

UDC 53.08:  
681.2.08:  
65.012.1

# 航空宇宙技術研究所報告

TECHNICAL REPORT OF NATIONAL AEROSPACE LABORATORY

TR-600

バイアスエラーを考慮した3次元ベクトル量  
計測における最適観測軸配置について

木 村 武 雄

1980年2月

航空宇宙技術研究所  
NATIONAL AEROSPACE LABORATORY

# 目 次

1. まえがき .....	1
I. 序 論 .....	2
2. 概 説 .....	2
3. 観測誤差 .....	5
4. 観測方程式 .....	5
5. 観測方程式の解 .....	6
6. 観測系の評価 .....	6
II. 本 論 .....	7
7. 観測系を等価に保つ変換群 .....	8
8. 部分観測系を等価に保つ変換群 .....	10
9. 最適観測系であるための必要十分条件 .....	15
10. 最適解の簡易構成法 .....	17
11. 最適解同志の和の規則 .....	18
12. 最適解の等分割の規則 .....	18
13. 最適解の分類 .....	19
14. 1 極多重円錐解 .....	19
15. 2 極多重円錐解 .....	20
16. $n$ ( $\geq 1$ ) 極多重円錐解 .....	21
III. 補 論 .....	23
17. 最適観測系における観測方程式の解 .....	23
18. 故障の考慮 .....	24
19. 配置誤差の考慮 .....	26
IV. 結 論 .....	27
20. まとめ .....	27
21. あとがき .....	28
参考文献 .....	29
付録 A 矢円錐の具体例について .....	30
B 1 極多重円錐解の具体例について .....	31
C $n$ 極多重円錐解の具体例について .....	32
D 剛体力学における諸概念 .....	37
公式 1 逆行列に関する計算式 .....	37
2 行列式の次元降下公式 .....	37

# バイアスエラーを考慮した3次元ベクトル量計測における最適観測軸配置について\*

木 村 武 雄\*\*

## Optimum Orientations of the Observation Axes for 3-Dimensional Vector Sensing under Consideration of Bias Errors

Takeo KIMURA

### ABSTRACT

In the previous investigation it was shown that the determinant of a covariance matrix should be recognized as a reasonable criterion for comparing the quality of observation systems, and then the determinant criterion was applied to find the optimum observation systems for 3-dimensional vector sensing in cases where the observation errors were not correlated with each other and normally distributed with zero means and equal variances.

In the present investigation, the determinant method is especially applied to the cases where the observation errors contain not only random errors but also bias errors, provided that the values of these are mutually equal in each measurement instrument.

The general properties of the optimum orientations are shown. Furthermore the investigation is extended to include the case where some of the measuring instruments are out of order, as well as the case where there are misalignment errors in the configuration of the measuring systems. The geostatical qualities of the optimum systems are also discussed.

### 1. ま え が き

筆者は以前「3次元ベクトル量計測における最適観測軸配置について」<sup>2)</sup>報告したことがある。そこでは、加速度、角運動量などの3次元ベクトル量を計測する際の観測器の最適配置について述べたが、そこでいう最適配置とは、観測誤差にバイアスエラー（厳密な意味については、第3章を参照のこと）が含まれていない場合に、最も効率的に、最も精度よく未知所求量が求まる観測軸配置を意味し、バイアスエラーが含まれている場合の挙動については考察しなかった。

本報告では、より一般的な場合として、各観測器に生じるバイアスエラーの存在の下での上記観測系を考察し、各観測器に生じるバイアスエラーを、極めて効果的に除

去しうる最適観測系を見い出すことを試みる。また、その一般的性質についても考察する。

最適観測系を選び出す際の最適性基準の選択については、一般的には trace が多く用いられるが<sup>1)</sup>、「多変量誤差の合理的評価関数は、分散・共分散行列を  $\Sigma$  とするとき、事実上  $\det(\Sigma)$  ただひとつしかない」ということが、既に、理論的に明らかにされている<sup>3),4)</sup>ので、ここでは、上記の行列式評価基準を用いた場合の、バイアスエラーを考慮した3次元ベクトル量計測における最適観測軸配置について、報告したいと思う。

### 記 号

文字の用法

$a, b, c$  スカラー量

$\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$  ベクトル量（原則として縦ベクトルとする）

$A, B, C$  行列

\* 昭和54年10月2日受付

\*\* 計測部

## 演算記号

$\tilde{\mathbf{a}}$	ベクトル $\mathbf{a}$ の転置ベクトル
$\tilde{A}$	行列 $A$ の転置行列
$ \mathbf{a} $	ベクトル $\mathbf{a}$ の大きさ (絶対値)
$ A $	行列式
$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}, \mathbf{ab}, \mathbf{a}^2$	ベクトルの内積

## 添字等

$' '' * 0$	添記号 (例えば $a', a'', a''', a^0, A', A'', A^*$ など) 何らかの意味での相異性もしくは類似性を示す。
$i j k$	添字 (例えば $a_i, a_{ij}, {}^i a, {}^{ij} a, {}^i a_j, {}^i a, {}^{ij} a, A_i, A^i$ など) ベクトル, 行列などの成分を示すほか, 添記号の代用にも用いる。
注 1.	$a^i, \mathbf{a}^i$ 等はベキ乗を意味する。誤解の恐れがあるときは $(a)^i, (\mathbf{a})^i$ としてベキ乗を示す。
注 2.	$\delta_{ij}$ は通常クロネッカーのデルタを意味する。

## 主要文字の意味

$F$	文献2)で考察対象とした観測系
$G$	本報告で考察対象とする観測系
$H$	部分観測系
$A$	矢円錐 (部分観測系のひとつ)
$B$	多重矢円錐

## 1. 序 論

ここでは、本報告の考察対象・目的等の概説、バイアスエラーの定義、また、観測方程式等の主な前提条件、および、観測系の最適性基準などについて述べる。

## 2. 概 説

先づ、はじめに、本報告の考察対象、目的などについて簡単に述べる。

本報告は、表題にあるとおり、バイアスエラーを考慮した3次元ベクトル量計測について考察するが、ベクトル量計測の一般式は、既に明らかのように

$$\lambda_i = f_i(\mathbf{v}) + u_i \quad (i = 1, 2, \dots, p) \quad (2.1)$$

と表わされる<sup>2)</sup>。ここに

$i$ : 観測 (器) の番号

$p$ : 観測 (器) の個数

$\lambda_i$ : 測定値

$f_i$ : ベクトル  $\mathbf{v}$  を変数とするスカラー値関数

$\mathbf{v}$ : 未知所求ベクトル

$u_i$ : 観測誤差

関数  $f_i$  は、現実には、いろいろな形が存在するが、本報告では、未知ベクトル  $\mathbf{v}$  の各成分の一次結合で表わされる形に限定し、その結合係数は正規化されているものと仮定する。また、未知ベクトル  $\mathbf{v}$  は3次元とする。

すなわち

$$\lambda_i = \mathbf{f}_i \cdot \mathbf{v} + u_i \quad (i = 1, 2, \dots, p) \quad (2.2)$$

ただし  $|\mathbf{f}_i| = 1$

とする。ここに、ベクトル  $\mathbf{f}_i$  は、図-1に示す方向ベクトルに相当し、その  $x, y, z$  成分を本報告では  $l_i, m_i, n_i$  と表わすことにする。すなわち

$$\mathbf{f}_i = (l_i, m_i, n_i) \quad (2.3)$$

とする。

$$\text{ただし } l_i^2 + m_i^2 + n_i^2 = 1 \quad (2.4)$$

に注意する。

また、未知ベクトル  $\mathbf{v}$  については、その各成分を  $x, y, z$  と表記することにし、

$$\mathbf{v} = (x, y, z) \quad (2.5)$$

とする。

従って、(2.2)式は

$$\lambda_i = l_i x + m_i y + n_i z + u_i \quad (i = 1, 2, \dots, p) \quad (2.6)$$

と表わされる。

本報告では、(2.2)式あるいは(2.6)式で表わされる系について考察する。

さて、上式(2.6)において、観測誤差  $u_i$  の中に、バイアスエラーが含まれていない場合の最適観測軸配置については既に明らかになっている<sup>2)</sup>。例えば、図-2および図-3は、観測軸の個数が4のときのバイアスエラー

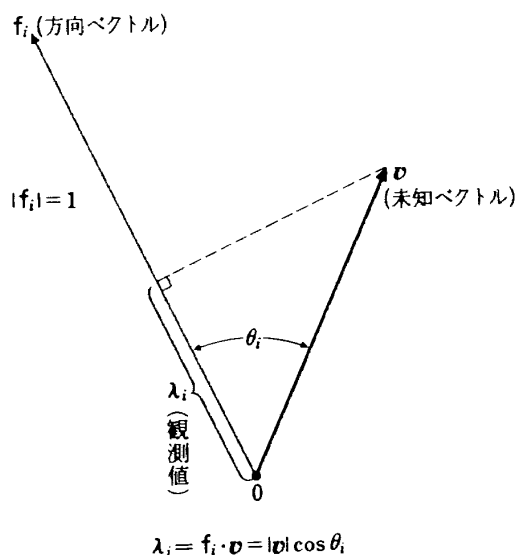
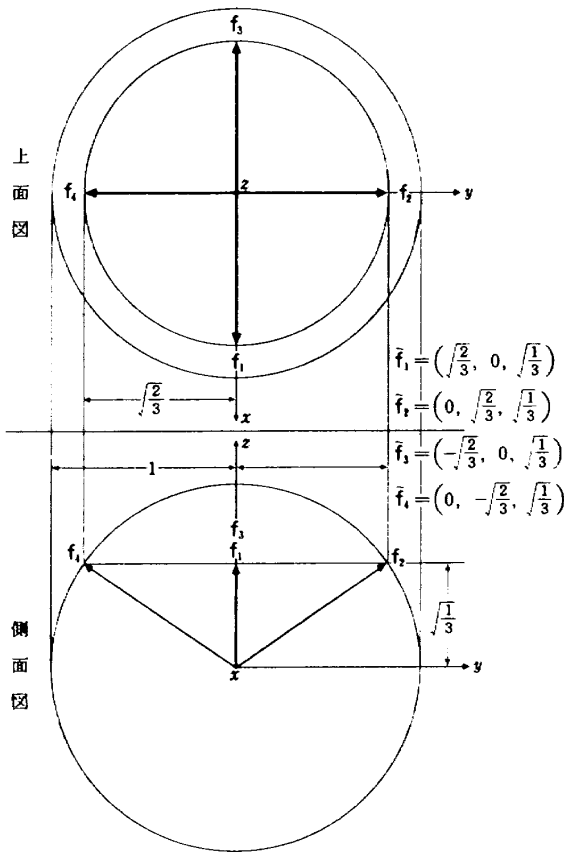
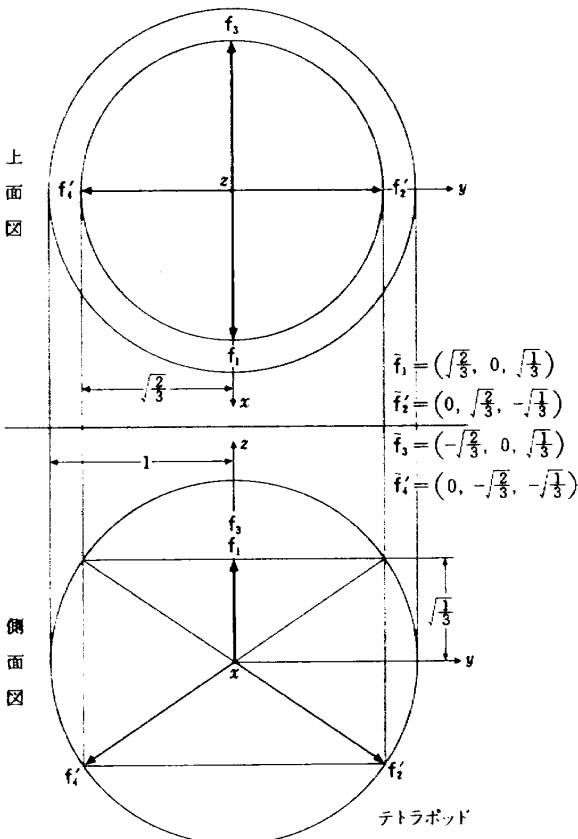


図-1


 図-2 バイアスエラーを考慮しない場合<sup>2)</sup>の最適解 ( $p=4$ )

 図-3 バイアスエラーを考慮しない場合<sup>2)</sup>の最適解 ( $p=4$ )

を考慮しない場合の解で、この観測軸に沿って、観測器を配置すれば、バイアスエラーを考慮しない限り、最も効率的に、最も精度よく未知所求量  $\mathbf{v}$  が得られる。

それでは、本報告の主題であるバイアスエラーを考慮するとどうなるか、これについて、次に、簡単に考察してみよう。

いま、観測系を示す行列を  $F$ 、観測値ベクトルを  $\lambda$  とする。このとき、未知所求量  $\mathbf{v}$  は、最尤法または最小自乗法により

$$\mathbf{v} = (\tilde{F}F)^{-1} \tilde{F} \cdot \lambda \quad (2.7)$$

と計算される<sup>2)</sup>。

従って、観測値ベクトルの変分  $\Delta \lambda$  と、それによる未知所求量の変分  $\Delta \mathbf{v}$  の関係は

$$\Delta \mathbf{v} = (\tilde{F}F)^{-1} \tilde{F} \cdot \Delta \lambda \quad (2.8)$$

と与えられる。

さて、図-2 の場合の観測系  $F$  は、同図に従って

$$F = \begin{pmatrix} \tilde{f}_1 \\ \tilde{f}_2 \\ \tilde{f}_3 \\ \tilde{f}_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{2}{3}} & 0 & \sqrt{\frac{1}{3}} \\ 0 & \sqrt{\frac{2}{3}} & \sqrt{\frac{1}{3}} \\ -\sqrt{\frac{2}{3}} & 0 & \sqrt{\frac{1}{3}} \\ 0 & -\sqrt{\frac{2}{3}} & \sqrt{\frac{1}{3}} \end{pmatrix} \quad (2.9)$$

と表わされる。

従って、上式 (2.9) を (2.8) 式に代入することにより

$$\Delta \mathbf{v} = \frac{3}{4} \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{2}{3}} & 0 & -\sqrt{\frac{2}{3}} & 0 \\ 0 & \sqrt{\frac{2}{3}} & 0 & -\sqrt{\frac{2}{3}} \\ \sqrt{\frac{1}{3}} & \sqrt{\frac{1}{3}} & \sqrt{\frac{1}{3}} & \sqrt{\frac{1}{3}} \end{pmatrix} \cdot \Delta \lambda \quad (2.10)$$

が得られる。

いま、各観測器の出力に、次の様な、各観測器について一様なバイアスエラーが乗っている場合 (このようなことは、よくある) を考える。

$$\Delta \lambda = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \Delta \quad (2.11)$$

$\Delta$  : ある一定値

そうすると、未知所求量の変分  $\Delta \mathbf{v}$  は (2.10) 式に、(2.11) 式を代入して、

$$\Delta \mathbf{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix} \cdot \Delta \quad (2.12)$$

となり、 $x, y$  成分には影響はないが、 $z$  成分に、後に示す図-3 の場合 (2.17) 式と比較してかなり大きな誤差が現われる。

また、次の様な、各観測器毎に少しづつ値の異なるバイアスエラーが乗っている場合 (このような場合も、よくある) については、

$$\Delta \mathbf{z} = \begin{pmatrix} 1.25 + 0.15 \\ 1.25 + 0.05 \\ 1.25 - 0.05 \\ 1.25 - 0.15 \end{pmatrix} \cdot \Delta = \begin{pmatrix} 1.4 \\ 1.3 \\ 1.2 \\ 1.1 \end{pmatrix} \cdot \Delta \quad (2.13)$$

に対して

$$\Delta \mathbf{v} = \begin{pmatrix} \sqrt{6}/20 \\ \sqrt{6}/20 \\ 5\sqrt{3}/4 \end{pmatrix} \cdot \Delta \div \begin{pmatrix} 0.12 \\ 0.12 \\ 2.17 \end{pmatrix} \cdot \Delta \quad (2.14)$$

となり、やはり、後に示す。図-3 の場合 ((2.18) 式) と比較して  $x, y$  成分については、同じだが、 $z$  成分に対しては、かなり大きな誤差が伝播してしまうことが分る。

これに対し、図-3 の場合は

$$F = \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{2}{3}} & 0 & \sqrt{\frac{1}{3}} \\ 0 & \sqrt{\frac{2}{3}} & -\sqrt{\frac{1}{3}} \\ -\sqrt{\frac{2}{3}} & 0 & \sqrt{\frac{1}{3}} \\ 0 & -\sqrt{\frac{2}{3}} & -\sqrt{\frac{1}{3}} \end{pmatrix} \quad (2.15)$$

と表わされ、従って、観測値ベクトルの変分  $\Delta \mathbf{z}$  に対する未知所求量の変分  $\Delta \mathbf{v}$  は、(2.8) 式に、上式 (2.15) を代入することにより

$$\Delta \mathbf{v} = \frac{3}{4} \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{2}{3}} & 0 & -\sqrt{\frac{2}{3}} & 0 \\ 0 & \sqrt{\frac{2}{3}} & 0 & -\sqrt{\frac{2}{3}} \\ \sqrt{\frac{1}{3}} & -\sqrt{\frac{1}{3}} & \sqrt{\frac{1}{3}} & -\sqrt{\frac{1}{3}} \end{pmatrix} \cdot \Delta \mathbf{z} \quad (2.16)$$

と計算される。

いま、測定値に、(2.11) 式で示されたと同じバイアスエラーが乗っている場合を考える。

そうすると、(2.16) 式に (2.11) 式を代入して、

$$\Delta \mathbf{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \Delta \quad (2.17)$$

を得る。これは、一様なバイアスエラーについては、未知所求量  $\mathbf{v}$  に全く影響を与えないことを示しており、(2.12) 式と比較してみるならば、図-3 の場合の方が図-2 の場合よりも優れていることを示す。

また (2.13) 式で示されたバイアスエラーについては、(2.16) 式に (2.13) 式を代入して

$$\Delta \mathbf{v} = \begin{pmatrix} \sqrt{6}/20 \\ \sqrt{6}/20 \\ \sqrt{3}/20 \end{pmatrix} \cdot \Delta \div \begin{pmatrix} 0.12 \\ 0.12 \\ 0.09 \end{pmatrix} \cdot \Delta \quad (2.18)$$

を得る。これを、図-2 の場合の (2.14) 式と比較すると、 $z$  成分について、かなり、影響が小さくなっていることが分り、やはり、図-3 の場合の方が優れていることを示している。

また、図-3 の場合 (2.13) 式において、各誤差の平均値 ( $1.25 = \frac{1}{4}(1.4 + 1.3 + 1.2 + 1.1)$ ) からの偏り分を新たな誤差と考えて、

$$\Delta \mathbf{z} = \begin{pmatrix} +0.15 \\ +0.05 \\ -0.05 \\ -0.15 \end{pmatrix} \cdot \Delta \quad (2.19)$$

とすると、これに対する未知所求量の変分  $\Delta \mathbf{v}$  は、(2.1) 式に上式 (2.19) を代入して

$$\Delta \mathbf{v} = \begin{pmatrix} \sqrt{6}/20 \\ \sqrt{6}/20 \\ \sqrt{3}/20 \end{pmatrix} \cdot \Delta \quad (2.20)$$

となり、(2.18) 式と全く同じになる。ということは、図-3 で示す観測系の場合は、(2.13) 式で示す比較的大きな誤差も、その誤差の平均値分が取り除かれた比較的小きな誤差 (2.19) と同等となってしまうことを示している。<sup>\*</sup>

以上の考察から分ることは、図-2 の場合は、バイアスエラーを考慮すると、明らかに、最適ではなくなるということであり、また、図-3 の場合は、バイアスエラーがあっても、なお、極めて有効に、バイアスエラーを除去できるということである。

本報告の目的は、バイアスエラーを考慮した場合の最適観測系を見い出すこと、および、その一般的性質を明らかにすることなどであるが、その結果として、この最

\* ) (175) 式および (17.6) 式参照のこと

適観測系が、上述した図-3の場合の観測系（これが最適観測系であることは、後に示される）の如く、極めて有効に、バイアスエラーを除去できることが示されるであろう。

### 3. 観測誤差

本報告は、バイアスエラーを考慮した3次元ベクトル量計測を考察するが、本報告でいうバイアスエラーの意味などについて、ここで、明らかにする。

ある観測器  $i$  に関する観測誤差を  $u_i$  とするとき、本報告でいうバイアスエラー  $d_0$  は

定義1

$$d_0 \equiv E(u_i) \div \frac{1}{p} (u_1 + u_2 + \cdots + u_p) \quad (3.1)$$

$p$ : 観測器の個数

と定義される。

特に、時刻  $t$  を問題にする場合には、

$$d_0(t) \equiv E\{u_i(t)\} \div \frac{1}{p} \{u_1(t) + u_2(t) + \cdots + u_p(t)\} \quad (3.2)$$

と理解すべきものとする。つまり、ここでいうバイアスエラーは、時間的に変化してもよいことを示す。

また、偶発誤差  $\varepsilon_i$  については

$$\varepsilon_i \equiv u_i - d_0 \quad (3.3)$$

と定義することにする。

言い換えれば、観測誤差  $u_i$  は

$$u_i \equiv d_0 + \varepsilon_i \quad (3.4)$$

となる。

ただし、本報告では、偶発誤差  $\varepsilon_i$  について、次の条件を満たすものと仮定する。<sup>\*</sup>

仮定1. 正規分布である。

$$\text{仮定2. } E(\varepsilon_i) = 0 \quad (i=1, 2, \dots, p) \quad (3.5)$$

$$\text{仮定3. } E(\varepsilon_i \varepsilon_j) = \varepsilon^2 \delta_{ij} \quad (i, j=1, 2, \dots, p) \quad (3.6)$$

( $\varepsilon$  は、 $i$  ( $i=1, 2, \dots, p$ ) によらない)

なお、計算上の簡便を図るため、

$$d_0 = \frac{1}{\sqrt{3}} d \quad (3.7)$$

と記すことにする。従って、観測誤差  $u_i$  は、以後、

$$u_i = \frac{1}{\sqrt{3}} d + \varepsilon_i \quad (3.8)$$

と表記される。

### 4. 観測方程式

バイアスエラーを考慮した場合の観測方程式は、(2.6)式に(3.8)式を代入して

$$\lambda_i = l_i x + m_i y + n_i z + \frac{1}{\sqrt{3}} d + \varepsilon_i \quad (i=1, 2, \dots, p)$$

$$\text{ただし } l_i^2 + m_i^2 + n_i^2 = 1$$

(4.1)

となる。

上式(4.1)が本報告の適用範囲を示す。つまり、(4.1)式で表わされる系でありさえすれば、どのような系であっても、本報告の内容が適用できる可能性がある。

次に、バイアスエラーが存在する場合の、最適観測系を見出す基本的な観点を示す。すなわち、

仮定4. バイアスエラーを未知所求量のひとつとする。ということである。バイアスエラーの値が、あらかじめ、知られているならば、観測値より、これを差し引いて、バイアスエラーを考慮しない場合<sup>2)</sup>に帰着できるが、本報告では、仮定4の観点に立つことにする。

この考え方に従って、(4.1)式の第1式を行列表示で示せば、

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l_1 & m_1 & n_1 & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ l_2 & m_2 & n_2 & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ l_p & m_p & n_p & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \vdots \\ \varepsilon_p \end{pmatrix} \quad (4.2)$$

となる。

行列記号を用いるならば、

$$\lambda = G \cdot w + \varepsilon \quad (4.3)$$

となる。

ただし、

$$\lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_p \end{pmatrix} \quad (4.4) \quad G = \begin{pmatrix} l_1 & m_1 & n_1 & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ l_2 & m_2 & n_2 & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ l_p & m_p & n_p & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \quad (4.5)$$

\* ) ここに仮定1, 2は観測系の評価理論<sup>3), 4)</sup>を適用する上で必要であり、仮定3は、本報告で必要な仮定である。

$$\boldsymbol{w} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ d \end{pmatrix} \quad (4.6) \quad \boldsymbol{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \vdots \\ \varepsilon_p \end{pmatrix} \quad (4.7)$$

また, (3.6) 式より

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{\varepsilon}\boldsymbol{\varepsilon}^T) = \begin{pmatrix} \varepsilon^2 & 0 & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & \varepsilon^2 & \cdot & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdot & \cdot & \varepsilon^2 \end{pmatrix} = \varepsilon^2 \boldsymbol{E}(p) \quad (4.8)$$

$$\equiv \boldsymbol{W}^{-1}$$

を得る。

ここに,

$\lambda$  : 観測値ベクトル

$G$  : 観測系を意味する行列

$\boldsymbol{w}$  : 未知量ベクトル

$\boldsymbol{\varepsilon}$  : 観測誤差ベクトル

$\boldsymbol{E}(p)$  :  $p \times p$  の単位行列

$\boldsymbol{W}$  : 重み行列

ここで注意すべきことは, 未知量ベクトル  $\boldsymbol{w}$  が, (4.6) 式に示すように, バイアスエラーを考慮したため, 4次元ベクトル量となっていることである。これが, バイアスエラーを考慮しない場合<sup>2)</sup> との本質的な違いと言えよう。

## 5. 観測方程式の解

最尤法または最小自乗法によれば, 観測方程式 (4.3) 式の解は観測誤差 (4.8) 式を考慮して次のようになる。

$$\begin{aligned} \boldsymbol{w} &= (\tilde{\boldsymbol{G}} \cdot \boldsymbol{W} \cdot \boldsymbol{G})^{-1} \cdot \tilde{\boldsymbol{G}} \cdot \boldsymbol{W} \cdot \lambda \\ &= (\tilde{\boldsymbol{G}} \cdot \boldsymbol{G})^{-1} \cdot \tilde{\boldsymbol{G}} \cdot \lambda \end{aligned} \quad (5.1)$$

また, この解  $\boldsymbol{w}$  の推定誤差は

$$\Sigma = (\tilde{\boldsymbol{G}} \cdot \boldsymbol{W} \cdot \boldsymbol{G})^{-1} = \varepsilon^2 (\tilde{\boldsymbol{G}} \cdot \boldsymbol{G})^{-1} \quad (5.2)$$

と見積もられる。ただし, 上記の  $\Sigma$  とは未知ベクトル  $\boldsymbol{w}$  の誤差の分散・共分散行列のことである。すなわち

$$\Sigma \equiv V(\boldsymbol{w}) = \begin{pmatrix} \sigma_x^2 & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} & \sigma_{xd} \\ \cdot & \sigma_y^2 & \sigma_{yz} & \sigma_{yd} \\ \cdot & \cdot & \sigma_z^2 & \sigma_{zd} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \sigma_d^2 \end{pmatrix} \quad (5.3)$$

(対象行列なので, 下三角部分の表現を省く。以下同様)

$V$  : 分散を示す記号

である。

上述の (5.1) 式を見ると, よく知られているように

$$\det(\tilde{\boldsymbol{G}} \boldsymbol{G}) \approx 0 \quad (5.4)$$

でありさえすれば, 未知所求量  $\boldsymbol{w}$  は求まる。つまり, 3次元ベクトル量  $(x, y, z)$  のみならず, バイアスエラー  $d$  も求まる。たとえば, 図-2 の場合は  $\det(\tilde{\boldsymbol{G}} \boldsymbol{G}) = 0$  であり, バイアスエラーをも求めることは出来ない。また,  $\det(\tilde{\boldsymbol{G}} \boldsymbol{G})$  の値が大きければ大きい程, 良い観測系ということは, 既に明らかになっている<sup>3)</sup>。ちなみに図-3 の場合は  $p=4$  の条件下で  $\det(\tilde{\boldsymbol{G}} \boldsymbol{G})$  が最大となり, 最適観測系のひとつとすることができる。これについては後に触れよう。

## 6. 観測系の評価

観測系を評価するために, 本報告では, 次の様な評価基準を導入する。

### 評価基準 1

観測効率  $e$  の値が大きいく程, 良い観測系である。

ここに, 観測効率  $e$  は次の様に定義される<sup>5)</sup>。

$$\text{定義 2} \quad \text{観測効率 } e \equiv \frac{\text{精度 } h}{\text{経費 } g} \quad (6.1)$$

$$\text{ただし } h = \{\det(\Sigma)\}^{-1/N} \quad (6.2)$$

$N$  : 行列  $\Sigma$  の大きさ, 本報告では  $N=4$

$g$  : 未知所求量を求めるために要する一切の経費

経費  $g$  は, 実際は極めて複雑な式と考えられるが, ここでは, 次の様に仮定する。

仮定 5. 経費  $g$  は, 観測器の個数  $p$  が同一なら, 同一である。つまり,  $g$  は  $p$  のみの関数で示される :  $g = g(p)$

このように仮定すれば, 同じ個数の観測器からなる観測系の場合には, 経費は一定なので, 評価基準 1 は次の様に簡単化される。

評価基準 2 (観測器の個数  $p$  が同一ならば<sup>\*)</sup>)

精度  $h$  が高ければ高い程, 良い観測系である。

更に, 本報告では, 観測効率  $e$  を求めるために, 次の仮定をおく。

仮定 6. 経費  $g$  は観測器の個数  $p$  に比例する。

つまり, 観測器 1 個あたりの経費を  $\$$  として,

$$g = p \cdot \$ \quad (6.3)$$

(この仮定は, 観測効率  $e$  を求めるときにのみ必要)

従って, 観測効率  $e$  は, この仮定 6 の下に

$$e = \frac{h}{p \cdot \$} = \frac{|\Sigma|^{-\frac{1}{4}}}{p \cdot \$} \quad (6.4)$$

\*) 多くの場合, 評価基準 2 で十分である。しかし, 最適な観測器の個数を求めるような問題に対しては, 評価基準 1 に戻らねばならない。



となる。

この関係式(6.4)もしくは(6.1)式は、最適な観測器の個数 $P$ を求めるような場合には、必要不可欠の式となる(具体的には、本報告の17.3, 18.1, 18.2を参照されたい)が、最適な観測器の個数を得ることについては、本報告の主題ではない。

さて、簡単化された評価基準2の内容は、(6.2)式を考慮するならば、次の評価基準と同値である。

**評価基準2'** (観測器の個数 $P$ が同一ならば)

$\det(\Sigma)$ の値が小さければ小さい程、良い観測系である。

ただし、 $\det(\Sigma)$ の値は(5.2)式により、次の様に計算される。

$$\det(\Sigma) = \frac{\varepsilon^8}{\det(\tilde{G}G)} \quad (6.5)$$

ここに、(4.5)式に示すように

$$G = \begin{pmatrix} l_1 & m_1 & n_1 & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ l_2 & m_2 & n_2 & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ l_p & m_p & n_p & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \equiv \left( \mathbf{l}, \mathbf{m}, \mathbf{n}, \frac{1}{\sqrt{3}} \mathbf{I} \right) \quad (6.6)$$

とした。ただし

$$\mathbf{l} \equiv \begin{pmatrix} l_1 \\ l_2 \\ \vdots \\ l_p \end{pmatrix}, \quad \mathbf{m} \equiv \begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \\ \vdots \\ m_p \end{pmatrix}, \quad \mathbf{n} \equiv \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ \vdots \\ n_p \end{pmatrix} \quad (6.7)$$

$$\mathbf{I} \equiv \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \quad p \text{次元} \quad (6.8)$$

従って

$$\det(\tilde{G}G) = \det \left\{ \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{l}} \\ \tilde{\mathbf{m}} \\ \tilde{\mathbf{n}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \tilde{\mathbf{I}} \end{pmatrix} \left( \mathbf{l} \ \mathbf{m} \ \mathbf{n} \ \frac{1}{\sqrt{3}} \mathbf{I} \right) \right\}$$

$$= \det \begin{pmatrix} l^2 & lm & ln & \frac{1}{\sqrt{3}} lI \\ \cdot & m^2 & mn & \frac{1}{\sqrt{3}} mI \\ \cdot & \cdot & n^2 & \frac{1}{\sqrt{3}} nI \\ \cdot & \cdot & \cdot & \frac{1}{3} I^2 \end{pmatrix} \quad (6.9)$$

となる。

上式(6.5)の分母と分子は、互いに無関係なので、先の評価基準2'は次の様に言い換えることができる。

**評価基準3** ( $P$ の値が同一で、且つ)  
 $\varepsilon$ の値が同一ならば

$\det(\tilde{G}G)$ の値が大きい程、良い観測系である。

ここでは、上記評価基準3を採用して、議論を進めていく。<sup>\*\*</sup>

評価基準3に従うならば、 $\det(\tilde{G}G)$ を最大にする $G$ 、つまり $(\mathbf{l}, \mathbf{m}, \mathbf{n})$ を見い出せば、それが、最適観測軸配置ということになる。

なお、後の記述の都合上、観測軸もしくは方向ベクトルは、原則として、第4列に $1/\sqrt{3}$ を付加し、

$$\left( l_i, m_i, n_i, \frac{1}{\sqrt{3}} \right) \quad (6.10)$$

と記すことにする。従って、その集合は

$$\left( \mathbf{l}, \mathbf{m}, \mathbf{n}, \frac{1}{\sqrt{3}} \mathbf{I} \right) \quad (6.11)$$

と表記されることを原則とする。これは、行列 $G$ ((6.6)式)と対応しやすくするためである。

## II. 本 論

ここでは、主に、序論の段階で得られた、評価基準3に基づいて、議論を展開する。すなわち、これに基づき、観測軸配置全般について成り立つ諸性質、および、最適

\*)  $\varepsilon$ の値が同一でないならば、評価基準2'に戻らねばならないが、多くの場合、これで十分である。

\*\*)  $\varepsilon$ は、観測器単体の持つ偶発誤差であり、本報告では、 $\varepsilon$ の値を同一とする観測器を素材として、それらを最適な位置に配置することを目的とする。従って、配置だけに関する評価基準 $\det(\tilde{G}G)$ のみに注目する。

観測軸配置に限って成立する諸性質, 更に, 最適観測軸配置の具体解などについて述べる。

## 7. 観測系を等価に保つ変換群

最適観測軸配置を求める前に, 最適観測軸配置についてのみならず, 最適でない場合についても成立する観測軸配置に関する一般的性質について, 本章と次章とで述べる。

観測軸配置は, 既に述べたとおり, 行列  $G$  で表わされ, 観測系の良さは  $\det(\tilde{G}G)$  で表わされた。従って, いま, 二種類の観測軸配置  $G_1$  および  $G_2$  があって, たとえ  $G_1 \neq G_2$  であっても  $\det(\tilde{G}_1 G_1) = \det(\tilde{G}_2 G_2)$  でありさえすれば, この二つの観測系は, 観測系の評価の上では等価であるといえる。

これに関連して, 行列式  $\det(\tilde{G}G)$  を不変に保つ, 行列  $G$  への諸変換について, 次に明らかにする。

行列  $G$  への変換とは, 観測系  $G$  を変換 (再構成) することであり,  $\det(\tilde{G}G)$  を不変に保つとは, そのように変換しても観測系の良さは変わらないことを意味する。つまり, ここでは, 観測系の良さに変化を与えない変換とはどのようなものであるかを探求する<sup>\*)</sup>。

行列式  $\det(\tilde{G}G)$  をよく観察するならば, 次の様な変換  $V$  および  $U$  が解であることが, 容易に分る。

### 7.1 左からの変換 $V (P \times P)$

大きさ  $P \times P$  の行列  $V$ , ただし  $\tilde{V}V = E(P)$  ( $P \times P$  の単位行列) について,  $G$  への左からの変換

$$G^* = VG \quad (7.1)$$

この様な変換 ( $G \rightarrow G^*$ ) に対して,  $\det(\tilde{G}G)$  は不変である。なぜなら

$$\tilde{G}^* G^* = \tilde{G} \tilde{V} V G = \tilde{G} E G = \tilde{G} G \quad (7.2)$$

$$\text{従って } \det(\tilde{G}^* G^*) = \det(\tilde{G} G) \quad (7.3)$$

これは行列式  $\det(\tilde{G}G)$  の変換  $V$  に対する不変性を示している。

この様な変換の具体例として, 次の様なものがよく知られている。

#### (1) 行と行の入れ替え

行列  $G$  は (6.6) 式に示すように  $P$  行 4 列の行列であるが, この行列の  $i$  行目と  $j$  行目をそっくりそのまま相互に入れ替える変換, 例えば, 1 行目と 2 行目を入れ替

える変換は次の様に表わされる。

$$V_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdot & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdot & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & 1 \end{pmatrix} \quad (7.4)$$

この様な  $V_1$  に対して  $G$  は次の様に变换される。

$$G = \begin{pmatrix} l_1 & m_1 & n_1 & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ l_2 & m_2 & n_2 & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ l_p & m_p & n_p & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} l_2 & m_2 & n_2 & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ l_1 & m_1 & n_1 & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ l_p & m_p & n_p & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} = G^* = V_1 G \quad (7.5)$$

この変換の意味は観測軸の表記上の順番を入れ替えること, もしくは, 観測器同志を相互に入れ替えることである。

#### (2) 負変換

行列  $G$  のある行全ての要素にマイナスを付ける変換で, 例えば, 1 行目の負変換を考えれば, 次の様に表わされる。

$$V_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & \cdot & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdot & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & 1 \end{pmatrix} \quad (7.6)$$

この様な  $V_2$  に対して  $G$  は次のように変換される。

$$G = \begin{pmatrix} l_1 & m_1 & n_1 & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ l_2 & m_2 & n_2 & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ l_p & m_p & n_p & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -l_1 & -m_1 & -n_1 & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ l_2 & m_2 & n_2 & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ l_p & m_p & n_p & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} = G^* = V_2 G \quad (7.7)$$

<sup>\*)</sup> この変換は,  $\det(\tilde{G}G)$  の値を変化させない変換ならば, どんな変換でもよいかという, 必ずしも, そうではない。本報告で考察している観測系  $G$  は, (6.6) 式あるいは, さかのほれば (4.1) 式で規定されている範囲内になければならず, 行列  $G$  の各行について, その第 1 列, 第 2 列および第 3 列の成分の 2 乗和が 1 でなければならないこと, 第 4 列については, 各行の成分とも同一 (この場合  $1/\sqrt{3}$ ) でなければならない等の条件が付加されている。つまり, この様な条件を満たす行列の集合内での不変変換を探すということになる。7.1 節以下に示す変換が, (7.7) 式で示される変換を除いて, 全て, この条件の範囲内にあることは, 容易に確認できるであろう。

しかし、この変換は、第4列目の  $1/\sqrt{3}$  をも変換 ( $\rightarrow -1/\sqrt{3}$ ) している。変換が許されるのは第3列目まで ( $l_i, m_i, n_i; i=1, 2 \dots p$ ) であり、第4列目の  $1/\sqrt{3}$  の値は (6.6) 式で示すとおり固定しなければならず、従って、この様な変換は考察の対象外である。ただし、次の様な変換は考慮すべきである。

$$G = \begin{pmatrix} l_1 & m_1 & n_1 & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ l_2 & m_2 & n_2 & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ l_p & m_p & n_p & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -l_1 & -m_1 & -n_1 & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ l_2 & m_2 & n_2 & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ l_p & m_p & n_p & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} = G^* \quad (7.8)$$

この変換の物理的意味は、観測軸の向きを逆転することである。しかし、この様な変換は行列表示では簡単に表わせず、また、この変換を行うと、特殊な場合を除き行列式の値が変わる。つまり観測系の良さが変わってしまうことが普通である。

## 7.2 右からの変換 $U$ ( $4 \times 4$ )

大きさ  $4 \times 4$  の行列  $U$ 、ただし  $(\det U)^2 = 1$  について、 $G$  への右からの変換

$$G' = GU \quad (7.9)$$

この様な変換 ( $G \rightarrow G'$ ) に対して、 $\det(\tilde{G}G)$  は不変である。なぜなら

$$\tilde{G}' G' = \tilde{U} \tilde{G} G U \quad (7.10)$$

従って

$$\begin{aligned} \det(\tilde{G}' G') &= \det(\tilde{U} \tilde{G} G U) \\ &= (\det U)^2 \cdot \det(\tilde{G} G) = \det(\tilde{G} G) \end{aligned} \quad (7.11)$$

これは、行列式  $\det(\tilde{G}G)$  の変換  $U$  に対する不変性を示している。

この様な変換のよく知られている具体例として、次の様なものがある。

### (1) 回転変換

観測系全体をそっくりそのまま、観測軸同志の位置関係は変えずに、3次元的に回転させる変換で、例えば、次の様に表わされる。

$$U_1 = \begin{pmatrix} \cos \gamma & \sin \gamma & 0 & 0 \\ -\sin \gamma & \cos \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} & \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \beta & \sin \beta & 0 \\ 0 & -\sin \beta & \cos \beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ & \times \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 & 0 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (7.12)$$

$\alpha, \beta, \gamma$  は任意の角度

この様な変換に対して、観測系の良さは不変である。

### (2) 列と列の入れ替え

行列  $G$  において、任意の列と列をそっくりそのまま入れ替える変換で、例えば、1列目と2列目を入れ替える場合を考えると、次の様に表わされる。

$$U_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (7.13)$$

この様な変換  $U_2$  に対して  $G$  は次のように変換される。

$$G = \begin{pmatrix} l_1 & m_1 & n_1 & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ l_2 & m_2 & n_2 & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ l_p & m_p & n_p & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} m_1 & l_1 & n_1 & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ m_2 & l_2 & n_2 & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ m_p & l_p & n_p & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} = G' = GU_2 \quad (7.14)$$

この物理的意味は、 $x$  軸と  $y$  軸を入れ替えること、すなわち、一種の鏡映変換である。

### (3) 負変換

行列  $G$  において、任意の列の全ての成分にマイナスをつける変換で、例えば、1列目の負変換は次の様に表わされる。

$$U_3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (7.15)$$

この様な変換  $U_3$  に対して、行列  $G$  は次のように変換される。



ただし、下記の3条件を満たすものとする。

$$(1) \quad l_i^2 + m_i^2 + c^2 = 1 \quad (i=1, 2, \dots, p) \quad (8.6)$$

$$(2) \quad lm = mI = II = 0 \quad (8.7)$$

$$(3) \quad l^2 = m^2 \left( = \frac{p}{2} (1 - c^2) \right) \quad (8.8)$$

上記3条件を満足する矢円錐の具体例については、付録Aおよび図-4に示す。

さて、行列形式をとるならば、 $z$ 軸( $z$ 成分は $c$ )を円錐軸とする上記矢円錐Aは、次の様な性質を持つことが分る。

$$\begin{aligned} \tilde{A}A &= \begin{pmatrix} l^2 & lm & lc & \frac{1}{\sqrt{3}}lI \\ \cdot & m^2 & mc & \frac{1}{\sqrt{3}}mI \\ \cdot & \cdot & c^2 & \frac{1}{\sqrt{3}}cI \\ \cdot & \cdot & \cdot & \frac{1}{3}I^2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{p}{2}(1-c^2) & 0 & 0 & 0 \\ \cdot & \frac{p}{2}(1-c^2) & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & pc^2 & \frac{1}{\sqrt{3}}pc \\ \cdot & \cdot & \cdot & \frac{1}{3}p \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (8.9)$$

上式(8.9)は、矢の数 $p$ と、 $z$ 座標の $c$ のみによって規定されていることに注意する。

さて、上式(8.9)を、後の便宜のため、次の様におく。

$$\tilde{A}A = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ \cdot & a & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & b & g \\ \cdot & \cdot & \cdot & d \end{pmatrix} \quad (8.10)$$

ここに

$$\left. \begin{aligned} a &= \frac{p}{2}(1-c^2) \\ b &= pc^2 \\ g &= \frac{1}{\sqrt{3}}pc \\ d &= \frac{1}{3}p \\ (2a+b &= 3d) \end{aligned} \right\} \quad (8.11)$$

である。

さて、以上までは、部分観測系としての矢円錐の空間的配置に関する数式的関係について述べているにすぎないが、ここでこの矢円錐の構造上の物理的・剛体力学的特性について調べてみよう。そのためには、次の仮定が必要となる。

仮定7. 各々の矢(観測軸)は質量的には同一で、且つ、単位質量が矢の先端に集中している<sup>\*)</sup>。

(この仮定は物理的意味を調べるときのみ必要)

さて、剛体力学に従えば、(8.5)式で示される矢円錐について、付録Dを参照して、

$z$ 軸まわりの慣性モーメント $I_z$ は

$$I_z = \sum_{i=1}^p (l_i^2 + m_i^2) = p(1 - c^2) = 2a$$

$z$ 軸上の質量モーメント $L_z$ は

$$L_z = \sum_{i=1}^p c = pc = \sqrt{3}g$$

総質量 $M$ は

$$M = p = 3d$$

$z$ 軸上の重心の位置 $G_z$ は

$$G_z = \frac{L_z}{M} = \frac{\sqrt{3}g}{3d}$$

(8.12)

となる。つまり、(8.11)式における $a, b, g, d$ には物理的意味がある。

従って、先の矢円錐の性質(8.9)式ないし(8.10)式は、(8.12)式を考慮することにより

$$\tilde{A}A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}I_z & 0 & 0 & 0 \\ \cdot & \frac{1}{2}I_z & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & M - I_z & \frac{1}{\sqrt{3}}MG_z \\ \cdot & \cdot & \cdot & \frac{1}{3}M \end{pmatrix} \quad (8.13)$$

と表わされることになる。すなわち、矢円錐Aに関し、観測系の評価に必要な行列 $\tilde{A}A$ が、剛体力学における諸概念によって、直接的に表わされる。

## 8.2 等価矢円錐

いま、2つの矢円錐 $A_1$ および $A_2$ があって、そのうちの $A_1$ については、(8.5)式に従って

\*) この仮定は、矢円錐の構造上の剛体力学的特性を調べるには十分な仮定であり、同時に、矢円錐が抽象しているところの観測器群の剛体としての力学的特性を調べるにも有用であり、決して、簡略化しすぎた仮定ではない。すなわち、このように仮定しても、定性的には、一般性を損うものではない。

$$\left. \begin{aligned} A_1 &\equiv ({}^1l, {}^1m, {}^1c, \frac{1}{\sqrt{3}}{}^1I) \text{ 矢の数 } P_1 \\ \text{ただし } {}^1\tilde{c} &= ({}^1c, {}^1c, \dots, {}^1c) \\ &(\text{以下同様}) \end{aligned} \right\} \quad (8.14)$$

と表わされるものとする。

そうすると、(8.10)式に従って

$$\tilde{A}_1 A_1 = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 & 0 \\ \cdot & a_1 & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & b_1 & g_1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & d_1 \end{pmatrix} \quad (8.15)$$

という性質を持つ。

ここに

$$\left. \begin{aligned} a_1 &= \frac{P_1}{2} (1 - ({}^1c)^2) \\ b_1 &= P_1 ({}^1c)^2 \\ g_1 &= \frac{1}{\sqrt{3}} P_1 {}^1c \\ d_1 &= \frac{1}{3} P_1 \\ (2a_1 + b_1 &= 3d_1) \end{aligned} \right\} \quad (8.16)$$

次に、矢円錐  $A_2$  は、上記の矢円錐  $A_1$  を、その円錐軸の回り\*)に、角度  $\delta$  (任意の値) だけ回転させたものと仮定すると、この両者は、観測系の評価の上では等価である\*\*)このことを、次に証明する。

証明

矢円錐  $A_1$  と  $A_2$  の関係式は、次の様に表わされる。

$$A_2 = A_1 R_z(\delta) \quad (8.17)$$

ここに

$$R_z(\delta) = \begin{pmatrix} \cos \delta & \sin \delta & 0 & 0 \\ -\sin \delta & \cos \delta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (8.18)$$

従って、(8.17)式より

$$\tilde{A}_2 A_2 = \tilde{R}_z(\delta) \tilde{A}_1 A_1 R_z(\delta) \quad (8.19)$$

となるが、ここで、次の様な部分行列表示を用いる。

(8.15)式について

$$\tilde{A}_1 A_1 = \begin{pmatrix} a_1 E(2) & , & O(2 \times 2) \\ O(2 \times 2) & , & X(2 \times 2) \end{pmatrix} \quad (8.20)$$

(8.18)式について

$$R_z(\delta) = \begin{pmatrix} U(2 \times 2) & , & O(2 \times 2) \\ O(2 \times 2) & , & E(2) \end{pmatrix} \quad (8.21)$$

とする。そうすると(8.19)式は、(8.20)、(8.21)

式により

$$\begin{aligned} \tilde{A}_2 A_2 &= \begin{pmatrix} \tilde{U} & , & O \\ O & , & E(2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 E(2) & , & O \\ O & , & X \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U & , & O \\ O & , & E(2) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a_1 \tilde{U} & , & O \\ O & , & X \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U & , & O \\ O & , & E(2) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a_1 E(2) & , & O \\ O & , & X \end{pmatrix} \quad (8.22) \end{aligned}$$

と計算される。

(8.22)式の右辺は、(8.20)式に示す如く、 $\tilde{A}_1 A_1$  に等しい。よって

$$\tilde{A}_2 A_2 = \tilde{A}_1 A_1 \quad (8.23)$$

となる。

証明終り。

このことは、矢円錐  $A_1$ 、 $A_2$  が、先の、等価部分観測系の条件式(8.4)を満たしていることを示し、従って、この両者は、観測系の評価の上では、等価であることを

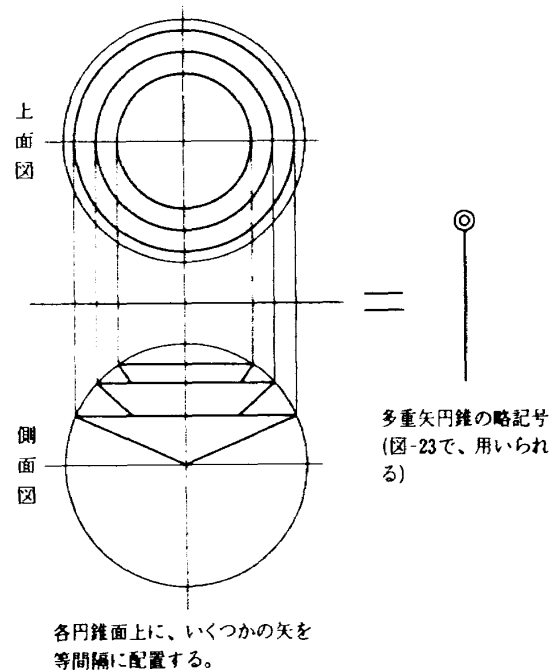


図-5 多重矢円錐

\*) 円錐軸以外の軸の回りに回転させた場合には、等価部分観測系ではなくなる。

\*\*) この事実は、先の物理的意味を考慮しても明白である。すなわち、この様な変換(z軸まわりの回転変換)に対して、(8.12)式のz軸まわりの慣性モーメントは不変であり、z軸上の質量モーメントも不変である。また、総重量も変ることなく、(8.16)式の第5式により、 $b_1$ の値も不変である。従って、(8.15)式の各成分は、いずれも、何ら変化することはない。

意味する。

従って、次のことがいえる。

③—1 本報告で対象としている任意の観測系について、その観測系の中に、部分観測系として、1つ以上の矢円錐がもし存在するならば、任意の矢円錐について、その円錐軸の回りに、他と無関係に、任意に回転させても、観測系の良さは変わらない。

### 8.3 多重矢円錐

先に定義した矢円錐  $A$  がいくつか、円錐軸を同じにして重なり合った形 (図-5) を多重矢円錐  $B$  と定義する。すなわち

$$\text{定義 4} \quad \begin{array}{cc} \text{矢の数} & \\ B \equiv \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_q \end{pmatrix} & \begin{array}{c} p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ p_q \end{array} \end{array}, \quad \begin{array}{c} \text{矢の総数 } P = \sum_{i=1}^q p_i \\ \text{矢円錐の数 } q \end{array} \quad (8.24)$$

ただし、(8.5) 式に示すように

$$A_i = ({}^i l, {}^i m, {}^i c, \frac{1}{\sqrt{3}} {}^i I) \quad (i = 1, 2, \dots, q) \quad (8.25)$$

とする。

つまり、(8.10) 式に倣って、

$$\widetilde{A}_i A_i = \begin{pmatrix} a_i & 0 & 0 & 0 \\ \cdot & a_i & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & b_i & g_i \\ \cdot & \cdot & \cdot & d_i \end{pmatrix} \quad (i = 1, 2, \dots, q) \quad (8.26)$$

という性質を持つものとする。

ここに

$$\left. \begin{array}{l} a_i = \frac{p_i}{2} (1 - ({}^i c)^2) \\ b_i = p_i ({}^i c)^2 \\ g_i = \frac{1}{\sqrt{3}} p_i {}^i c \\ d_i = \frac{1}{3} p_i \\ (2a_i + b_i = 3d_i) \end{array} \right\} \quad (i = 1, 2, \dots, q) \quad (8.27)$$

である。

そうすると、(8.24) 式および (8.26) 式により、多重矢円錐  $B$  は

$$\widetilde{B} B = \sum_{i=1}^q \widetilde{A}_i A_i$$

$$= \sum_{i=1}^q \begin{pmatrix} a_i & 0 & 0 & 0 \\ \cdot & a_i & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & b_i & g_i \\ \cdot & \cdot & \cdot & d_i \end{pmatrix} \quad (8.28)$$

という性質を持つことが分る。

また、後の便宜のため、上式 (8.28) を次の様に、表示する。

$$\widetilde{B} B = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ \cdot & a & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & b & g \\ \cdot & \cdot & \cdot & d \end{pmatrix}, \quad \begin{array}{c} \text{矢の総数 } P \\ \text{矢円錐の数 } q \end{array} \quad (8.29)$$

ここに

$$\left. \begin{array}{l} a = \sum_{i=1}^q a_i \\ b = \sum_{i=1}^q b_i \\ g = \sum_{i=1}^q g_i \\ d = \sum_{i=1}^q d_i \end{array} \right\} \quad (8.30)$$

である。ただし、次の事に注意する。

$$2a + b = 3d = P \quad (8.31)$$

ここで、前と同様に、(8.24) 式で示される多重矢円錐の構造上の剛体力学的特性を調べてみる。

先の仮定 7 の下に、剛体力学に従えば、

$$\left. \begin{array}{l} I_z = \sum_{i=1}^q (I_z)_i = \sum_{i=1}^q 2a_i = 2a \\ L_z = \sum_{i=1}^q (L_z)_i = \sum_{i=1}^q \sqrt{3} g_i = \sqrt{3} g \\ M = \sum_{i=1}^q (M)_i = \sum_{i=1}^q 3d_i = 3d \\ G_z = \frac{L_z}{M} = \frac{\sqrt{3} g}{3d} \end{array} \right\} \quad (8.32)$$

となる。なお、 $(I_z)_i, (L_z)_i, (M)_i$  とは、 $i$  番目の矢円錐の、それぞれ、 $z$  軸まわりの慣性モーメント、 $z$  軸上の質量モーメント、質量ということを意味する。

上式 (8.32) は、(8.12) 式と形式的に一致する。つまり、本節の場合の矢円錐の数  $q$  を  $q = 1$  としたときが先の 8.1 節の場合に他ならない。

さて、(8.32) 式の結果を考慮するならば、先の (8.

28) 式ないし (8.29) 式は

$$\widetilde{B}B = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}I_z & 0 & 0 & 0 \\ \cdot & \frac{1}{2}I_z & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & M - I_z & \frac{1}{\sqrt{3}}MG_z \\ \cdot & \cdot & \cdot & \frac{1}{3}M \end{pmatrix} \quad (8.33)$$

と表わされる。すなわち、多重矢円錐  $B$  の場合にも、観測系の評価に必要な行列  $\widetilde{B}B$  が、剛体力学における諸概念によって、直接的に表現される。

#### 8.4 等価多重矢円錐

円錐軸を同じくする 2 種類の多重矢円錐  $B_1, B_2$  があって、(8.29) 式に従い

$$\widetilde{B}_j B_j = \begin{pmatrix} j_a & 0 & 0 & 0 \\ \cdot & j_a & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & j_b & j_g \\ \cdot & \cdot & \cdot & j_d \end{pmatrix}, \quad \begin{matrix} \text{矢の総数} \\ q_j \\ \text{矢円錐の数} \\ \text{(多重度)} \end{matrix} \quad j_p = \sum_{i=1}^{q_j} j p_i \quad (j=1, 2) \quad (8.34)$$

という性質を持つものとする。

ただし、次の事に注意する。

$$2^j a + j b = 3^j d = j p \quad (j=1, 2) \quad (8.35)$$

このとき、2 つの多重矢円錐  $B_1, B_2$  が互いに等価であるためには、条件式 (8.4) より

$$\widetilde{B}_1 B_1 = \widetilde{B}_2 B_2 \quad (8.36)$$

であれば十分である。

従って、(8.34) 式を (8.36) 式に代入し

$$\left. \begin{aligned} {}^1a &= {}^2a \\ {}^1g &= {}^2g \\ {}^1d &= {}^2d \\ {}^1b &= {}^2b \end{aligned} \right\} \quad (8.37)$$

を得るが、(8.35) 式の関係があるので、例えば (8.38) 式を除外しても意味は同じである。

以上、要約すれば、円錐軸を同じくする多重矢円錐  $B_1, B_2$  が互いに等価であるための十分条件は (8.37) 式が成り立つこと、つまり、(8.32) 式を考慮して、

##### ③ 円錐軸を同じくする多重矢円錐について

1. 矢の総数が等しい ( ${}^1d = {}^2d$ )
2. 円錐軸上の重心が等しい ( ${}^1d = {}^2d, {}^1g = {}^2g$ )
3. 円錐軸まわりの慣性モーメントが等しい ( ${}^1a = {}^2a$ )

ならば、互いに等価である。

尚、この規定③は、先に述べた規定③-1を含んでいる。

また、上記の条件を具体的に表記するならば、(8.30) 式および (8.27) 式を参照して

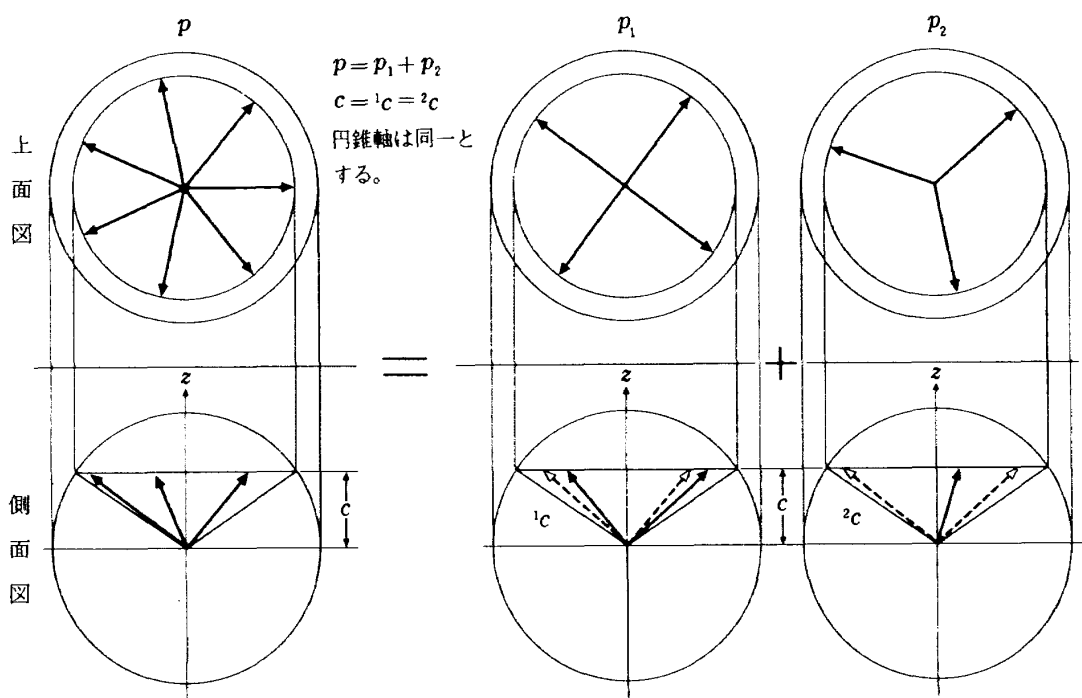


図-6 等価矢円錐 ( $c = {}^1c = {}^2c$  の場合)



$$\left. \begin{array}{l} 1. \sum_{i=1}^{q_1} {}^1p_i = \sum_{i=1}^{q_2} {}^2p_i \\ 2. \sum_{i=1}^{q_1} {}^1p_i {}^1i_c = \sum_{i=1}^{q_2} {}^2p_i {}^2i_c \\ 3. \sum_{i=1}^{q_1} {}^1p_i ({}^1i_c)^2 = \sum_{i=1}^{q_2} {}^2p_i ({}^2i_c)^2 \end{array} \right\} \quad (8.39)$$

となる。

最も簡単な場合として、

$$\begin{aligned} q_1 = 1, q_2 = 2 \text{ を考えると、上式 (8.39) は} \\ {}^1p_1 = {}^2p_1 + {}^2p_2 \quad (p = p_1 + p_2) \\ {}^1p_1 {}^1i_c = {}^2p_1 {}^2i_c + {}^2p_2 {}^2i_c \quad (p_c = p_1 {}^1i_c + p_2 {}^2i_c) \\ {}^1p_1 ({}^1i_c)^2 = {}^2p_1 ({}^2i_c)^2 + {}^2p_2 ({}^2i_c)^2 \quad (p_c^2 = p_1 ({}^1i_c)^2 + p_2 ({}^2i_c)^2) \end{aligned} \quad (8.40)$$

となり、これを解くと

$${}^1i_c = {}^2i_c = {}^2i_c \quad (c = {}^1c = {}^2c) \quad (8.41)$$

でなければならないことが分る。この意味は、図-6に示されている。つまり、要約すれば、

③-2  $p_1$  個の矢よりなる矢円錐と、それと同形の、 $p_2$  個の矢よりなる矢円錐を、円錐軸を同じにして重ねたものは、 $p_1 + p_2$  個の矢より成る、それと同形の等間隔矢円錐と等価である。

## 9. 最適観測系であるための必要十分条件

本章より、最適観測系に関する事項を扱う。すなわち、

観測系  $G$  を構成する観測軸の組  $(l, m, n, \frac{1}{\sqrt{3}}I)$  ((6.6)式参照のこと)が(4.1)式の第2式の下で、 $\det(\tilde{G}G)$  を最大ならしめる最適観測軸配置であるためには、どのような形でなければならないか、などについて議論する。本章では、まず、最適観測軸配置であるための必要十分条件を明らかにする。そのために、(6.9)式に従って、問題を次の様に設定する。

### 9.1 必要十分条件を得るための問題の設定

$$\det \begin{pmatrix} l^2 & lm & ln & \frac{1}{\sqrt{3}}lI \\ \cdot & m^2 & mn & \frac{1}{\sqrt{3}}mI \\ \cdot & \cdot & n^2 & \frac{1}{\sqrt{3}}nI \\ \cdot & \cdot & \cdot & \frac{p}{3} \end{pmatrix} \text{ を最大ならしめる} \quad (9.1)$$

$(l, m, n, \frac{1}{\sqrt{3}}I)$  の条件式を求める。

ここに、

$$\tilde{l} = (l_1 \ l_2 \ \cdots \ l_p) \quad (9.2)$$

$$\tilde{m} = (m_1 \ m_2 \ \cdots \ m_p) \quad (9.3)$$

$$\tilde{n} = (n_1 \ n_2 \ \cdots \ n_p) \quad (9.4)$$

$$\tilde{I} = (1 \ 1 \ \cdots \ 1) \quad (9.5)$$

ただし、

$$l_i^2 + m_i^2 + n_i^2 = 1 \quad (i = 1, 2, \cdots, p) \quad (9.6)$$

であるので、

$$\begin{aligned} l^2 + m^2 + n^2 &= \sum_{i=1}^p (l_i^2 + m_i^2 + n_i^2) = \sum_{i=1}^p 1 \\ &= p \end{aligned} \quad (9.7)$$

となることに注意する。

$p \leq 3$  の場合は、行列式(9.1)式が零となるので、実質的な意味を持たない。従って  $p \geq 4$  のみについて考察する。

### 9.2 必要十分条件および、その物理的意味

アダマールの不等式により、次のことがいえる。

$$\det \begin{pmatrix} l^2 & lm & ln & \frac{1}{\sqrt{3}}lI \\ \cdot & m^2 & mn & \frac{1}{\sqrt{3}}mI \\ \cdot & \cdot & n^2 & \frac{1}{\sqrt{3}}nI \\ \cdot & \cdot & \cdot & \frac{1}{3}p \end{pmatrix} \leq l^2 m^2 n^2 \frac{p}{3} \quad (9.8)$$

ただし、等号の成り立つのは

$$lm = mn = nl = 0 \quad (9.9)$$

$$lI = mI = nI = 0 \quad (9.10)$$

のときである。

ここで、(9.7)式の  $l^2 + m^2 + n^2 = p$  という条件下では

$$l^2 m^2 n^2 \leq \left(\frac{p}{3}\right)^3 \quad (9.12)$$

となる。

ここで、等号が成り立つのは

$$l^2 = m^2 = n^2 \quad (9.13)$$

のときであることに注意する。

従って(9.8)式に(9.12)式を代入して

$$\det \begin{pmatrix} l^2 & lm & ln & \frac{1}{\sqrt{3}}lI \\ \cdot & m^2 & mn & \frac{1}{\sqrt{3}}mI \\ \cdot & \cdot & n^2 & \frac{1}{\sqrt{3}}nI \\ \cdot & \cdot & \cdot & \frac{1}{3}p \end{pmatrix} \leq \left(\frac{p}{3}\right)^4 \quad (9.14)$$

を得る。

この場合、等号が成り立つのは、(9.9)、(9.10)、(9.13)の各式が共に満たされているときである。

すなわち、

$$\textcircled{1} \quad l_i^2 + m_i^2 + n_i^2 = 1 \quad (i = 1, 2, \dots, p) \quad (9.15)$$

$$\textcircled{2} \quad \mathbf{l}\mathbf{m} = \mathbf{m}\mathbf{n} = \mathbf{n}\mathbf{l} = 0 \quad (9.16)$$

$$\textcircled{3} \quad \mathbf{l}^2 = \mathbf{m}^2 = \mathbf{n}^2 = \left(\frac{p}{3}\right) \quad (9.17)$$

$$\textcircled{4} \quad \mathbf{l}\mathbf{l} = \mathbf{l}\mathbf{m} = \mathbf{l}\mathbf{n} = 0 \quad (9.18)$$

を満たす  $\mathbf{l}$ ,  $\mathbf{m}$ ,  $\mathbf{n}$  がもし存在するならば, それは上述の行列式  $\det(\tilde{\mathbf{G}}\mathbf{G})$  を最大にする最適観測軸配置のひとつである。

上記条件 $\textcircled{1}$  $\textcircled{2}$  $\textcircled{3}$  $\textcircled{4}$ を満たす  $\mathbf{l}$ ,  $\mathbf{m}$ ,  $\mathbf{n}$  が存在するかどうかについては, 計算の結果, 次節に示すように,  $p = 5$  の場合を除いて, 全ての  $p \geq 4$  について存在することが分っている。従って, 上記条件が,  $p \neq 5$  の場合の, 最適観測軸配置であるための, 必要十分条件である。

尚,  $p \leq 3$  の場合には, 上記 4 条件全てを満たす解は存在しないことに注意する。

さて, 上記条件のうち,  $\textcircled{1}$ ,  $\textcircled{2}$ ,  $\textcircled{3}$  を満たす  $\mathbf{l}$ ,  $\mathbf{m}$ ,  $\mathbf{n}$  については, 既に, 文献2)で解かれており, それは, バイアスエラーを考慮しない場合の最適解である。しかし, 本報告の様に, バイアスエラーを考慮すると, 新たに, 条件 $\textcircled{4}$ が加わってくる。従って, 次の様に言うことができる。文献2)でいう最適解(これは, バイアスエラーが存在しない場合に, 3次元ベクトルを最適に求めることができる)の中で, 更に, 条件 $\textcircled{4}$ を満たすものが, もし, あるとすれば, それは, 本報告でいう最適解でもあり, 3次元ベクトルを最適に求めると同時に, バイアスエラーをも最適に求めることができる。逆に条件 $\textcircled{1}$ ,  $\textcircled{2}$ ,  $\textcircled{3}$ ,  $\textcircled{4}$ を満たす解(本報告でいう最適解)があるならば, それは, 条件 $\textcircled{1}$ ,  $\textcircled{2}$ ,  $\textcircled{3}$ を満たすので, 文献2)でいう最適解でもある。尚, バイアスエラーを考慮するに伴い加わって来る条件 $\textcircled{4}$ によって, バイアスエラーが極めて有効に除去されるのであるが, その詳細については, 後に, 第17章(17.5), (17.6)式において示されよう。

ここで, 条件 $\textcircled{1}$ ,  $\textcircled{2}$ ,  $\textcircled{3}$ ,  $\textcircled{4}$ の持つ物理的意味を調べよう。先の仮定7の下に,

$\textcircled{1}$ については, 矢(観測軸)の先端が単位球面上にあるということである。

$\textcircled{2}$ については, 剛体力学における,  $x$ ,  $y$ ,  $z$  軸に関する慣性乗積がいつも零ということである。

$\textcircled{3}$ については,

$$\mathbf{m}^2 + \mathbf{n}^2 = \mathbf{n}^2 + \mathbf{l}^2 = \mathbf{l}^2 + \mathbf{m}^2 = \left(\frac{2}{3}p\right) \quad (9.19)$$

と同値なので, これは,  $x$ ,  $y$ ,  $z$  軸まわりの各慣性モーメントが互いに等しいことを意味する。

$\textcircled{2}$ と $\textcircled{3}$ を合わせるならば, それは, 原点を通る任意の軸についての慣性モーメントが, 軸の方向によらず一

定で, その値は,  $p\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right)^2$  に等しいということを意味する。ちなみに, 単位半径の薄い球殻の慣性モーメントは, その全質量を  $p$  とするとき, 上記の  $p\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right)^2$  に全く同じである。(付録Dを参照のこと)後の便宜のため, これを

$$\text{定義5} \quad I_0 \equiv p\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right)^2 \quad (9.20)$$

とし, 球殻慣性モーメントと名づける。

$\textcircled{4}$ については, 重心が原点にあるということである。従って, 以上の事柄を, 次の様に定式化できる。

$\textcircled{4}$  本報告で述べる観測系が最適であるための必要十分条件( $p \neq 5$ )は

1. 重心が原点にあること
2. 原点を通る任意の軸についての慣性モーメントが一定であること

である。

この様に, 観測系に関する諸特性を, 剛体力学における概念と対応させて把握しておくことは観測系の構成に関する大局的判断に極めて有利となる。且つ, 上記特性 $\textcircled{4}$ は, ロケットもしくは, 人工衛星搭載用の観測系としては非常に有利な性質であろう。

また, 上記条件 $\textcircled{1}$ ,  $\textcircled{2}$ ,  $\textcircled{3}$ ,  $\textcircled{4}$ は, 次の様にまとめることもできる。(6.6)式に示すように

$$\mathbf{G} \equiv (\mathbf{l}, \mathbf{m}, \mathbf{n}, \frac{1}{\sqrt{3}}\mathbf{I}) \quad (9.21)$$

と定義された  $\mathbf{G}$  について, この式(9.21)および条件 $\textcircled{1}$ ,  $\textcircled{2}$ ,  $\textcircled{3}$ ,  $\textcircled{4}$ より,

$$\tilde{\mathbf{G}}\mathbf{G} = \frac{p}{3}\mathbf{E}_{(4)} \quad (9.22)$$

となること, 最適観測軸配置であるための必要十分条件(但し  $p \neq 5$ )である。この条件式(9.22)の方が(9.15)~(9.18)式よりも簡便なので, 後に, 多く使われる。

### 9.3 条件 $\textcircled{1}$ $\textcircled{2}$ $\textcircled{3}$ $\textcircled{4}$ を満たす解の存在について

$p = 4, 6, 7, 8, 9, 10$  の場合の解は付録Bおよび図-9~図-19に示されており, それらが, 上記4条件を全て満たすことは, すぐに, 確認できる。 $p = 5$  の場合の, 上記4条件を満たす解は, 得られていない。

$p \geq 11$  の場合の解については, 第11章の最適解同志の和の規則 $\textcircled{4}-1$ によって, 全ての自然数  $p \geq 11$  について, 少なくとも, ひとつの解があることを示すことができる。すなわち,

$$p = 11 \text{ の場合} \\ 11 = 4 + 7$$

従って、 $p=4$ のときの最適解（既知）と、 $p=7$ のときの最適解（既知）を合わせたものは、 $p=11$ のときの最適解のひとつである（第11章の規則④-1による）。つまり、 $p=11$ の場合は少なくとも、ひとつの解が存在する。以上のことを $p=11=4\oplus 7$ と表わすことにする。以下同様に

$$\begin{aligned} p &= 12 = 4 \oplus 8 \text{ or } 6 \oplus 6 \\ p &= 13 = 4 \oplus 9 \text{ or } 6 \oplus 7 \\ p &= 14 = 4 \oplus 10 \text{ 等} \\ p &= 15 = 6 \oplus 9 \text{ 等} \\ p &= 16 = 6 \oplus 10 \text{ 等} \\ p &= 17 = 7 \oplus 10 \text{ 等} \\ p &= 18 = 8 \oplus 10 \text{ 等} \\ p &= 19 = 9 \oplus 10 \text{ 等} \\ p &= 20 = 10 \oplus 10 \text{ 等} \\ p &= 21 = 11 \oplus 10 \text{ 等} \\ &\dots\dots\dots \end{aligned}$$

$p \geq 20$ なる任意の整数 $p$ は（10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19）のいずれかの和で表わされることは自明<sup>\*</sup>である。従って、

$p=5$ を除く、全ての整数 $p \geq 4$ について、少なくともひとつの解が存在し、その具体例を示すことができる。尚、記述の便宜上、以後の議論では、 $p=5$ を除くものとする。

## 10. 最適解の簡易構成法

最適解であるための条件①②③④のうち、①②③を満たす解については既に明らかになっている<sup>2)</sup>。例えば、図-2がその一例である。いま、条件①②③を満たす解のひとつを

$F \equiv (\mathbf{l}', \mathbf{m}', \mathbf{n}')$  観測軸の数  $p' \geq 3$  (10.1)  
と表わせば、その観測軸の全てが、ことごとく逆向きのものは

$$-F = (-\mathbf{l}', -\mathbf{m}', -\mathbf{n}') \text{ 観測軸の個数 } p' \geq 3 \quad (10.2)$$

と表わされる。

この両者の和、すなわち、(6.11)式で示される表現法に従って

$$G \equiv \begin{pmatrix} F, & \frac{1}{\sqrt{3}}\mathbf{I} \\ -F, & \frac{1}{\sqrt{3}}\mathbf{I} \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{観測軸の数 } p' \geq 3 \\ \text{観測軸の数 } p' \geq 3 \\ p = 2p' \geq 6 \end{array} \quad (10.3)$$

と定義された観測系 $G$ は、最適解である。

このことを、次に、明らかにしてみよう。

すなわち(10.1)式で示される $F$ が条件①②③を満たすなら、

$$\widetilde{F}F = \frac{p'}{3}E_{(3)} \quad (10.4)$$

という性質を持つことになる。

従って(10.3)式は(10.4)式を考慮して、

$$\begin{aligned} \widetilde{G}G &= \begin{pmatrix} \widetilde{F}, & -\widetilde{F} \\ \frac{1}{\sqrt{3}}\widetilde{I}, & \frac{1}{\sqrt{3}}\widetilde{I} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F, & \frac{1}{\sqrt{3}}\mathbf{I} \\ -F, & \frac{1}{\sqrt{3}}\mathbf{I} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2\widetilde{F}F, & \mathbf{O} \\ \cdot & \frac{2}{3}\widetilde{I}\mathbf{I} \end{pmatrix} \\ &= \frac{2p'}{3}E_{(4)} = \frac{p}{3}E_{(4)} \quad (10.5) \end{aligned}$$

となり、観測系 $G$ が、最適観測系であるための条件(9.22)式を満たすことが判明する。

従って、(10.3)式で示される観測系は確かに最適観測系のひとつである。

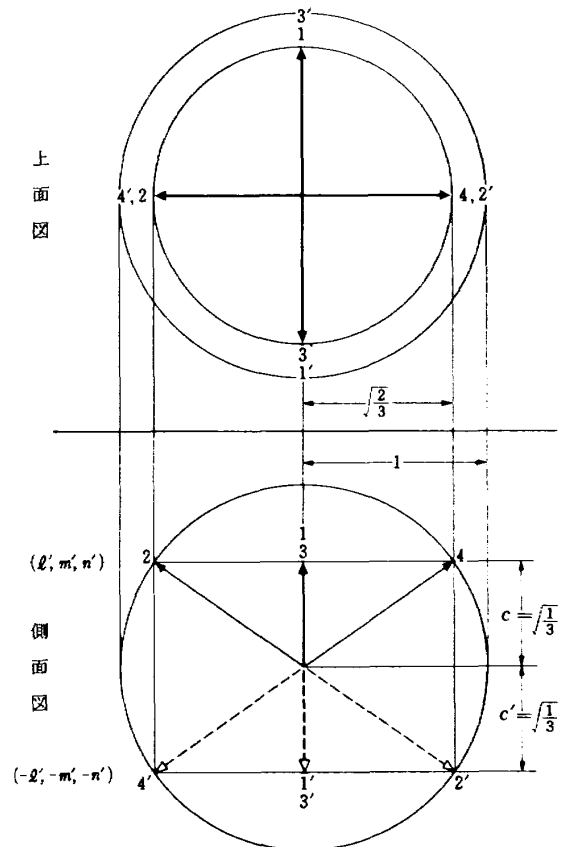


図-7 最適解合成の簡易則 ( $p=4+4$ の場合)

\* ) あるいは「 $p \geq 6$ なる任意の整数 $p$ は、4, 6, 7, 9のいずれか、又はそれらの和で表わされる。」とも言える。

また(10.3)式で定義された観測系 $G$ は、3次元空間的には、点対称であることを示しているが、もし、 $(\mathbf{l}', \mathbf{m}', \mathbf{n}')$ が、8章で定義された矢円錐からなる形であるならば、 $(-\mathbf{l}', -\mathbf{m}', -\mathbf{n}')$ も矢円錐からなる形であるので、個々の矢円錐について、8章で述べた矢円錐の性質③-1, ③-2を適用すれば、上記点対称の解 $G$ ((10.3)式)が点対称でなくなっても、解であることは言うまでもない。例えば、図-7に示すものは、図-2に示す配置(条件①②③を満たす)を2つ点対称に重ねた解であるが、先の性質③-1に従って、一方の矢円錐を円錐軸の回りに、任意に回転させれば、点対称ではなくなる。しかし、それでも、解であることに変わりはない。

## 11. 最適解同志の和の規則

さて、次に、最適解であるための条件式(9.22)を満たす最適解同志の和の規則を明らかにする。

観測系 $G_1$ (観測軸の数 $p_1 \geq 4$ )が、最適解であるための条件式(9.22)を満たし、且つ、観測系 $G_2$ (観測軸の数 $p_2 \geq 4$ )が、同じく条件式(9.22)を満たすなら、その和 $G$ 、すなわち

$$G = \begin{pmatrix} G_1 \\ G_2 \end{pmatrix} \quad (11.1)$$

観測軸の数

$$p = p_1 + p_2 \geq 8$$

も、上述の条件式(9.22)を満たす。このことを、次に、明らかにしよう。

(11.1)式より

$$\tilde{G}G = \tilde{G}_1G_1 + \tilde{G}_2G_2 \quad (11.2)$$

$G_1, G_2$ が共に、(9.22)式を満たすならば、

$$\tilde{G}_1G_1 = \frac{p_1}{3} E_{(4)} \quad (11.3)$$

$$\tilde{G}_2G_2 = \frac{p_2}{3} E_{(4)} \quad (11.4)$$

従って、(11.3), (11.4)式を(11.2)式に代入して

$$\tilde{G}G = \frac{1}{3} (p_1 + p_2) E_{(4)} = \frac{p}{3} E_{(4)} \quad (11.5)$$

を得る。これは、 $G$ が(9.22)式を満たしていることを示す。

従って、確かに、上記観測系 $G$ は、最適解のひとつである。この意味は、

④-1  $p_1$ 個の観測軸よりなる最適観測軸配置と、 $p_2$ 個の観測軸よりなる最適観測軸配置とを合わせたものは、 $(p_1 + p_2)$ 個の観測軸より成る最適観測軸配置のひとつである

ということである。

このことは必然的に、複合解および基本解の概念を生ずる。すなわち、複合解とは、二つ以上の解の結合したものであり、基本解とは他の解の結合によっては表わされない解のことである。

例えば、図-15に示すものは、 $p=8$ の場合の解ではあるが、これは $p=4$ の場合の基本解(図-9)が2つ特殊な位置に重なったもので、複合解ということになる。これに対し、図-13に示すものは、同じく $p=8$ の場合の解ではあるが、より低次の解の和としては表わされないので基本解ということになる。

## 12. 最適解の等分割の規則

前節では基本解および複合解について述べた。本節では、複合解について、これを更に、重合解と混合解とに分けて考えてみる。重合解とは一種類の最適解が複数個複合した解のことを言い、混合解とは異なる二種類以上の最適解が複合した解のことを指すものとする。従って、前章で述べた図-15に示す解は、1種類の基本解が2つ重なったものなので、重合解ということになる。

重合解に関連して

$$G = \begin{pmatrix} 1 & H_0 \\ 2 & H_0 \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ r & H_0 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} \text{観測軸の数} \\ p_0 \\ p_0 \\ \cdot \\ \cdot \\ p_0 \end{matrix} \quad (12.1)$$

観測軸の数

と定義された $r$ 重合の観測系 $G$ について、もしこれが最適解(すなわち、先の条件式(9.22)を満たすもの)であるならば、それを構成する $H_0$ も最適解である。次に、このことを明らかにしよう。

観測系 $G$ が、最適解であるということは、(9.22)式により

$$\tilde{G}G = \frac{p}{3} E_{(4)} \quad (12.2)$$

ということである。

一方、(12.1)式より

$$\tilde{G}G = r \tilde{H}_0 H_0 \quad (12.3)$$

となり、従って、(12.2), (12.3)式より

$$r \tilde{H}_0 H_0 = \frac{p}{3} E_{(4)} = \frac{r p_0}{3} E_{(4)} \quad (12.4)$$

となる。つまり、両辺を $r$ で割って

$$\tilde{H}_0 H_0 = \frac{p_0}{3} E_{(4)}$$

を得る。これは部分観測系 $H_0$ が条件式(9.22)を満たす

していることを示し、従って、確かに、この部分観測系  $H_0$  自身が最適観測系のひとつということが判明する。

以上のことは、矢円錐の性質③-1、を勘案すれば、次のことを意味していることがわかる。

第14章および第16章で示す  $n$  極 ( $q_1, q_2, \dots, q_n$ ) 重円錐解  $n = 1, 3, 4, 5 \dots$ ) について、各種の各矢円錐の矢の数 ( ${}^i p_j$ ) を

矢円錐の数、

第1極 ( $q_1$ ) , ( ${}^1 p_1, {}^1 p_2, \dots, {}^1 p_{q_1}$ )

第2極 ( $q_2$ ) , ( ${}^2 p_1, {}^2 p_2, \dots, {}^2 p_{q_2}$ )

...

第  $n$  極 ( $q_n$ ) , ( ${}^n p_1, {}^n p_2, \dots, {}^n p_{q_n}$ )

とすると、これら一連の矢の数 ( ${}^1 p_1, {}^1 p_2, \dots, {}^1 p_{q_1}, {}^2 p_1, \dots, {}^2 p_{q_2}, \dots, {}^n p_1, \dots, {}^n p_{q_n}$ ) について

[a] 公約数  $r$  が存在する。

及び、これら一連の数を公約数  $r$  で割った値について

[b] 原則として、全て3以上<sup>\*</sup>)であること、但し、図-4(c)で  $\alpha = 0$  型の矢円錐の場合には1以上<sup>\*</sup>)でよい。

以上の条件 [a] 及び [b] を満足するならば、この解は基本解ではなく、 $r$  重合解である。

例えば、図-15に示すものは、矢円錐の性質③-1を考慮して、1極2重円錐解(矢円錐の数2)とも見るができるが、その場合の各矢円錐の矢の数は2と6であり、公約数  $r = 2$  (重合度を示す)が存在する。また、2と6を公約数2で割れば、前者は1(これに対応する矢円錐は、図-15から明らかなの如く、図-4の  $\alpha = 0$  型の矢円錐とみなせる)であり、後者は3になるので、上記条件 [a], [b] を満たしており、図-15に示す解は、図-9に示す基本解が2つ重なった重合解ということになる。これが重合解であることは、既に指摘したとおりである。

### 13. 最適解の分類

最適解は、既に述べたように、次の様に分類される。

最適解	{	基本解	{	重合解
		複合解 (基本解の和)		(同一基本解の和)
				混合解

それぞれの意味については、既に記した(第11章および第12章参照のこと)。また、違った観点から、次の様にも分類される。

最適解	{	多重円錐解	1 極解 (2 極解)
		その他の解	3 極解
			4 極解
			5 極解
			.
			$n$ 極解

ここに、多重円錐解とは、第8章で定義された矢円錐もしくは、その特別な集合である多重矢円錐のみによって構成される解(図-4における  $\alpha = 0$  型の矢のみから構成されているとしかとれないものは除く)のことで、今まで得られている解は全て多重円錐解である。また、 $n$  極解の極とは、多重矢円錐の円錐軸のことで、従って、 $n$  極解とは、 $n$  個の多重矢円錐よりなる解という意味である。ただし、2 極解については、後に述べるように、基本解は存在しない。

### 14. 1 極多重円錐解

一つの多重矢円錐よりなる解を1極多重円錐解という。多重矢円錐については、既に、(8.24)式で定義されており、また、その性質については、(8.29)式で示されている。この多重矢円錐が解であるためには、解であるための条件(9.22)式を満たすことが必要十分である。

従って、(8.29)式と(9.22)式を等しいとおいて

$$\left. \begin{aligned} a = b = d = \frac{p}{3} \\ g = 0 \end{aligned} \right\} \quad (14.1)$$

を得る。

(8.31)式に注意するならば、上式(14.1)は

$$\left. \begin{aligned} a = b \\ g = 0 \end{aligned} \right\} \quad \text{又は} \quad \left. \begin{aligned} a = d \\ g = 0 \end{aligned} \right\} \quad (14.2)$$

と同値である。

便宜上、上式(14.2)の後半の組を採用することにし、その物理的意味を調べてみる。

$g = 0$  とは、第8章で述べた  $g$  の物理的意味より  $z$  軸上の重心の位置が0ということであり、重心が原点であることを示す。

$a = d$  は、(14.1)式により

$$2a = 2d = p \left( \sqrt{\frac{2}{3}} \right)^2 \quad (14.3)$$

\* ) 第8章矢円錐の定義(図-4)(付録A)により、 $\alpha = 0$  型の矢円錐は  $P = [1]$  以上について全て存在し、 $\alpha \neq 0$  型の矢円錐は、 $P = [3]$  以上についてのみ存在することに由来する。

となって,  $2a$  は  $z$  軸まわりの慣性モーメント  $I_z$  なので

$$I_z = P \left( \sqrt{\frac{2}{3}} \right)^2 \quad (14.4)$$

と書ける。

上式 (14.4) の右辺は,  $z$  軸より  $\sqrt{\frac{2}{3}}$  離れた位置に, 単位質量が  $P$  個あるときの,  $z$  軸まわりの慣性モーメントでもあるが, また, 既に (9.20) 式において, 球殻慣性モーメントと定義されているものでもある。

そうすると, (14.4) 式の意味は,  $z$  軸まわりの慣性モーメントが球殻慣性モーメントに等しいということである。

従って, 以上を要約すると,

④-2 多重円錐が最適解であるためには

1. 円錐軸上の重心が原点にあること
2. 円錐軸まわりの慣性モーメントが球殻慣性モーメントに等しいこと

が必要十分条件である。

次に, (14.2) 式の前半の式に基づいて, 具体的な条件式を求める。(8.30) 式および (8.27) 式より

$$\left. \begin{aligned} \sum_{i=1}^q p_i \left( \frac{1}{3} - (i_c)^2 \right) &= 0 \\ \sum_{i=1}^q p_i i_c &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (14.5)$$

を得る。この条件式 (14.5) に従って  $p_i, i_c (i=1, 2, \dots, q)$  を決めれば, 1 極多重円錐解を得ることができる。1 極多重円錐解の具体例については, 付録 B および図-9 ~ 図-19 に示す。

## 15. 2 極多重円錐解

2 種類の多重円錐よりなる解を 2 極多重円錐解という。いま, 円錐軸を同じくする 2 つの多重円錐を  $B_1, B_2$  とし, 円錐軸は共に  $z$  軸とする。このうち, 一方の多重円錐を  $x$  軸の回りに, 角度  $\delta$  だけ回転させたものを考える。全ての 2 極多重円錐解は, このような形と考えても, 一般性は損われない。この解を  $G_2$  とし

$$G_2 \equiv \left( \begin{array}{c} B_1 \\ B_2 \cdot R_x(\delta) \end{array} \right) \left. \begin{array}{c} \text{矢の数} \\ {}^1p \\ {}^2p \end{array} \right\} p = {}^1p + {}^2p \quad (15.1)$$

と表わす。

ここに

$$R_x(\delta) = \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \delta & \sin \delta & 0 \\ 0 & -\sin \delta & \cos \delta & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \quad (15.2)$$

多重円錐  $B_1, B_2$  については, (8.29) 式に従って

$$\tilde{B}_j B_j = \begin{pmatrix} j_a & 0 & 0 & 0 \\ \cdot & j_a & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & j_b & j_g \\ \cdot & \cdot & \cdot & j_d \end{pmatrix} \quad (j=1, 2) \quad (15.3)$$

という性質を持つ。

$$\text{但し, } 2j_a + j_b = 3j_d = {}^3p \quad (j=1, 2) \quad (15.4)$$

従って, (15.1) 式より

$$\tilde{G}_2 G_2 = \tilde{B}_1 B_1 + \tilde{R}_x(\delta) \tilde{B}_2 B_2 R_x(\delta) \quad (15.5)$$

となり, 上式 (15.5) に, (15.2) (15.3) 式を代入して計算すると,

$$\tilde{G}_2 G_2 = \begin{pmatrix} {}^1a + {}^2a, & 0 & & \\ \cdot & {}^1a + {}^2a \cos^2 \delta + {}^2b \sin^2 \delta, & & \\ \cdot & \cdot & & \\ \cdot & \cdot & & \cdot \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \frac{1}{2}({}^2a - {}^2b) \sin 2\delta & -{}^2g \sin \delta \\ {}^1b + {}^2a \sin^2 \delta + {}^2b \cos^2 \delta, & {}^1g + {}^2g \cos \delta \\ \cdot & {}^1d + {}^2d \end{pmatrix} \quad (15.6)$$

となる。

従って, 観測系  $G_2$  が最適解であるための必要十分な条件は, (9.22) 式により

まず, 対角要素については, 全て  $\frac{p}{3}$  に等しいということから

$$\begin{aligned} {}^1a + {}^2a &= {}^1a + {}^2a \cos^2 \delta + {}^2b \sin^2 \delta = {}^1b + {}^2a \sin^2 \delta + {}^2b \cos^2 \delta \\ &= \frac{p}{3} \end{aligned} \quad (15.7)$$

となり, 非対角要素については, 全て零ということで,

$$\left. \begin{aligned} ({}^2a - {}^2b) \sin 2\delta &= 0 \\ {}^2g \sin \delta &= 0 \\ {}^1g + {}^2g \cos \delta &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (15.8)$$

となる。

$\delta = 0$  および  $\delta = \pi$  の場合は, 1 極多重円錐解に一致するので除外する。

そうすると, (15.7) 式および (15.8) 式より, 次の解を得る。

$$\delta = \frac{\pi}{2} \text{ の場合も, } \delta = \frac{3\pi}{2} \text{ の場合も} \quad \left. \begin{aligned} {}^1g &= 0 \\ {}^2g &= 0 \\ {}^1a &= {}^1b \\ {}^2a &= {}^2b \end{aligned} \right\} \quad (15.9)$$

となる。

そうすると, (15.4)式により

$$\left. \begin{aligned} {}^1a = {}^1d = \frac{{}^1p}{3} \\ {}^2a = {}^2d = \frac{{}^2p}{3} \end{aligned} \right\} \quad (15.10)$$

を得る。

従って,

$$\widetilde{B}_j B_j = \frac{{}^j p}{3} E(4) \quad (j=1, 2) \quad (15.11)$$

となる。

この式(15.11)は, 多重円錐  $B_1, B_2$  が個々に, 最適観測系の条件式を満たしていることを示している。

以上, まとめると, 次の様になる。

④-3 2極の多重円錐解は全て1極多重円錐解を2つ任意の位置関係に配置した複合解であって, 2極多重円錐解に基本解は存在しない。

## 16. $n (\geq 1)$ 極多重円錐解

$n$ 個の多重円錐よりなる解を  $n$ 極多重円錐解という。本章では,  $n$ 極多重円錐解が最適解として成立するための条件を明らかにする。この条件は, 2種類の条件よりなる。一つは, 極(すなわち円錐軸)の方向に関する条件, もう一つは, 多重円錐自身に関する条件である。

いま, 円錐軸を同じくする  $n$ 個の多重円錐を  $B_j (j=1, 2, \dots, n)$  とし, 円錐軸は共に  $z$  軸とする。次に, 各多重円錐  $B_j (j=1, 2, \dots, n)$  の円錐軸を, 図-8に示す  $e_j$  方向に, それぞれ, 移す。全ての  $n$ 極多重円錐解は, このように表わされる。この解を  $G_n$  とおく。そうすると, 上述の内容は

$$G_n \equiv \left( \begin{array}{c} B_1 \cdot U_1 \\ B_1 \cdot U_2 \\ \vdots \\ B_n \cdot U_n \end{array} \right) \quad \begin{array}{c} \text{矢円錐の数} \\ q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_n \end{array} \quad \begin{array}{c} \text{各矢円錐の矢の数} \\ {}^1p_1, {}^1p_2, \dots, {}^1p_{q_1} \\ {}^2p_1, {}^2p_2, \dots, {}^2p_{q_2} \\ \vdots \\ {}^np_1, {}^np_2, \dots, {}^np_{q_n} \end{array} \quad (16.1)$$

と表わされる。これを  $n$ 極( $q_1, q_2, \dots, q_n$ )重円錐解ということにする。

ここに,  $U_j (j=1, 2, \dots, n)$  は, 図-8を参照して

$$U_j = R_x(\alpha_j) \cdot R_z(\beta_j)$$

$$= \left( \begin{array}{ccc|cc} \cos\beta_j & , & -\sin\beta_j & 0 & 0 \\ \cos\alpha_j \sin\beta_j & , & \cos\alpha_j \cos\beta_j & , & -\sin\alpha_j & 0 \\ \sin\alpha_j \sin\beta_j & , & \sin\alpha_j \cos\beta_j & , & \cos\alpha_j & 0 \\ \hline 0 & , & 0 & , & 0 & 1 \end{array} \right) \quad (16.2)$$

と表わされる。

また, 後の便宜のため, 上式(16.2)に, 次の様な部

分行列表示を与えておく。

$$U_j = \left( \begin{array}{ccc} V_j(2 \times 2) & v_j(2 \times 1) & 0(2 \times 1) \\ \widetilde{v}_j(1 \times 2) & \cos\alpha_j & 0 \\ \widetilde{0}(1 \times 2) & 0 & 1 \end{array} \right) \quad (16.3)$$

なお, 図-8に従って

$$\left. \begin{aligned} \cos\alpha_j &= n_j^0 \\ \sin\alpha_j &= \sqrt{(\ell_j^0)^2 + (m_j^0)^2} \\ \cos\beta_j &= \frac{m_j^0}{\sqrt{(\ell_j^0)^2 + (m_j^0)^2}} \\ \sin\beta_j &= \frac{\ell_j^0}{\sqrt{(\ell_j^0)^2 + (m_j^0)^2}} \end{aligned} \right\} \quad (16.4)$$

但し  $(\ell_j^0)^2 + (m_j^0)^2 = 0$  のときは  $\beta_j = 0$  とする。

であることに注意する。

また, (16.1)式における  $B_j (j=1, 2, \dots, n)$  については多重円錐の性質(8.29)式に従って

$$\begin{aligned} \widetilde{B}_j B_j &= \left( \begin{array}{cccc} j_a & 0 & 0 & 0 \\ \cdot & j_a & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & j_b & j_g \\ \cdot & \cdot & \cdot & j_d \end{array} \right) \\ &= j_a E(4) + \left( \begin{array}{cccc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \cdot & 0 & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & j_b - j_a & j_g \\ \cdot & \cdot & \cdot & j_d - j_a \end{array} \right) \end{aligned} \quad (16.5)$$

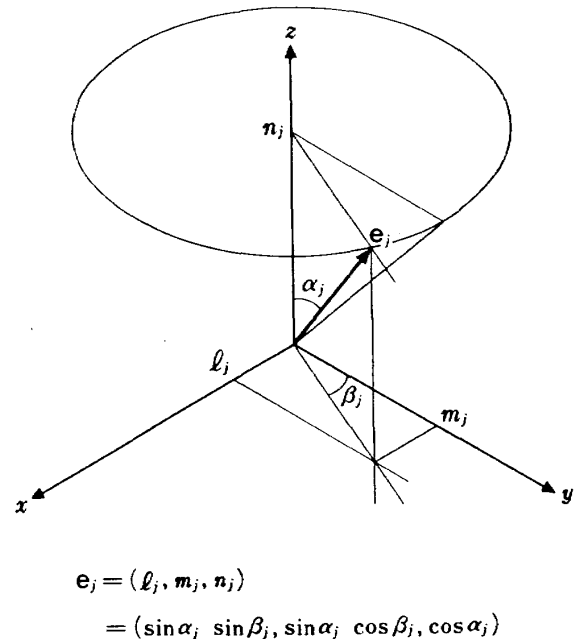


図-8 ベクトル  $(l, m, n)$  と角度  $(\alpha, \beta)$  との関係

と表わされる。

後の便宜のため、上式(16.5)を、次の様に、部分行列表示しておく

$$\widetilde{B}_j B_j = j_a E_{(4)} + \begin{pmatrix} \bigcirc (2 \times 2) & \mathbf{0} (2 \times 1) & \mathbf{0} (2 \times 1) \\ \cdot & j_b - j_a & j_g \\ \cdot & \cdot & j_d - j_a \end{pmatrix} \quad (16.6)$$

但し、(8.31)式に従って

$$2j_a + j_b = 3j_d = j_p \quad (16.7)$$

に注意する。

さて、(16.1)式より

$$\widetilde{G}_n \cdot G_n = \sum_{j=1}^n \widetilde{U}_j \widetilde{B}_j B_j U_j \quad (16.8)$$

を得、上式(16.8)に(16.6)式を代入するならば

$$\widetilde{G}_n G_n = \sum_{j=1}^n \left\{ j_a E_{(4)} + \widetilde{U}_j \begin{pmatrix} \bigcirc & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \cdot & j_b - j_a & j_g \\ \cdot & \cdot & j_d - j_a \end{pmatrix} U_j \right\} \quad (16.9)$$

となり、更に、(16.3)式を上式(16.9)に代入して計算すれば、

$$\begin{aligned} \widetilde{G}_n \cdot G_n &= \sum_{j=1}^n j_a E_{(4)} \\ &+ \sum_{j=1}^n \begin{pmatrix} v_j (j_b - j_a) \widetilde{v}_j, v_j (j_b - j_a) \cos \alpha_j, v_j j_g \\ \cdot & (j_b - j_a) \cos^2 \alpha_j, j_g \cos \alpha_j \\ \cdot & \cdot & j_d - j_a \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (16.10)$$

を得る。

ここで、 $v_j$ については、(16.3)式と(16.2)式とを比較し、更に、(16.4)式を見れば

$$v_j = \begin{pmatrix} \sin \alpha_j \sin \beta_j \\ \sin \alpha_j \cos \beta_j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \ell_j^0 \\ m_j^0 \end{pmatrix} \quad (16.11)$$

であることが分る。

従って、(16.10)式は、(16.11)式および(16.4)式の第1式より

$$\begin{aligned} \widetilde{G}_n G_n &= \sum_{j=1}^n \left\{ \begin{array}{l} j_a + (j_b - j_a)(\ell_j^0)^2, (j_b - j_a)\ell_j^0 \cdot m_j^0, \\ \cdot, j_a + (j_b - j_a)(m_j^0)^2, \\ \cdot, \cdot, \cdot \\ (j_b - j_a)\ell_j^0 \cdot n_j^0, \ell_j^0 j_g \\ (j_b - j_a)m_j^0 n_j^0, m_j^0 j_g \\ j_a + (j_b - j_a)(n_j^0)^2, n_j^0 j_g \\ \cdot, j_d \end{array} \right\} \quad (16.12) \end{aligned}$$

となる。

上式(16.12)で示された、 $\widetilde{G}_n G_n$ が、先の条件式(9.22)を満足するならば、観測系 $G_n$ は最適解である。しかし、最適解であるための条件式を( $j_a, j_b, j_c, \ell_j^0, m_j^0, n_j^0$ )( $j=1, 2, \dots, n$ )に関して、一般的に解くことは、極めて困難である。そこで(16.12)式をよく観察することにより、次の様な、4種類の解が存在することを見出す。

$$\text{解1} \left\{ \begin{array}{l} j_b - j_a = \text{const} (j \text{ によらない}) \\ j_g = \text{const} (j \text{ によらない}) \end{array} \right\} \quad (16.13)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \ell^0 m^0 = m^0 n^0 = n^0 \ell^0 = 0 \\ \ell^0 \ell^0 = m^0 \ell^0 = n^0 \ell^0 = 0 \\ (\ell^0)^2 = (m^0)^2 = (n^0)^2 \end{array} \right\} \quad (16.14)$$

$$\text{解2} \left\{ \begin{array}{l} j_b - j_a = \text{const} (j \text{ によらない}) \\ j_g = 0 (j=1, 2, \dots, n) \end{array} \right\} \quad (16.15)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \ell^0 m^0 = m^0 n^0 = n^0 \ell^0 = 0 \\ (\ell^0)^2 = (m^0)^2 = (n^0)^2 \end{array} \right\} \quad (16.16)$$

$$\text{解3} \left\{ \begin{array}{l} j_b - j_a = 0 (j=1, 2, \dots, n) \\ j_g = \text{const} (j \text{ によらない}) \end{array} \right\} \quad (16.17)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \ell^0 \ell^0 = m^0 \ell^0 = n^0 \ell^0 = 0 \end{array} \right\} \quad (16.18)$$

$$\text{解4} \left\{ \begin{array}{l} j_b - j_a = 0 (j=1, 2, \dots, n) \\ j_g = 0 (j=1, 2, \dots, n) \end{array} \right\} \quad (16.19)$$

尚、(16.14), (16.16), (16.18)の各式における $\ell^0, m^0, n^0, \ell^0$ とは

$$(\ell^0, m^0, n^0, \frac{1}{\sqrt{3}} \ell^0) = \begin{pmatrix} \ell_1^0 & m_1^0 & n_1^0 & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \ell_2^0 & m_2^0 & n_2^0 & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \ell_n^0 & m_n^0 & n_n^0 & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \quad (16.20)$$

のことで、従って( $\ell^0, m^0, n^0$ )とは多重矢円錐を配置すべき方向のベクトルの組を意味する。

上述の解1～解4が確かに解であることは、(16.12)式に、各解の条件式を代入して、(9.22)式を得ることから確認できる。

さて、上述した解の、多重矢円錐を規定する条件式(16.13), (16.15), (16.17), (16.19)における $j_g$ については、(8.32)式により既に、 $\sqrt{3} j_g$ が、円錐軸上の質量モーメントであることが指摘されている。

$$j_b - j_a = \text{const} \quad (16.21)$$

については、この式(16.21)を(16.7)式に代入して

$$2j_a - 2j_d = \text{const} (j \text{ によらない}) \quad (16.22)$$

に他ならないことが分る。

ここに、(8.32)式および(9.20)式により



$2j_a$  : 円錐軸まわりの慣性モーメント

$2j_d = j_p \left( \sqrt{\frac{2}{3}} \right)^2$  : 球殻慣性モーメント

である。

従って、上式(16.21)の意味は、上記慣性モーメントの差が、 $j(j=1, 2, \dots, n)$ によらず等しいということである。

次に、多重矢円錐の配置すべき方向に関する条件式(16.14), (16.16), (16.18)について述べる必要がある。

解1における(16.14)式の意味は既に明らかである。すなわち、第9章で示されている条件①, ②, ③, ④と(16.14)式とを比較するならば、 $n$ 個の多重矢円錐を配置すべき方向( $l^0, m^0, n^0$ )は、本報告で述べている $n$ 個の観測軸よりなる最適観測系の各観測軸の方向そのものに他ならない。

解2における(16.16)式は、先の条件①, ②, ③を考慮するならば、文献2)で述べている、 $n$ 個の観測軸よりなる最適観測系の各観測軸方向に多重矢円錐を配置すべきことを示している。

解3における(16.18)式は、多重矢円錐を配置すべき方向の方向ベクトルの組の重心が原点にあることを示す。

解4については、方向ベクトルに関する規定はなく、各多重矢円錐自身が、既に述べた1極多重円錐解そのものに他ならない。

従って以上を要約すると次のようになる。

④-4  $n$ 個の多重矢円錐があって、各多重矢円錐について

1. 円錐軸まわりの慣性モーメントと球殻慣性モーメントとの差が、各多重矢円錐について互いに等しいとするとき

1) 各多重矢円錐の、円錐軸上の質量モーメントが互いに等しい

ならば、本報告で述べている $n$ 個の観測軸よりなる最適観測系の各軸に、上記多重矢円錐を配置すれば、最適解である。

また、

2) 各多重矢円錐の重心が、いずれも原点にあるならば、文献2)で述べた、 $n$ 個の観測軸よりなる最適観測系の各軸に、上記多重矢円錐を配置すれば、最適解である。

④-5  $n$ 個の多重矢円錐の各々について

円錐軸まわりの慣性モーメントが、球殻慣性モーメントに等しい

とするとき

1) 各多重矢円錐の、円錐軸上の質量モーメントが互いに等しい

ならば、方向ベクトルの組の重心が原点にある場合の各ベクトル方向に、上記多重矢円錐を配置すれば、最適解である。

また、

2) 各多重矢円錐の重心が、いずれも原点にあるならば、各多重矢円錐自身が、個々に、最適解である。

尚、(16.13)式、(16.15)式、(16.17)式、および(16.19)式の左辺を具体的に表わすと、次のようになる。(8.30)式および(8.27)式を参照して、

$$\left. \begin{aligned} \frac{2}{3}(j_a - j_b) &= \sum_{i=1}^{q_j} j_{p_i} \left( \frac{1}{3} - (j_{i_c}^2) \right) \\ \sqrt{3} j_g &= \sum_{i=1}^{q_j} j_{p_i} j_{i_c} \end{aligned} \right\} \quad (16.23)$$

と表わされる。3極多重円錐解の具体例については、付録Cおよび図-20, 21, 22に示す。

### III. 補 論

前章までは、最適観測系とは、どのようなものであるかを求めたが、補論では、その最適観測系を採用した場合、未知所求量等は、どのように求められるか、また故障があるとき、および観測器の配置に誤差があるときどうなるか等について述べる。

#### 17. 最適観測系における観測方程式の解

本章では、先に述べた最適観測系で、実際にデータを取得した場合、未知所求量はどのように計算されるか、また、そのときの精度あるいは観測効率はどうなるかなどについて述べる。

##### 17.1 未知所求量の解

未知所求量 $w$ に関する解は、一般的には、既に(5.1)式および(5.2)式で与えられている。最適系においては、条件式(9.22)が成り立つので、(5.1)式および(5.2)式は、(9.22)式を代入して

$$w = \frac{3}{p} \widetilde{G} \lambda \quad (17.1)$$

$$\Sigma = \frac{3}{p} \epsilon^2 E_{(4)} \quad (17.2)$$

と与えられる。

また、観測系 $G$ は(6.6)式で与えられているので、(6.6)式を(17.1)式に代入して

$$w = \frac{3}{p} \begin{pmatrix} l \cdot \lambda \\ m \cdot \lambda \\ n \cdot \lambda \\ \frac{1}{\sqrt{3}} I \cdot \lambda \end{pmatrix} \quad (17.3)$$

を得る。

この式(17.3)に従って、未知所求量  $w$  は算出される。尚、次の事に注意する。測定値  $\lambda$  はバイアスエラー( $d_0$ )を用いて、一般的に、

$$\lambda = \lambda_0 + d_0 I \quad (17.4)$$

と表わされ、

上式を(17.3)式に代入して、

$$w = \frac{3}{p} \begin{pmatrix} l\lambda_0 + d_0 l \cdot I \\ m\lambda_0 + d_0 m \cdot I \\ n\lambda_0 + d_0 n \cdot I \\ \frac{1}{\sqrt{3}} I\lambda_0 + \frac{1}{\sqrt{3}} d_0 I^2 \end{pmatrix} \quad (17.5)$$

となる。

処が、最適系においては(9.18)式が成り立つので

$$w = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ d \end{pmatrix} = \frac{3}{p} \begin{pmatrix} l\lambda_0 \\ m\lambda_0 \\ n\lambda_0 \\ \frac{1}{\sqrt{3}}(I\lambda_0 + p d_0) \end{pmatrix} \quad (17.6)$$

となり  $x, y, z$  においては、バイアスエラー  $d_0$  の影響が除去される。このことは、既に序論第2章の終りのところで言及した。

## 17.2 精度

精度  $h$  は(6.2)式および、前節で求めた  $\Sigma$  (17.2)式を考慮して、次のように求まる。

$$h = \frac{p}{3\varepsilon^2} \quad (17.7)$$

上式(17.7)は、精度  $h$  が観測器の個数  $p$  に比例することを示している。従って、必要な精度が、あらかじめ指定されているならば、誤差  $\varepsilon$  に応じて、観測器の必要数を計算することができる。

## 17.3 観測効率

観測効率  $e$  は(6.4)式から

$$e = \frac{h}{p \cdot y} \quad (17.8)$$

と表わされる。

特に、観測軸の個数  $p$  のときの最適観測系における観測効率を  $e(p)$  と表わせば、上式に(17.7)式を代入することにより

$$e(p) = \frac{1}{3\varepsilon^2 y} \quad (17.9)$$

が得られる。この場合、 $y$  の値は既に述べたように、計器1個あたりの経費であり、定数と考えているので、観測効率  $e(p)$  は(17.9)式に見られる通り、計測器の個数  $p$  に無関係となる。つまり、最適観測系の場合には、観測効率すなわち経費あたりの精度もしくは、精度と経費両方を考えた場合の観測系の良さは、観測器の個数を増減させても、最適観測系に編成する限り、変らない。但し、故障を考慮すると、この結論は変ってくる。これについては後に述べる。

本章での重要な結論は、次の通りである。

⑤ 最適観測系においては、バイアスエラーを極めて有効に除去できる。

⑥ 最適観測系より得られる未知所求量の精度は、観測器の個数に比例する。また、観測効率は、観測器の個数によらず、同一である。

## 18. 故障の考慮

冗長度のある観測系において観測器が故障し、その故障観測器が摘出された場合には、故障観測器のデータを除外することにより、精度を向上させることができる。例えば、図-11において、番号1の観測器が故障した場合、その観測器のデータを用いず、残りの2, 3, 4, 5, 6の番号の観測器より得られるデータを基に、未知所求量を求めるということである。

本章では、この場合の、未知所求量の解とその精度および観測効率について述べる。

観測軸の数  $p$  の観測系を  $G^p$  とし、そのうち、 $n$  個故障した場合の、故障した部分を  $H^n$ 、故障していない部分を  $H^{p-n}$  と表わす。そうすると

$$G^p = \begin{pmatrix} H^n \\ H^{p-n} \end{pmatrix}, \quad p-n \geq 4 \quad (18.1)$$

と表わされる。

また、故障した観測器のデータを用いないということとは、

$$H^n = O \quad (n \times 4 \text{ の零行列}) \quad (18.2)$$

とおくことに他ならない。

このようにしたときの観測系を

$$G^{p-n} \equiv \begin{pmatrix} O(n \times 4) \\ H^{p-n} \end{pmatrix} \quad (18.3)$$

と記すことにする。

このとき、未知所求量  $w$  およびその分散・共分散行列は、(5.1)式および(5.2)式により

$$w = (\tilde{G}^{p-n} \cdot G^{p-n})^{-1} \cdot \tilde{G}^{p-n} \lambda \quad (18.4)$$

$$\Sigma = \varepsilon^2 (\tilde{G}^{p-n} G^{p-n})^{-1} \quad (18.5)$$

となる。

上式(18.4)および(18.5)の要である  $(\tilde{G}^{p-n} G^{p-n})^{-1}$  の部分は、次の様に計算することができる。

定義式(18.3)より、(18.1)式を考慮して

$$\begin{aligned}\tilde{G}^{p-n} G^{p-n} &= \tilde{H}^{p-n} H^{p-n} \\ &= \tilde{G}^p G^p - \tilde{H}^n H^n\end{aligned}\quad (18.6)$$

となる。

観測系  $G^p$  を最適系と仮定すると(9.22)式により

$$\tilde{G}^{p-n} G^{p-n} = \frac{p}{3} E_{(4)} - \tilde{H}^n H^n \quad (18.7)$$

を得、更に、公式1により

$$\begin{aligned}(\tilde{G}^{p-n} G^{p-n})^{-1} &= \frac{3}{p} E_{(4)} + \frac{3}{p} \tilde{H}^n (E_{(4)} - \frac{3}{p} H^n \tilde{H}^n)^{-1} H^n \frac{3}{p}\end{aligned}\quad (18.8)$$

を得る。

また、公式2により(18.7)式は

$$|\tilde{G}^{p-n} G^{p-n}| = \left(\frac{p}{3}\right)^4 |E_{(4)} - \frac{3}{p} H^n \tilde{H}^n| \quad (18.9)$$

となる。

### 18.1 1個故障の場合

これは、先述した諸式に於ける  $n$  の値が  $n=1$  の場合で、 $i$  番の観測器が故障したとすれば(18.1)式等における  $H^n$  は

$$H^1 = (l_i, m_i, n_i, \frac{1}{\sqrt{3}}) \equiv \tilde{h}_i \quad (18.10)$$

と表わされる。

そうすると、(18.8)式は

$$\begin{aligned}(\tilde{G}^{p-1} G^{p-1})^{-1} &= \frac{3}{p} E_{(4)} + \frac{3}{p} \tilde{h}_i (1 - \frac{3}{p} \cdot \frac{4}{3})^{-1} \tilde{h}_i \frac{3}{p} \\ &= \frac{3}{p} E_{(4)} + \frac{3}{p} \cdot \frac{3}{p-4} \cdot \tilde{h}_i \tilde{h}_i \\ &= \frac{3}{p} \{ E_{(4)} + \frac{3}{p-4} \tilde{h}_i \tilde{h}_i \}\end{aligned}\quad (18.11)$$

となる。

ここに、(18.10)式により

$$\tilde{h}_i \tilde{h}_i = \begin{pmatrix} l_i^2 & l_i m_i & l_i n_i & \frac{1}{\sqrt{3}} l_i \\ \cdot & m_i^2 & m_i n_i & \frac{1}{\sqrt{3}} m_i \\ \cdot & \cdot & n_i^2 & \frac{1}{\sqrt{3}} n_i \\ \cdot & \cdot & \cdot & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \quad (18.12)$$

である。

また、(18.9)式および(18.10)式より

$$|\tilde{G}^{p-1} G^{p-1}| = \left(\frac{p}{3}\right)^4 \left(1 - \frac{4}{p}\right) \quad (18.13)$$

を得る。

この式(18.13)の特徴は、観測器の番号  $i$  がとれてしまっていることである。つまり、観測器の番号  $i$  によらず一定ということである。

#### 1) 未知所求量 $w$

未知所求量  $w$  は(18.4)式に(18.11)式を代入して得られる。すなわち

$$w = \frac{3}{p} \{ E_{(4)} + \frac{3}{p-4} \tilde{h}_i \tilde{h}_i \} \tilde{G}^{p-1} \lambda \quad (18.14)$$

となる。

#### 2) 精度 $h$

精度  $h$  は(6.2)式により与えられている。 $p$  個の観測器のうち、観測器  $i$  を用いないときの精度を  $h(p)i$  と表わせば、(6.2)式に(18.5)式を代入して(但し、 $n=1$  とする)、

$$h(p)i = \varepsilon^{-2} |\tilde{G}^{p-1} G^{p-1}|^{\frac{1}{4}} \quad (18.15)$$

となり、更に(18.13)式により、

$$\begin{aligned}h(p)i &= \varepsilon^{-2} \left\{ \left(\frac{p}{3}\right)^4 \left(1 - \frac{4}{p}\right) \right\}^{\frac{1}{4}} \\ &= \varepsilon^{-2} \frac{p}{3} \left(\frac{p-4}{p}\right)^{\frac{1}{4}}\end{aligned}\quad (18.16)$$

を得る。

上式(18.16)より分ることは、この場合の精度  $h(p)i$  は観測器  $i$  によらない、ということである。

#### 3) 観測効率 $e$

観測効率  $e$  は既に(6.1)又は(6.4)式で与えられている。

特に、 $p$  個の観測軸より成る最適観測軸配置において、観測軸  $i$  が故障した場合の観測効率を  $e(p)i$  とすれば、(18.16)式を(6.4)式に代入して、

$$e(p)i = \frac{1}{3 \varepsilon^2} \left(\frac{p-4}{p}\right)^{\frac{1}{4}} \quad (18.17)$$

となる。

この式(18.17)は観測器の個数  $p$  が増大するにつれて、観測効率  $e(p)i$  も増大することを示している。つまり、観測軸の個数  $p$  が大きければ大きい程、1個故障の場合の観測効率は良くなっていくことを示している。また、観測効率  $e(p)i$  が、故障観測軸  $i$  によらないことは、精度  $h(p)$  の場合と同様である。

### 18.2 2個故障の場合

2個故障の場合とは、 $n=2$  の場合のことで、 $i$  番および  $j$  番の観測器が故障したとすれば、(18.1)式等における  $H^n$  は

$$H^2 = \begin{pmatrix} l_i & m_i & n_i & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ l_j & m_j & n_j & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \quad (18.18)$$

と表わされる。

従って、ベクトル  $(l_i, m_i, n_i)$  と  $(l_j, m_j, n_j)$  とのなす角を  $\theta_{ij}$  とすると、

$$H^2 \tilde{H}^2 = \begin{pmatrix} 1 + \frac{1}{3} & \cos \theta_{ij} + \frac{1}{3} \\ \cdot & 1 + \frac{1}{3} \end{pmatrix} \quad (18.19)$$

を得、(18.8)式の逆行列の部分は、上式(18.19)を考慮して、

$$E_{(2)} - \frac{3}{p} H^2 \tilde{H}^2 = \begin{pmatrix} 1 - \frac{4}{p} & -\frac{4}{p} - \frac{3}{p} \cos \theta_{ij} \\ \cdot & 1 - \frac{4}{p} \end{pmatrix} \quad (18.20)$$

となる。

ここに

$$\left. \begin{aligned} \alpha &\equiv \left(1 - \frac{4}{p}\right) \\ \beta &\equiv -\frac{4}{p} - \frac{3}{p} \cos \theta_{ij} \end{aligned} \right\} \quad (18.21)$$

とおくと、

$$(E_{(2)} - \frac{3}{p} H^2 \tilde{H}^2)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{\alpha}{\alpha^2 - \beta^2} & \frac{-\beta}{\alpha^2 - \beta^2} \\ \cdot & \frac{\alpha}{\alpha^2 - \beta^2} \end{pmatrix} \equiv M \quad (18.22)$$

となる。

従って(18.8)式および(18.22)式を考慮して

$$(\tilde{G}^{p-2} G^{p-2})^{-1} = \frac{3}{p} \{E_{(4)} + \frac{3}{p} \tilde{H}^2 M H^2\} \quad (18.23)$$

を得る。

また、(18.9)式および(18.20)式を考慮することにより、

$$\begin{aligned} |\tilde{G}^{p-2} G^{p-2}| &= \left(\frac{p}{3}\right)^4 \left\{ \left(\frac{p-4}{p}\right)^2 \right. \\ &\quad \left. - \left(\frac{1}{p} + \frac{3}{p} \cos \theta_{ij}\right)^2 \right\} \end{aligned} \quad (18.24)$$

を得る。

#### 1) 未知所求量 $w$

未知所求量  $w$  は、(18.4)式に(18.23)式を代入して、

$$w = \frac{3}{p} \{E_{(4)} + \frac{3}{p} \tilde{H}^2 M H^2\} \tilde{G}^{p-2} \lambda \quad (18.25)$$

となる。

#### 3) 精度

$p$  個の観測軸よりなる最適観測軸配置において  $i$  と  $j$

の観測軸のデータを用いない場合の精度を特に、 $h(p)_{ij}$  と表示する。そうすると(6.2)式に(18.5)式を代入して(但し  $n=2$  とする)、

$$h(p)_{ij} = \varepsilon^{-2} |\tilde{G}^{p-2} G^{p-2}|^{\frac{1}{4}} \quad (18.26)$$

となる。

従って、上式(18.26)に(18.24)式を代入して

$$h(p)_{ij} = \varepsilon^{-2} \frac{p}{3} \left\{ \left(1 - \frac{4}{p}\right)^2 - \left(\frac{3}{p}\right)^2 \left(\cos \theta_{ij} + \frac{1}{3}\right)^2 \right\}^{\frac{1}{4}} \quad (18.27)$$

と求まる。

#### 3) 観測効率

観測軸の個数が  $p$  の場合の最適観測軸配置において観測軸  $i$  および  $j$  が故障した場合の観測効率を  $e(p)_{ij}$  と表わせば(6.4)式および(18.27)式により

$$\begin{aligned} e(p)_{ij} &= \frac{h(p)_{ij}}{p \cdot \frac{1}{3}} \\ &= \frac{1}{3 \varepsilon^2} \left\{ \left(1 - \frac{4}{p}\right)^2 - \left(\frac{3}{p}\right)^2 \left(\cos \theta_{ij} + \frac{1}{3}\right)^2 \right\}^{\frac{1}{4}} \end{aligned} \quad (18.28)$$

となる。

この式(18.28)は、観測器の個数  $p$  が大きい程、観測効率  $e$  が良くなることを示している。この傾向は、1 個故障の場合と同じである。

故障を考慮した場合の主な結論は、次の通りである。

⑦ 故障を考慮すると、観測器の個数の多い方が、観測効率が良い。

## 19. 配置誤差の考慮

本章では、最適配置における観測軸の位置誤差すなわち配置誤差について考える。この誤差が未知所求量にどのように影響するのか、また、最適配置に変更を来さないかについて検討する。

### 19.1 配置誤差

通常の観測方程式は(4.2)式に示すように

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \cdot \\ \lambda_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l_1 & m_1 & n_1 & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ l_2 & m_2 & n_2 & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ l_p & m_p & n_p & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \cdot \\ \varepsilon_p \end{pmatrix} \quad (19.1)$$

と表わされる。ここに  $\varepsilon_i$  ( $i=1, 2, \dots, p$ ) は配置誤差を含まない観測誤差と考える。ただし、 $E(\varepsilon_i \varepsilon_j) = \varepsilon^2 \delta_{ij}$  とした((4.8)式参照のこと)。

観測機器の位置は、この場合、観測軸の方向を示す

$(l_i, m_i, n_i)$  ( $i=1, 2 \dots p$ )によって表わされている。  
 配置誤差を考慮するには、上式における $(l_i, m_i, n_i)$   
 を次のように変換して考えればよい。

$$\left. \begin{aligned} l_i &\rightarrow l_i + \sigma_{l_i} \\ m_i &\rightarrow m_i + \sigma_{m_i} \\ n_i &\rightarrow n_i + \sigma_{n_i} \end{aligned} \right\} \quad i=1, 2 \dots p \quad (19.2)$$

ここに $\sigma_{ki}$  ( $k=l, m, n; i=1, 2 \dots p$ )は、それぞれ、  
 観測軸の据え付け方向の偶発的誤差とし、期待値(平均  
 値)0の正規分布をとる確率変数と考える。ただし、そ  
 れらは互いに無相関で、誤差の程度は等しいものとする。  
 すなわち、

$$\left. \begin{aligned} E(\sigma_{ki} \cdot \sigma_{k'i'}) &= \sigma^2 \delta_{kk'} \delta_{ii'} \\ &= \begin{cases} \sigma^2 & (k=k' \text{ 且つ } i=i') \\ 0 & \text{その他} \end{cases} \\ k, k' &= l, m, n; i, i' = 1, 2 \dots p \end{aligned} \right\} \quad (19.3)$$

と仮定する。

また、同時に

$$E(\sigma_{ki} \cdot \varepsilon_j) = 0 \quad (k=l, m, n; i, j=1, 2, \dots p)$$

であると仮定する。

## 19.2 配置誤差を考慮した観測方程式

配置誤差を考慮した観測方程式は(19.1)式における  
 $(l_i, m_i, n_i)$   $i=1, 2 \dots p$ に(19.2)式に示す変換を行  
 ったものである。すなわち、

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l_1 + \sigma_{l_1} & m_1 + \sigma_{m_1} & n_1 + \sigma_{n_1} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ l_2 + \sigma_{l_2} & m_2 + \sigma_{m_2} & n_2 + \sigma_{n_2} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ l_p + \sigma_{l_p} & m_p + \sigma_{m_p} & n_p + \sigma_{n_p} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \vdots \\ \varepsilon_p \end{pmatrix} \quad (19.4)$$

である。上式を書き換えて誤差の部分に分ければ

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l_1 & m_1 & n_1 & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ l_2 & m_2 & n_2 & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ l_p & m_p & n_p & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \sigma_{l_1} x + \sigma_{m_1} y + \sigma_{n_1} z + \sigma_{n_1} d + \varepsilon_1 \\ \sigma_{l_2} x + \sigma_{m_2} y + \sigma_{n_2} z + \sigma_{n_2} d + \varepsilon_2 \\ \vdots \\ \sigma_{l_p} x + \sigma_{m_p} y + \sigma_{n_p} z + \sigma_{n_p} d + \varepsilon_p \end{pmatrix}$$

$$+ \begin{pmatrix} x\sigma_{l_1} + y\sigma_{m_1} + z\sigma_{n_1} + \varepsilon_1 \\ x\sigma_{l_2} + y\sigma_{m_2} + z\sigma_{n_2} + \varepsilon_2 \\ \vdots \\ x\sigma_{l_p} + y\sigma_{m_p} + z\sigma_{n_p} + \varepsilon_p \end{pmatrix} \quad (19.5)$$

となる。

ここで、上式の誤差の部分をもとめて次の様に表示す  
 る。

$$\varepsilon'_i \equiv x\sigma_{l_i} + y\sigma_{m_i} + z\sigma_{n_i} + \varepsilon_i \quad (i=1, 2 \dots p) \quad (19.6)$$

そうすると(19.5)式は、

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l_1 & m_1 & n_1 & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ l_2 & m_2 & n_2 & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ l_p & m_p & n_p & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \varepsilon'_1 \\ \varepsilon'_2 \\ \vdots \\ \varepsilon'_p \end{pmatrix} \quad (19.7)$$

と表わされる。ここに誤差 $\varepsilon'_i$ は定義式(19.6)および  
 (19.3)式より次の性質を持つことが分る。

$$\begin{aligned} E(\varepsilon'_i \varepsilon'_j) &= (x^2 \sigma^2 + y^2 \sigma^2 + z^2 \sigma^2 + \varepsilon^2) \delta_{ij} \\ &= \{(x^2 + y^2 + z^2) \sigma^2 + \varepsilon^2\} \delta_{ij} \\ &= (v^2 \sigma^2 + \varepsilon^2) \delta_{ij} \end{aligned} \quad (19.8)$$

ここで、 $x^2 + y^2 + z^2 = v^2$ とした。 (19.9)

さて、

$$(\varepsilon')^2 \equiv v^2 \sigma^2 + \varepsilon^2 \quad (19.10)$$

とおけば、(19.8)式は

$$E(\varepsilon'_i \varepsilon'_j) = \varepsilon'^2 \delta_{ij} \quad (i, j=1, 2 \dots p) \quad (19.11)$$

と書ける。

ここで、 $\varepsilon'$ は観測器の配置とは無関係なので、つまり、  
 (6.5)式の分母とは無関係なので、配置誤差を考慮し  
 ても( $\varepsilon$ を $\varepsilon'$ におきかえても)、今までの、観測軸配置に  
 関する結論に何ら影響を与えない。すなわち、

⑧ 配置誤差を考慮しても、今までの結論に何の変更  
 も要しない。

## IV. 結 論

### 20. まとめ

本報告で述べられている主な事柄を箇条書きにまとめ  
 ると、次の様になる。

本報告で考察した観測系について、諸仮定の下に、

① 空間内において、観測系を任意に回転させても観

測系の良さは変らない。

② 同じく、鏡映変換しても、良さは変らない。

③ 円錐軸を同じくする多重矢円錐について、

1. 矢（観測軸）の総数が互いに等しい
2. 円錐軸上の重心の位置が互いに等しい
3. 円錐軸まわりの慣性モーメントが互いに等しい

ならば、これらの多重矢円錐は、観測系の評価の上では、互いに等価な部分観測系である。

③-1 矢円錐は、その円錐軸のまわりに任意に回転させても、観測系の良さに変化を与えない。

③-2  $p_1$ 個の矢よりなる矢円錐と、それと同形の、 $p_2$ 個の矢よりなる矢円錐を、円錐軸をそろえて重ねたものは、 $p_1 + p_2$ 個の矢より成る、それと同形の等間隔矢円錐と等価である。

④ 観測系が最適であるための必要十分条件は

1. 重心が原点にあること
2. 原点を通る任意の軸についての慣性モーメントが一定（この値は、本報告でいう球殻慣性モーメントに等しい）であること

である。

④-1 最適観測系同志の和も、やはり最適観測系である。

④-2 ひとつの多重矢円錐が最適観測系であるためには

1. 重心が原点にあること
2. 円錐軸まわりの慣性モーメントが、本報告でいう、球殻慣性モーメントに等しいこと

が必要十分条件である。

④-3 2極多重円錐解に基本解は存在しない。

④-4  $n$ 極多重円錐解は次の通りである。各多重矢円錐について、円錐軸まわりの慣性モーメントと、球殻慣性モーメントとの差が互いに等しいとする。このとき

1. 各多重矢円錐の円錐軸上の質量モーメントが互いに等しいならば、本報告でいう最適観測軸（ $p = n$ の場合の）方向に、各多重矢円錐を配置すれば、最適観測系である。
2. 上記質量モーメントが零（重心が原点にあるということ）であるならば、文献2)でいう、同じく最適観測軸方向に、配置すれば、最適観測系である。

④-5  $n$ 個の各多重矢円錐について、円錐軸まわりの慣性モーメントが、球殻慣性モーメントに一致するとき、円錐軸上の質量モーメントが互いに等しいならば、方向ベクトルの組の重心が原点にある場合の各ベクトル

ル方向に、上記多重矢円錐を配置すれば、最適解である。

⑤ 最適観測系においては、3次元ベクトル量を最適に求め得ると同時に、バイアスエラーをも極めて有効に除去し得る。

⑥ 最適観測系の本報告でいう精度は、観測器の個数に比例する。

⑦ 最適観測系の観測効率<sup>3)</sup>は、故障のない場合は、観測器の個数によらず同一であるが、故障を考慮すると、観測器の個数の多い方が、観測効率が良い。

⑧ 観測器の据え付け位置誤差を考慮しても、先の最適観測系がやはり最適である。

以上が、本報告で判明した重要な結果である。

## 21. あとがき

これまでに述べた諸事項を概括すると、以下の如くなる。

1) 数学的には、行列式の持つ意味の一側面を明らかにし、その重要性を示した。

2) 物理的には、観測系の諸測系の諸性質を、剛体力学における諸概念と結びつけて明らかにした。このことは観測系のイメージを分りやすくし、また、観測系の力学的設計に有利と思われる。

3) 工学的には、バイアスエラーが存在する場合の最適観測系の見出し方を明らかにした。

4) 産業的には、故障や配置誤差に対して強い最適観測系を具体的に示した。

以上の事柄によって、行列式評価基準の有効性、有用性が一層明らかとなった。行列式評価基準の合理性については、既に理論的に明らかにされ<sup>3), 1)</sup>ており、またそれが、実際の系への応用についても、有効であることが示され<sup>2)</sup>、そして、本報告のように、バイアスエラーを考慮した場合にも、有効であることが明らかにされた。つまり、行列式評価基準は、観測系の理論的解明に極めて有効であり、実際上も、極めて有用な結論をもたらす。

本研究に際し、多くの方々より御教示、御鞭撻、助言等を頂いた。それらがなかったならば、本研究は、推進されなかったであろう。ここに、厚く感謝の意を表する。

## 参 考 文 献

- 1) Arther J. Pejsa ; Optimum Orientation and Accuracy of Redundant Sensor Arrays AIAA Paper NO.71-59
- 2) 木村武雄；3次元ベクトル量計測における最適観測軸配置について，航空宇宙技術研究所資料TM-367（1978）
- 3) 木村武雄；観測系の評価に関するひとつの数学的理論，航空宇宙技術研究所報告TR-301（1972）
- 4) 木村武雄；最良の観測系について，日本統計学会誌，2巻1号（1971）
- 5) 木村武雄；最適な測定系について，第12回SICE NO.3509（昭和48年）

## 付録A 矢円錐の具体例について

本文 8.1 において、矢円錐を規定する次の 3 条件が挙げられている。

$$(1) \quad l_i^2 + m_i^2 + c^2 = 1 \quad (i = 1, 2, \dots, p) \quad (\text{A-1})$$

$$(2) \quad \mathbf{l}\mathbf{m} = \mathbf{m}\mathbf{l} = \mathbf{l}\mathbf{l} = 0 \quad (\text{A-2})$$

$$(3) \quad \mathbf{l}^2 = \mathbf{m}^2 (= \frac{p}{2}(1 - c^2)) \quad (\text{A-3})$$

ここでは、上記 3 条件を満たす具体解を求める。

条件(1)より

$$\left. \begin{aligned} l_i &= b \sin \theta_i \\ m_i &= b \cos \theta_i \\ \text{但し } b^2 &= 1 - c^2 \end{aligned} \right\} \quad (\text{A-4})$$

とにおいて一般性は失われない。

そうすると条件(2)は

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{l}\mathbf{m} &= \sum_{i=1}^p l_i m_i = b^2 \sum_{i=1}^p \sin \theta_i \cos \theta_i \\ &= \frac{b^2}{2} \sum_{i=1}^p \sin 2\theta_i = 0 \\ \mathbf{m}\mathbf{l} &= \sum_{i=1}^p m_i l_i = b \sum_{i=1}^p \cos \theta_i = 0 \\ \mathbf{l}\mathbf{l} &= \sum_{i=1}^p l_i^2 = b \sum_{i=1}^p \sin \theta_i = 0 \end{aligned} \right\} \quad (\text{A-5})$$

となり、条件(3)は

$$\begin{aligned} \mathbf{l}^2 - \mathbf{m}^2 &= b^2 \sum_{i=1}^p (\sin^2 \theta_i - \cos^2 \theta_i) \\ &= -b^2 \sum_{i=1}^p \cos 2\theta_i = 0 \end{aligned} \quad (\text{A-6})$$

となる。

従って、まとめると、

$$\left. \begin{aligned} \sum_{i=1}^p \sin \theta_i &= 0 \\ \sum_{i=1}^p \cos \theta_i &= 0 \\ \sum_{i=1}^p \sin 2\theta_i &= 0 \\ \sum_{i=1}^p \cos 2\theta_i &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (\text{A-7})$$

$$\text{又は } b = 0 \quad (\text{A-8})$$

を満たす  $\theta_i$  ( $i = 1, 2, \dots, p$ ) を見い出せば、この問題は解けたことになる。

(A-8) 式は簡単である。

任意の  $p$  について

$$l_i = 0, m_i = 0, c = 1 \quad (i = 1, 2, \dots, p) \quad (\text{A-9})$$

という解を得る。これを  $\alpha = 0$  型の矢円錐と称すことにし、図-4(a), (b)および(c) (但し  $\alpha = 0$  とした場合) に

その形を示す。

処が、(A-7) 式の方は、これを、 $\theta_i$  ( $i = 1, 2, \dots, p$ ) について一般的に解くことは極めて難しい。しかし、この式(A-7)をよく観察すると、文献2)の付録Dを参照にして、

$$\theta_i = \frac{2\pi}{p}(i-1) \quad (i = 1, 2, \dots, p \geq 3) \quad (\text{A-10})$$

であれば、(A-7) 式の解として十分であることが分る。つまり

$$\left. \begin{aligned} (\mathbf{l}, \mathbf{m}, \mathbf{c}) &= \begin{pmatrix} b \sin \theta_1 & b \cos \theta_1 & c \\ b \sin \theta_2 & b \cos \theta_2 & c \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ b \sin \theta_p & b \cos \theta_p & c \end{pmatrix} \\ \text{但し } b^2 &= 1 - c^2 \\ \theta_i &= \frac{2\pi}{p}(i-1) \\ p &\geq 3 \end{aligned} \right\} \quad (\text{A-11})$$

である。これは、図-4における  $\alpha \neq 0$  型の矢円錐である。この形は、等間隔矢円錐と呼ぶべき形であるが、本報告では、単に矢円錐といえは原則として、等間隔矢円錐を意味するものとする。

また、 $p = 1$  および  $2$  の場合は、(A-7) 式の解は存在せず、従って、 $\alpha = 0$  型の解のみであることに注意する。つまり、その場合は必ず  $|\mathbf{c}| = 1$  でなければならないということに注意する。



## 付録B 1 極多重円錐解の具体例について

1 極多重円錐解の条件式については、本文(14.5)式で、次の様に与えられている。

$$\left. \begin{aligned} \sum_{i=1}^q p_i \left( \frac{1}{3} - ({}^iC)^2 \right) &= 0 \\ \sum_{i=1}^q p_i {}^iC &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (\text{B-1})$$

但し  $p_i = 1, 2$  の場合は必ず  $|{}^iC| = 1$  でなければならない。

ここに、 $q$  は、矢円錐の数を示す。ここでは、 $q = 2$  と、 $q = 3$  の場合について解く。

## 1) 1 極 2 重円錐解

(B-1) 式において  $q = 2$  とした場合である。つまり

$$\begin{aligned} p_1 \left( \frac{1}{3} - ({}^1C)^2 \right) + p_2 \left( \frac{1}{3} - ({}^2C)^2 \right) &= 0 \\ p_1 {}^1C + p_2 {}^2C &= 0 \end{aligned} \quad (\text{B-2})$$

である。

上式(B-2)を ${}^1C, {}^2C$ について解くと

$$\left. \begin{aligned} {}^1C &= \pm \sqrt{\frac{p_2}{3p_1}} \\ {}^2C &= \mp \sqrt{\frac{p_1}{3p_2}} \end{aligned} \right\} \quad (\text{B-3})$$

となる。

○  $p_1 = 1 ({}^1C = 1)$ ,  $p_2 = 3$  のときは  ${}^2C = -\frac{1}{3}$  となって

図-9に示すが、これはテトラポッドといわれている形である。

○  $p_1 = p_2$  のときは

$${}^1C = -{}^2C = \sqrt{\frac{1}{3}}$$

となって、図-10にその一般形を示す。特に  $p_1 = p_2 = 3$  とした場合が図-11である。

○  $p_1 = 4$ ,  $p_2 = 3$  のときは

$$\begin{aligned} {}^1C &= \pm \sqrt{\frac{p_2}{3p_1}} = \pm \frac{1}{2} \\ {}^2C &= \mp \sqrt{\frac{p_1}{3p_2}} = \mp \frac{2}{3} \end{aligned}$$

となって図-12に示すものである。

○  $p_1 = 3$ ,  $p_2 = 5$  のときは図-13に示す。

## 2) 1 極 3 重円錐解

1 極解における矢円錐の数  $q$  を 3 としたもので、条件式(B-1)は次の様になる。

$$\begin{aligned} p_1 \left( \frac{1}{3} - ({}^1C)^2 \right) + p_2 \left( \frac{1}{3} - ({}^2C)^2 \right) + p_3 \left( \frac{1}{3} - ({}^3C)^2 \right) &= 0 \\ p_1 {}^1C + p_2 {}^2C + p_3 {}^3C &= 0 \end{aligned} \quad (\text{B-4})$$

上式を ${}^1C, {}^2C$ について解くと

$$\begin{aligned} {}^1C &= \frac{1}{p_1 + p_2} \left[ -p_3 {}^3C \right. \\ {}^2C &= \frac{1}{p_1 + p_2} \left[ -p_3 {}^3C \right. \\ &\quad \left. \pm \sqrt{\frac{p_2}{p_1} (p_1 + p_2 + p_3) \left\{ \frac{1}{3} (p_1 + p_2) - p_3 {}^3C^2 \right\}} \right] \\ &\quad \left. \mp \sqrt{\frac{p_1}{p_2} (p_1 + p_2 + p_3) \left\{ \frac{1}{3} (p_1 + p_2) - p_3 {}^3C^2 \right\}} \right] \end{aligned} \quad (\text{B-5})$$

${}^3C$  : 任意 (但し  $|{}^3C| \leq 1$  である。)

となる。

○  $p_1 = p_2 = 3$ ,  $p_3 = 1$  ( $\rightarrow {}^3C = 1$ ) のときは図-14に示す。

○  $p_1 = p_2 = 3$ ,  $p_3 = 2$  ( $\rightarrow {}^3C = 1$ ) のときは図-15に示す。

○  $p_1 = p_2 = p_3 = 3$ ,  ${}^3C = 0$  のときは図-16に示す。

同じく  ${}^3C = 0.2$  の場合は図-17に示す。

○  $p_1 = 3$ ,  $p_2 = 3$ ,  $p_3 = 4$ ,  ${}^3C = 0$  の場合は図-18に示す。また  $p_1 = 3$ ,  $p_2 = 4$ ,  $p_3 = 3$ ,  ${}^3C = 0$  の場合は図-19に示す。

付録C  $n (\geq 3)$  極多重円錐解の具体例について

$n$  極多重円錐解については、本文の (16.13) 式～(16.18) 式で与えられている。(16.23) 式を参照するならば、上式 (16.13) ～ (16.18) は次の様になる。

$$\text{解 1} \left\{ \begin{array}{l} \sum_{i=1}^{q_j} {}^j p_i \left( \frac{1}{3} - ({}^j C)^2 \right) = \text{const} (j=1, 2, \dots, n) \\ \sum_{i=1}^{q_j} {}^j p_i {}^j C = \text{const} (j=1, 2, \dots, n) \end{array} \right\} \quad (\text{C-1})$$

各円錐軸の方向 ( $l^0, m^0, n^0$ ) は

本報告でいう最適観測軸方向 ( $n \geq 4$ )

$$\text{解 2} \left\{ \begin{array}{l} \sum_{i=1}^{q_j} {}^j p_i \left( \frac{1}{3} - ({}^j C)^2 \right) = \text{const} (j=1, 2, \dots, n) \\ \sum_{i=1}^{q_j} {}^j p_i {}^j C = 0 \quad (j=1, 2, \dots, n) \end{array} \right\} \quad (\text{C-2})$$

各円錐軸の方向 ( $l^0, m^0, n^0$ ) は

文献2)でいう最適観測軸方向 ( $n \geq 3$ )

$$\text{解 3} \left\{ \begin{array}{l} \sum_{i=1}^{q_j} {}^j p_i \left( \frac{1}{3} - ({}^j C)^2 \right) = 0 \quad (j=1, 2, \dots, n) \\ \sum_{i=1}^{q_j} {}^j p_i {}^j C = \text{const} (j=1, 2, \dots, n) \end{array} \right\} \quad (\text{C-3})$$

各円錐軸の方向 ( $l^0, m^0, n^0$ ) は、方向ベクトルの組の重心が原点にある場合の各ベクトル方向。

以上の条件を満たす ( ${}^j p_i, {}^j C$ ) ( $i=1, 2, \dots, q_j, j=1, 2, \dots, n$ ) を見い出せば、解を得たことになる。

尚、互いに等価な多重円錐 ((8.38) 式) は (C-1) を満たすことに注意する (逆は成り立たない。また、(8.38) 式は (C-2), (C-3) を満たさない)。

## C.1 3 極解

解 1, 解 2, 解 3 において  $n=3$  とした場合が 3 極解であるが、このうち、解 1 については、円錐軸の方向に関する条件において、 $n \geq 4$  でないと解は存在せず、従って、3 極解は、解 2, 解 3 の 2 種類となる。このうち、解 2 については、 $n=3$  の場合、円錐軸の方向は、直交 3 軸となる<sup>2)</sup>ので、直交型 3 極解と称し、解 3 については、直交 3 軸とならないので、非直交型 3 極解と称することにする。

## 1) 直交型 3 極解

直交型 3 極解とは (C-2) 式における  $n$  が  $n=3$  の場合で、これを 3 極 ( $q_1, q_2, q_3$ ) 重円錐解と表すことにする。極の方向は直交 3 軸である。

## ④ 3 極 (1, 1, 1) 円錐解

これは  $q_1 = q_2 = q_3 = 1$  の場合で、条件式 (C-2) は次の様になる。

$$\left. \begin{array}{l} {}^1 p \left( \frac{1}{3} - ({}^1 C)^2 \right) = {}^2 p \left( \frac{1}{3} - ({}^2 C)^2 \right) \\ \quad \quad \quad = {}^3 p \left( \frac{1}{3} - ({}^3 C)^2 \right) \\ \left\{ \begin{array}{l} {}^1 p {}^1 C = 0 \\ {}^2 p {}^2 C = 0 \\ {}^3 p {}^3 C = 0 \end{array} \right. \end{array} \right\} \quad (\text{C-4})$$

従って

$$\left. \begin{array}{l} {}^1 C = {}^2 C = {}^3 C = 0 \\ {}^1 p = {}^2 p = {}^3 p \end{array} \right\} \quad (\text{C-5})$$

この一般形は図-20 に示す。

## ⑤ 3 極 (2, 2, 2) 重円錐解

これは  $q_1 = q_2 = q_3 = 2$  の場合で、条件式 (C-2) は次の様になる。

$$\left. \begin{array}{l} {}^1 p_1 \left( \frac{1}{3} - {}^{11} C^2 \right) + {}^1 p_2 \left( \frac{1}{3} - {}^{12} C^2 \right) \\ \quad = {}^2 p_1 \left( \frac{1}{3} - {}^{21} C^2 \right) + {}^2 p_2 \left( \frac{1}{3} - {}^{22} C^2 \right) \\ \quad = {}^3 p_1 \left( \frac{1}{3} - {}^{31} C^2 \right) + {}^3 p_2 \left( \frac{1}{3} - {}^{32} C^2 \right) \\ {}^1 p_1 {}^{11} C + {}^1 p_2 {}^{12} C = 0 \\ {}^2 p_1 {}^{21} C + {}^2 p_2 {}^{22} C = 0 \\ {}^3 p_1 {}^{31} C + {}^3 p_2 {}^{32} C = 0 \end{array} \right\} \quad (\text{C-6})$$

○特に、 ${}^1 p_1 = 3, {}^1 p_2 = 4$

$${}^2 p_1 = 4, {}^2 p_2 = 5$$

$${}^3 p_1 = 3, {}^3 p_2 = 5$$

$${}^{11} C = \frac{5}{6}$$

の場合は図-21 に示す。

## 2) 非直交型 3 極解

いままでの 3 極解は、解 2 (C-2) に基づくもので、その極の方向は、直交 3 軸であった。ここでは、解 3 (C-3) に基づく解を明らかにする。

## ④ 3 極 (1, 1, 1) 円錐解

これは (C-3) 式において、 $n=3, q_1=q_2=q_3=1$  としたものである。

従って、同式 (C-3) は

$$\left. \begin{array}{l} {}^j p \left( \frac{1}{3} - ({}^j C)^2 \right) = 0 \quad (j=1, 2, 3) \\ {}^j p \cdot {}^j C = \text{const} (j=1, 2, 3) \end{array} \right\} \quad (\text{C-7})$$

となり、従って

$$\left. \begin{array}{l} {}^j C = \sqrt{\frac{1}{3}} \quad (j=1, 2, 3) \\ {}^j p = \text{const} (j=1, 2, 3) \end{array} \right\} \quad (\text{C-8})$$

を得る。

この解の一般形は、図-22 に示す。

## C.2 $n (\geq 4)$ 極解

解1, 解2, 解3の型のいずれも可能である。このうち, 解1の型の, 4極解の簡略化した図を, 図-23に示す。その他の解については, その解を得ることは難かしくないので省略する。

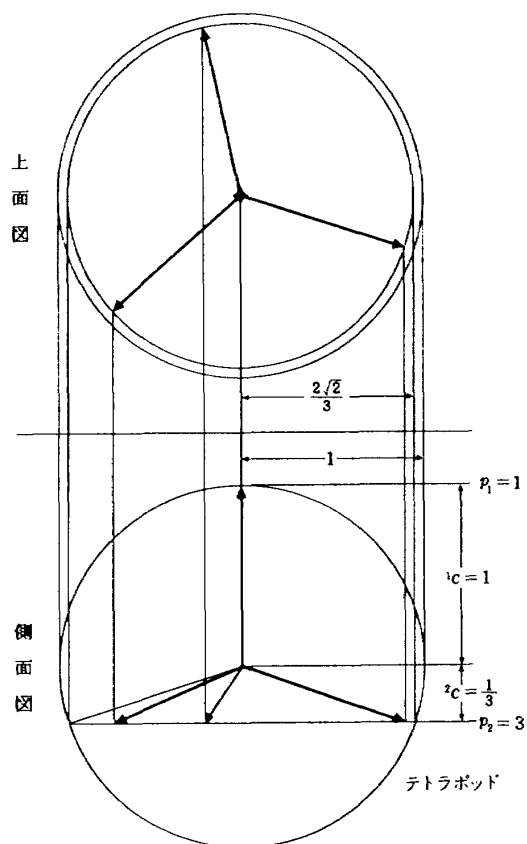


図-9 1極2重円錐解,  $p=4$   
( $p_1=1, p_2=3$ の場合)

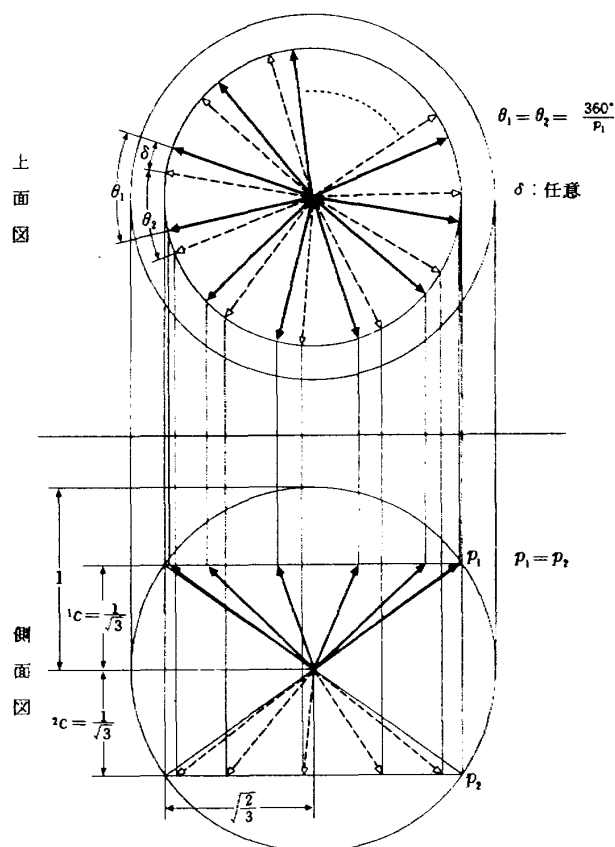


図-10 1極2重円錐解,  $p=p_1+p_2$   
( $p_1=p_2$ のときの一般形)

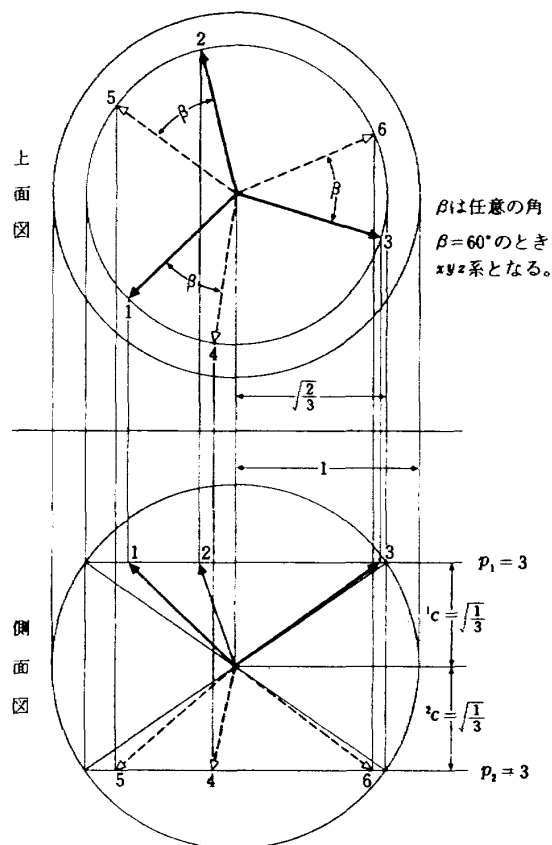


図-11 1極2重円錐解,  $p=6$   
( $p_1=p_2=3$ の場合)

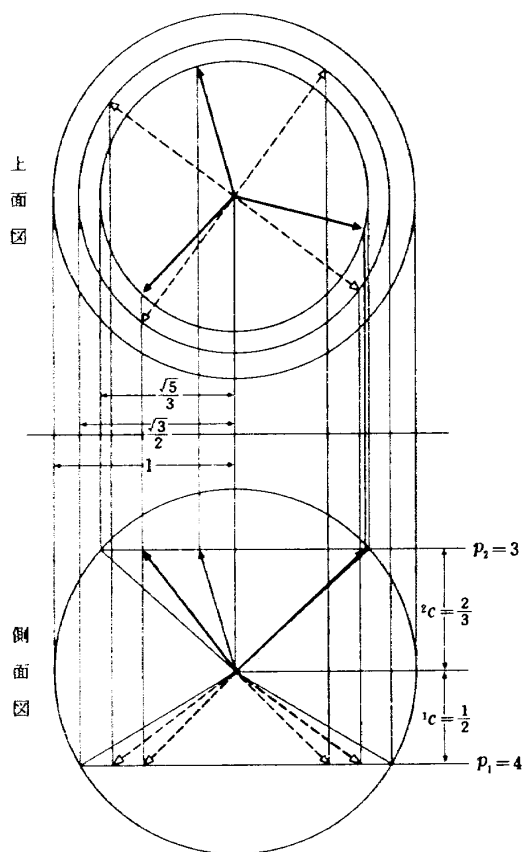


図-12 1極2重円錐解,  $p=7$   
( $p_2=3, p_1=4$ の場合)

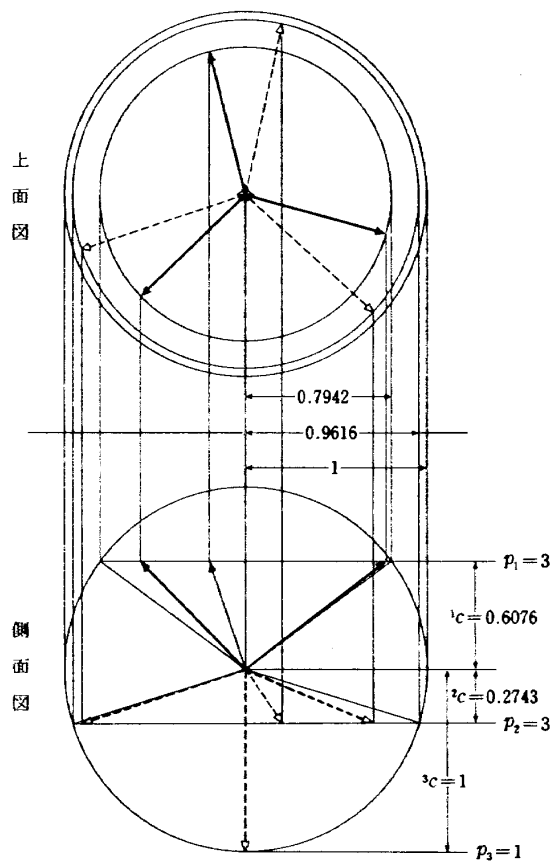


図-14 1極3重円錐解,  $p=7$   
( $p_1=3, p_2=3, p_3=1$ の場合)

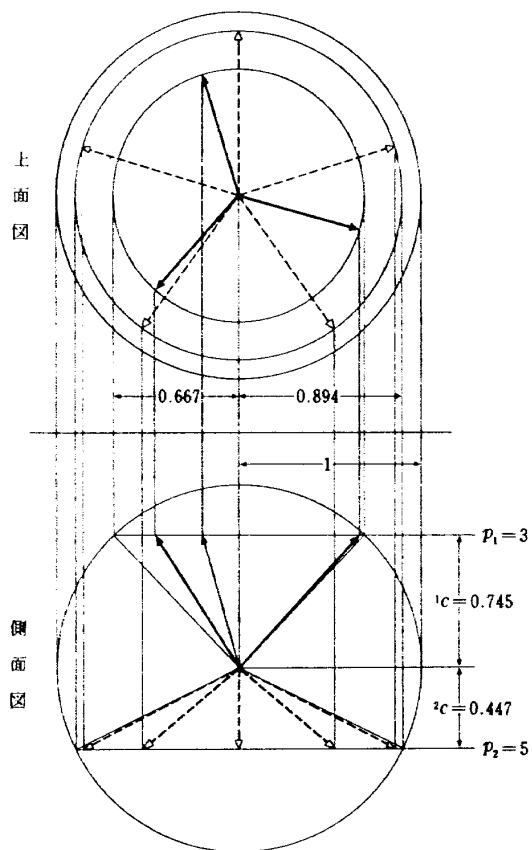


図-13 1極2重円錐解,  $p=8$   
( $p_1=3, p_2=5$ の場合)

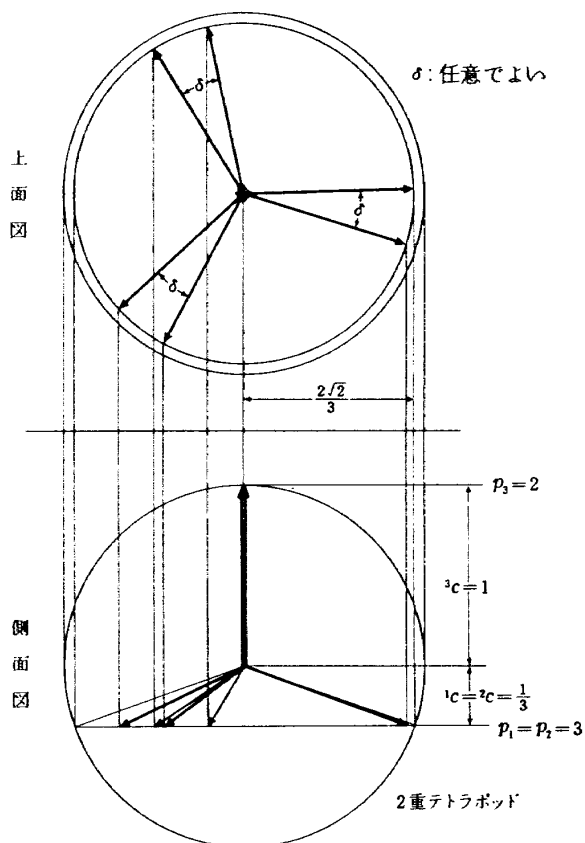


図-15 1極3重円錐解,  $p=8$   
( $p_1=3, p_2=3, p_3=2$ の場合)

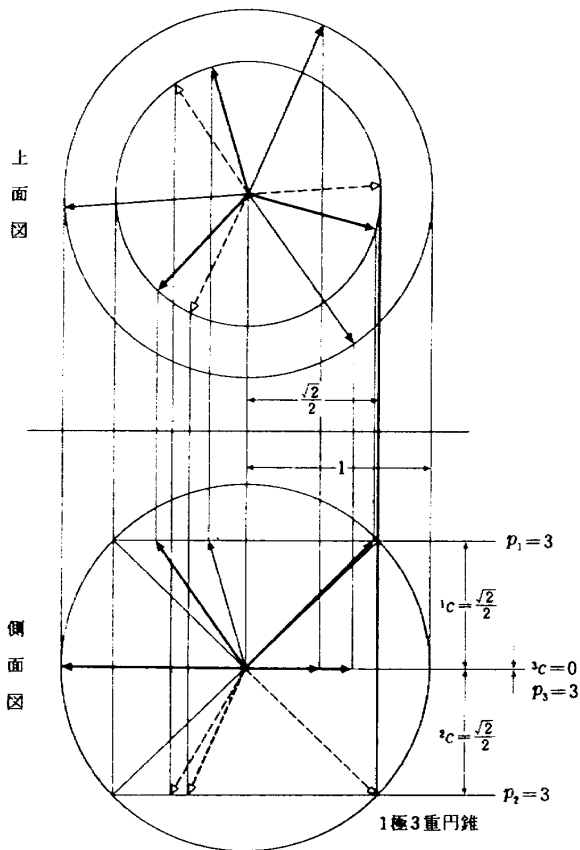


図-16 1極3重円錐解,  $p=9$   
( $p_1=p_2=p_3=3$ ,  ${}^3c=0$ の場合)

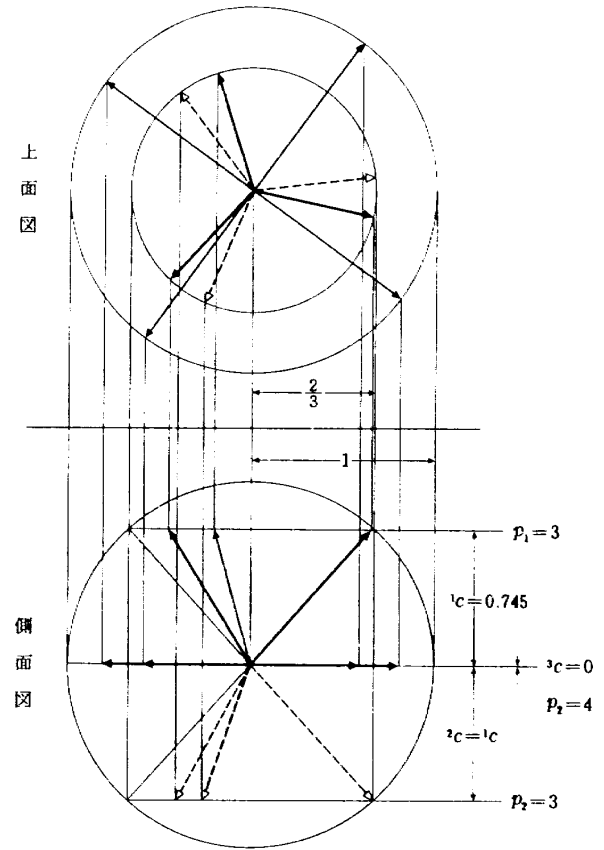


図-18 1極3重円錐解,  $p=10$   
( $p_1=3$ ,  $p_2=3$ ,  $p_3=4$ ,  ${}^3c=0$ の場合)

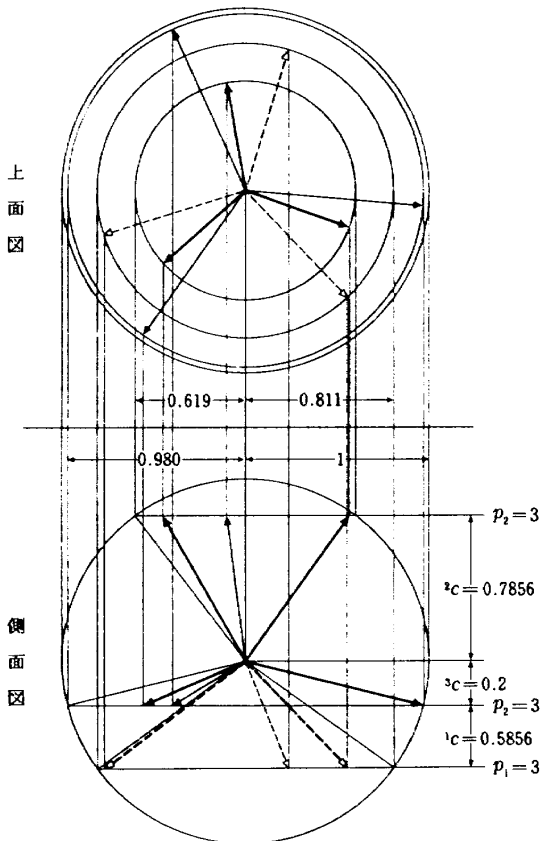


図-17 1極3重円錐解,  $p=9$   
( $p_1=p_2=p_3=3$ ,  ${}^3c=0.2$ の場合)

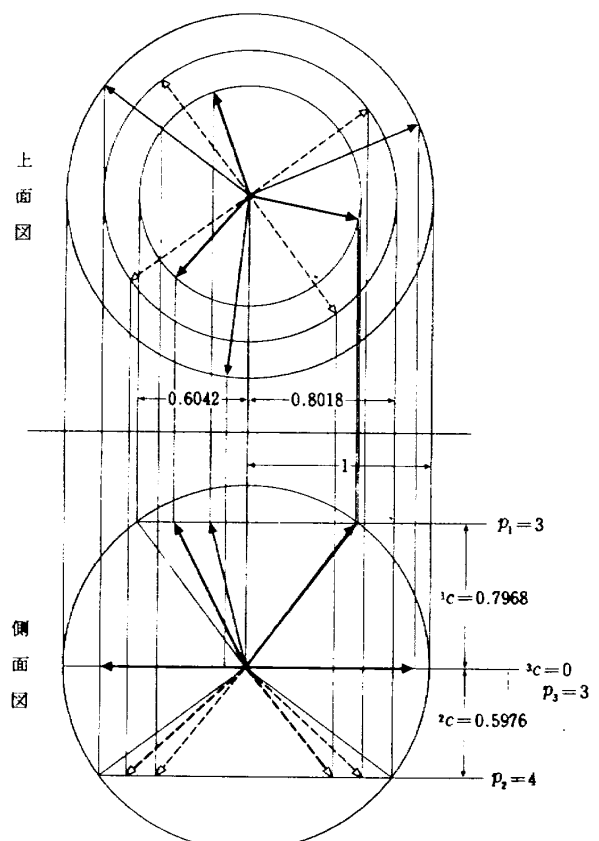


図-19 1極3重円錐解,  $p=10$   
( $p_1=3$ ,  $p_2=4$ ,  $p_3=3$ ,  ${}^3c=0$ の場合)

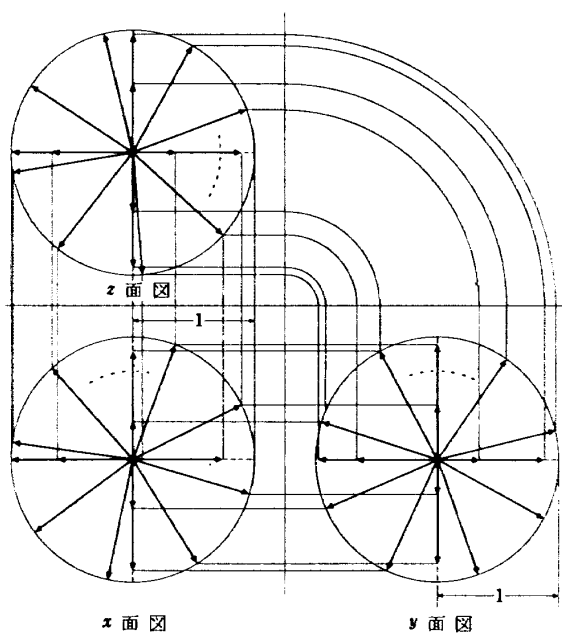


図-20 3極(1, 1, 1)円錐解の1例  
( ${}^1c={}^2c={}^3c=0$  のときの一般形)

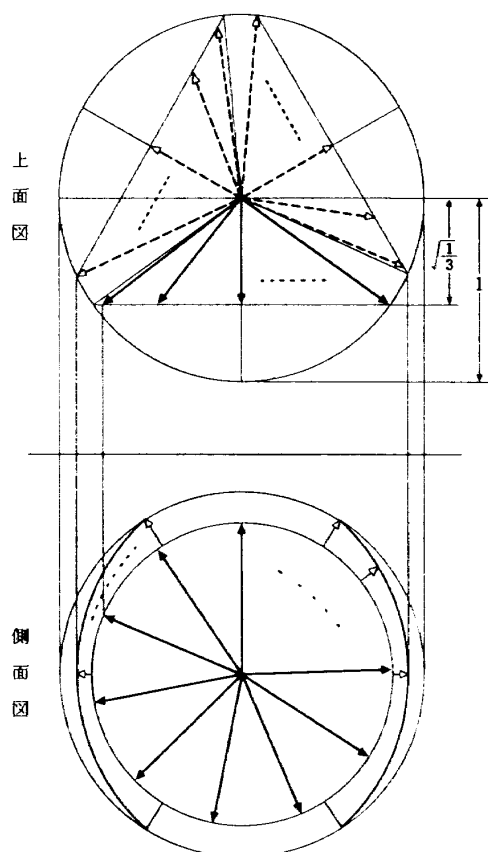
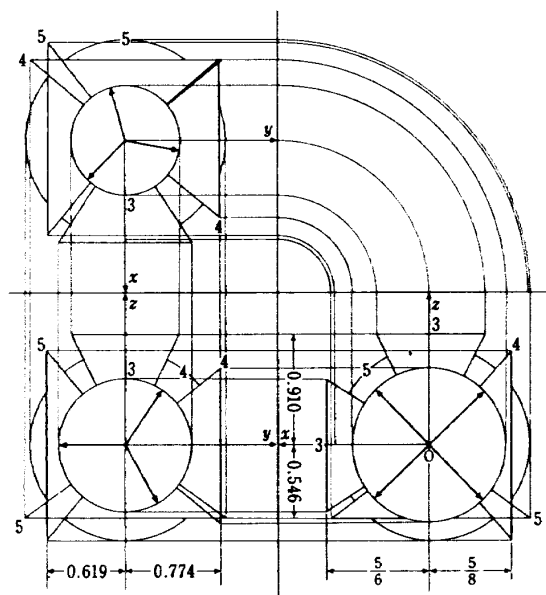


図-22 非直交型3極(1, 1, 1)円錐解



図中の3, 4, 5の数字は、その矢円錐にその個数の矢が載っていることを示す。

図-21 3極(2, 2, 2)重円錐解,

$$p=24 \begin{cases} {}^1p_1=3, {}^1p_2=4 \\ {}^2p_1=4, {}^2p_2=5 \\ {}^3p_1=3, {}^3p_2=5 \end{cases}$$

( ${}^{11}c=\frac{5}{6}$ , の場合)

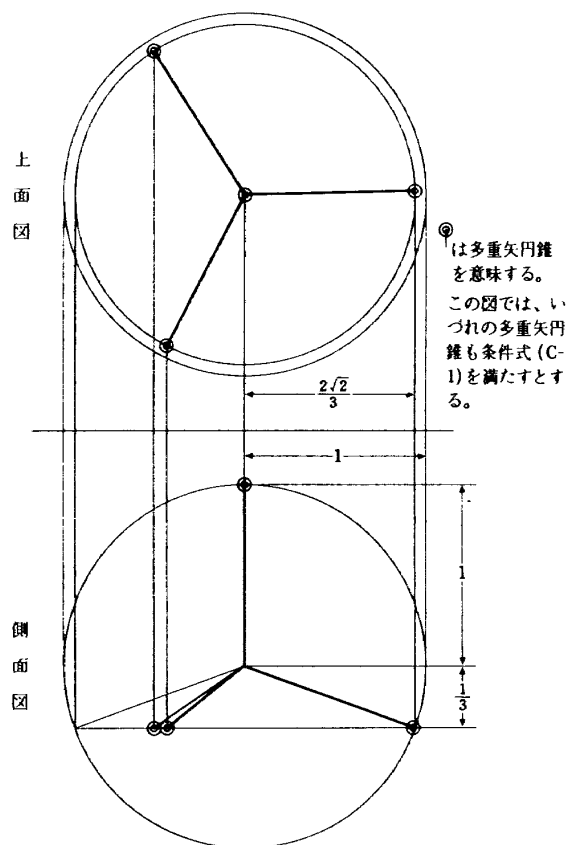


図-23 4極多重円錐解

## 付録D 剛体力学における諸概念

剛体を次の様な質点の集りとする。

$$\left. \begin{array}{ll} \text{質量} & m_i \\ \text{位置} & x_i, y_i, z_i \end{array} \right\} i=1, 2, \dots, n$$

このとき、

z軸まわりの慣性モーメント  $I_z$

$$I_z \equiv \sum_{i=1}^n m_i (x_i^2 + y_i^2) \quad (\text{D-1})$$

z軸上の質量モーメント  $L_z$  (本報告での定義)

$$L_z \equiv \sum_{i=1}^n m_i z_i \quad (\text{D-2})$$

総質量  $M$

$$M \equiv \sum_{i=1}^n m_i \quad (\text{D-3})$$

z軸上の重心  $G_z$

$$G_z \equiv \frac{L_z}{M} \quad (\text{D-4})$$

と定義する。

## D.1 回転軸の平行移動と慣性モーメント

重心を通る直線のまわりの慣性モーメントを  $I_G$  とし、その直線と平行で距離  $h$  だけ離れた直線のまわりの慣性モーメントを  $I$  とするとき

$$I = I_G + Mh^2 \quad (\text{D-5})$$

という関係がある。ただし、 $M$  とは、この物体の総質量である。

## D.2 薄い球殻の慣性モーメント

中味のない球殻の中心を原点として、 $x, y, z$  軸をとる。球殻の半径は  $a$  とする。

このとき

$$I_x = \int (y^2 + z^2) dm \quad (\text{D-6})$$

$$I_y = \int (z^2 + x^2) dm \quad (\text{D-7})$$

$$I_z = \int (x^2 + y^2) dm \quad (\text{D-8})$$

となるが、 $I_x, I_y, I_z$  はどれも直径のまわりの慣性モーメントであるから等しい値を持つ。これを  $I$  とすれば、上の3式を加え合わせて

$$\begin{aligned} 3I &= 2 \int (x^2 + y^2 + z^2) dm \\ &= 2a^2 \int dm = 2a^2 \cdot M \end{aligned} \quad (\text{D-9})$$

従って

$$I = M \frac{2}{3} a^2 \quad (\text{D-10})$$

となる。

## D.3 慣性乗積

$x, y, z$  軸についての慣性乗積を  $J_x, J_y, J_z$  と表わすと

$$J_x \equiv \sum_{i=1}^n m_i y_i z_i \quad (\text{D-11})$$

$$J_y \equiv \sum_{i=1}^n m_i z_i x_i \quad (\text{D-12})$$

$$J_z \equiv \sum m_i x_i y_i \quad (\text{D-13})$$

と定義される。

## D.4 慣性隋円体

剛体内の点  $O$  を原点とし、 $x, y, z$  軸をとる。これらの軸のまわりの慣性モーメントをそれぞれ、 $I_x, I_y, I_z$  とし、また、それぞれの慣性乗積を  $J_x, J_y, J_z$  とする。このとき、 $O$  を通る任意の直線 (方向余弦は  $(\lambda, \mu, \nu)$  とする) のまわりの慣性モーメントは、次の様に表わされる。

$$\begin{aligned} I &= I_x \lambda^2 + I_y \mu^2 + I_z \nu^2 - 2J_x \mu \nu - 2J_y \nu \lambda \\ &\quad - 2J_z \lambda \mu \end{aligned} \quad (\text{D-14})$$

公式1 正則行列  $A (p \times p), B (q \times q)$ , 行列

$$\begin{aligned} U (p \times q), V (q \times p) \text{ に対して} \\ (A + UBV)^{-1} \\ = A^{-1} - A^{-1}U(B^{-1} + VA^{-1}U)^{-1}VA^{-1} \end{aligned}$$

公式2 行列  $A (p \times q), B (q \times p)$  に対して

$$|E(p) + AB| = |E(q) + BA|$$

但し  $E(p), E(q)$  とは各々  $p$  次元,  $q$  次元の単位行列

既 刊 報 告

- |         |  |          |   |
|---------|--|----------|---|
| TR-590  | FACOM 230 AP システムのシステムシミュレーション<br>Simulation Study on FACOM-230-AP System  | 1979年11月 | 末松 和代, 吉田 正廣<br>中村 絹代, 三好 甫             |
| TR-591  | 二次元阻塞効果に関する実験的研究<br>Experimental Study about 2-Dimensional Blockage Effect   | 1979年11月 | 沢田 秀夫                                   |
| TR-592  | 入口案内翼の2次元翼列実験(正の大迎角をもつ場合)<br>Two-Dimensional Cascade Tests of Inlet Guide Vane at High Angles of Attack  | 1979年11月 | 養田 光弘, 山崎 紀雄                            |
| TR-593  | 気液二相流におけるヒステリシス現象<br>Hysteresis Phenomena of flow Structures in Gas-Liquid Two-Phase Flows   | 1979年11月 | 新野 正之,<br>O.H.Kashinsky,<br>V.P.Odnoral |
| TR-594  | 非対称楔型ヨーメータによる3次元流中の速度ベクトルおよび静圧の測定<br>Measurement of Velocity and Static Pressure in a Three-Dimensional Flow by Means of on Asymmetric-Wedye Type Yawmeter | 1979年12月 | 中谷 輝臣, 遠藤 浩                             |
| TR-595T | Fuel Minimal Take-off Path of Jet Lift VTOL Aircraft   | 1980年1月  | Hiroshi NISHIMURA                       |
| TR-596  | ジェットを含む流れと風洞壁の干渉<br>Boundary Well Effects of Wind-Tunnel on Flow Field Including Jet   | 1980年1月  | 重見 仁, 岩崎 昭人<br>深沢 政広                    |
| TR-597  | 二次元風洞構成要素の研究Ⅲ)<br>-集合胴圧力制御のデジタルシミュレーション-<br>Investigation of the Components of the NAL High Reynolds Number Two-Dimensional Wind Tunnel, Part III          | 1980年1月  | 三輪 等                                    |
| TR-598  | ロケット用インデューサの不安定キャビテーションの観察<br>A Visual Observation of Cavitating Inducer Instability   | 1980年1月  | 上條謙二郎, 志村 隆<br>渡辺 光男, 藤田 敏彦             |
| TR-599  | 回転翼の安定に及ぼす大気乱流の影響(1)<br>フラッピングとフラッピング一振れの連成振動<br>Effect of Atmospheric Turbulence on the Stability of a lifting Rotor Blade(1)                             | 1980年2月  | 藤森 義典                                   |

---

航空宇宙技術研究所報告600号

昭和55年2月発行

発行所 航空宇宙技術研究所  
東京都調布市深大寺町1880  
電話武蔵野三鷹(0422)47-5911(大代表)〒182  
印刷所 株式会社 東京プレス  
東京都板橋区桜川2-27-12

---