

# 複素特性曲線法を用いた後流の安定解析

伊藤信毅、高木正平（JAXA）

## Stability analysis of a wake with the complex ray theory

Nobutake Itoh and Shohei Takagi

Japan Aerospace Exploration Agency

### ABSTRACT

Instability of the wake behind a plate is investigated theoretically with the complex ray theory. Three kinds of velocity distributions are comparatively used to evaluate effects of the basic-flow approximation on stability characteristics of the wake. Streamwise variation of the maximum velocity defect is approximately described by using a parabolic bridge between the value at the trailing edge and those of the far wake. Computations show the frequency selection through absolute-global instability as well as growth and decay of the global mode far downstream.

**Key Words:** wake, convective instability, absolute instability, global mode, frequency selection

### 1. はじめに —— 谷一郎先生の思い出 ——

複素特性曲線法の研究は1975年頃、筆者が英国ロンドンにて在外研究中に始まりました。ある論文が理解できず、谷先生への手紙に泣き言を書いたところ、「いくら読んでも分からない論文は間違っていると考えるべきです」とのお返事を頂きました。そこで、出発点に立ち戻り、自分の納得する範囲内で一步一步理論を組み立てる努力を始めました。長い中断を挟んで、谷先生が亡くなったあとに、理論構成が整ってきました。最近では絶対全体不安定の現象へ適用されています。

### 2. 複素特性曲線法と絶対全体不安定

複素特性曲線法は Whitham<sup>1)</sup>の運動学的波動理論を複素数の領域に拡張したもので、複素波数と複素振動数を複素位相関数の偏微分係数として定義する。話題を2次元問題に限定するとき、定義式  $\alpha = \partial\Theta / \partial X$  と

$\omega = -\partial\Theta / \partial T$  から位相関数  $\Theta$  を消去して得られる適合条件

$$\frac{\partial\alpha}{\partial T} + \frac{\partial\omega}{\partial X} = 0 \quad (1)$$

を線形安定計算から導かれる分散関係式

$$\omega = \Omega(\alpha, X) \quad (2)$$

と連立させて、攪乱の波数、振動数、時間増幅率および空間増幅率の時間空間的変化を記述する<sup>2)</sup>。但し、 $X$  と  $T$  は波長や周期に比べて一段大きな尺度で無次元化さ

れた空間座標と時間座標で、攪乱のパターンの変化を表現するものである。

いま二次元の波束型攪乱を考えると、上式から  $\alpha$  または  $\omega$  を消去して得られる偏微分方程式は特性曲線

$$\frac{dX}{dT} = C(X, \omega), \quad C \equiv \Omega_\alpha \{\alpha(\omega, X), X\} \quad (3)$$

に沿っての  $\omega$  と  $\alpha$  の変化が

$$\frac{d\omega}{dT} = 0, \quad \frac{d\alpha}{dT} = -\Omega_X(\alpha, X) \quad (4)$$

で表されることを意味する。すなわち特性曲線に沿って複素振動数が不変であるから、これをパラメーターと見なして、(3)を積分すると、次式を得る。

$$T - T_0 = \int_{X_0}^X \frac{dX'}{C(X', \omega)} \quad (5)$$

ここで、波束型攪乱は時刻  $T_0$  において  $X_0$  の位置に導

入されたものとする。一般に群速度  $C(X, \omega)$  は複素数で

あるから、特性曲線は複素空間へ発展する。いま、 $T_0$  と  $X$  を実数に選ぶときには、一般に  $T$  は複素数値を取るが、攪乱が現実の世界に現れるためには(5)の積分が実数値を取らねばならない。すなわち時刻  $T$  に位置  $X$  に現れる攪乱は

$$\text{Im} \left[ \int_{X_0}^X \frac{dX'}{C(X', \omega)} \right] = 0 \quad (6)$$

の関係を満たす振動数成分だけである。一方、 $X$  の代わりに  $T$  を実数に選ぶときには、任意の  $T - T_0 > 0$  に対し常に(6)が満たされるように  $X$  の複素積分路が選ばれる。積分路が再び実軸と交わったとき、交点にそのときの振動数成分が現れる。いずれにしろ、実現条件(6)を満足する振動数成分がこの区間内に発達する成長率は攪乱振幅  $A \equiv \text{Re}[e^{i\theta}]$  の特性曲線に沿う変化としてつぎのように定義される<sup>3)</sup>。

$$N = \omega_i(T_r - T_0) - \text{Im} \left[ \int_{X_0}^X \alpha(X, \omega) dX \right] \quad (7)$$

以上は波数や振動数が時間的空間的に変化する波束型攪乱に対する解であるが、これとの対極は、振動リボンなどによって導入された定常的な攪乱、すなわち振動はするが定常なパターンを持つ攪乱である。この場合には(1)における時間微分項が0となり、したがって  $\omega$  が時間的にも空間的にも変化しない。振動リボンの場合には  $\omega$  は実の定数となり、分散関係式から複素波数  $\alpha$  が  $X$  と  $\omega$  の関数として定まる。空間増幅率  $-\alpha_i$  によって攪乱の成長が記述される。

一方、絶対不安定あるいは全体不安定と呼ばれる現象は複素群速度  $C(X, \omega)$  の零点に関して発生する。いま、

(5)の積分路上に  $C$  の零点  $X_0$  が存在する場合に、積分の可否は関数  $C$  の零点近傍における振舞いに依存する。(3)に与えた  $C$  の定義式を  $X$  で微分して得られる関係式

$$\frac{dC}{dX} = \Omega_{\alpha\alpha} \frac{d\alpha}{dX} + \Omega_{\alpha X} = -\frac{\Omega_{\alpha\alpha}\Omega_X}{C} + \Omega_{\alpha X} \quad (8)$$

を用いてこの振舞いを調べると、次のように分類される。

- i)  $\Omega_X(X_0) \neq 0$  の場合、 $C(X) \sim (X_0 - X)^{1/2}$  の振舞いをし、(6)の積分は有限な大きさを持つ。
- ii)  $\Omega_X(X_0) = 0$  の場合、 $C(X) \sim (X_0 - X)$  で変化し、

$X \rightarrow X_0$  に対して(6)の積分は対数的に発散する。

この分類の ii) は絶対全体不安定に対応するもので、不安定の条件は連立方程式

$$C(X, \omega) = 0, \quad \Omega_X \{\alpha(X, \omega), X\} = 0 \quad (9)$$

の解  $X = X_s, \omega = \omega_s$  が存在し、その時間増幅率が正の値  $\omega_{s1} > 0$  を持つことである<sup>4,5)</sup>。このような特異点が存在するとき、 $X$  が  $X_s$  に到達するには無限の時間が

必要となり、その間にこの振動数成分は正の時間増幅率に従って無限に成長する。実際には線形理論の範囲を超えて成長した後、非線形効果によって有限平衡振幅に押さえられるものと予想される。

条件(9)の解は一般には複素数であるから、この特異点は  $X$  の複素領域に存在するが、そこに仮想的な振動リボンが置かれた場合と同じ現象が生じるものと思われる。一定振動数の空間依存型の攪乱が複素  $X$  面上に形成され、その実軸上の解が現実の流れ場で観測される。この

ときの振動数は  $\omega_s$  が非線形効果で補正されたものになるが、流れ場のレイノルズ数 (Re 数) が絶対全体不安定の臨界 Re 数よりわずかに大きい程度であれば、線形解  $\omega_s$  の実部で近似されて良い。本論文では後流の流れ場に対して連立方程式(9)の解を求め、そのときの時間増幅率が零になる臨界 Re 数及び十分下流における臨界振動数攪乱の発達を調べる。

### 3. 基本流れ場の設定

平板など薄い物体の対称な後流を想定して、基本流をつぎのような形に表す。

$$\bar{u}(x, z) = U_\infty \{1 - U_D(X) \hat{U}(\zeta; X)\} \quad (10)$$

但し、 $X$  は物体長で無次元化された流れ方向座標で物体後縁からの下流方向距離を表し、 $\zeta$  は後流中心線からの垂直距離  $z$  を剪断層厚さ  $\delta$  で無次元化したもの、 $U_\infty$  は一様流速である。剪断層厚さの流れ方向変化を微小量として無視するとき、基本流の  $X$  依存性は  $\hat{U}(0; X) = 1$  のように正規化された速度分布形  $\hat{U}(\zeta; X)$  の  $X$  方向変化と最大欠損速度の一樣流速に対する比、欠損速度比  $U_D(X)$  で表される。

このような基本流に対する安定計算は  $X$  に依存する複素分散関係式を導くが、その依存性は速度分布形からの寄与と欠損速度比からの寄与に分けられる。後流における攪乱の周波数選択機構が逆流領域の存在に関係することはしばしば指摘されており、逆流の存在は欠損速度比が1を超える場合に対応する。このことは周波数選択機構に関係する不安定現象が速度分布形よりも欠損速度比に強く影響されていることを推測させる。もしこの推測が正しければ、すなわち分散式の  $X$  方向変化が主として欠損速度比に依存し、速度分布形への依存性が無視できるならば、分散関係式(2)は

$$\omega = \Omega(\alpha, X) = \hat{\Omega}\{\alpha, U_D(X)\} \quad (11)$$

の形に表せて、関数 $\Omega(\alpha, X)$ の $X$ 微分は $U_D(X)$ の $X$ 微分に比例する。この場合には絶対全体不安定の必要条件(9)の後半部は欠損速度比の極大点で近似的に満たされ、この点において群速度の零点を探せばよいことになる。なお、群速度の零点は、等角写像 $\omega = \Omega(\alpha)$ の複素 $\alpha$ 面における鞍部点に対応する<sup>4)</sup>。

以上の推論を検証するためには、速度分布形と欠損速度比をいろいろに変えて群速度の零点を計算する必要がある。速度分布形にはつぎの3種類、5ケースを用いる。

①漸近速度分布形<sup>6)</sup>: 
$$\hat{U} = \exp\left\{-\frac{\zeta^2}{4}\right\} \quad (12)$$

②Mattingly-Criminale 型<sup>7)</sup>:

$$\hat{U} = \text{sech}^2(a\zeta), \quad \text{sech}^2 a = \frac{1}{2} \quad (13)$$

③Koch 型<sup>8)</sup>:

$$\hat{U} = \frac{1}{2 \tanh(b/d)} \left\{ \tanh \frac{\zeta+b}{d} - \tanh \frac{\zeta-b}{d} \right\} \quad (14)$$

但し、パラメータの値を③-1:  $b = 0.1, d = 0.04$ 、③-2:

$b = 0.1, d = 0.06$  および③-3:  $b = 0.1, d = 0.10$  の3組

に選んだ。図1にはこれら5つの速度分布形が比較されている。ここでは $z$ が半値半幅 $h$ で無次元化されている。

つぎに、欠損速度比の下流方向変化を簡単なモデル式で表現する。物体から十分離れた下流では後流の漸近解

$$U_D(X) = \frac{C_1}{\sqrt{X}}, \quad C_1 \equiv \frac{0.664}{\sqrt{\pi}} \quad (15)$$

が知られているので、この曲線と物体後縁における欠損速度比の値  $U_D(0)=1$  とを上に凸の2次曲線で接続す

る。2曲線が共通の接線を持つように接続されるとき、2次曲線は一つの任意パラメータを含む形で定まる。図2には任意パラメータ $s$ のいくつかの値に対する $U_D(X)$ が比較されており、これらの曲線と実験結果を比較すれば $s$ の適正值が定まる。

#### 4. 計算結果と考察

安定性の計算には Orr-Sommerfeld 方程式を用い、後流の中心軸に対して反対称な解のみを選んだ。はじめに、漸近速度分布の中立安定曲線に対する Taneda<sup>9)</sup>の計算結果と Mattingly-Criminale 型速度分布に対する Nakaya<sup>10)</sup>の鞍部点計算を再現し、計算プログラムの精度を確認した。

つぎに速度分布形と欠損速度比を与えて実振動数に対する複素波数固有値の鞍部点、すなわち複素群速度の零

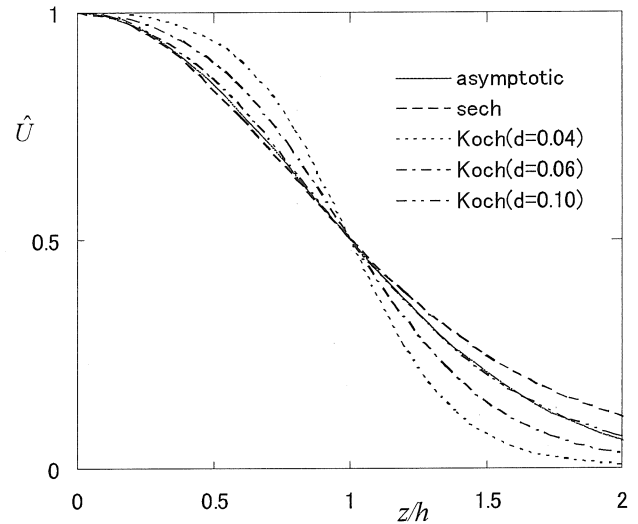


図1. 速度分布形の比較

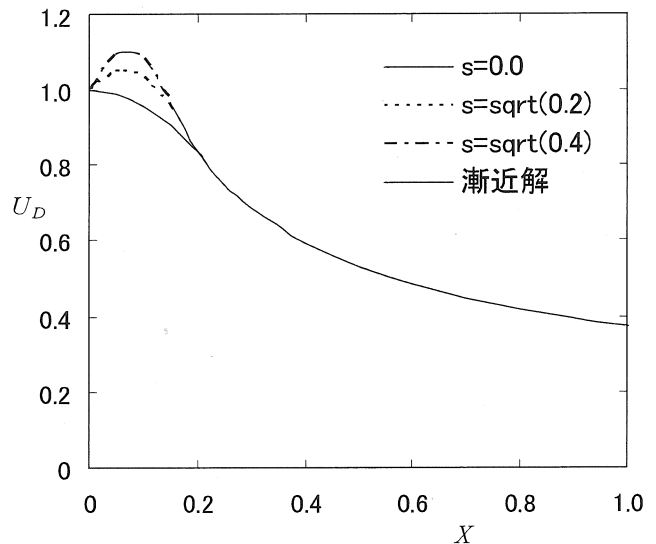


図2. 欠損速度比 $U_D(X)$ の形状

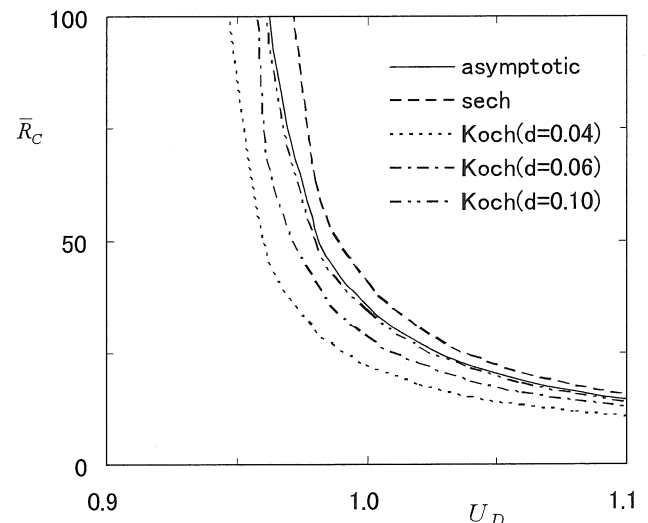


図3. 臨界レイノルズ数の欠損速度比に対する変化

点  $C(\omega, R) = 0$  を算出した。結果を一樣流速  $U_\infty$  と速度分布の半値半幅  $h$  に基づく無次元量で表すとき、臨界レイノルズ数  $\bar{R}_C$  と臨界振動数  $\bar{\omega}_C$  の  $U_D$  に対する変化は図3と図4のようになる。これらの結果は、「速度分布形の相違が後流の安定特性に大きな影響を持たない」とする当初の推測を支持しているように見えるが、さらに定量的な検討が必要である。

いずれにしても、絶対全体不安定の条件(9)を満たす位置  $X_S$  は  $U_D$  極大点の周辺にあり、それは物体後縁のごく近傍である。ここではその点の第0近似として、 $X_S = 0$ ,  $U_D = 1$  を取り、図4の漸近速度分布に対する

曲線から対応する絶対振動数を  $\bar{\omega}_S = 0.491$  に選ぶ。既に述べたように、条件(9)は単独周波数の選択機構であり、選択された位置に選択された振動数の振動リボンが置かれた場合と同様な自励振動空間増幅型攪乱(全体モード)が流れ場全体に広がる。解  $\omega_S$  が正の虚部を持つ場合には振動リボンの振幅が時間的成長を経て非線形平衡振幅に達し、全体モードの振動数は非線形効果によって補正された  $\omega_S$  となる。もし流れ場の  $Re$  数  $R$  が図3から定まる臨界  $Re$  数をわずかに超える程度であれば、非線形効果は弱い非線形理論で予測することができ、平衡振幅は  $R - R_C$  に比例する。

簡単のため  $Re$  数が臨界値に等しい場合、すなわち平衡振幅が0の場合を選び、上記絶対振動数を持つ攪乱の空間増幅率を下流方向距離に対してプロットしたものが図5である。但し、空間増幅率は物体長で無次元化されており、また、この計算には後縁から十分下流で成り立つ漸近速度分布が用いられている。攪乱は物体の約3倍程度下流で空間減衰に転じ、後縁からそこまでの増幅率を積分した区間増幅率  $N$  はおよそ2である。

## 5. 結 論

- 1) 流れ場の  $X$  方向変化を速度分布形と最大欠損速度に分解するとき、安定性はほとんど後者に依存する。
- 2) 速度分布形の影響が無視できるとき、自励振動発生(絶対全体不安定)の十分条件は逆流領域の存在と極めて低い臨界  $Re$  数を超えることである。
- 3) 無次元臨界振動数は速度分布形にほとんど依存しない。
- 4) 弱い超臨界で発生する自励振動攪乱(全体モード)は大きな空間増幅率を持つが、その値は欠損速度の減少に伴って下流方向に低下し、物体長の3倍程度下流で空間減衰に転ずる。

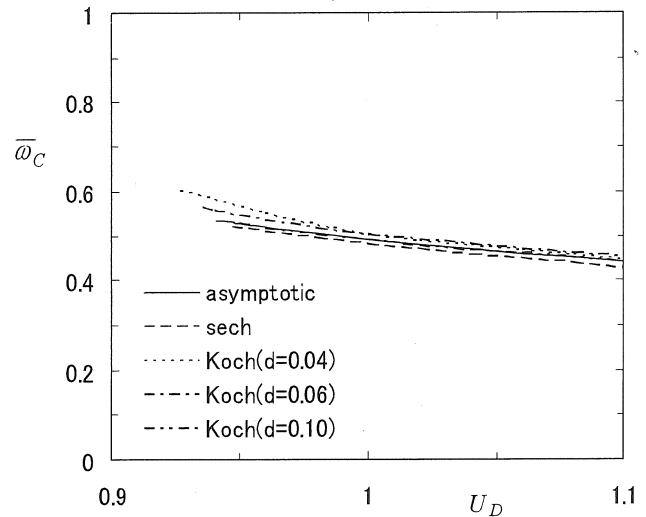


図4. 絶対振動数の欠損速度比に対する変化

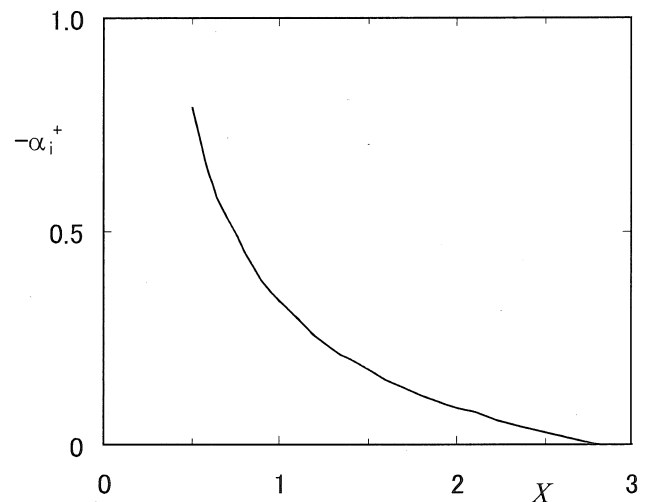


図5. 全体モードの空間増幅率

## 参 考 文 献

- 1) Whitham, G. B. 1974 *Linear and nonlinear waves*. John Wiley.
- 2) Itoh, N. 1980 *Laminar-Turbulent Transition*, eds. R. Eppler & H. Fasel, pp.86-95, Springer.
- 3) Itoh, N. 1996 *Fluid Dyn. Res.* **18**, 337-354.
- 4) Monkewitz, P. A. et al. 1993 *J. Fluid Mech.* **251**, 1-20.
- 5) Itoh, N. 2001 *Trans. Jpn. Soc. Aero. Space Sci.* **44**, 96-105.
- 6) Schlichting, H. 1968 *Boundary Layer Theory*. McGraw-Hill.
- 7) Mattingly, G. E. & Criminale, W. O. 1972 *J. Fluid Mech.* **51**, 233-272.
- 8) Koch, W. 1985 *J. Sound and Vibration*, **99**, 53-83.
- 9) Taneda, S. 1963 *J. Phys. Soc. Jpn.* **18**, 288-296.
- 10) Nakaya, C. 1976 *J. Phys. Soc. Jpn.* **41**, 1087-1088.