

# SGS モデルなんて飾りです．ユーザーにはそれがわからんのです

松山 新吾（宇宙航空研究開発機構）

## SGS Model is Just a Decoration. Users Can't Understand It

MATSUYAMA Shingo (JAXA)

### ABSTRACT

What kind of effects do you expect from the SGS model? The author feels that this is not an easy question to answer. The title of this paper is a bit of an odd one, but the author does not mean to imply that the SGS model is just a decoration and that users do not need to use it. However, after many years of experience in conducting LES, there are many situations where the SGS model seems to be nothing more than a decoration. In this paper, the author would like to explain the dilemma that the author feels about the SGS model and discuss what the SGS model should be.

### 1. はじめに

シャア大佐「脚が無いな」  
サキオカ少尉「脚なんて飾りです．エライ人にはそれがわからんのです」

（出典）愛蔵版 機動戦士ガンダム THE ORIGIN  
11巻 - ひかる宇宙編 -

これは、脚部が装着されていないジオングを前にしてシャア大佐とサキオカ少尉が交わした会話である（アニメ版ではなく、漫画版 機動戦士ガンダム THE ORIGIN より）。宇宙用としては脚部ユニットがない状態でも通常の仕様であるにも関わらず、未成品、80パーセントしか完成していない、などとエライ人から評されたことに対するやり取りなのだそうである。さて、これを LES に置き換えてみるとどうだろう。（強引ですね、すみません...）

「SGS モデルが入っていないな」

「SGS モデルなんて飾りです．ユーザー（指導教官やレビューアーの場合もあったりする）にはそれがわからんのです」

といったところだろうか。（本当に強引ですすみません。でも、SGS モデルを使用していないというだけでツッコミが殺到することもあったりしますよね...）

LES を実施しているユーザーの皆さんはどのような効果を期待して SGS モデルを使用しているだろうか。これは意外に答えることが難しい質問ではないかと著者は考える。本講演のタイトルは奇をてらったものに感じることだろうが、SGS モデルは飾りだから使

用しなくても良い、と主張をしたいわけではない。しかしながら、長年 LES を実施して経験を積んでくると、SGS モデルは飾りにしかになっていないと思える場面が非常に多い。本稿では著者が感じている SGS モデルに対するジレンマのようなものを説明しながら、SGS モデルはどうあるべきかという思索から得られた考察などを紹介したい。本稿を読んだ皆様から様々な批判や意見をいただき、より良い LES と SGS モデルの探求につながるきっかけになるならば幸いである。

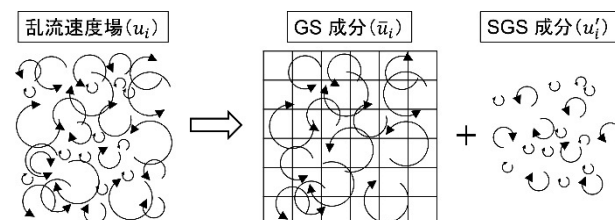


図 1 LES における空間フィルタリング

### 2. そもそも SGS モデルって？

まず、SGS モデルとはそもそもどんなものか、というところから始めよう。図 1 に示すように、LES では速度場  $u_i$  は空間フィルタリングにより格子スケール (GS) 成分  $\bar{u}_i$  とサブグリッドスケール (SGS) 成分  $u'_i$  とに分離される。

$$u_i = \bar{u}_i + u'_i \quad (1)$$

通常、分離された成分の内、SGS 成分  $u'_i$  は捨てられてしまい解析に使用されず、格子上で直接捉えられる GS 成分  $\bar{u}_i$  のみが解析結果として使用される。この

操作は工学的に言うとローパスフィルターであり、小さなスケール（高周波成分）を取り除くというものだが、例えて言うならば、大小の様々な粒が混在する赤玉土（赤玉土がどういうものか知らない人はググってみてください）をふるいにかけて粒の小さい赤玉土を捨ててしまうというようなことをしているのである（図 2）。小さな赤玉土を捨ててよいかどうかの議論も後ほどしたい。

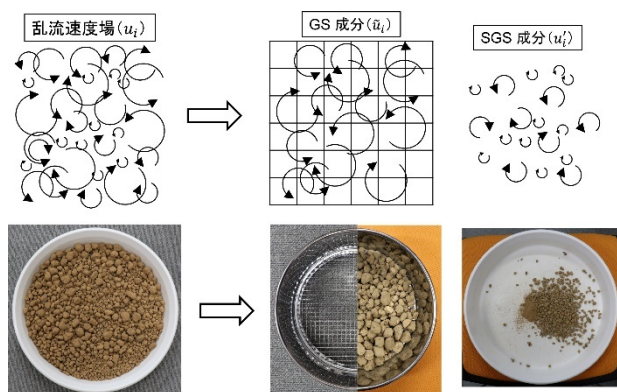


図 2 LES における空間フィルタリングは赤玉土をふるいにかけるのと似ている？

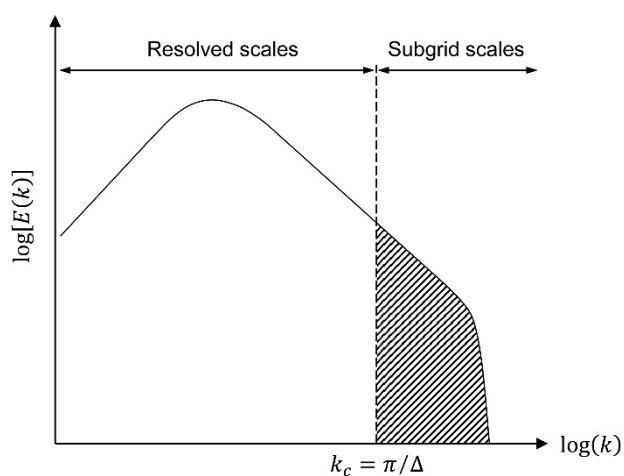


図 3 乱流エネルギースペクトルと空間フィルタリングによるスケール分離の模式図

乱流のスケール分離について、図 3 に示す波数空間での乱流エネルギースペクトルの模式図により空間フィルタリングをさらに説明すると、低波数から高波数まで分布する乱流成分からカットオフ波数 ( $k_c = \pi/\Delta$ ) よりも高い波数の成分 (subgrid scales, 斜線で表示された部分) はフィルタリングにより除去され、 $k < k_c$  の領域の乱流成分 (resolved scales) のみが LES の解として使用される。また、スケール分離の話で注意しなければならないのは、除去されずに保持される白で表示

される resolved scales の乱流スペクトルは空間フィルタリングによって変化することはない（してはいけないと言った方が良くかもしれない）。この点はあまり意識されないことが多いので敢えて触れておきたいが、ふるいの上に残った赤玉土は元々の粒の大きさが保たれたままでなければいけないのである。

さて、前述した空間フィルタリングとは実際にどのように LES に実装されているのだろうか。著者の理解をベースにして説明をしてみよう（間違っている部分があればご指摘ください）。まず、高次の中心差分やコンパクトスキームなどを使用して LES を実施する場合、高次のフィルターを併用することで格子幅程度の微細なスケールの速度成分を除去している。この操作を LES の空間フィルタリングとはなぜか明示的に言わないようであるが、著者にはこの操作が LES の空間フィルタリングそのものになっているように見える。次に陰的 LES (ILES) の場合、風上型の補間スキームにより導入される打ち切り誤差（数値粘性）が空間フィルタリングの役割を果たしているのだと著者は考えている。気づいた読者もおられることだろうが、高次差分法による LES と ILES では SGS モデルの話が全く出てこない。これらのアプローチでは空間フィルタリングを実施するのみで、SGS モデルは使用されないにも関わらず非常に良い結果を与えることが多く、特にコンパクトスキームと高次のフィルターによる LES はある種のスタンダードとなっているように思われる。では、高次差分 LES と ILES はなぜそれで支障がないのだろうか。これらのアプローチには LES が前提としている GS 成分と SGS 成分を分離するという操作は実装されている。ただし、SGS 成分については何かケアをするわけではないので、空間フィルターサイズよりも小さなスケールの乱流成分は捨ててしまう。小さな粒の赤玉土を鉢植えには使用しないのである。この SGS 成分を切り捨てるのがけしからんかどうかという議論はひとまず置いておき、これらのアプローチで良い結果を得るための大前提を述べておくと、結局のところ GS 成分だけで結果を議論することになるので、自分がその計算で調べたいと思っている現象を支配している乱流構造は大小問わず全て GS 成分として格子上で捉えられている（図 3 の resolved scales にカバーされている）ことが必須である。したがって LES とは言うものの、自分が調べたい現象に限っては実質的に DNS になっていると言って差し支えないだろう。このようなアプローチは必然的に高解像度の計算格子を要求するため、かなり大規模な解析になりがちであるが、LES として一つの完成形であると筆者は考えている。

さて、なかなか SGS モデルが出てこないが、ここでスマゴリンスキーモデルなどを使用する通常の LES を考えてみよう。この場合、LES で解かれる支配方程式はすでに空間フィルタリング操作を施した式であり、得られる解も GS 成分 ( $\tilde{u}_i$  など) である。空間フィルタリングを施したナビエ・ストークス方程式は以下であるが (圧縮性の運動量保存式を表示) ,

$$\frac{\partial \tilde{\rho} \tilde{u}_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\tilde{\rho} \tilde{u}_i \tilde{u}_j + \tilde{p} \delta_{ij} - \tilde{\tau}_{ij} + \tilde{\rho} \tau_{ij}^{\text{sgs}}) = 0 \quad (2)$$

左辺に含まれる SGS 応力  $\tau_{ij}^{\text{sgs}} = \overline{u_i u_j} - \tilde{u}_i \tilde{u}_j$  をモデリングする部分でやっと SGS モデルの出番がやってくる。最もシンプルな SGS モデル (渦粘性型モデル) であるスマゴリンスキーモデルでは SGS 応力は以下のようにモデリングされる。

$$\tau_{ij}^{\text{sgs}} = -2\nu_t \tilde{S}_{ij} \quad (3)$$

$$\nu_t = (C_s \Delta)^2 (2\tilde{S}_{ij} \tilde{S}_{ij})^{1/2}$$

さて、この SGS 応力はどんな働きをするのだろうか。分子粘性による粘性応力テンソル  $\tau_{ij}$  は次のようになるが、

$$\tau_{ij} = -\frac{2}{3}\mu \frac{\partial \tilde{u}_k}{\partial x_k} \delta_{ij} + \mu \left( \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \tilde{u}_j}{\partial x_i} \right) \quad (4)$$

非対角成分 ( $i \neq j$ ) を比べてみると明らかなように、渦粘性型モデルを SGS モデルとして導入すると、単純に動粘性係数が増えるだけのように見えてしまう。

$$\begin{aligned} -\tilde{\tau}_{ij} + \tilde{\rho} \tau_{ij}^{\text{sgs}} &= \frac{2}{3}\mu \frac{\partial \tilde{u}_k}{\partial x_k} \delta_{ij} - 2\tilde{\rho} \nu \tilde{S}_{ij} - 2\tilde{\rho} \nu_t \tilde{S}_{ij} \\ &= \frac{2}{3}\mu \frac{\partial \tilde{u}_k}{\partial x_k} \delta_{ij} - 2\tilde{\rho} (\nu + \nu_t) \tilde{S}_{ij} \end{aligned} \quad (5)$$

渦粘性モデルとはその程度のものではかないのかもしれないが、GS 成分と SGS 成分との間の乱流エネルギーのやり取りの観点からもう少し掘り下げてみたい。

まず、GS 成分による流体の運動エネルギー ( $\tilde{k} = \tilde{u}_i \tilde{u}_i / 2$ ) の輸送方程式はフィルター操作を施した運動量保存則に  $\tilde{u}_i$  を乗じることで求められる<sup>1)</sup>。

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{k}}{\partial t} + \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_j} (\tilde{k} \tilde{u}_j)}_{\text{advection}} + \underbrace{\frac{1}{\tilde{\rho}} \frac{\partial}{\partial x_j} (\tilde{p} \tilde{u}_j)}_{\text{press. diff.}} - \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_j} \left( \nu \frac{\partial \tilde{k}}{\partial x_j} \right)}_{\text{visc. diff.}} \\ + \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_j} (\tau_{ij}^{\text{sgs}} \tilde{u}_j)}_{\text{sgs diff.}} \\ = \underbrace{\tilde{u}_i \tilde{u}_j \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_j}}_{\text{production}} - \underbrace{\nu \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_j} \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_j}}_{\text{visc. diss.}} + \underbrace{\tau_{ij}^{\text{sgs}} \tilde{S}_{ij}}_{\text{SGS diss.}} \end{aligned} \quad (6)$$

式 (6) の左辺、第 2～5 項は運動エネルギーをある位置から別の位置へ輸送する効果を表し、右辺にまとめた 3 項の項が生成・消失項になっている。次に SGS 成分による流体の運動エネルギー ( $k_{\text{sgs}} = \overline{u'_i u'_i} / 2$ ) の輸送方程式は通常運動量保存則からフィルター操作を施した運動量保存則を減じて、さらに  $u'_i$  を乗じることで求められる<sup>1)</sup>。

$$\begin{aligned} \frac{\partial k_{\text{sgs}}}{\partial t} + \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_j} (k_{\text{sgs}} \tilde{u}_j)}_{\text{advection}} + \underbrace{\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x_j} (\tilde{u}_i \tilde{u}_i \tilde{u}_j - \overline{u'_i u'_i} \tilde{u}_j)}_{\text{turb. transport}} \\ + \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_j} (\tilde{p} \tilde{u}_j - \tilde{p} \tilde{u}_j)}_{\text{press. diff.}} - \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_j} \left( \nu \frac{\partial k_{\text{sgs}}}{\partial x_j} \right)}_{\text{visc. diff.}} \\ - \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_j} (\tau_{ij}^{\text{sgs}} \tilde{u}_j)}_{\text{SGS diff.}} \\ = -\underbrace{\nu \left( \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_j} \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_j} - \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_j} \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_j} \right)}_{\text{visc. diss.}} - \underbrace{\tau_{ij}^{\text{sgs}} \tilde{S}_{ij}}_{\text{SGS diss.}} \end{aligned} \quad (7)$$

この式についても、左辺の第 2～6 項は運動エネルギーをある位置から別の位置へ輸送する効果を表し、右辺にまとめた 2 項は生成・消失項である。式 (6) と式 (7) を比較すると、右辺にある最終項 SGS dissipation 項は同じ形をしている。これはまさに格子スケール (GS) とサブグリッドスケール (SGS) 間で運動エネルギーのやり取りを担う項になっている。 $\tau_{ij}^{\text{sgs}} \tilde{S}_{ij}$  が負であれば GS から SGS へ運動エネルギーが移動し (カスケード)、正であれば SGS から GS へ運動エネルギーが移動する (逆カスケード)。つまり、ここでの SGS モデルの役割は GS-SGS 間の運動エネルギーの交換をコントロールしているということになる。ただし、最もポピュラーなスマゴリンスキーモデルの場合<sup>2)</sup>、

$$\begin{aligned}\tau_{ij}^{\text{sgs}} \tilde{S}_{ij} &= -2\nu_t \tilde{S}_{ij} \tilde{S}_{ij} \\ &= -2(C_s \Delta)^2 (2\tilde{S}_{ij} \tilde{S}_{ij})^{1/2} \tilde{S}_{ij} \tilde{S}_{ij} < 0\end{aligned}\quad (8)$$

であり  $\tau_{ij}^{\text{sgs}} \tilde{S}_{ij}$  は常に負となるため、スマゴリンスキーモデルがやっていることは GS から SGS へ運動エネルギーを移動させているだけ、言い換えると、SGS 成分を除去しているだけである。また、モデル係数  $C_s$  はエネルギー移動量の大小をコントロールしていることになるが、これはちょうどローパスフィルターのフィルターサイズを調整していることにもなっている。式 (2) のフィルター操作を施したナビエ・ストークス方程式では具体的にフィルターサイズを指定する余地がないように見えるが、SGS 応力項がこの機能を担っているのである。

SGS モデルの役割に関するここまでの議論をまとめておくと、

- SGS モデルは GS-SGS 間の運動エネルギー交換の役割を担っている
- SGS モデルは空間フィルターのフィルターサイズをコントロールしている
- スマゴリンスキーモデル（ダイナミックモデルを除く）の場合、SGS モデルは SGS 成分を除去するローパスフィルターでしかない。モデル係数  $C_s$  がローパスフィルターのサイズを調整するパラメーターになっている。

といったところになるだろうか。

さて、ここで一つ忘れてはいけない事柄を指摘しておきたい。式 (1) で示したように、LES では空間フィルターにより GS 成分と SGS 成分が分離される。高次差分 LES や ILES では GS 成分のみを取り扱って SGS 成分は捨ててしまう、と説明をした。では、SGS モデルを使用した通常の LES の場合はどうなのだろうか。当然であるがフィルタリングされた支配方程式によって格子上で解かれるのは GS 成分のみなので、高次差分 LES や ILES と何ら変わりはない。そして肝心の SGS 成分はどこにいつてしまったかであるが、やはり捨ててしまっているのだと著者は認識している。図 3 の乱流スペクトルによるスケール分離の説明でふれたように、基本的に LES では空間フィルタリングによって GS 成分（図 3 の白部分）は変化しない（してはいけない）。SGS 成分が捨てられずに計算結果に反映されるということは、格子上で捉えられる GS 成分に SGS 成分が取り込まれて GS 成分のスペクトルが変化してしまうことになるので、もはや元の乱流と

は別のものになってしまう。ダイナミックスマゴリンスキーモデルの場合、逆カスケードによってカットオフ周波数付近で乱流スペクトルの高周波成分が増加することもあるかもしれないが、本来のスペクトルよりも高いエネルギー状態になるのは不自然であると著者は考える（そのような場合、大体は計算が発散するのではないだろうか）。

ここまでの議論では SGS モデルを使用した LES であっても SGS 乱流成分は捨てられるだけ（格子上で捉えられる結果に反映されない）という主張をしてきた。この主張が正しいならば、LES では調べたい現象を支配する乱流現象は全て格子上で GS 成分として捉えなければならず、高レイノルズ数の乱流ではもはや格子解像度を上げるしか打つ手がなくなる。実際のところそうなのかもしれないが、図 3 で示した乱流スペクトルの SGS 成分（斜線部分、subgrid scales）を何らかの方法で評価することが出来れば、GS 成分（白部分、resolved scales）と合算することで全乱流成分がリカバーされ、粗い格子による計算であっても良い結果が得られるのではないかと著者は考えている。参考になる例として Le Ribault らの LES<sup>3)</sup> を紹介したい。渦粘性モデルを使用したスタンダードな LES により  $Re = 3000$  の平面乱流噴流に対する解析を行ったものであるが、rms 変動を計算する際に渦粘性を使用して以下のようなシンプルな修正を行っている。

$$\begin{aligned}\text{rms}(u) &= \text{rms}(\bar{u}) + 2/3 (\nu_t/C_s \Delta)^2 \\ \text{rms}(v) &= \text{rms}(\bar{v}) + 2/3 (\nu_t/C_s \Delta)^2 \\ \text{rms}(w) &= \text{rms}(\bar{w}) + 2/3 (\nu_t/C_s \Delta)^2\end{aligned}\quad (9)$$

Le Ribault らの LES の解析対象は比較的レイノルズ数の低い条件であったため、式(9)による修正がどこまで結果を改善したのかは不明であるが、SGS 乱流成分を陽的に解析結果へ取り入れようとする試みはとても興味深い。渦粘性モデルによって SGS 乱流成分を正確に表現できるかどうかはあまり期待できなさそうではあるが、SGS 乱流エネルギー  $k_{\text{sgs}}$  の輸送方程式を解く一方程式モデルや SGS 応力  $\tau_{ij}^{\text{sgs}}$  の輸送方程式を解くタイプの LES モデリング<sup>4,5)</sup> ならば十分に可能性があるのではないだろうか。

### 3. 受け入れざるを得ない LES の限界

第 2 章において、LES では基本的に SGS 成分は捨てられて解析結果に反映されていない、ということ述べた。ここでは、それによって生じる LES の限界について著者の過去の解析事例、昨年度の流力



ANSS2020 オンラインにおいて発表した  $Re = 10^4$  の平面乱流噴流に対する ILES の解析結果<sup>9)</sup>でもって説明したい。勿体を付けずにその限界とはどのようなものかを最初に述べておくと、空間解像度が十分に高い場合は DNS とほぼ同じ結果が得られる（そして SGS モデルは必要ない）が、格子が粗い・空間精度が低いなどで空間解像度が足りない場合には GS 乱流成分まで変化してしまい全く別の結果になってしまう（そして SGS モデルを導入しても改善されない）

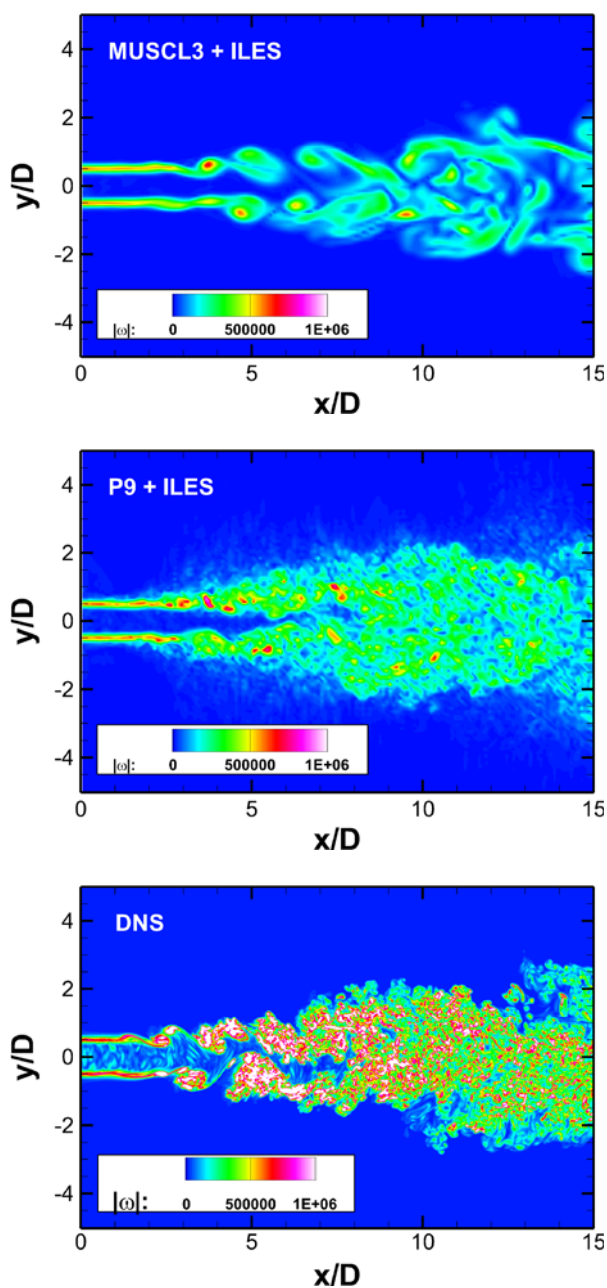


図 4 ILES (MUSCL3+ILES, P9+ILES) および DNS によって得られた  $x$ - $y$  断面 ( $z=0$ ) における瞬時の渦度分布<sup>9)</sup>

というようなものである。LES は粗い格子で良い結果を与えてこそ有用だと著者は考えているのだが、現状では格子解像度と空間精度を上げて高い空間解像度を実現することでしか良い結果が得られない、そして SGS モデルにより結果を改善する効果は期待できない、ということが明らかになってしまい、軽い挫折感を感じているところである。

著者の過去の解析事例に関して、解析条件や解析手法などの詳細は昨年<sup>9)</sup>の流力 ANSS 後刷り論文集に収録されている原稿<sup>9)</sup>を参照いただきたい。ここでは必要最小限の情報だけを説明しておく、正しい解となる DNS はコルモゴロフスケールの 3 倍程度の格子幅で約 3.1 億点の格子を使用し、ILES では 6 倍粗い格子幅で約 154 万点の格子により解析を実施した。また、ILES では 3 次精度から 9 次精度まで空間高次精度スキームを変えてその影響を評価した。ILES によって得られた瞬時の渦度場と DNS による渦度場を比較した結果<sup>9)</sup>を図 4 に示す。さて、この瞬時場の比較結果を見て読者の皆さんはどのような印象を持つだろうか。まず、三次 MUSCL 法による ILES (M3+ILES) の結果は小さな渦がフィルタリングで取り除かれたというよりは小さな渦が空間平均されて大きな渦が形成されている、というように見えないだろうか。それに対して 9 次の多項式による ILES (P9+ILES) では全体的な雰囲気は DNS に近く、DNS の結果を少しぼかしたような瞬時場に見える。

瞬時場の比較はあくまでも印象でしかないので、もう少しきちんとした考察をしてみよう。まず、ILES の結果が DNS をどれだけ再現できているかであるが、図 5 に噴流の中心線 ( $y=0$ ) に沿った平均速度分布と速度変動 rms 分布<sup>9)</sup>を示す。ILES の結果には 5 次 (P5+ILES) および 7 次多項式 (P7+ILES) による解析結果をさらに追加した。平均速度分布の結果をみると、まず、M3+ILES の結果は DNS と大きく異なっており、P5+ILES は少しだけ傾きが大きいものの DNS との一致は悪くなく、P7+ILES と P9+ILES は DNS と非常に良く一致する。rms 変動分布についても同様であり、MUSCL3+ILES は DNS とかなり食い違う結果を与えるが、P5+ILES, P7+ILES, P9+ILES は DNS の結果を非常に良く再現している。やはり、M3+ILES の結果は渦度の瞬時場 (図 4) で感じた通り、本来の乱流 (DNS の結果) とは全く異なった乱流になっているように思われる。

ここまでの比較では M3+ILES による解析は DNS と大きく異なる結果となっているが、その要因について乱流エネルギースペクトルの比較によりさらに考察

してみよう．図 6 に速度場  $\tilde{u}$  (DNS は  $u$ ) から得られた，噴流中心  $y=0$ ,  $x/D=11$  における (スパン方向に平均操作をした) パワースペクトル密度<sup>6)</sup>を示す．図には  $f^{-1.43}$  を示す直線に加え，DNS のスペクトルについてその周波数  $f$  までのエネルギーが全体の 70, 80, 90 % となる周波数に対応した直線 (それぞれ,  $f_{70}$ ,  $f_{80}$ ,  $f_{90}$  とラベルをする) をプロットする．まず，DNS のパワースペクトル密度から粘性散逸領域が始まる約 200 kHz までに全体の 90 % のエネルギーが含まれていることがわかる．高次精度補間による ILES (P5+ILES ~ P9+ILES) のパワースペクトル密度は空間精度が高くなるにつれて解像度が上がり，スペクトルの減衰が始まる周波数が高周波の領域へシフトしていく．最も精度の低い P5+ILES でも全体の 80 % 程度，P9+ILES

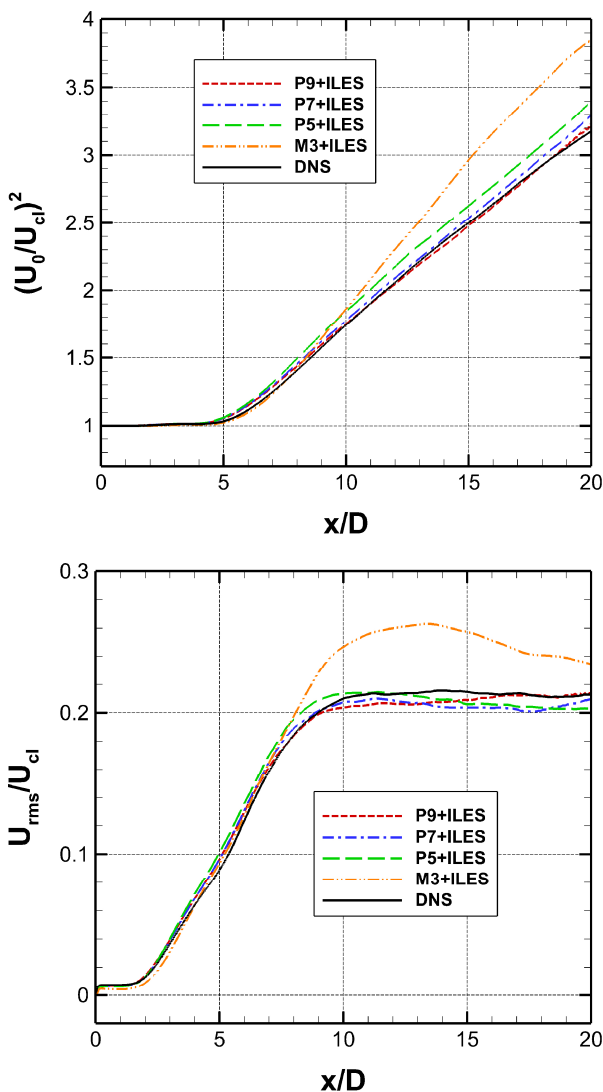


図 5 ILES と DNS の比較<sup>6)</sup>．噴流の中心線 ( $y=0$ ) に沿った平均速度分布 (上図)，および，速度変動 rms 分布 (下図)．

では全体の 90 % 近くのエネルギーを含む周波数までの慣性小領域が解像されている．DNS からずれてしまう結果を与えた M3+ILES によるパワースペクトル密度は全体の 70 % のエネルギーが含まれる周波数よりもかなり低い周波数で減衰が始まるだけでなく，低周波のエネルギーもオーバーシュート気味な高い傾向を示している．この結果が示しているのは，全体の 80 % の乱流エネルギーが解像されていれば時間平均場と rms 変動場を支配する乱流が全て GS 成分として格子上で捉えられており，その場合の LES の解は十分に正確な乱流場の解とみなすことが出来，SGS 成分は捨ててしまって差し支えないということである．さらに，GS から SGS へのエネルギーカスケードのメカニズムが数値粘性 (ILES) によって実現されているので (コンパクトスキームならば高次のフィルターがそれを担う)，もはや SGS モデルの出番はないのである．一方で M3+ILES の場合はかなり低い周波数領域のスペクトルまでしかカバーされていないだけでなく，低周波のスペクトルが一様に底上げされており，元の乱流スペクトルとは異なるものとなっている．これは図 3 の説明で述べた，空間フィルタリングによって GS 乱流成分は変化してはいけないというルール (といってよいのかわかりませんが) から完全に逸脱していることになる．低周波成分が変化してしまうとはどういうことなのか，少しだけ意見を述べておきたい．ここでは結果の図示を省略するが，M3+ILES による乱流スペクトルは  $Re=3000$  での DNS (9 次精度) によるスペクトルと近いものになっている．これは，空間解像度が悪すぎると実効的なレイノルズ数が低下

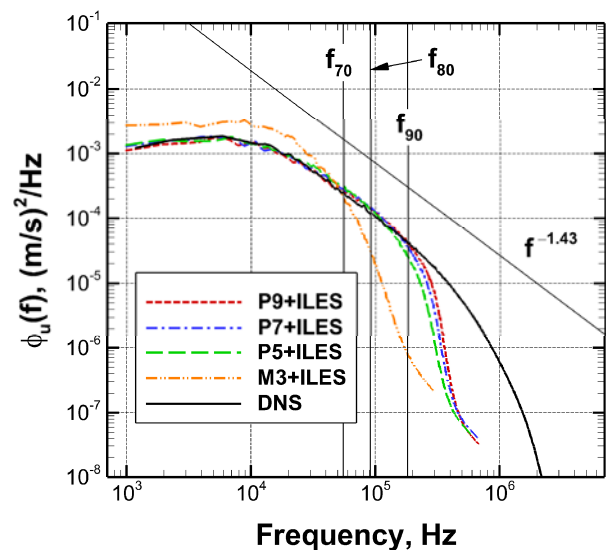


図 6 速度場  $u$  から得られた，噴流中心  $y=0$ ,  $x/D=11$  における (スパン方向に平均操作をした) パワースペクトル密度<sup>6)</sup>

してしまい、 $Re = 10^4$  の計算をしているはずが  $Re = 3000$  の乱流と区別がつかなくなってしまう、ということを示唆している。また、M3+ILES ヘスマゴリンスキーモデルによる渦粘性を追加しても結果は改善されず、さらに悪化するということも付け加えておく（詳しくは文献 6) を参照ください）。著者はこの事実に対し挫折感を感じているが、まだギブアップしたわけではなく、次回、第 54 回流体力学講演会／第 40 回 ANSS においてこの問題について何か解決策などを議論する発表ができればと考えているところである。

#### 4. まとめ

著者が教科書などを読んで理解した限りでは、そもそもの思想として LES ではふるい落とされた小粒の赤玉土（空間フィルタで除去された SGS 成分）を使用するつもりはなさそうである。そうであるならば、つまり GS 成分のみで結果を議論するならば、とにかく格子解像度と空間精度を上げる（空間解像度を上げる）しか手がなく、SGS モデルというものは不要ということになる。GS から SGS へのエネルギーカスケードは数値粘性 (ILES) もしくはコンパクトフィルター（コンパクトスキーム）がその役割を果たすからである。これはこれで LES の一つの完成形であろうと著者は考えているが、これを受け入れてしまうと LES の手法に関する研究は、如何にして解の不安定を抑えながら空間解像度を上げるか、くらいしか取り組むことがなくなり、あとはスーパーコンピュータが高速になることを待つだけという非常に消極的なものになってしまうだろう。一方で、著者は粗い格子でも良い結果を得られるようにするというのも LES の真骨頂ではないかと感じている。何らかの方法で SGS 成分を陽的に評価し、GS 成分と SGS 成分を合算することで全ての乱流成分をリカバーするという考えはそれを実現するための一つの方策になるのではと期待しているが、既存の SGS モデルから SGS 速度成分などを評価することは難しいため、全く別のアプローチを考えないといけないだろう。SGS 乱流エネルギー ( $k_{sgs}$ ) の輸送方程式を解く一方程式モデルや SGS 応力 ( $\tau_{ij}^{sgs}$ ) の輸送方程式を解くタイプの LES モデリング<sup>4,5)</sup>ならば、ふるいから落ちた赤玉土を捨てること

なくきちんと再利用できるのではないだろうか。しかしながら、本稿での議論で示されたように、空間解像度が非常に悪い（格子が粗く、空間精度も低い）場合には GS 成分が変化して実効的なレイノルズ数が低下してしまうため、もはや全く別の条件の乱流を計算していることになるということが見えてきた。この欠陥を解消できなければ、粗い格子による LES で GS 成分と SGS 成分を合算することで良い結果を与えることは不可能である。次回、第 54 回流体力学講演会／第 40 回 ANSS においてこの問題について何か解決策などを提案できればと考えているところである。

#### 謝辞

本研究で紹介した数値計算を実行するにあたって、宇宙航空研究開発機構スーパーコンピュータ「JSS2」および「JSS3」を用いた。ここに記して関係者各位に謝意を表す。

#### 参考文献

- (1) Sagaut, P., Large Eddy Simulation for Incompressible Flows, Third Edition, Springer, pp.52–54, 2004.
- (2) Pope, S. B., Turbulent Flows, Cambridge University Press, pp.587, 2000.
- (3) Le Ribault, C., Sarkar, S., and Stanley, S. A., “Large eddy simulation of a plane jet,” *Physics of Fluids* 11, pp.3069-3083, 1999.
- (4) 松山, “SGS 応力輸送方程式による LES モデリング,” 第34回数値流体力学シンポジウム, A02-3, 2020.
- (5) 松山, “SGS 応力輸送方程式による LES モデリングの提案,” 第36回生研TSFDシンポジウム, 2021.
- (6) 松山, “OK, LES. 乱流噴流の答えを教えて,” 流体力学講演会/航空宇宙数値シミュレーション技術シンポジウム 2020 オンライン論文集, JAXA-SP-20-008, pp.83–91, 2020.