

ISSN 0389-4010
UDC 533.6.011.5

航空宇宙技術研究所報告

TECHNICAL REPORT OF NATIONAL AEROSPACE LABORATORY

TR-1025

風上差分法による鈍頭物体まわりの超音速流れの解析

和田安弘・小川哲・新井紀夫

1989年7月

航空宇宙技術研究所
NATIONAL AEROSPACE LABORATORY

風上差分法による鈍頭物体まわりの超音速流れの解析*

和田 安弘** 小川 哲** 新井 紀夫***

A Numerical Calculation of Hypersonic Flow Around Blunt Bodies Using Upwind Difference Scheme

Yasuhiro WADA, Satoru OGAWA

and Norio ARAI

ABSTRACT

A numerical calculation of hypersonic flow around two-dimensional blunt bodies is presented. The Euler equations in conservation form are calculated by the first order accurate Osher upwind scheme.

In this calculation, two types of boundary conditions on the body surface are tested. One is the conventional condition for Euler equations, and the other is a new form in which flux is conserved throughout the whole flow field.

Results show that the conventional boundary conditions do not provide reasonable solutions at high Mach numbers ($M > 2.4$), while the new boundary conditions do. The calculation is stably executed, and the shock is clearly captured from low to high Mach numbers.

記 号

c	: 音速	\hat{v}	: Contravariant velocity
CFLN	: クーラン数	V	: Contravariant velocity
e	: 単位体積当たりの全エネルギー	Vol	: cell の体積
H	: エンタルピ	V_n	: 物体表面での法線方向の流速
J	: 変換のヤコビアン	V_t	: 物体表面での接線方向の流速
M	: マッハ数	W	: 物体幅
n	: 計算の繰り返し回数	x	: 物理面座標
p	: 圧力	y	: 物理面座標
t	: 時間	α	: 迎角
u	: x 方向流速成分	γ	: 比熱比
\hat{u}	: Contravariant velocity	η	: 計算面座標
U	: Contravariant velocity	λ	: 固有値
v	: x 方向流速成分	ξ	: 計算面座標
		ρ	: 密度
		τ	: 時間(計算面)
		Δ	: 時間刻み
		Q	: 従属変数ベクトル
		E	: x 方向流束 (flux) ベクトル

* 昭和63年3月30日受付

** 数理解析部

*** 東京農工大学

- \mathbf{F} : y 方向流束ベクトル
 $\mathbf{\tilde{Q}}$: 従属変数ベクトル
 $\mathbf{\tilde{E}}$: ξ 方向流束ベクトル
 $\mathbf{\tilde{F}}$: η 方向流束ベクトル

1. 序論

近年、極超音速旅客機やスペースシャトルなどの超高速飛行体の研究開発において、強い衝撃波をともなう極超音速流れの解析が重要な課題となっている。

極超音速流れでは、高温高圧により解離や電離が生じる。従って、本質的にはこれらの実在気体効果を考慮した解析が必要であるが、理想気体についての Euler 方程式を解くことによって流れの大局部的構造を知ることは、有意義かつ不可欠なものである。

この問題の数値解析法として有力なのが風上差分法である。Godunov¹⁾, Roe²⁾, Osher³⁾らの方法に代表されるこの風上差分法は、陽的な人工拡散項を付加することなく極超音速の流れに適用できる。これに対し、従来広く用いられてきた Beam-Warming⁴⁾ 法等の中心差分法は、計算の安定のために人工拡散項を付加し、さらにその効果を経験的に調整する必要があることから信頼性が低い。

Osher による方法は、Godunov の方法に比べて各ステップごとの計算が少なく、また、Roe の方法の問題点である非物理的な膨張衝撃波 (Expansion shock) も発生しない。さらに、優れた衝撃波捕獲性を有し、太陽風等の宇宙空間における流体力学への適用⁵⁾ も見られる。しかし、今までに実際に極超音速流に適用された例はあまり見られない。

本研究の目的は、Osher の提案した差分スキームを、実際に 2 次元鈍頭物体回りの極超音速流れに適用することにより、その有効性を調べることであるが、特に計算の安定性に重要な意味を持つ境界条件の妥当性を検討し、ここで新たに提案する境界条件の有効性を示すことにある。

2. 解析法

2.1 基礎方程式

基礎方程式として、2 次元非定常 Euler 方程式を用いる。これをカーテシアン座標系で表すと、次式になる。

$$\mathbf{Q}_t + \mathbf{E}_x + \mathbf{F}_y = 0 \quad (2-1)$$

ここで、

$$\mathbf{Q} = (\rho, \rho u, \rho v, e)^T$$

$$\mathbf{E} = (\rho u, \rho u^2 + p, \rho uv, (e+p)u)^T$$

$$\mathbf{F} = (\rho v, \rho vu, \rho v^2 + p, (e+p)v)^T \quad (2-2)$$

ρ : 密度

p : 圧力

u : x 方向流速成分, v : y 方向流速成分

e : 単位体積当たりの全エネルギー

$$e = \frac{p}{r-1} + \frac{\rho(u^2 + v^2)}{2}$$

計算を後述する物体適合曲線座標系 (ξ, η) で行うため (図 1) 次の座標変換を行う。

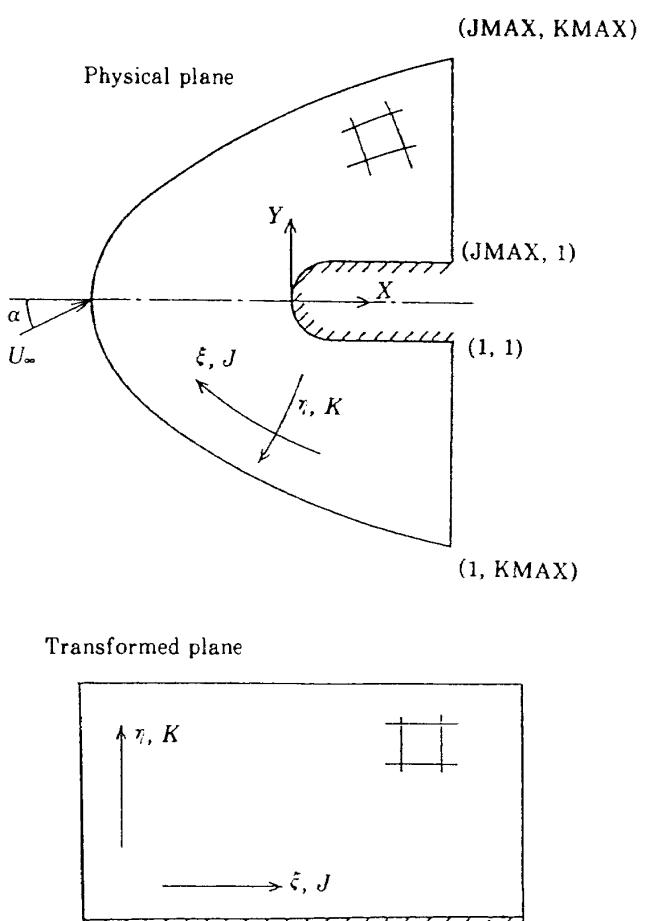


図 1 座標変換

$$\begin{aligned}\tau &= t \\ \xi &= \xi(x, y) \\ \eta &= \eta(x, y)\end{aligned}\quad (2-3)$$

$$J = \xi_x \eta_y - \eta_x \xi_y = \frac{1}{x_\xi y_\eta - x_\eta y_\xi} \quad (2-4)$$

ここで、 J は変換のヤコビアンである。この時、(2-1)式は次式に変換される。

$$\mathbf{Q}_t + (\xi_x \mathbf{E}_\xi + \xi_y \mathbf{F}_\xi) + (\eta_x \mathbf{E}_\eta + \eta_y \mathbf{F}_\eta) = 0 \quad (2-5)$$

しかし、(2-5)式は強い保存形ではないので、衝撃波を捕らえるには不十分である。そこで(2-4)式を用いると、(2-5)式は次のような保存形で表すことができる。

$$\widetilde{\mathbf{Q}}_t + \widetilde{\mathbf{E}}_\xi + \widetilde{\mathbf{F}}_\eta = 0 \quad (2-6)$$

ここで

$$\widetilde{\mathbf{Q}} = \mathbf{Q}/J \quad (2-7)$$

$$\widetilde{\mathbf{E}} = (\xi_x \mathbf{E} + \xi_y \mathbf{F})/J \quad (2-8)$$

$$\widetilde{\mathbf{F}} = (\eta_x \mathbf{E} + \eta_y \mathbf{F})/J \quad (2-9)$$

本論文では、この(2-6)式を基礎方程式として用い、 (ξ, η) 平面上で解く。なお、計算は、全て物体幅 W の $1/2$ 及び流入一様流の値(添字 ∞)により無次元化した方程式で行った。

2.2 Osher 法

本論文に適用したのは、1次精度の陽的(explicit)な Osher 法⁸⁾である。Osher 法は、本質的に全ての保存形双曲型の方程式に適用可能であるが、特に Euler 方程式に適用した場合に単純なアルゴリズムとなる。基礎方程式は次式である。

$$\widetilde{\mathbf{Q}}_t + \widetilde{\mathbf{E}}_\xi + \widetilde{\mathbf{F}}_\eta = 0 \quad (2-10)$$

これに対する保存形差分法は、次のように表される。

$$\begin{aligned}\frac{\widetilde{\mathbf{Q}}_{j,k}^{n+1} - \widetilde{\mathbf{Q}}_{j,k}^n}{\Delta_t} + \frac{\widetilde{\mathbf{E}}_{j+1/2,k} - \widetilde{\mathbf{E}}_{j-1/2,k}}{\Delta_\xi} \\ + \frac{\widetilde{\mathbf{F}}_{j,k+1/2} - \widetilde{\mathbf{F}}_{j,k-1/2}}{\Delta_\eta} = 0\end{aligned}\quad (2-11)$$

ここで、数値流束 $\widetilde{\mathbf{E}}$ は、次式のように定義する。

$$\begin{aligned}\widetilde{\mathbf{E}}_{j+1/2} = \frac{1}{2} \{ \widetilde{\mathbf{E}}(\mathbf{Q}_{j+1}, M_{j+1/2}) + \widetilde{\mathbf{E}}(\mathbf{Q}_j, M_{j+1/2}) \} \\ - \frac{1}{2} \int_{\mathbf{Q}_j}^{\mathbf{Q}_{j+1}} \left[\left\{ \frac{\partial \widetilde{\mathbf{E}}^+}{\partial \mathbf{Q}}(\mathbf{Q}, M_{j+1/2}) \right\} \right] d\widetilde{\mathbf{Q}}\end{aligned}$$

$$- \left\{ \frac{\partial \widetilde{\mathbf{E}}^-}{\partial \mathbf{Q}}(\mathbf{Q}, M_{j+1/2}) \right\} \] d\widetilde{\mathbf{Q}} \quad (2-12)$$

ただし、 $\widetilde{\mathbf{E}} = \widetilde{\mathbf{E}}(\mathbf{Q}, M)$ は、流束 $\widetilde{\mathbf{E}}$ の従属変数 \mathbf{Q} 及び metricへの依存性を表す。また、 $\partial \widetilde{\mathbf{E}}/\partial \widetilde{\mathbf{Q}}$ は、ヤコビアン行列を表す。

$$\frac{\partial \widetilde{\mathbf{E}}}{\partial \mathbf{Q}} = \left(\frac{\partial \widetilde{\mathbf{E}}}{\partial \mathbf{Q}} \right)^+ + \left(\frac{\partial \widetilde{\mathbf{E}}}{\partial \mathbf{Q}} \right)^- \quad (2-13)$$

これは、 $\partial \widetilde{\mathbf{E}}/\partial \widetilde{\mathbf{Q}}$ を、その固有値が正になる行列と、負になる行列との和に分解していることを表す。ここで、数値流束 $\widetilde{\mathbf{F}}$ は、同様にして得ることができる。今後、簡略化のため ξ 方向に関してのみ記述する。対応する η 項は、 ξ 項と同様に定義できる。

様々な風上差分法の特徴は、(2-12)式の右辺第2項の積分をどのように評価するかにある。Osher 法では、 $\widehat{\mathbf{E}}_{j+1/2}$ を評価する際、 \mathbf{Q}_j と \mathbf{Q}_{j+1} を初期値とする Riemann 問題の近似解を用いて第2項の積分を行う。以下、この積分の方法について述べる。

図2に、積分経路を示す。積分は、 \mathbf{Q}_j と \mathbf{Q}_{j+1} をつなぐパスに沿う線積分である。このパスは、ヤコビアン行列 $\partial \widetilde{\mathbf{E}}/\partial \widetilde{\mathbf{Q}}$ の互いに異なる3つの固有値

$$\lambda_1 = (\widehat{u} - c) K_n, \quad \lambda_2 = \widehat{u} K_n, \quad \lambda_3 = (\widehat{u} + c) K_n \quad (2-14)$$

$$K_n = \sqrt{\xi_x^2 + \xi_y^2}$$

$$\widehat{u} = (\xi_x u + \xi_y v)/K_n$$

$$c = \sqrt(r p / \rho)$$

に対応する固有ベクトルの向きに取り、3つのサブパスに分けられる。

積分を計算するために、 \mathbf{Q}_j と \mathbf{Q}_{j+1} の間に、状態 $\mathbf{Q}_{j+1/3}$ 、 $\mathbf{Q}_{j+2/3}$ を定義する。これらは、3つのサブパスの交点における \mathbf{Q} の値を表す。この $\mathbf{Q}_{j+1/3}$ 、 $\mathbf{Q}_{j+2/3}$ は、各サブパスに沿って保存される Riemann 不变量より、陽に求めることができる。各サブパスにおける不变量は、次式で表される。

$$\text{for } \lambda_1 \quad \widehat{u} + \frac{2c}{r-1}, \quad \frac{p}{\rho^r}, \quad \widehat{v}$$

$$\text{for } \lambda_2 \quad \widehat{u}, \quad p$$

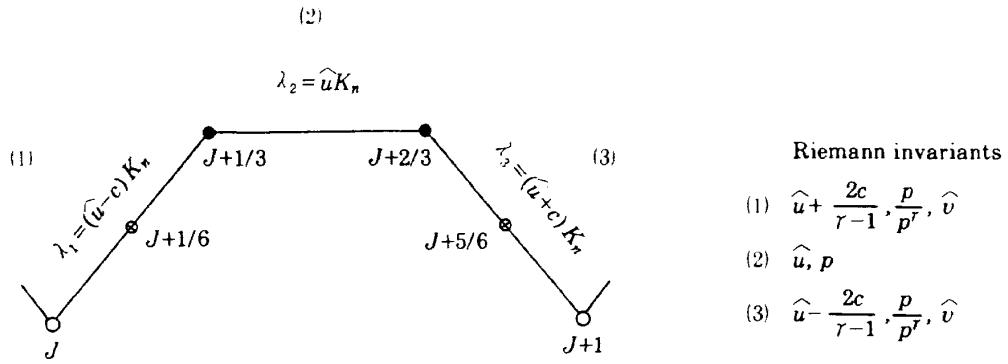


図 2 サブパス

$$\text{for } \lambda_3 \quad \hat{u} - \frac{2c}{r-1}, \frac{p}{\rho^r}, \hat{v} \quad (2-15)$$

$$\hat{v} = (\xi_x v - \xi_y u) / K_n$$

非線形性により、 λ_1 及び λ_3 は、サブパス上でその符号が変化することがある。この様な場合には、固有値が 0 になる点を“音速点”とし、それぞれ $Q_{J+1/6}$, $Q_{J+5/6}$ で表す。これらの値は、(2-16) 式及び次式により定められる。

$$\text{for } Q_{J+1/6} \quad \hat{u} - c = 0$$

$$\text{for } Q_{J+5/6} \quad \hat{u} + c = 0 \quad (2-16)$$

以上のようにして求められたパス上の値を用いて、サブパス上の積分は、固有値の符号により、サブパス両端の流束の差、もしくは 0 になる。即ち、“風上性”によって“+”積分は、 λ が正のときに流束の差、負のときに 0 で与えられ、“-”積分では、この逆となる。

以上から、(2-12)式の積分の計算を、“+”積分についてまとめると次式のようになる。“-”積分についても、流束の差をとる方向は同じであるが、固有値が負のパス上では流束の差、正の場合は 0 にとる。

$$\int_{Q_J}^{Q_{J+1}} \left(\frac{\partial \widetilde{E}}{\partial Q} \right)^+ dQ = \Delta E_1^+ + \Delta E_2^+ + \Delta E_3^+ \quad (2-17)$$

$$\Delta E_1^+$$

$$\begin{aligned} &= \widetilde{E}_{J+1/3} - \widetilde{E}_J \quad \text{if } (\hat{u} - c)_J \geq 0, (\hat{u} - c)_{J+1/3} \geq 0 \\ &= \widetilde{E}_{J+1/6} - \widetilde{E}_J \quad \text{if } (\hat{u} - c)_J \geq 0, (\hat{u} - c)_{J+1/3} < 0 \\ &= \widetilde{E}_{J+1/3} - \widetilde{E}_{J+1/6} \quad \text{if } (\hat{u} - c)_J < 0, (\hat{u} - c)_{J+1/3} \geq 0 \\ &= 0 \quad \text{if } (\hat{u} - c)_J < 0, (\hat{u} - c)_{J+1/3} < 0 \end{aligned}$$

$$\Delta E_2^+$$

$$\begin{aligned} &= \widetilde{E}_{J+2/3} - \widetilde{E}_{J+1/3} \quad \text{if } (\hat{u})_{J+1/3} \geq 0 \\ &= 0 \quad \text{if } (\hat{u})_{J+1/3} < 0 \end{aligned}$$

$$\Delta E_3^+$$

$$\begin{aligned} &= \widetilde{E}_{J+1} - \widetilde{E}_{J+2/3} \quad \text{if } (\hat{u} + c)_{J+2/3} \geq 0, (\hat{u} + c)_{J+1} \geq 0 \\ &= \widetilde{E}_{J+5/6} - \widetilde{E}_{J+2/3} \quad \text{if } (\hat{u} + c)_{J+2/3} \geq 0, (\hat{u} + c)_{J+1} < 0 \\ &= \widetilde{E}_{J+1} - \widetilde{E}_{J+5/6} \quad \text{if } (\hat{u} + c)_{J+2/3} < 0, (\hat{u} + c)_{J+1} \geq 0 \\ &= 0 \quad \text{if } (\hat{u} + c)_{J+2/3} < 0, (\hat{u} + c)_{J+1} < 0 \end{aligned} \quad (2-18)$$

3. 境界条件

境界条件は問題の解を一意的に決定するものであるから、その扱い方は解に重大な影響を与える。この中でも、特に重要なのが物体境界の評価である。本論文ではこの点に着目し、第一に従来から一般的に Evler 方程式の差分解法に用いられてきた境界条件⁹⁾（以後、境界条件 1 と呼ぶ）を Osher 法に適用しその有効性を検証する。さらに、ここで新たに提案する境界条件¹⁰⁾（以後、境界条件 2 と呼ぶ）を適用しその有効性を調べ、境界条件 1 と比較検討する。

3.1 境界条件 1

図 3 に物体境界を示す。非粘性の流れでは、流線は物体壁に一致する。よって、この境界条件では、物体に垂直な速度成分を 0 とし、垂直方向の運動量方程式を解いて圧力を求める。物体境界 $\gamma = \text{const}$ ($k=1$) 上において、流速の法線成分及び接線成分は、metric を用いて次式のように表せる。

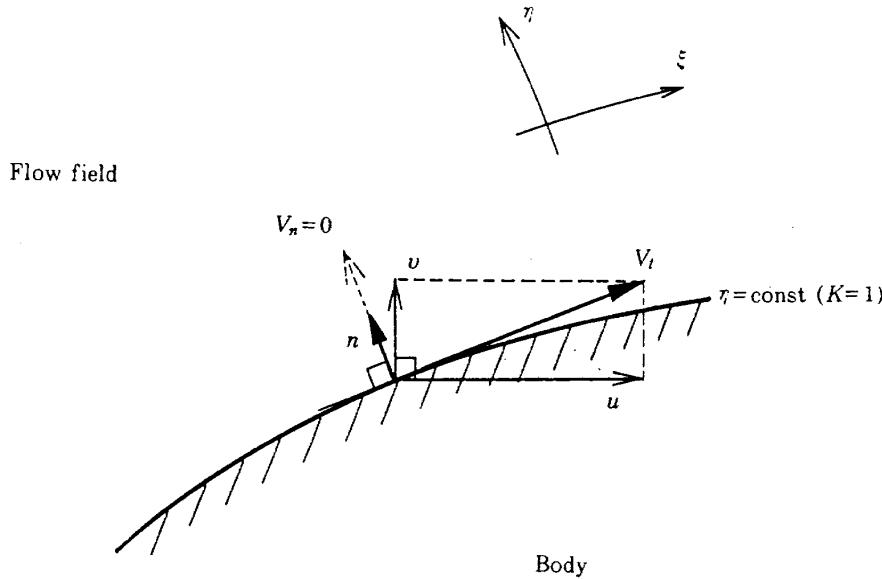


図3 物体面境界 (B.C.1)

$$V_n = (\eta_x u + \eta_y v) / \sqrt{\eta_x^2 + \eta_y^2} \quad (3-1)$$

$$V_t = (\eta_y u - \eta_x v) / \sqrt{\eta_x^2 + \eta_y^2} \quad (3-2)$$

$$\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{\eta_x^2 + \eta_y^2}} \begin{bmatrix} \eta_y & \eta_x \\ -\eta_x & \eta_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_t \\ V_n \end{bmatrix} \quad (3-3)$$

(3-3)式で、\$V_n=0\$として、\$V_t\$は内側領域より外挿したものを与えることにより境界上の速度成分\$u, v\$が求められる。次に、圧力\$p\$は、次式に示す法線方向の運動量方程式を解いて得られる。

$$-\rho U(\eta_x u_\xi + \eta_y v_\xi) = (\eta_x \xi_x + \xi_y \eta_y) p_\xi + (\eta_x^2 + \eta_y^2) p_\eta \quad (3-4)$$

$$U = \xi_x u + \xi_y v \quad (3-5)$$

ここで、密度\$\rho\$は、外挿により与える。さらに、非粘性の流れであるから、流入一様流のエンタルピ\$H_\infty\$は、物体表面でも保存されるとして次式及び(3-4)式で得られた圧力\$p\$から密度\$\rho\$の値を求め直す。

$$H = (e + p) / \rho \quad (3-6)$$

3.2 境界条件 2

最初に、境界条件2の概念を述べる。図4に物体境界の概念図を示す。境界条件1では、内側領域(b)のようにcellに入り出する流束(フラックス)の保存を考えず、別の方法によって境界上の値を評価した。しかし、物理的には境界を含めた全領域で流束の保存が成立していると考えられ、境界

上の値もその保存から導出るべきである。境界条件2は、壁からの流束\$f_{in}^w\$を評価することによって、境界上でも内側領域と同様な計算を行うものである。

物体は固体であるから、その中の流束は圧力\$p\$によるものしか存在しないと考えられる。よって、流束\$f_{in}^w\$は圧力\$p\$の関数である。

$$f_{in}^w = f_{in}^w(p) \quad (3-7)$$

従って、この圧力\$p\$を定めれば、\$f_{in}^w\$が定まり計算が可能となる。圧力\$p\$は、境界条件1と同様に法線方向の速度成分(3-1)式が0になるように定めればよい。

次に、差分法への適用について述べる。境界条件2の離散系に対する適用を図5に示す。前述のとおり、ここで評価するのは壁内の流束(図中\$F_1^w, F_2^w, F_3^w\$)である。これらの和を\$F_j^w\$で表す。

$$F_j^w = F_j^w(p) = F_1^w + F_2^w + F_3^w \quad (3-8)$$

\$F_j^w\$は、前述の通り仮想点(\$J, 1-1/2\$)の圧力の関数である。

流体内の流束は、内側領域と同様に計算する。ただし、\$\xi\$方向の流束は、図のように\$1/2\$の係数を掛けたものとして計算する。

\$F_j^w\$の形は、流れが一様に静止している状態(\$u=v=0, p=1\$)で与える。

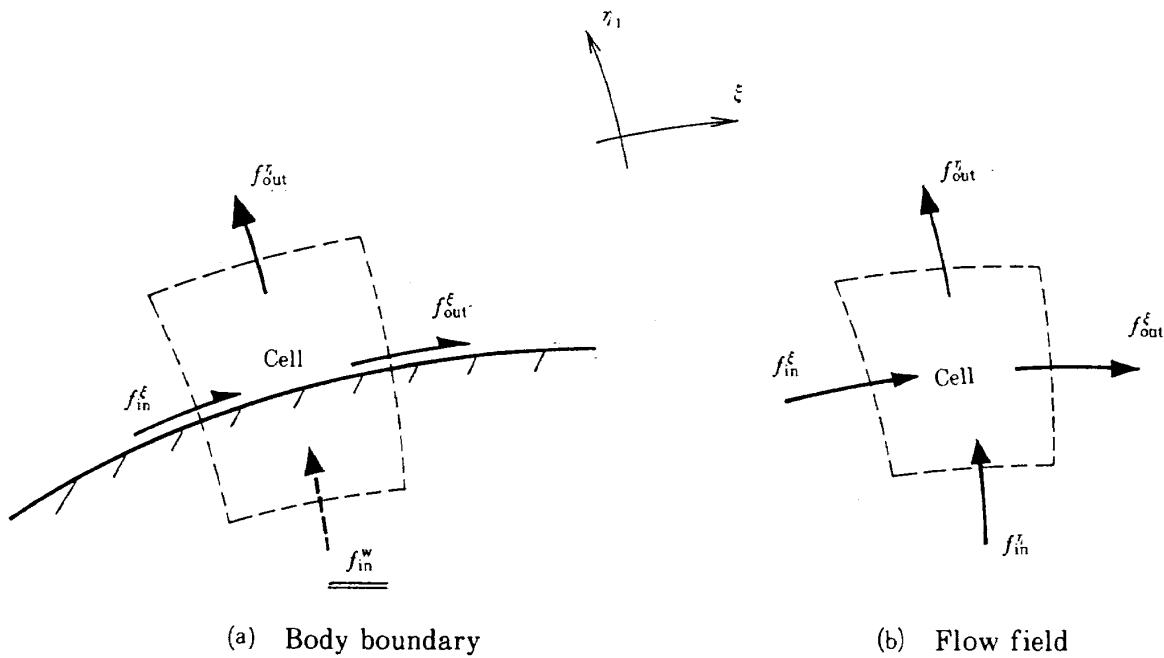


図4 物体面境界 (B.C.2)

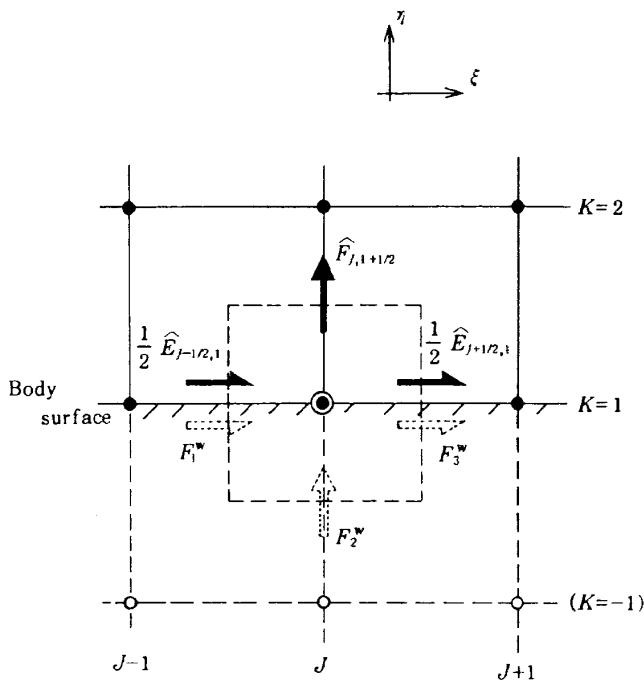


図 5 物体面境界 (B.C.2)

$$F_j^w(p_0) + \frac{1}{2} \widehat{E}_{j-1/2,1} = \widehat{F}_{j,1+1/2} + \frac{1}{2} \widehat{E}_{j+1/2,1} \Big|_{\substack{u=v=0 \\ p_0=1}} \quad (3-9)$$

流れ場計算時の F_j^w は、この $F_j^w(p_0)$ を、 $p_{j,1-1/2}$ 倍して得られる。

以上から各流束を定めた後、次式によって $Q_{j,1}^{n+1}$ を求めることができる。

$$Vol \mathbf{Q}_{j,1}^{n+1} = Vol \mathbf{Q}_{j,1}^n - A\tau \left[\left(\frac{1}{2} \widehat{\mathbf{E}}_{j+1/2,1} \right. \right.$$

ここで、 Vol は、cell の体積を表すが、今考える領域は流体側のみであるから $0.5Vol$ で評価すればよい。なお、 $p_{j,1-j/2}$ は、流速 (u, v) の物体に対する法線成分が、0 になるよう与える。

$$V_{j,1}^{n+1} = (\eta_x u + \eta_y v)_{j,1}^{n+1} = 0 \quad (3-11)$$

時間積分を、陽的 Euler 法で行うならば、上式は圧力 $p_{j,1-1/2}$ に対する 1 次方程式になる。

4. 適用例と考察

時間依存法による数値計算においては、本来、全流れ場において流入一様流の初期条件(Impulsive-start)を与えて、収束解が得られることが望ましい。しかし、従来より用いられている境界条件(境界条件1)の場合、往々にしてかなりの「プログラム操作」を行わないと収束せず、あまり一般的とは言えない。本章においては、この点を強調すべく、境界条件の差異による結果の相違を簡単な計算例をもって示す。

4.1 計算格子

計算格子として物体適合曲線座標系を用いる⁵⁾。前述の通り、 (x, y) 平面（物理面）から矩形の (ξ, η) 平面（形算面）へ変換をして計算を行うが、この変換式として Laplace 方程式を用いる。

$$\begin{aligned}\xi_{xx} + \xi_{yy} &= 0 \\ \eta_{xx} + \eta_{yy} &= 0\end{aligned}\quad (4-1)$$

物理面上での格子点座標 (x, y) は、(2-10)式の独立変数と従属変数とを変換した式を解いて得られる。また、流れの変化が激しい物体先端及び物体近傍に格子が集中するよう、格子の指数的な分配⁷⁾を行った。

典型的な計算格子を図 6 に示す。

格子数は $JMAX \times KMAX = 81 \times 36$ である。

4.2 諸条件

(1) 流入及び流出境界条件

流入境界 ($K=KMAX$)

差分計算の対象とせず、一様流状態に固定する。

流出境界 ($J=1$ 及び $J=JMAX$)

連続流出条件を用い、 $\xi(J)$ 方向に線形外挿する。

(2) 安定条件

安定条件として、双曲型偏微分方程式に典型的な C.F.L. 条件を用いる。クーラン数 CFLN は、繰り返し回数 n が $1 \leq n \leq 50$ において線形的に $0.5 \sim 1.0$ へ増加するように与えた。これは、計算開始時の急激な物理量の変化による発散を防ぐためである。

(3) 初期条件

初期条件として、全領域に流入一様流の値を与える (Impulsive-start)。これは、 $t=0$ で物体が瞬間に一定速度で動き始めたことと同等な条件である。

(4) 収束判定

本論文では、全ての物理量の変動を見て収束を判定する。具体的には、繰り返し回数 n と $n+1$ における各量の差 Δp , $\Delta \rho$, Δu , Δv , Δe の絶対値を取り、その全格子についての最大値が、収束判定値 ϵ_{conv} 以下となった場合に収束したとする。

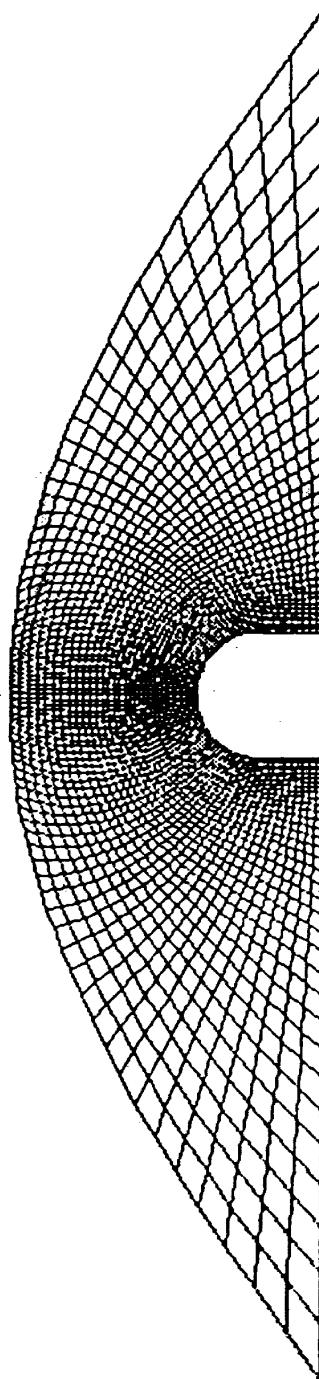


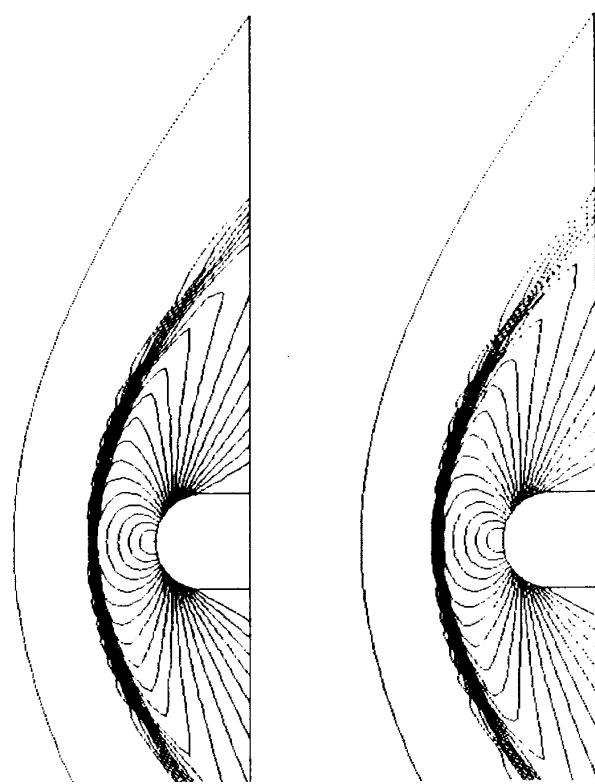
図 6 格子

ϵ_{conv} は次の値とした。

$$\epsilon_{conv} = 1.5 \times 10^{-3} \quad (4-2)$$

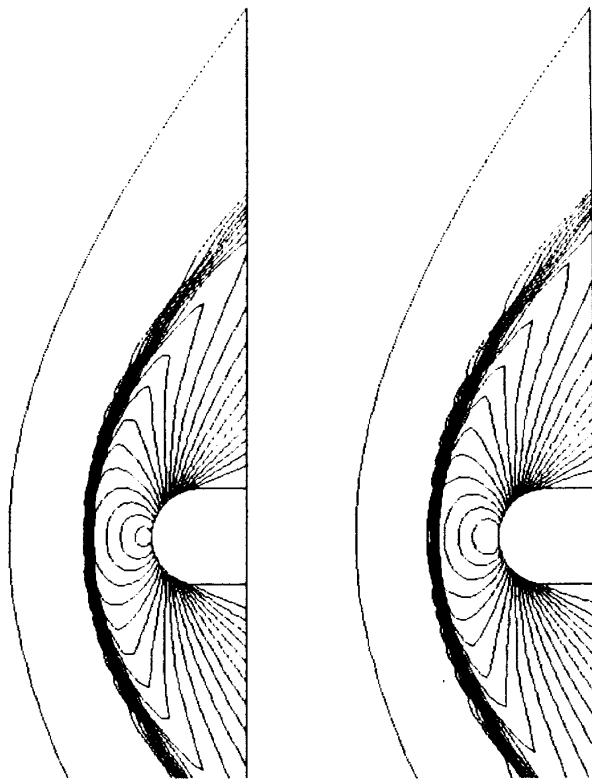
4.3 境界条件による影響

最初に、 $M_\infty = 2$ での境界条件 1 及び境界条件 2 の適用例を比較する。この時の流れ場の様子として図 7-a に等圧力線図、図 7-b に等密度線図を両境界条件について示す。両条件ともほとんど同一な結果を示していることがわかる。また、図 7-c に対称軸上の圧力分布、図 7-d に物体表面の



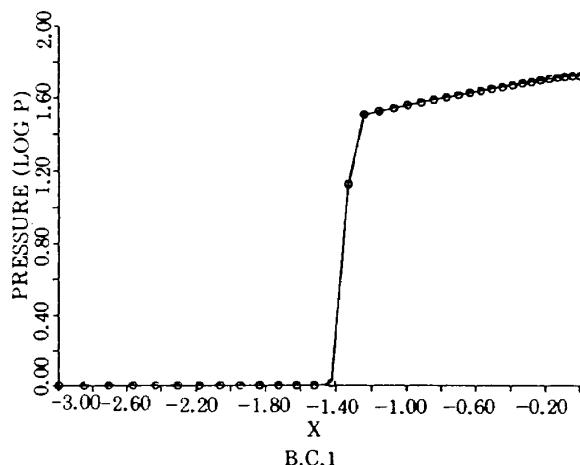
B.C.1

B.C.2

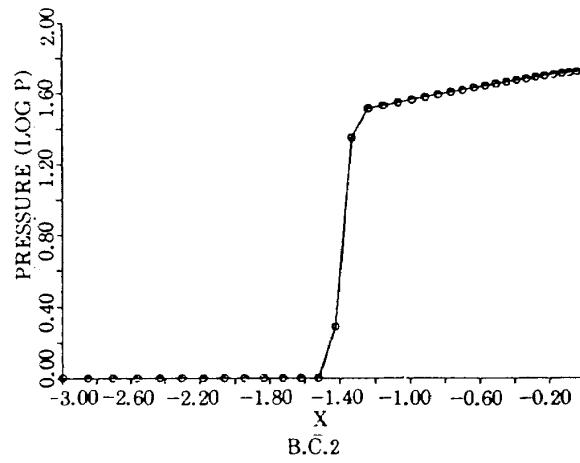
図 7-a 等圧線図 ($M_{\infty}=2$)

B.C.1

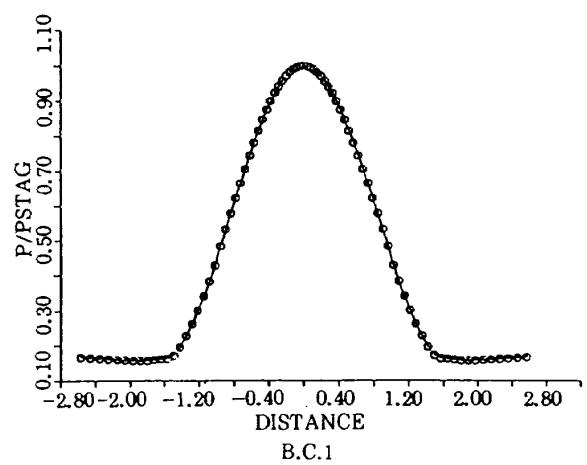
B.C.2

図 7-b 等密度線図 ($M_{\infty}=2$)

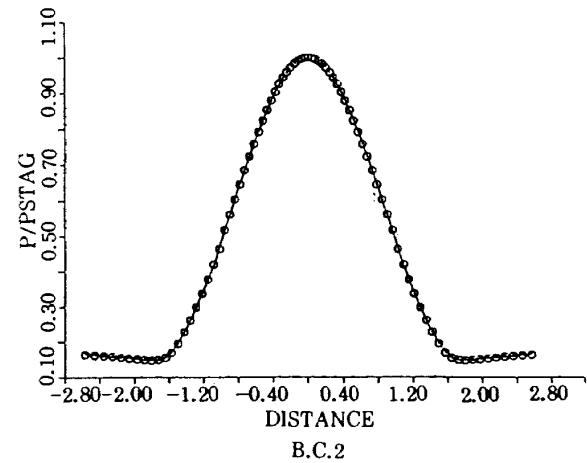
B.C.1



B.C.2

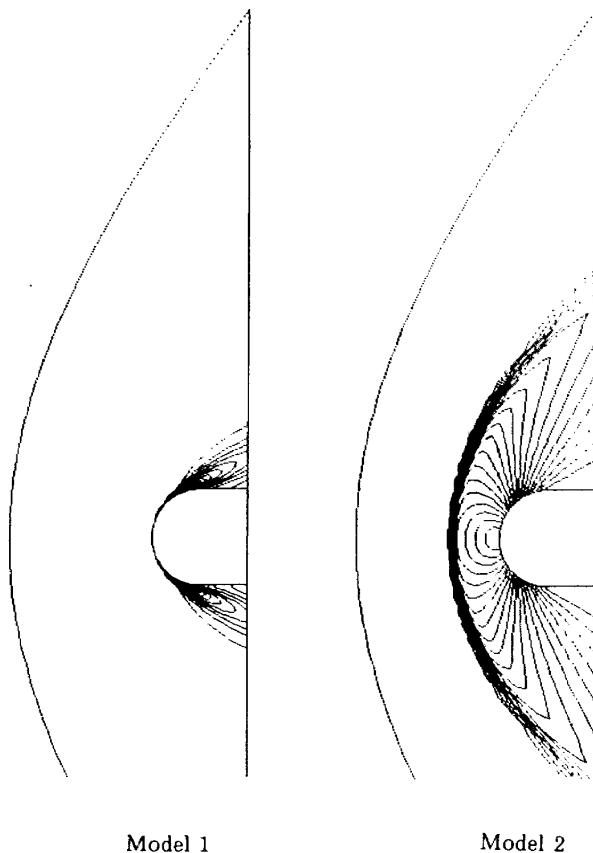
図 7-c 対称線における圧力分布 ($M_{\infty}=2$)

B.C.1



B.C.2

図 7-d 物体面における圧力分布 ($M_{\infty}=2$)

図 8-a 等圧線図 ($M_{\infty}=2.4$)

圧力分布を示す。表面圧力分布図において横軸は物体先端からの距離、縦軸は表面圧力の淀み点圧力に対する比である。これらから、 $M_{\infty}=2$ では、衝撃波の位置等、定量的にも境界条件1、2はほぼ同一の解を与えることがわかる。即ち、この程度のマッハ数においては、境界条件の差異は特に認められず、いずれも有効な解を与えるものと思われる。

次に、 $M_{\infty}=2.4$ の場合を比較する。図8-aに等圧力線図、図8-bに表面上圧力分布を両条件について示す。境界条件2では $M_{\infty}=2$ の場合と同様に合理的な解が得られているが、境界条件1では得られていない。境界条件1の場合、物体からの擾乱が、流体内に正しく伝播せずに境界上に蓄積したような状態を示している。この計算では、計算中の残差 ΔQ は、始めから 10^{-3} のオーダーで減少し、タイムステップ $n=141$ で収束した。これは後述する正常な収束時間に比べて極めて早いものであるが、有効な解を得るには至っていない。また、ここでは省略したが、 $M_{\infty}=2.4$ 付近を境にこれ以上のマッハ数では、境界条件1による計算は

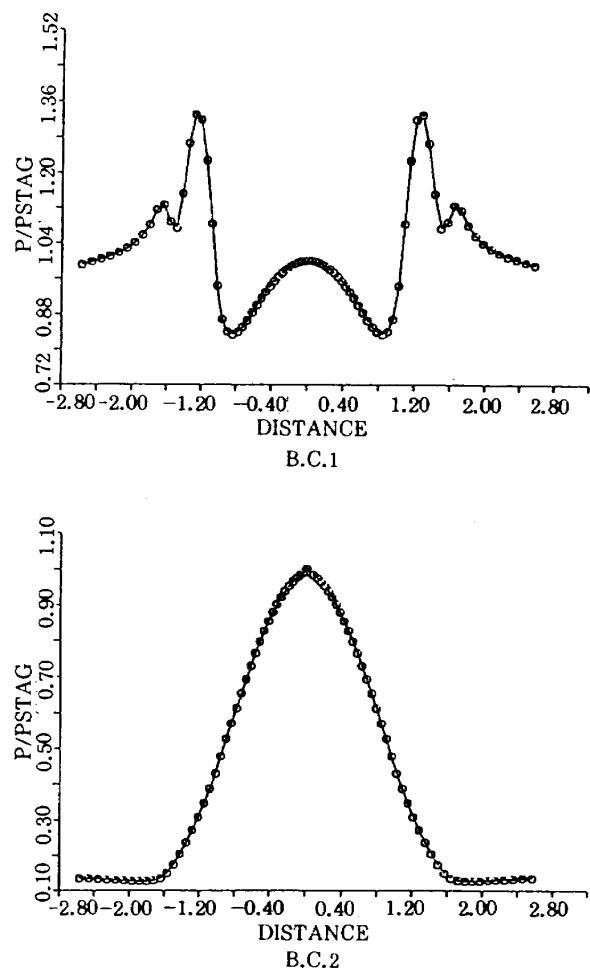
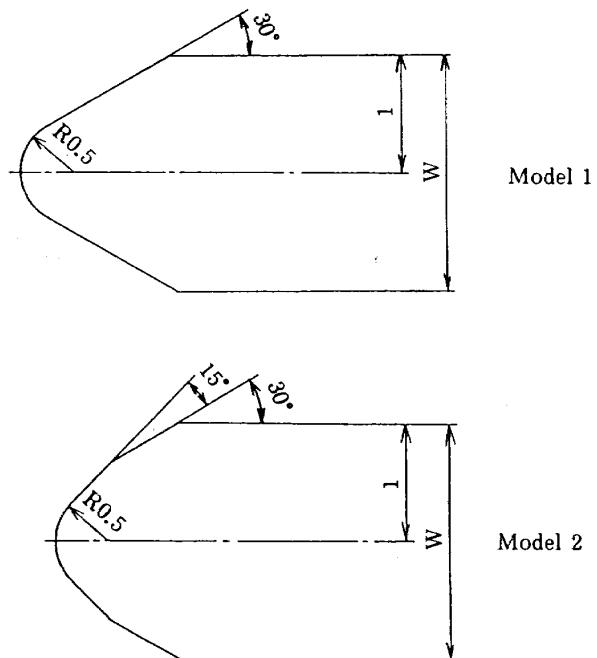
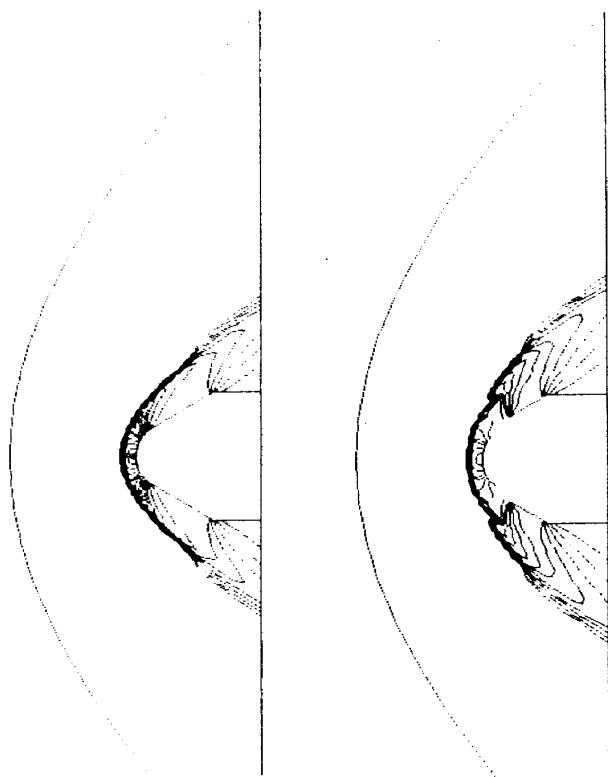
図 8-b 物体面における圧力分布 ($M_{\infty}=2.4$)

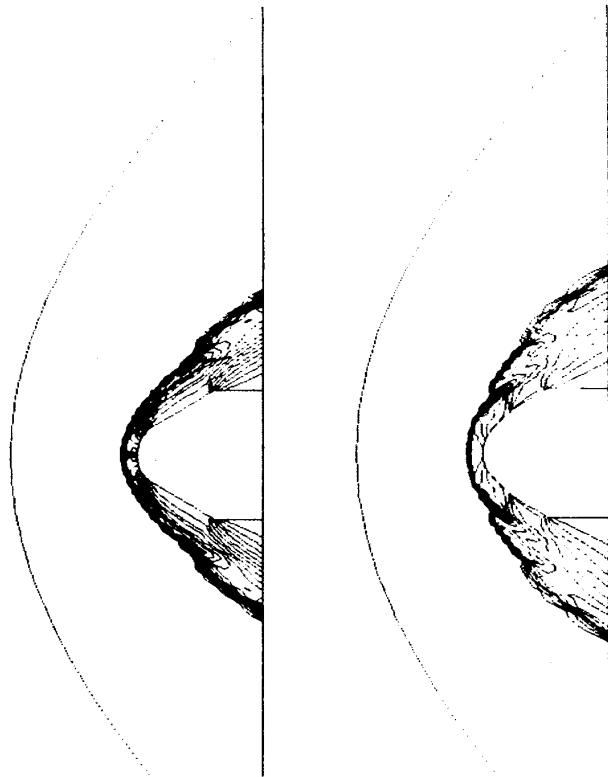
図 9 モデルの形状

同様な結果となり、極超音速域では、発散することもあったが、境界条件2では、 $M_{\infty}=15$ でも、安定に計算が行えた(図9、図10)。



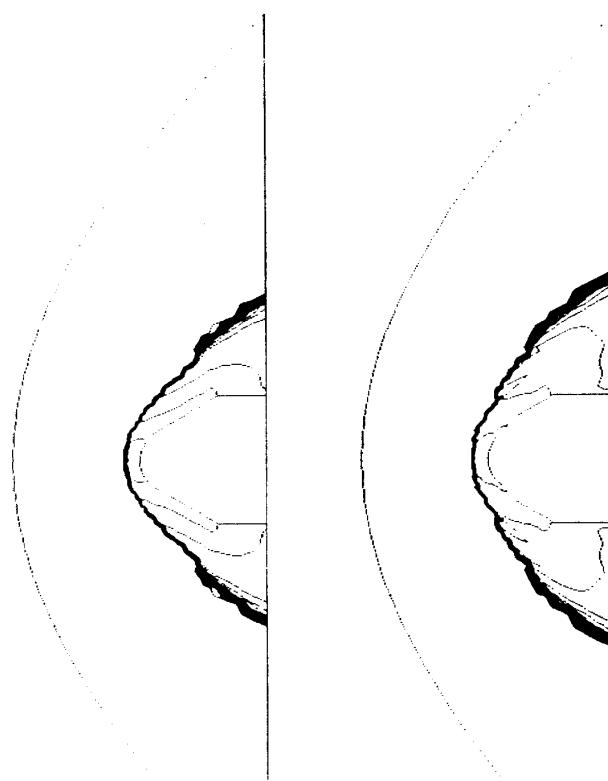
Model 1

Model 2

図10-a 等圧線図 ($M_\infty=15$)

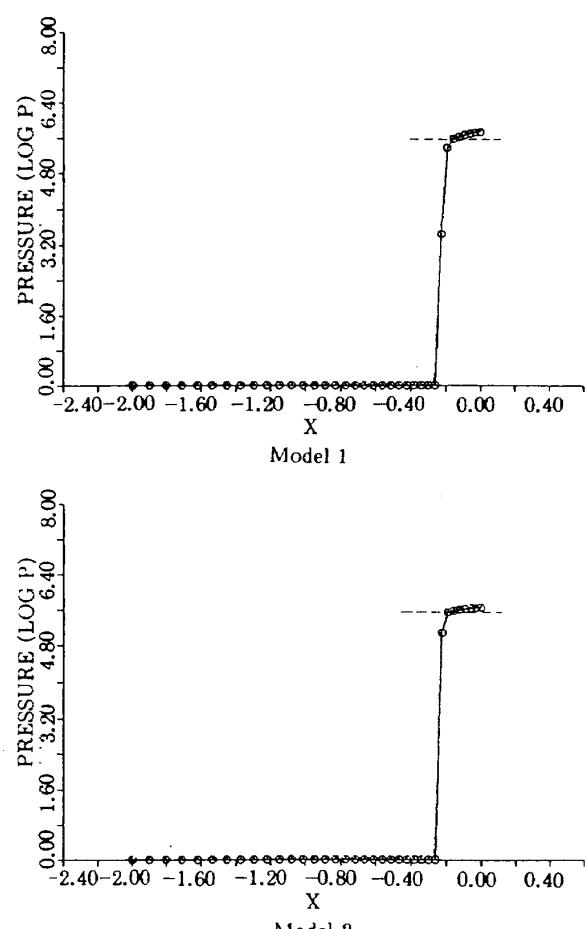
Model 1

Model 2

図10-b 等密度線図 ($M_\infty=15$)

Model 1

Model 2

図10-c 等マッハ線図 ($M_\infty=15$)図10-d 対称線における圧力分布 ($M_\infty=15$)

以上から、境界条件 1 は、高マッハ数の流れに對しては、物体壁を正しく表現できず、非現実的な解や、発散を引き起こすが、境界条件 2 では、物体表面において、流れ場と同様に流束の保存を考慮して、壁からの流束を正しく評価することにより高マッハ数でも安定した計算が可能であることがわかった。

4.4 収束状況

境界条件 2 を用いた、各マッハ数での収束状況を簡単に示す。

収束までの繰り返し回数 n は、各モデルに対し $M_\infty = 2$ では $n = 2000 \sim 2200$, $M_\infty = 5$ では $n = 1300 \sim 1600$ の範囲であった。 $M_\infty = 2$ において、境界条件 1 を用いた計算でも n はほぼ同様だった。計算のための job 実行時間はおおむね 100～240sec である。

本論文では、全領域一様な時間刻み幅 $\Delta\tau$ を用いたが、局所時間刻み幅 (local time step)を採用すれば、収束性は更に改善されるであろう。

5. 結 論

Euler 方程式の数値解法に一般的に用いられている物体境界条件及び、改良された物体境界条件を、Osher 法による鈍頭物体周りの極超音速流れの計算に適用し、次の結論を得た。

(1) 従来から Euler 方程式の数値解法に一般的に用いられてきた物体境界条件は、Osher 法に適用した場合、高マッハ数の流れでは非現実的な解を与え、有効でないことが判明した。一方、新たに提案された境界条件は、低マッハ数から高マッハ数にわたって安定に計算が可能であり、その有効性が示された。

(2) Osher 法は、強い衝撃波を伴う極超音速流れに対しても、安定な収束解が得られることが確認された。今後の実在気体効果を含めた解析にも適用可能だと思われるが、境界条件の評価には従来とは異なった考察が必要だと思われる。

本論文は、東京農工大学と航空宇宙技術研究所との共同研究の一環として行った研究の成果をまとめたものである。

本研究は全般にわたって東京農工大学大学院工学研究科生産機械工学専攻の修士生・熊谷清志氏の絶大なる御協力によって遂行できたものである。ここに深く感謝の意を表します。

参 考 文 献

- 1) S. K. Godunov : "Finite-difference method for numerical computation of discontinuous solutions of the equations of fluid dynamics", Mat- Sbornik, 47 (1959), pp. 271-306, (In Russian).
- 2) P. L. Roe : "Approximate Riemann solvers, parameter vectors and difference schemes", J. Comp. Phys., 43 (1981), pp. 357-372.
- 3) S. Osher and F. Solomon : "Upwind Difference Schemes for Hyperbolic Systems of Conservation laws", Math. Comp., 38 (1982), pp.339-374.
- 4) R. M. Beam and R. F. Warming : "An Implicit Finite-Difference Algorithm for Hyperbolic Systems in Conservation Law Form", J. Comp. Phys., 22 (1976), pp.87-110.
- 5) K. Sawada, E. Sima, T. Matuda and T. Inaguti : "The Osher Scheme and its Application to Cosmic Gas Dynamics", Mem. Fac. Eng., Kyoto Univ, 48 (1986), pp.240-264.
- 6) J. F. Thompson, F. C. Thames and C. W. Mastin : "Automatic Numerical Generation of Body-fitted Curvilinear Coordinate System for Field Containing Any Number of Arbitrary Two-Dimensional Bodies", J. Comp. Phys., 15 (1974), pp.299-319.
- 7) K. Takehana : "A Numerical Calculation of Supersonic Flow around Blunt Bodies using Finite Volume Method", Master Thesis Tokyo University of Agriculture and Technology, (1985), (In Japanese).

- 8) S. Osher and S. R. Chakravarthy : "Upwind Schemes and Boundary Conditions with Application to Euler Equations in General Geometries", J. Comp. Phys., 50 (1983), pp.447-481.
- 9) T. H. Pulliam and J. L. Steger : "Recent Improvements in Efficiency, Accuracy, and Convergence for Implicit Approximate Factorization Algorithms", AIAA Paper 85-0360, AIAA 23rd Aerospace Sciences Meeting (1985).
- 10) Y. Wada : "A New Diagonalizing Formulation of General Real Gas Matrices", 1st National Fluid Dynamics Congress, in preparation.
- 11) Ames Research Staff : "Equations, Tables, and Charts for Compressible Flow", National Advisory Committee for Aero-nautics report 1135.

航空宇宙技術研究所報告1025号

平成元年7月発行

発行所 航空宇宙技術研究所

東京都調布市深大寺東町7丁目44番地1

電話三鷹(0422)47-5911(大代表) **T182**

印刷所 株式会社 東京プレス
東京都板橋区桜川2-27-12

Printed in Japan