値解に対する解

	$\epsilon a$	$\epsilon r_p$	$\epsilon t_p$	$\epsilon \omega$
$\Delta a$	-0.200 $D+1$	0.323 $D-2$	0.766 $D-3$	-0.173 $D-3$
$\Delta r_p$	-0.204 $D-4$	0.101 $D+0$	0.611 $D-4$	0.407 $D-4$
$\Delta t_p$	0.118 $D-5$	0.483 $D-4$	-0.167 $D-1$	0.270 $D-5$
$\Delta \omega$	0.153 $D-5$	0.713 $D-4$	0.188 $D-4$	-0.175 $D-2$

b)  $A$  の解析解に対する解

	$\epsilon a$	$\epsilon r_p$	$\epsilon t_p$	$\epsilon \omega$
$\Delta a$	-0.200 $D+1$	0.268 $D-2$	0.692 $D-3$	-0.374 $D-2$
$\Delta r_p$	-0.109 $D-2$	-0.101 $D+0$	0.687 $D-4$	0.112 $D-2$
$\Delta t_p$	0.551 $D-4$	0.407 $D-4$	0.167 $D-1$	-0.520 $D-4$
$\Delta \omega$	0.819 $D-4$	0.599 $D-4$	0.183 $D-4$	-0.183 $D-2$

差  $\epsilon a$ ,  $\epsilon r_p$ ,  $\epsilon t_p$ ,  $\epsilon \omega$  に対する最小二乗推定値を表 8.9 に示す。いずれも倍精度で解いているので、両者の解の差はほぼマトリクス  $A$  の精度の差によると考えてよい。 $\Delta \xi_j / \xi_j = 10^{-6}$  として数値的に求めた場合の解において誤差が厳密に再現されていない分は、マトリクス  $A$  の精度によるものではなく、(8.3)において Taylor 展開の一次項のみを採用している線形化の誤差によっている。実際後にも示すように、入力誤差を大きくするとその誤差の最小二乗法による再現性は悪くなる。解析式を用いた場合の結果は  $H_m$ ,  $\theta_m$  の微係数の近似のためこれよりやや悪くなるが、実用上問題となるほどではない。

以上の計算例は  $T=2$  とした場合であるが、 $T$  を変えても上記の結果の傾向はほとんど変わらなかった。

最大・最小固有値比および係数マトリクス精度と計算機の有効桁数との関係を具体的に調べるために、FACOM 230 60/75 の単精度演算を用いて検証を試みた。FACOM の単精度は全 36 ビット中仮数部 26 ビットで 7.8 桁の精度をもつ。

まず係数マトリクス  $A$  の解析解については、単精度演算を用いた場合、倍精度で計算した表 8.8 (b) の結果とまったく一致した結果がえられた。表に示す精度の範囲では両者には差が生じない。これに対して数値解の方は  $\Delta \xi_j / \xi_j$  をどのようにとっても単精度ではよい結果がえられなかった。したがって 7.8 桁程度では、 $A$  は解析的に発生させるべきである。

前節で設定した基準誤差  $\epsilon a$ ,  $\epsilon r_p$ ,  $\epsilon t_p$ ,  $\epsilon \omega$  をそれぞれ単独に入れたときの単精度による最小二乗推定の結果を  $T=2.0$ , 6.0, 8.0 の場合について表 8.10 に示す。

いずれも係数マトリクスは解析式を用い、正規化を行なった  $A'^T A'$  を用いた式 (8.15) をそのまま解いた場合の結果である。

$T=2.0$  のとき、最大・最小固有値比は  $0.33 \times 10^8$  で、単精度で表わせる最大数  $0.90 \times 10^7$  をわずかに越えている。このためこの場合の推定はほとんど意味をなさないものになっている。 $T$  を増すにつれて推定精度はよくなる。 $T=6.0$  では推定により全般的に精度の向上が望める程度になり、 $T=8.0$  では倍精度で計算した結果表 8.9 の (b) と変らない精度くらいまでになる。

次に誤差入力  $\epsilon a$ ,  $\epsilon r_p$ ,  $\epsilon t_p$ ,  $\epsilon \omega$  を 10 倍にしたときの最小二乗法による推定結果を表 8.11 に示す。前節で設定した軌道要素の基準誤差が予測値の最小誤差くらいであるのに対して、それを 10 倍したこの誤差入力、実際の運用時に軌道要素に含まれる最大に近い値と考えられる。a) に示す結果は、対応する基準誤差入力の場合の結果表 8.8 の a) に比べると、非対角項が単に 10 倍した値より大きくなっていて、再現性が悪くなっている。その理由は先にも述べた線形化の誤差によるものである。

b) に示す単精度演算の結果は、対応する基準誤差入力の場合の結果表 8.10 の a) と比べると、逆に誤差の再現性はよくなっている。対角項の修正量の方が非対角項の誤差量よりも大きな値をとっている、この場合は修正効果があるといえる。すなわち最大・最小固有値比を目安として判定すると、 $T=2.0$  の場合を単精度演算で処理することは解がえられるかどうかの臨界点と考えられた。ところが実際上は、小さな誤差入力に対しては解は量子化誤差の中に埋没してしまい意味を失うが、大きな誤差

表 8.10 単精度演算による最小二乗法推定値

a)  $T = 2.0$ 

	$\epsilon a$	$\epsilon r_p$	$\epsilon t_p$	$\epsilon \omega$
$\Delta a$	-0.282 E+1	0.650 E+0	0.594 E+0	0.101 E+1
$\Delta r_p$	0.212 E+0	-0.277 E+0	-0.153 E+0	-0.270 E+0
$\Delta t_p$	-0.865 E-2	0.722 E-2	-0.104 E-1	0.109 E-1
$\Delta \omega$	-0.158 E-1	0.132 E-1	0.114 E-1	0.184 E-1

b)  $T = 6.0$ 

	$\epsilon a$	$\epsilon r_p$	$\epsilon t_p$	$\epsilon \omega$
$\Delta a$	-0.197 E+1	0.456 E-1	0.199 E-1	0.381 E-1
$\Delta r_p$	-0.782 E-2	-0.111 E+0	-0.376 E-2	-0.904 E-2
$\Delta t_p$	0.275 E-3	0.392 E-3	-0.165 E-1	0.298 E-3
$\Delta \omega$	0.533 E-3	0.774 E-3	0.266 E-3	-0.112 E-2

c)  $T = 8.0$ 

	$\epsilon a$	$\epsilon r_p$	$\epsilon t_p$	$\epsilon \omega$
$\Delta a$	-0.200 E+1	0.264 E-2	-0.478 E-2	0.367 E-2
$\Delta r_p$	-0.528 E-3	-0.100 E+0	0.282 E-2	-0.193 E-3
$\Delta t_p$	-0.133 E-4	-0.303 E-4	-0.168 E-1	-0.547 E-4
$\Delta \omega$	-0.478 E-5	-0.363 E-4	-0.241 E-3	-0.178 E-2

表 8.11 最小二乗法による推定値 (10倍入力,  $T = 2.0$ )a)  $A$ の数値解に対する倍精度演算推定値

	10 $\epsilon a$	10 $\epsilon r_p$	10 $\epsilon t_p$	10 $\epsilon \omega$
$\Delta a$	-0.202 D+2	0.274 D+0	0.763 D-1	0.162 D-1
$\Delta r_p$	-0.310 D-3	-0.108 D+1	0.610 D-2	0.291 D-2
$\Delta t_p$	-0.659 D-4	0.409 D-2	-0.165 D+0	0.373 D-3
$\Delta \omega$	-0.209 D-3	0.603 D-2	0.187 D-2	-0.174 D-1

b)  $A$ の解析解に対する単精度演算推定値

	10 $\epsilon a$	10 $\epsilon r_p$	10 $\epsilon t_p$	10 $\epsilon \omega$
$\Delta a$	-0.209 E+2	0.724 E+0	0.328 E+0	0.153 E+0
$\Delta r_p$	0.192 E+0	-0.120 E+1	-0.520 E-1	-0.245 E-1
$\Delta t_p$	-0.749 E-2	0.907 E-2	-0.163 E+0	0.132 E-2
$\Delta \omega$	-0.144 E-1	0.151 E-1	0.619 E-2	-0.154 E-1

入力に対しては修正能力を持つという中間的な結果がえられたわけである。

$A^T A$  を正規化しない場合、すなわち(8.8) のままで解くと、 $T=2.0$  において解の一部が発散的に大きくなって 10 倍の入力に対しても修正能力が失なわれる。しかしながら  $T=4.0$  以上にとると、正規化したときも、正規化しない場合も解の精度はほとんど同じになる。したがって  $A^T A$  を正規化する操作は、解が求められる限界を広げる点で効果はあるが、解の精度をよくするという効果はもたないと考えてよい。

正規化した場合も  $T=1.8$  に対しては、解の一部が発散的に大きくなる。Schmidt の直交化を用いた解法すなわち(8.21)による解は  $T=1.8$  に対しても発散的にはならない。またこの場合  $A$  を正規化してもしなくても結果に変化を生じない。しかしながら解が求められる範囲においては、(8.8)および(8.15)の形で解く場合に比べると精度はほぼ同等で、精度向上に資するということは認められなかった。

以上を総合すると、予測式  $y_C$  として高度を表わす式(7.1)を用いる場合、ワードサイズ 16 ビットの搭載型計算機の倍長演算を用いれば、 $T=6.0 \sim 8.0$  すなわち近地点前後 12~16 分程度の加速度計計測データに対して最小二乗法を適用することにより軌道要素  $a$ ,  $\tau_p$ ,  $t_p$ ,  $\omega$  の推定を行なう可能性があるといえる。ただしこの場合  $B\rho_p$  の予測精度を 1% 程度におさえることおよび  $B\rho_i$  の誤差分布が平均値 0 に近いことが必要である。

## 9. 結 論

超低高度人工衛星 DAS の搭載型航法系として、加速度計により近地点周辺における大気抵抗を検出し、これを用いて軌道要素および大気密度パラメータの推定を行なうことの可能性について検討した。

地球重力ポテンシャルの二次の Zonal 項および大気抵抗による摂動等に関する疑似円運動を仮定したときの Euler Hill 方程式の解についてまず評価を行なった。つぎに大気密度モデルの変動について調べた。そしてこれらの結果を組合わせて、近地点からの時間が与えられたときの高度および大気密度を表現する解析式を作った。この解析式にもとづいて、最大大気抵抗から軌道要素の一部を推定する方法、軌道要素を既知と仮定して大気抵抗の変化から大気密度を推定する方法、逆に大気密度パラメータを既知として軌道要素を推定する方法等について検討した。

以下に本報告においてえられた知見を列挙する。

### 1. 二次の Zonal 項による軌道摂動を表わす Euler

Hill 方程式の解は、円軌道に対しては厳密に成立つ式である。特殊摂動法によるシミュレーションを用いて検証を行なうには、シミュレーション側で初期条件を発生させる点に問題がある。Euler Hill 方程式の解を用いてシミュレーションの初期値を作成し、計算した結果を解析解と比較すると、進行方向の変位  $y$  以外についてはグラフの読取り精度程度の一致をみた。DAS 軌道に対して近地点前後 20 分程度については、 $y$  以外はよい一致をみた。シミュレーションによる  $y$  の値には、最高緯度通過時に原因不明の特異性が認められる。

2. 一周期毎の大気抵抗による軌道減衰を表わす式(3.3), (3.4) は実際の減衰量より小さな値を与える。これは大気密度として、実際より高高度で小さな値を与えるモデルを用いたことによるもので、その結果として近地点側における誤差が大きい。大気密度モデルとして(C3)の  $k_p$  の代りに 0.8 倍程度小さな値を用いること、近地点高度の代りに地表面からの最低高度を用いること等シミュレーション実験と比較し修正を施すことにより、DAS' 軌道に対しても精度を上げることができる。

3. 大気抵抗による高度に関する周期摂動は(5.7)式により近似できる。最低高度における地心方向速度を、パラメータ  $C_H$  を用いて適当に設定することにより、近似解をシミュレーション結果に近づけることができる。

4. 搭載型計算機で大気密度を正確に発生させるためには、地磁気指数  $K_p$  および 10.7 cm 太陽光フラックス  $F_{10.7}$  等を、観測にもとづいて少なくとも一日に一回コマンドとして地上から衛星に与えなければならない。この情報によって大気密度を発生させる過程では、与えられた外圏温度に対する指定高度と基礎大気密度との関係を表現する方法がもっとも厄介である。しかし補間式(6.9)および(6.10)を用いれば、DAS ミッションに必要な高度 100~200 km に対しては妥当なデータ記憶量で大気密度を関数発生させることが可能である。

5. 加速度計による高度推定において、誤差が大きくなるようにするためには、補間式(6.9)および(6.10)の適用区間を十分に小さくとることが必要である。このような配慮がなされているとき、高度推定の主たる誤差要因は、衛星の抵抗係数  $C_D$  の評価誤差と大気密度モデルにおける  $\rho_i$  の実際の大気密度からの差である。これらは大気抵抗を表わす式において  $\rho_i C_D$  という形で現われるので、どちらの誤差要因が区別することはできない。 $\rho_i C_D$  の 2.3% の誤差は、外圏温度 1000°K のとき、高度 110 km では 0.42 km, 200 km では 0.65 km の高度誤差を生ずる。

6. 最大大気抵抗の通過時刻を検出すれば、1, 3 の結果を用いた高度の時間に対する変化の解析式により、近

地点通過時刻を 2, 3 sec の精度で検出できる。またこの時刻の大気抵抗を記憶していれば、5 の推定法を用いて近地点地心距離  $r_p$  を推定することができる。誤差要因として  $\Delta \log B\rho = 0.01$  および  $\Delta \omega = 0.1^\circ$  を考慮すると、推定誤差  $\Delta r_p$  はやく 0.2 km である。長半径  $a$  は軌道周期から 3 km 程度の精度で推定できる。

7. 地上トラッキングを用いる等の方法により、軌道要素推定が良好になされている場合、近地点周辺 4 分間程度の加速度計検出値を用い、大気抵抗を表わす解析式 (8.23) に最小二乗法を適用することにより、軌道高度最下点周辺の大气密度パラメータ  $B\rho_p$ ,  $k_p$ ,  $\alpha_p$ ,  $C_H$  を推定する可能性がある。目標精度は前三者に対しては 1%,  $C_H$  に対しては 10% 程度である。

8. 大気密度パラメータが良い精度で与えられている場合、近地点周辺の加速度計検出値から 5. の方法により高度を検出し、高度に関する予測式 (7.1) に最小二乗法を適用することにより、軌道要素  $a$ ,  $r_p$ ,  $t_p$ ,  $\omega$  を推定する可能性がある。目標精度は  $a$  に対しては 2 km,  $r_p$  は 0.1 km,  $t_p$  は 1 sec,  $\omega$  は  $0.1^\circ$  程度である。 $\omega$  以外については実現可能と思われる。

9. 最小二乗法により推定を行なう場合、計算機に要求される有効桁数の目安として、マトリクス  $A^T A$  の最大・最小固有値比が用いられる。8. の軌道要素の推定問題においては、最小二乗法の適用区間を 4 分のばす毎に最大・最小固有値比が一桁近く小さくなるくらいの傾向がある。大気密度モデルを発生できる範囲で最小二乗法の適用区間を大きくとることが有利である。搭載型計算機として語長 16 ビットの倍長演算を用いるという観点から、適用区間は近地点周辺 12~16 分程度が望ましいと思われる。7. の最小二乗法適用例では、最大・最小固有値比は十分に小さく、計算機精度上の問題はない。

10.  $A^T A$  の対角項は  $A$  の列ベクトル  $\mathbf{a}_j$  のノルムの平方  $\|\mathbf{a}_j\|^2$  よりなり、最大固有値は  $\|\mathbf{a}_j\|^2$  の最大値より大きく、最小固有値は  $\|\mathbf{a}_j\|^2$  の最小値より小さい。最大・最小固有値比を小さくするため  $A^T A$  の対角項を正規化することが考えられる。8. の推定問題に対して FACOM 230 60/75 の単精度演算を用いて適用したところ、正規化しないとき解が発散的になるが、正規化すれば有効な推定が行なえるようなケースがあった。しかし正規化しなくても Schmidt の直交化法を用いた解法では解がえられた。また正規化しなくても解がえられる範囲では、正規化することにより精度が特に向上するということは認められなかった。精度についてはむしろ設定すべき誤差の大きさと量子化誤差の相対的な大きさの観点から論ずべきである。

11. 係数マトリクス  $A$  を作るためには、予測式  $y_c$  についての偏微係数が必要であり、数値的に求める方法と解析的に求める方法とが考えられる。数値的に求める方法は要求される計算機有効桁数が大きすぎて搭載型として適当ではない。 $A$  を解析的に求めるためには近似が必要であるが、8. の例ではよい精度がえられた。7. に対しても  $A$  を解析的に求める点については問題がない見込みである。

DAS のための搭載型航法系について、本報告の検討結果により一つの可能性のめどは立ったと考えられる。しかし実現化をはかるためにはまだ検討を要する問題も多い。中でも以下に挙げる項目については、ある程度検討を進めながら本報告に記述するには至らなかった。次に報告する機会を持ちたい。

1. 二次の Zonal 項による摂動の Euler Hill 方程式による解についての一般摂動理論を用いた検証および改良。
2. 特殊摂動法シミュレーションプログラムと結合した形での大気抵抗による軌道減衰の Euler Hill 方程式による解のより正確な形での検証および改良。二次の Zonal 項と大気抵抗との総合効果に関する検証。
3. 航法および制御を含めた搭載型運用システムのシミュレーションおよびシミュレーション検討。

本報告作成の主要な手法をなしている Euler Hill 方程式による解法は、筆者が Stanford 大学在学中に J. B. Breakwell 教授の Space Mechanics の講義で学んだものである。付録はこの講義録のうち関係ある部分を抜粋、整理して記してある。また在学中本報告のテーマに関して D. B. DeBra 教授の御指導を仰いだ。両教授に心から感謝申し上げる。

本研究遂行に当たり、当研究所宇宙研究グループの長洲総合研究官、五代技官、大坪技官ならびに DAS 検討会の諸氏には種々御援助いただいた。

## 参 考 文 献

- 1) DAS 検討グループ；超低高度人工衛星 DAS の初期解析，航技研 TR-528，1978 年 3 月。
- 2) 恩地英，津田尚一；自由分子流下における DAS の空力特性，航技研 TM-303，1976 年 7 月。
- 3) 大坪孔治，五代富文，長洲秀夫；超低高度人工衛星 DAS の軌道に解する初期解析，航技研 TR-507，1977 年 7 月。
- 4) H. Mori; An Onboard Navigator for an Extremely Low Altitude Satellite, Thesis for the degree of Engineers, Stanford University, Dec.

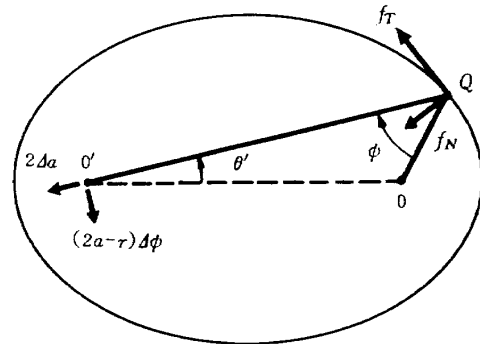


1975

- 5) 岡沼徹; 超低高度人工衛星の平方根フィルタによる実時間軌道推定法, 計測自動制御学会論文集, Vol. 15, No. 2, 1979年4月.
- 6) 森英彦, 小野英男, 白子悟朗, 大谷耕一, 中野祥三; データ中継衛星を利用した超低高度人工衛星DASの通信システム, 昭和53年度電子通信学会光・電波部門全国大会予稿集, 1978年10月.
- 7) A. J. Fuchs and C. E. Velez; Ground Control of Drag Satellite Utilizing Onboard Accelerometer Drag, J. Spacecraft, Vol. 13, No. 3, Mar. 1976
- 8) J. V. Breakwell; Class Notes of Space Mechanics, Stanford University, 1974
- 9) J. Jensen, G. Tounsend, J. Kork and D. Kraft; Design Guide to Orbit Flight, McGraw Hill, 1962, pp. 217 ~ 222
- 10) Y. Kozai; The Motion of a Close Earth Satellite, The Astronomical Journal, Nov. 1959
- 11) L. G. Jacchia; Revised Static Models of the Thermosphere and Exosphere with Empirical Temperature Profiles, SAO Special Report, No. 332, May 1971
- 12) 武内澄夫; Jacchia の1971年の大気模型に基づいた超高層大気密度の解析的表示, 航技研 TR-541, 1978年8月.
- 13) D. G. King-Hele; Methods of Determining Air Density from Satellite Orbits, Annales de Géophysique, Vol. 22, No. 1, Jan.-March 1966, pp. 40 ~ 52
- 14) H. R. Rugge and B. K. Ching; Atmospheric Density from the Low Altitude Satellite 1970 - 48A: Comparison of Orbital Decay Measurements, Accelerometer Measurements and Atmospheric Models, Planet. Space Sci. 1975, Vol. 23, pp. 323 ~ 335
- 15) M. P. Friedman; A Critical Survey of Upper Atmosphere Density Measurements by means of Ionization Gauges, Smithsonian Institution Astrophysical Lab. Research in Space Science, Special Report, No. 217, July 1966
- 16) R. Courant and D. Hilbert; Methods of Mathematical Physics, Vol. 1, Interscience Publishers, 1953
- 17) 高橋利衛; 振動工学演習Ⅱ, オーム社, 昭和38年.
- 18) 石谷久, 玉木康子; オンライン軌道推定における Kalman Filter の応用について, 東京大学宇宙航空研究所報告, 第8巻, 第2号, 1972年4月.
- 19) 川瀬成一郎, 田中高史; 軌道決定における直交関数系展開の応用 - KODS の推定方式, 第21回宇宙科学技術連合講演会予稿集, 1977年10月, p 134 ~ 137.
- 20) R. W. Barbieri, J. L. Cooley and K. G. Nickerson; Atmospheric Explorer (AE-C) Adaptive Mission Design and Trajectory Performance, AAS/AIAA Astrodynamics Specialist Conference Nassau, Bahamas/July 28-30, 1975, Paper No. 75

## 付録A 摂動力を受ける場合の衛星軌道の方程式

### A 1 軌道面内でのみ摂動力を受ける場合の方程式



付図1. 摂動力を受けたときの虚焦点の動き

付図1に示すような Kepler 運動上の点  $Q$  において, 軌道接線方向成分  $f_T$  および軌道垂直内側方向成分  $f_N$  をもつような単位質量当りの摂動力  $\mathbf{f}$  が  $\Delta t$  秒間働いたとする。このとき衛星のもつ単位質量当たりのエネルギーは

$$\varepsilon = -\frac{\mu}{2a}$$

であり, 摂動力によるエネルギーの増加は

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{f} \Delta t = v f_T \Delta t$$

であるから,  $f_T$  による影響は長半径の変化

$$\left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial a}\right) \Delta a = v f_T \Delta t \quad (\text{A1})$$

として表われる。 $f_N$  成分により軌道速度の方向が瞬時に  $f_N \Delta t / v$  だけ内側に傾くので, 2つの焦点と点  $Q$  とのなす角  $\phi$  は

$$\Delta \phi = -\frac{2 f_N \Delta t}{v}$$

だけ変化する。この結果, 地球中心以外のもう一つの焦点 (vacant focus) は  $f_T, f_N$  のそれぞれの影響により,  $2\Delta a$  および  $(2a-r)\Delta\phi$  だけずれることになる。この

虚焦点の移動は次式で表わされる。

$$\Delta(ae) = \Delta a \cos \theta' - (2a-r) \frac{f_N \Delta t}{v} \sin \theta' \quad (\text{A3})$$

$$ae \Delta \omega = \Delta a \sin \theta' + (2a-r) \frac{f_N \Delta t}{v} \cos \theta' \quad (\text{A3})$$

$\Delta t \rightarrow 0$  の極限操作により, (A1), (A2), (A3) より

$$\frac{d}{dt} \left( -\frac{\mu}{2a} \right) = v f_T \quad (\text{A4})$$

$$\frac{d}{dt} (ae) = \dot{a} \cos \theta' - \frac{f_N}{v} (2a-r) \sin \theta' \quad (\text{A5})$$

$$ae \frac{d\omega}{dt} = \dot{a} \sin \theta' - \frac{f_N}{v} (2a-r) \cos \theta' \quad (\text{A6})$$

となる。(A5), (A6) は  $\theta^*$  を用いてさらに

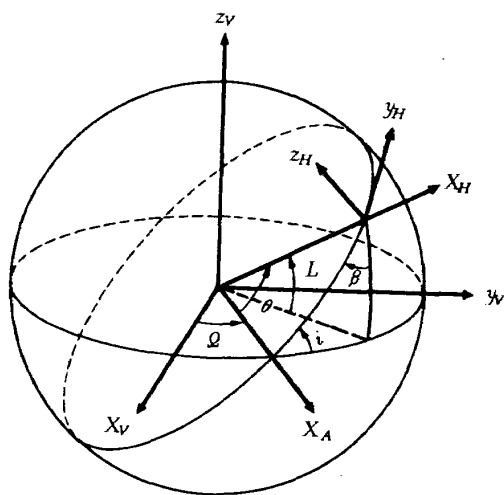
$$\dot{e} = \frac{2f_T}{v} (\cos \theta^* + e) - \frac{f_N}{v} \frac{r}{a} \sin \theta^* \quad (\text{A7})$$

$$e \dot{\omega} = \frac{2f_T}{v} \sin \theta^* + \frac{f_N}{v} \left( 2a + \frac{r}{a} \cos \theta^* \right) \quad (\text{A8})$$

と書き換えられる。

## A2 Euler Hill 方程式

Euler Hill 座標系は衛星の重心に原点をおき, 地球中心から衛星に向う方向に  $x_H$  軸, 軌道面内進行方向に  $y_H$  軸, 軌道面に直角に  $z_H$  をとり衛星の移動と共に動く回転座標系である。(付図2)



付図2 Euler Hill 座標系

ケプラー運動を基準軌道として, 摂動力もしくは初期値誤差に対するパターベージョナルな変化を Euler Hill 座標系で記述したのが Euler Hill 方程式である。衛星の地球中心に関する角速度を一定とすると, Euler Hill 方程式の斉次方程式は解析解がえられ, 摂動力を含む非斉次方程式に対しても解析解がえられることが多い。角速度一定の近似は地球周回衛星の多くに対して適合す

るので, 軌道の概念検討上非常に有力な手法である。

基準となるケプラー運動を

$$\ddot{\mathbf{r}}_0 = -\frac{\mu \mathbf{r}_0}{r_0^3} \quad (\text{A9})$$

とし, 摂動力  $f$  が加わったときの運動を

$$\ddot{\mathbf{r}} = -\frac{\mu \mathbf{r}}{r^3} \quad (\text{A10})$$

として表わす。いま基準軌道からの差を  $\rho$  として

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \rho$$

と表わすとパターベージョナル方程式は (A9), (A10) 式により

$$\ddot{\rho} = \frac{\mu}{r_0^3} \{ 3(\hat{\mathbf{r}}_0 \cdot \rho) \hat{\mathbf{r}}_0 - \rho \} + f \quad (\text{A11})$$

となる。ここに  $\hat{\mathbf{r}}_0 = \mathbf{r}_0 / r_0$  である。

Euler Hill 座標系の角速度を  $\omega_H$  として (A11) を Euler Hill 座標系に関する運動方程式に直すと

$$\frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} + 2\omega_H \times \frac{\partial \rho}{\partial t} + \omega_H \times (\omega_H \times \rho) = \frac{\mu}{r_0^3} \{ 3(\mathbf{r}_0 \cdot \rho) \mathbf{r}_0 - \rho \} + f \quad (\text{A12})$$

となる。 $\omega_H$  が平均運動の角速度で近似できると仮定して Euler Hill 座標系で  $(0, 0, n)$  と置くと次式をうる。

$$\begin{cases} \ddot{x} - 2n\dot{y} - 3n^2x = f_x \\ \ddot{y} + 2n\dot{x} = f_y \\ \ddot{z} + n^2z = f_z \end{cases} \quad (\text{A13})$$

ただし Euler Hill 座標系で  $\rho = (x, y, z)$  とする。

この方程式の右辺を 0 としたときの斉次方程式の解は次式で与えられる。

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4-3c_{nt} & 0 & 0 \\ 6(s_{nt}-nt) & 1 & 0 \\ 0 & 0 & c_{nt} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} s_{nt}/n & 2(1-c_{nt})/n & 0 \\ -(1-c_{nt})/n & 4s_{nt}/n-3t & 0 \\ 0 & 0 & s_{nt}/n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{x}_0 \\ \dot{y}_0 \\ \dot{z}_0 \end{pmatrix} \quad (\text{A14})$$

ただし  $s_{nt} = \sin nt$ ,  $c_{nt} = \cos nt$  である。

$(\dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0)$  は回転座標系で表現された  $(x, y, z)$  の時間微分の  $t_0$  における量であるから, 慣性空間に対する速度ではない。

$$\left. \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right|_I = \left. \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right|_H + \omega_H \times \mathbf{r}$$

であるから  $d\mathbf{r}/dt|_I$  の Euler Hill 座標系での要素を  $(v_x, v_y, v_z)$  とすると

$$\begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{x} - ny \\ \dot{y} + nx \\ \dot{z} \end{pmatrix} \quad (\text{A15})$$

の関係がある。この関係を用いて (A14) を書き直すと

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-c_{nt} & s_{nt} & 0 \\ 2s_{nt}-3nt & -1+2c_{nt} & 0 \\ 0 & 0 & c_{nt} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} s_{nt}/n & 2(1-c_{nt})/n & 0 \\ -2(1-c_{nt})/n & 4(s_{nt}-3t)/n & 0 \\ 0 & 0 & s_{nt}/n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_{x0} \\ v_{y0} \\ v_{z0} \end{pmatrix} \quad (\text{A16})$$

となる。(A16) を時間微分し、(A15) の関係を用いて書き直すと

$$\begin{pmatrix} \dot{v}_x \\ \dot{v}_y \\ \dot{v}_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -ns_{nt}+3n^2t & n-c_{nt} & 0 \\ nc_{nt}-n & -ns_{nt} & 0 \\ 0 & 0 & -ns_{nt} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2-c_{nt} & -2s_{nt}+3nt & 0 \\ -s_{nt} & 2c_{nt}-1 & 0 \\ 0 & 0 & c_{nt} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_{x0} \\ v_{y0} \\ v_{z0} \end{pmatrix} \quad (\text{A17})$$

がえられる。これらをまとめると Euler Hill 方程式の斉次方程式の解は次のように表現できる。

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-c_{nt} & s_{nt} & 0 & s_{nt}/n & 2(1-c_{nt})/n \\ 2s_{nt}-3nt & -1+2c_{nt} & 0 & -2(1-c_{nt})/n & 4s_{nt}/n-3t \\ 0 & 0 & c_{nt} & 0 & 0 \\ -ns_{nt}+3n^2t & n-c_{nt} & 0 & 2-c_{nt} & -2s_{nt}+3nt \\ nc_{nt}-n & -ns_{nt} & 0 & -s_{nt} & 2c_{nt}-1 \\ 0 & 0 & -ns_{nt} & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \\ v_{x0} \\ v_{y0} \\ v_{z0} \end{pmatrix} \quad (\text{A18})$$

### A 3 軌道のベクトル方程式を用いる方法

摂動力  $f$  を受けたときの衛星軌道のベクトル方程式は

$$\ddot{\mathbf{r}} = -\frac{\mu \mathbf{r}}{r^3} + \mathbf{f} \quad (\text{A19})$$

で表わされ、これに対応する角運動量  $\mathbf{h} = \mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}}$  の方程式は

$$\dot{\mathbf{h}} = \mathbf{r} \times \mathbf{f} \quad (\text{A20})$$

となる。

また(A19)を使うと

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\mathbf{r}}{r} \right) = \frac{1}{\mu} \mathbf{h} \times (\mathbf{f} - \ddot{\mathbf{r}}) \quad (\text{A21})$$

なる関係が導かれる。 $\mathbf{f} = 0$  を仮定して上式を積分し積分定数を  $\mathbf{e}$  とおくと

$$\mathbf{e} = \frac{1}{\mu} \dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{h} - \frac{\mathbf{r}}{r} \quad (\text{A22})$$

となる。

$$\mathbf{e} \cdot \mathbf{r} + r = \frac{h^2}{\mu} = r(1 + e \cos \theta^*)$$

なることにより、 $\mathbf{e}$  は地球中心から近地点方向を向く大きさが離心率  $e$  と一致するベクトルであることがわかる。 $\mathbf{f} \neq 0$  の場合に対しても(A22)で $\mathbf{e}$ を定義しておく

$$\dot{\mathbf{e}} = \frac{1}{\mu} [\mathbf{f} \times \mathbf{h} + \dot{\mathbf{r}} \times (\mathbf{r} \times \mathbf{f})] \quad (\text{A23})$$

がえられる。

(A20)の微分を Euler Hill 座標系に関する微分に変換すると

$$[\dot{\mathbf{h}}]_H \hat{\mathbf{h}} + \mathbf{h} \boldsymbol{\omega}_F \times \hat{\mathbf{h}} = \mathbf{r} \times \mathbf{f} \quad (\text{A24})$$

である。ただし  $[\dot{\mathbf{h}}]_H$  は Euler Hill 座標系に対する  $h$  の変化率、 $\hat{\mathbf{h}}$  は単位ベクトル  $\mathbf{h}/h$  すなわち  $\hat{\mathbf{z}}_H$  である。慣性空間に対する Euler Hill 座標系の角速度ベクトル  $\boldsymbol{\omega}_F$  は付図2を参照すると

$$\boldsymbol{\omega}_F = \dot{\mathcal{Q}} \hat{\mathbf{z}}_V + \dot{\mathbf{i}} \hat{\mathbf{x}}_A + \dot{\theta} \hat{\mathbf{z}}_H$$

であり、Euler Hill 座標系の要素で表現すると

$$\boldsymbol{\omega}_F = (\dot{\mathcal{Q}} s_i s_\theta + \dot{\mathbf{i}} c_\theta) \hat{\mathbf{x}}_H + (\dot{\mathcal{Q}} s_i c_\theta - \dot{\mathbf{i}} s_\theta) \hat{\mathbf{y}}_H + (\dot{\mathcal{Q}} c_i + \dot{\theta}) \hat{\mathbf{z}}_H \quad (\text{A25})$$

である。 $\mathbf{f}$  を Euler Hill 座標系で

$$\mathbf{f} = f_r \hat{\mathbf{x}}_H + f_\theta \hat{\mathbf{y}}_H + f_h \hat{\mathbf{z}}_H$$

と表わすと

$$\mathbf{r} \times \mathbf{f} = -r f_h \hat{\mathbf{y}}_H + r f_\theta \hat{\mathbf{z}}_H$$

であるから(A24)から

$$\dot{h} = r f_\theta \quad (\text{A26})$$

および

$$\boldsymbol{\omega}_F \cdot \hat{\mathbf{x}}_H = \dot{\mathcal{Q}} s_i s_\theta + \dot{\mathbf{i}} c_\theta = \frac{r f_h}{h} \quad (\text{A27})$$

$$\boldsymbol{\omega}_F \cdot \hat{\mathbf{y}}_H = \dot{\mathcal{Q}} s_i c_\theta - \dot{\mathbf{i}} s_\theta = 0 \quad (\text{A28})$$

$$\boldsymbol{\omega}_F \cdot \hat{\mathbf{z}}_H = \dot{\theta} + \dot{\mathcal{Q}} c_i = \frac{h}{r^2} \quad (\text{A29})$$

がえられる。すなわち  $\boldsymbol{\omega}_F$  は  $\mathbf{z}_H$  方向の軌道面内回転成分の他に  $\mathbf{x}_H$  方向の成分をもつ。上式を整理すると次式がえられる。

$$\dot{\mathbf{i}} = \frac{r f_h}{h} c_\theta \quad (\text{A30})$$

$$\dot{\mathcal{Q}} = \frac{r f_h}{h s_i} s_\theta \quad (\text{A31})$$

$$\dot{\theta} = \frac{h}{r^2} - \dot{\mathcal{Q}} c_i \quad (\text{A32})$$

(A22)で定義される  $\mathbf{e}$  を Euler Hill 座標系で表わすと

$$\mathbf{e} = e c_\theta^* \hat{\mathbf{x}}_H - e s_\theta^* \hat{\mathbf{y}}_H$$

であり微分すると

$$\dot{\mathbf{e}} = [\dot{e} c_\theta^* + (\frac{h}{r^2} - \dot{\theta}^*) e s_\theta^*] \hat{\mathbf{x}}_H$$

$$+[-\dot{e} s_{\theta*} + (\frac{h}{r^2} - \dot{\theta}^*) e c_{\theta*}] \hat{y}_H \quad (A33)$$

となる。一方

$$\dot{r} = \frac{\mu}{h} [e s_{\theta*} \hat{x}_H + (1 + e c_{\theta*}) \hat{y}_H]$$

なる関係が成立つから(A23)に代入し(A33)と比較すると(A32)の関係を用いて次式をえる。

$$\dot{e} = \frac{\tau}{h} [s_{\theta*} (1 + e c_{\theta*}) f_r + (e + 2 c_{\theta*}^2) f_{\theta}] \quad (A34)$$

$$\dot{\omega} + \dot{Q} c_i = \frac{\tau}{h e} [-c_{\theta*} (1 + e c_{\theta*}) f_r + s_{\theta*} (2 + e c_{\theta*}^2) f_{\theta}] \quad (A35)$$

(A26), (A30), (A31), (A32), (A34) および (A35) が外力に対する軌道要素の摂動を表わす方程式である。

### 付録B 地球重力ポテンシャルの摂動項による軌道への影響

地球の重力ポテンシャルは

$$U_{\oplus}(r) = \int \frac{G dm_i}{|r - r_i|} = \frac{\mu}{r} \left[ 1 - \sum_{n=2}^{\infty} \left( \frac{R_{\oplus}}{r} \right)^n J_n P_n(\sin L) + \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{m=1}^n \left( \frac{R_{\oplus}}{r} \right)^n P_n^m(\sin L) \cdot \{c_{mn} \cos(m\lambda) + s_{mn} \sin(m\lambda)\} \right]$$

で表わされる。 $P_n$  は Legendre 関数,  $P_n^m$  は Legendre 倍関数であり,  $J_n, c_{mn}, s_{mn}$  等は地球の形状で決まる係数である。 $10^{-6}$  を単位として

$$\begin{aligned} J_2 &= 1082.64 & c_{22} &= 2.41 & s_{22} &= -1.36 \\ J_3 &= -2.54 & c_{31} &= 1.97 & s_{31} &= 0.26 \\ J_4 &= -1.62 & c_{32} &= 0.89 & s_{32} &= -0.63 \\ J_5 &= -0.23 \end{aligned}$$

といった値をとる。軌道に対しては係数  $J_2$  をもつ  $P_2$  に関する項すなわち地球の扁平形状を表わす項が圧倒的に大きな影響を与える。したがってここでは係数  $J_2$  をもつ主要項のみについて考える。

$$\begin{aligned} U_{\oplus}(r) &= -\mu J_2 \left( \frac{R_{\oplus}}{r} \right)^2 P_2(\sin L) \\ &= -\mu J_2 \left( \frac{R_{\oplus}}{r} \right)^2 \left( \frac{3}{2} \frac{z^2}{r^2} - \frac{1}{2} \right) \end{aligned}$$

とする。このとき摂動力は

$$\begin{aligned} f &= V(U_{\oplus}(r) - \frac{\mu}{r}) \\ &= -\mu J_2 R_{\oplus}^2 \left[ \frac{3z}{r^5} \hat{z}_V + \left( \frac{3}{2r^4} - \frac{15z^2}{2r^5} \right) \hat{x}_H \right] \end{aligned}$$

であり, Euler Hill 座標系で表現すると

$$\begin{cases} f_r = -\frac{3\mu J_2 R_{\oplus}^2}{r^4} \left( \frac{1}{2} - \frac{3}{2} s_i^2 s_{\theta}^2 \right) \end{cases} \quad (B1)$$

$$\begin{cases} f_{\theta} = -\frac{3\mu J_2 R_{\oplus}^2}{r^4} s_i^2 s_{\theta} c_{\theta} \end{cases} \quad (B2)$$

$$\begin{cases} f_h = -\frac{3\mu J_2 R_{\oplus}^2}{r^4} s_i c_i s_{\theta} \end{cases} \quad (B3)$$

となる。(B3)を(A31)に代入すると

$$\dot{Q} = -\frac{3\mu J_2 R_{\oplus}^2}{r^3 h} c_i s_{\theta}$$

がえられる。これを(A32)で割ると

$$\begin{aligned} \frac{dQ}{d\theta} &= -\frac{3\mu J_2 R_{\oplus}^2}{h^2 r} c_i s_{\theta}^2 + 0(J_2^2) \\ &\simeq -3J_2 \left( \frac{R_{\oplus}}{p} \right)^2 c_i s_{\theta} (1 + e c_{\theta-\omega}) \end{aligned}$$

この式を一周期にわたって積分すると次式がえられる。

$$\frac{dQ}{dN} = -3\pi J_2 \left( \frac{R_{\oplus}}{p} \right)^2 c_i = -3\pi J_2 R_{\oplus}^2 \frac{c_i}{(1-e^2)a^2} \quad (B4)$$

同様の方法を適用すると(A30)より

$$\frac{di}{aN} = 0 \quad (B5)$$

(A26), (A32)より

$$\frac{1}{h} \frac{dh}{d\theta} \simeq \frac{r^2}{h^2} \tau f_{\theta} = -3J_2 \left( \frac{R_{\oplus}}{p} \right)^2 s_i s_{\theta}$$

であるから

$$\frac{dh}{dN} = 0 = \frac{dp}{dN} \quad (B6)$$

また(A33)より

$$\frac{de}{dN} = 0 \quad (B7)$$

これと(B6)より

$$\frac{da}{dN} = 0 \quad (B8)$$

がえられる。(A34)より

$$\frac{d\omega}{dN} + c_i \frac{dQ}{dN} = 3\pi J_2 \left( \frac{R_{\oplus}}{p} \right)^2 \left( 1 - \frac{3}{2} s_i^2 \right)$$

および(B4)を用いると

$$\frac{d\omega}{dN} = 3\pi J_2 \frac{R_{\oplus}^2}{(1-e^2)a^2} \left( 2 - \frac{5}{2} s_i^2 \right) \quad (B9)$$

となる。

けっきょく地球の扁平形状による影響は  $Q$  と  $\omega$  とのみに(B4) および (B9) で表わされるような永年的変化を与え, 他に対しては, 周期を越えて残留するような影響を与えない。

つきに一周期以内での軌道の変動について考える。一周

期内での変動を考えるにはまた軌道角速度一定の仮定を用いて Euler Hill 方程式を適用すると簡単に結果がえられる。Euler Hill 方程式 (A13) に対して (B1), (B2) の  $\theta$  を  $nt$  で置換えて代入し、積分すると次の形の解がえられる。 $K = J_2 a (R_{\oplus}/a)^2$  とすると

$$\begin{cases} x = \frac{1}{4} K s_i^2 c_{2nt} + c_2 \\ y = \frac{1}{8} K s_i^2 c_{2nt} + c_1 t \\ -2n c_1 - 3n^2 c_2 = -3n^2 K \left( \frac{1}{2} - \frac{3}{4} s_i^2 \right) \end{cases}$$

積分定数  $c_1$  および  $c_2$  は第3式を満たすように選ばなければならない。その選び方は基準軌道のとり方に依存して一意ではない。 $y$  方向の永年項を生じないように基準軌道をとれば  $c_1 = 0$  が要求され、したがって

$$c_2 = K \left( \frac{1}{2} - \frac{3}{4} s_i^2 \right)$$

となる。このとき  $x, y$  は次式で表わされる。

$$\frac{x}{a} = \frac{1}{2} J_2 \left( \frac{R_{\oplus}}{a} \right)^2 \left( 1 - \frac{3}{2} s_i^2 \right) + \frac{1}{4} J_2 \left( \frac{R_{\oplus}}{a} \right)^2 s_i^2 c_{2nt} \quad (\text{B10})$$

$$\frac{y}{a} = \frac{1}{8} J_2 \left( \frac{R_{\oplus}}{a} \right)^2 s_i^2 s_{2nt} \quad (\text{B11})$$

$z$  に関してはその形から  $t c_{nt}$  で変化する項を生ずることがわかる。これは  $Q$  に永年的変化を生ずることに対応している。

## 付録 C 大気抵抗による軌道の変化

大気により衛星に加わる単位質量当りの抗力は

$$D = B \rho v^2 \quad (\text{C1})$$

という形で表わされる。 $B$  は弾道係数である。

大気密度  $\rho$  の高度  $H$  に対する変化を次式で表わされると仮定する。

$$\rho(H) = \rho_p \exp \{-k_p (H - H_p)\} \quad (\text{C2})$$

$\rho_p$  および  $H_p$  は近地点における大気密度および高度であり  $k_p$  は次式で与えられる。

$$-k_p = \left( \frac{\partial \rho}{\partial H} / \rho \right)_{H=H_p} \quad (\text{C3})$$

$E$  を離心近点離角すなわち楕円の中心に関する衛星の回転角とすると、ケプラー運動では

$$H_p + R_{\oplus} = a(1 - e)$$

$$H + R_{\oplus} = a(1 - e \omega E)$$

が成立つので

$$H - H_p = a e (1 - \cos E) \quad (\text{C4})$$

となる。これを (C2) に代入すると

$$\rho(H) = \rho_p \exp(-\beta + \beta \cos E) \quad (\text{C5})$$

$$\beta = k_p a e$$

となる。

### C1 Euler Hill 方程式による軌道減衰の解法

(C5) 式の  $\exp(\beta \cos E)$  の部分を Fourier 級数で表わすと変形された Bessel 関数

$$I_j(\beta) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi e^{\beta \cos E} \cos j E dE \quad j=0, 1, 2 \dots$$

を用いることにより次式がえられる。

$$\rho(H) = \rho_p \exp(-\beta) \left[ I_0(\beta) + 2 \sum_{j=1}^{\infty} I_j(\beta) \cos j E \right] \quad (\text{C6})$$

離心率の小さい軌道に対して Euler Hill 方程式を用いて解をえるため、離心近点離角  $E$  が平均運動  $nt$  で近似できることおよび軌道速度  $v$  が  $\sqrt{a/\mu}$  で近似できることを仮定する。このとき (C1) は

$$D = A' \exp(-\beta) \left[ I_0(\beta) + 2 \sum_{j=1}^{\infty} I_j(\beta) \cos j nt \right] \quad (\text{C7})$$

$$A' = B \rho_p \frac{\mu}{a} = B \rho_p n^2 a^2$$

となる。

衛星に働く揚力を無視すると Euler Hill 方程式は

$$\begin{cases} \ddot{x} - 2n\dot{y} - 3n^2 x = 0 \\ \ddot{y} + 2n\dot{x} = -D \end{cases} \quad (\text{C8})$$

となる。第二式を積分すると

$$\begin{aligned} \dot{y} + 2n x &= -A' \exp(-\beta) \left[ I_0(\beta) t \right. \\ &\quad \left. + 2 \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j n} I_j(\beta) \sin j n t \right] + \text{const} \end{aligned}$$

第一式に代入して次式をえる。

$$\begin{aligned} \ddot{x} + n^2 x &= -2A' \exp(-\beta) I_0(\beta) t \\ &\quad - 4A' \exp(-\beta) \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j} I_j(\beta) \sin j n t + \text{const} \end{aligned} \quad (\text{C9})$$

これは外力を有する調和系であって  $I_0(\beta)$  および  $I_1(\beta)$  を含む項を除いては周期解しか生じない。非周期項すなわち減衰特性のみを求めたいので  $I_2(\beta)$  以上の高次項は無視してよい。けっきょく  $I_0(\beta)$  および  $I_1(\beta)$  を含む項に対して次の解を得る。

$$x(t) = \frac{2}{n} A' \exp(-\beta) \{-I_0(\beta) + I_1(\beta) t \cos nt\} \quad (\text{C10})$$

軌道に沿っての衛星の地心距離  $r$  は

$$r \simeq a_0 (1 - e_0 \cos nt) + x(t) \quad (\text{C11})$$

によって表わされるが、これを軌道要素  $a, e$  の一次変化として

$$a = a_0 + \dot{a} t, \quad e = e_0 + \dot{e} t$$

として表現すると

$$r = a(1 - e \cos nt)$$

$$\simeq a_0(1 - e_0 \cos nt) + \dot{a}t - (a_0 \dot{e} + \dot{a} e_0) \cos nt$$

となり, (C11) と一致することが要求されるからけつきよく次式をえる。

$$\frac{da}{dt} = -\frac{2}{n} A \exp(-\beta) I_0(\beta) \quad (C12)$$

$$\frac{d}{dt}(ae) = -\frac{2}{n} A \exp(-\beta) I_1(\beta) \quad (C13)$$

(C13) を用いると  $H_p = a(1 - e) + R_\oplus$  の関係から

$$\begin{aligned} \frac{dH_p}{dt} &= \frac{da}{dt} - \frac{d}{dt}(ae) \\ &= -\frac{2}{n} A \exp(-\beta) \{I_0(\beta) - I_1(\beta)\} \end{aligned} \quad (C14)$$

をえる。一周毎の変化に直すと (C12), (C14) は

$$\frac{da}{dN} = -4\pi a^2 B \rho_p \exp(-\beta) I_0(\beta) \quad (C15)$$

$$\frac{dH_p}{dN} = -4\pi a^2 B \rho_p \exp(-\beta) \{I_0(\beta) - I_1(\beta)\} \quad (C16)$$

となる。

## C2 一周毎の軌道減衰

一周毎の軌道減衰について C1 で用いた擬似円運動の仮定を用いなくて解く方法を述べる。

軌道を飛ぶ物体の軌道接線方向に働く単位質量当たりの力  $f_t$  とエネルギー  $(-\mu/2a)$  の変化との関係は

$$\frac{d}{dt} \left( -\frac{\mu}{2a} \right) = v f_t$$

すなわち

$$\frac{1}{a} \frac{da}{dt} = \frac{2av}{\mu} f_t \quad (C17)$$

で表わされる。

$$f_t = D = -B \rho v^2$$

$$v^2 = \frac{\mu}{a} \frac{1+e \cos E}{1-e \cos E}$$

$$n(t - t_p) = E - e \sin E$$

の関係を用いると (C17) は

$$\frac{1}{a} \frac{da}{dE} = -2aB\rho \frac{(1+e \cos E)^{\frac{3}{2}}}{(1-e \cos E)^{\frac{1}{2}}} \quad (C18)$$

であるから軌道一周について積分して

$$\begin{aligned} \frac{da}{dN} &= -2a^2 B \rho_p \exp(-\beta) \\ &\cdot \int_0^{2\pi} \frac{(1+e \cos E)^{\frac{3}{2}}}{(1-e \cos E)^{\frac{1}{2}}} \exp(\beta \cos E) dE \end{aligned} \quad (C19)$$

をえる。離心率  $e$  が小さい場合を考えることとし,  $e$  に関する展開項の一次のみをとれば

$$\begin{aligned} \frac{da}{dN} &= -2a^2 B \rho_p \exp(-\beta) \\ &\cdot \int_0^{2\pi} (1 - 2e \cos E) \exp(\beta \cos E) dE \end{aligned} \quad (C20)$$

変形された Bessel 関数の関係式

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \exp(\beta \cos E) dE &= 2I_0(\beta) \\ \int_0^{2\pi} \exp(\beta \cos E) \cos E dE &= 2I_1(\beta) \end{aligned}$$

を用いると (C20) から次式を得る。

$$\frac{da}{dN} = -4\pi a^2 B \rho_p \exp(-\beta) [I_0(\beta) + 2e I_1(\beta)] \quad (C21)$$

近地点高度  $H_p$  に関する変化は虚焦点の移動に関する運動方程式 (A5), (A6) を用いると  $f_n = 0$  なので

$$\frac{d}{dt}(ae) = \frac{da}{dt} \cos \theta'$$

$$ae \frac{d\omega}{dt} = \frac{da}{dt} \sin \theta'$$

であり

$$\cos \theta' = \frac{(1-e^2) \cos E}{1-e^2 \cos^2 E}, \quad \sin \theta' = \frac{\sqrt{1-e^2}}{1+e \cos E} \sin E$$

の関係があるので,  $e$  に関する展開の一次項のみをとれば

$$\begin{aligned} \frac{d(ae)}{dN} &= -2a^2 B \rho_p \exp(-\beta) \\ &\cdot \int_0^{2\pi} (2e + \cos E - 2e \sin^2 E) \exp(\beta \cos E) dE \\ ae \frac{d\omega}{dN} &= -2a^2 B \rho_p \exp(-\beta) \\ &\cdot \int_0^{2\pi} \left( \sin E + \frac{e}{2} \sin 2E \right) \exp(\beta \cos E) dE \end{aligned}$$

がえられる。変形された Bessel 関数を用いると

$$\begin{aligned} \frac{d(ae)}{dN} &= -4\pi a^2 B \rho_p \exp(-\beta) [2e I_0(\beta) \\ &+ I_1(\beta) - 2\frac{e}{\beta} I_1(\beta)] \end{aligned} \quad (C22)$$

$$ae \frac{d\omega}{dt} = 0 \quad (C23)$$

がえられる。(C23) は大気抵抗により近地点引数の移動が生じないことを示す。

(C20) および (C22) により次式がえられる。

$$\begin{aligned} \frac{dH_p}{dN} &= -4\pi a^2 B \rho_p \exp(-\beta) (1-2e) [I_0(\beta) - I_1(\beta)] \\ &\quad (C24) \end{aligned}$$

C1 の Euler Hill 方程式を用いた場合に比べると  $e$  の一次の項を含んでいる点が異なっている。この方法により  $e$  の高次の項まで含めた解を求めることも可能である。<sup>9)</sup> しかし大気密度モデルを (C2) として設定したという仮定があるので, このモデルがあまりよく適合しない範囲で

の高次項まで求めることは意味がない。

### C 3 地球と共に回転する大気の影響

地球の大気が自転と共に動くと仮定すると、赤道地球表面上においては $\omega_{\oplus} R_{\oplus} = 0.464$  [km/s] 程度の速度をもつ。衛星の速度は8 [km/s] 前後であるから無視できない影響がある。また軌道傾斜角をもつ軌道に対しては軌道面に垂直な成分があるため、軌道傾斜角に変化を生ずることも知られている。

緯度 $L$ における自転速度は $\omega_{\oplus} r \cos L$ であり、その $y_H$ および $z_H$ 成分は $\omega_{\oplus} r \cos L \sin \beta$  および  $-\omega_{\oplus} r \cos L \cos \beta$  (付図2参照) で表わされるが、球面三角法により

$\cos L \sin \beta = \cos i$ ,  $\cos L \cos \beta = \sin i \cos \theta$  なる関係がある。したがって大気に対する衛星の相対速度は

$$\mathbf{v}_A = (v - \omega_{\oplus} r c_i) \hat{\mathbf{y}}_H - \omega_{\oplus} r s_i c_{\theta} \hat{\mathbf{z}}_H$$

となる。したがって単位質量に働く大気抵抗は $v \gg \omega_{\oplus} r$  を考慮すると

$$\mathbf{f} \simeq -B \rho v^2 \left\{ \left(1 - \frac{2\omega_{\oplus} r}{v} c_i\right) \hat{\mathbf{y}}_H - \frac{\omega_{\oplus} r}{v} s_i c_{\theta} \hat{\mathbf{z}}_H \right\}$$

となる。

$$f_{\theta} = -B \rho v^2 \left(1 - \frac{2\omega_{\oplus} r}{v} c_i\right)$$

$$f_h = B \rho v^2 \omega_{\oplus} r s_i c_{\theta}$$

がえられる。

いま擬似円運動の仮定が成立つとする。すなわち離心率が小さい場合で衛星速度の方向が $\hat{\mathbf{y}}_H$  方向に近く、自転速度を $\omega_{\oplus} a \cos L$  で、また衛星速度を $\sqrt{\mu/a}$  で近似できるものとする。このとき $f_{\theta}$  による軌道減衰の影響は、先のEuler Hill 方程式による解法の $D$ に単に $1 - 2 \frac{\omega_{\oplus}}{n} c_i$  を乗じただけの形であるので、結果としても(C15) および(C16)に $1 - 2 \frac{\omega_{\oplus}}{n} c_i$  を乗じたものがえられる。 $f_h$ の項については、(A30) および(A32)により

$$\begin{aligned} \frac{di}{d\theta} &\simeq \frac{r^2}{h} \frac{r f_h}{h} c_{\theta} \\ &= -\frac{a^{\frac{5}{2}}}{\mu^2} B \rho_p \omega_{\oplus} s_i \exp(-\beta) \left[ I_0(\beta) \right. \\ &\quad \left. + 2 \sum_{j=1}^{\infty} I_j(\beta) \cos j \theta^* \right] c_{\theta}^2 \end{aligned}$$

となり一周についての平均をとると

$$\begin{aligned} \left[ \frac{di}{d\theta} \right]_{av} &= -\frac{a^{\frac{5}{2}}}{\mu^2} B \rho_p \omega_{\oplus} s_i \exp(-\beta) \left[ \frac{1}{2} I_0(\beta) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} I_2(\beta) c_{2\omega} \right] \end{aligned} \quad (C25)$$

$I_2(\beta) = I_0(\beta) - \frac{2}{\beta} I_1(\beta)$  なることを用い、一周の変化に直すと次式がえられる。

$$\begin{aligned} \frac{di}{dN} &= -\pi \frac{a^{\frac{5}{2}}}{\mu^2} B \rho_p \omega_{\oplus} s_i \exp(-\beta) \\ &\quad \cdot \left[ (1 + \cos 2\omega) I_0(\beta) - \frac{2}{\beta} \cos 2\omega I_1(\beta) \right] \end{aligned} \quad (C26)$$

---

## 航空宇宙技術研究所報告 587 号

昭和 54 年 10 月 発行

発行所 航空宇宙技術研究所  
東京都調布市深大寺町 1880  
電話武蔵野三鷹(0422)47-5911(大代表)〒182

印刷所 株式会社 共 進  
東京都杉並区久我山 4-1-7 (羽田ビル)

---