

No. 2 長いスパンをもつ三次元キャビティ内流れの流線パターン

石井克哉、二瓶友典（名古屋大）、安達静子（理研）

Streamlines in 3D lid-driven cavity flows with large spanwise aspect ratios

Katsuya Ishii*, Tomonori Nihei* and Shizuko Adachi**

*ITC, Nagoya Univ.

**Riken

ABSTRACT

Streamlines in the incompressible vortical flows in three-dimensional lid-driven cavities at the Reynolds number $Re=850$ are numerically studied using a combined compact finite difference (CCD) scheme with high accuracy and high resolution. The results show that the bifurcation of the streamline pattern occurs at the spanwise aspect ratio between 4 and 5. The chaotic streamlines are generally observed at $Re=850$. However, the tori of streamlines localized near the symmetric plane are observed for the cavity flows with longer spans,

Keywords : Incompressible flow, Lid-driven cavity, Spanwise aspect ration, Torus of streamline, Combined compact difference

1. はじめに

非圧縮流体の定常流での流線の振る舞いは体積保存の性質のため、ハミルトン力学系での軌跡と同じような振る舞いをする。流体を満たした3次元の箱の一つの面をある辺の方向に一定速度でずらすことで発生する立方体キャビティ流れの中で、面の速度を変化させることにより、流線の島構造やカオス的な流れが発生することは、過去に著者らによって調べられている。^{1,2)} 一方、キャビティ流れの研究は、ギアなどの研究をもととした数値スキームのテスト問題の位置づけや、コーティング機械の中の流れのように現実の機械内の流れの一部との位置づけも考えることができ、様々な研究が行われている。³⁾ この中で、3次元キャビティ内での2次元流れの安定性の研究が行われ、スパン方向の長いキャビティでの実験も行われている。⁴⁾ Albensoederらはスパンアスペクト比6.55の実験を行い、中心分にセル構造を観測したことを報告し大きなスパンアスペクト比では側壁の影響は無くなると報告している。しかし実験の可視化では、流体内部の流れ構造を観察するのは困難である。このため、新しく開発した高精度高解像度のスキームを使って、大きなスパンアスペクト比をもつキャビティ流れを調べる。

2. 計算方法（結合コンパクト差分法）

差分法による関数 $f(x)$ の一階微分を考える。格子間隔 h で x を離散化し、 $x_i = ih$ ($i=1,2,3,\dots$) と書き、関数とその微分を $f(x_i)=f_i, f'(x_i)=f'_i$ とする。このとき、7点を使用

する通常の中心差分は

$$f'_i = a \frac{f_{i+1} - f_{i-1}}{2h} + b \frac{f_{i+2} - f_{i-2}}{4h} + c \frac{f_{i+3} - f_{i-3}}{6h}$$

と書け、最大6次精度を表現できる。一方、コンパクト差分は、 f'_i の関係式も使い、たとえば、5点の微分値を使うと

$$\beta f'_{i-2} + \alpha f'_{i-1} + f'_i + \alpha f'_{i+1} + \beta f'_{i+2} = c \frac{f_{i+3} - f_{i-3}}{6h} + b \frac{f_{i+2} - f_{i-2}}{4h} + a \frac{f_{i+1} - f_{i-1}}{2h}$$

と表すことができ、最大10次までの精度を得ることができる。ただし、 f'_i を求めるには、5重対角行列の反転を行う必要がある。結合コンパクト差分法は以下のように、三点の f_i, f'_i, f''_i などの関係式

$$\begin{aligned} f'_i &= a_1(f_{i+1} - f_{i-1}) + a_2(f'_{i+1} - f'_{i-1}) + a_3(f''_{i+1} - f''_{i-1}) + a_4(f_{i+1} - f_{i-1}) \\ f''_i &= b_1(f_{i+1} + f_{i-1} - 2f_i) + b_2(f'_{i+1} + f'_{i-1}) + b_3(f''_{i+1} + f''_{i-1}) + b_4(f_{i+1} + f_{i-1}) \\ f'''_i &= c_1(f_{i+1} - f_{i-1}) + c_2(f'_{i+1} - f'_{i-1}) + c_3(f''_{i+1} - f''_{i-1}) + c_4(f_{i+1} - f_{i-1}) \end{aligned}$$

を使って計算するもので、最大で一階微分8次精度、二階微分8次精度、三階微分6次精度の精度を得ることができる。ここで記述した差分法の精度は、ある点での差分近似をTaylor展開した場合、誤差が h のどのオーダーで現れるかを示したものである。しかし、差分法の評価として解像度 (resolution) とよぶ概念も重要であることを Lele(1992)[2] が指摘している。解像度とは、差分近似によりFourier展開のどの波数まで微分が正確に表現できるかを表す概念であり、具体的には

$$u(x) = e^{-ikx}, u'(x) = -ike^{-ikx}$$

として、差分式に代入する。コンパクト差分の場合、陽パートの差分演算子を M_R 、陰部の差分演算子を M_L とすると、 u' の係数として正しい $-ik$ の代わりに、差分近似の波数

$$k'(k) = i \frac{(M_R u)_k}{(M_L u)_k} = \left(\frac{\sum A_m \sin m k h}{\sum B_n \cos n k h} \right)$$

を使った $-ik'$ が得られる。括弧の中は陽部、陰部とも中心差分で近似した場合の形であり、通常の場合では、分母は1となる。図1にいろいろな差分スキームの $kh-k'$ の関係式を示す。

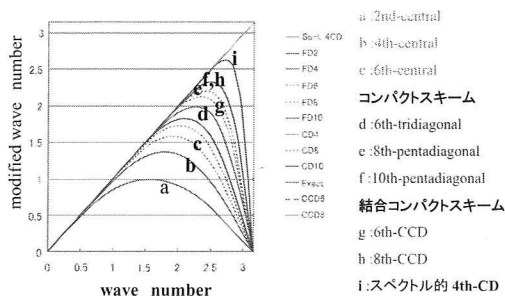


図1. 中心差分、コンパクト差分、結合コンパクト差分の解像度

格子間隔により、解像できる波数は定まり π/h 以上の波数 u (格子点2点以下の波長) の波は解像できない。図1のa,b,cが中心差分であり、 $kh < 1.2$ くらいの範囲の波、格子点が一波長に5点以上入る波しか解像できない。しかし、コンパクト差分、結合コンパクト差分のグループはさらに高波数までを解像でき、 $kh < 2$ 程度の波 (3点程度) の波まで解像できることを図1は示している。

非圧縮計算を行う場合、非圧縮条件を満たさなければならない。疑似圧縮を使う方法、速度場の補正にポアソン方程式を使う方法などが知られているが、ここでは補正を使う方法の一つとして、広く使われている圧力に関するポアソン方程式を解くMAC方法を採用する。結合コンパクト差分法を用いて、ポアソン方程式を解く場合、ADI法として方向ごとに、方程式と、微分に関する関係式を組み合わせることで解くことが考えられる。二次元の場合、この単純な方法は安定な解法となるが、三次元の場合、安定にはならない。このため、擬似的な時間ステップ $\Delta\tau$ を導入し、また、デルタフォームで圧力を書き表し、

$$I. (1 - \Delta\tau \delta_x^2) \Delta p^{**} = \Delta\tau (\delta_x^2 + \delta_y^2 + \delta_z^2) p^n - q$$

$$II. (1 - \Delta\tau \delta_y^2) \Delta p^* = \Delta p^{**}$$

$$III. (1 - \Delta\tau \delta_z^2) \Delta p = \Delta p^*$$

$$p^{n+1} = p^n + \Delta p$$

として、I,II,IIIの式を繰り返して解き、最終的にIの右辺 $=0$ を満たす圧力 p を求める。ここで δ は添字方向の微分を表す。たとえば、I式は Δp の x -方向の一階、二階、三階微分の結合コンパクト差分での関係式との連立方程式と見なし、 4×4 行列をもつブロック三重対角行列を解く

ことで、非常に高精度でポアソン方程式の解が得られる。また、境界がある場合の関係式は、結合コンパクト差分がエルミート関数展開と深く関わっていることを考慮して求めることができる。

図2にレイノルズ数100の立方体キャビティの向かい合った面中心を結ぶ線上での速度分布を示す。 $y=1$ の面が x 方向に1の速度で動いている。丸が Babu and Korpela の $63 \times 63 \times 63$ の壁に格子点を集中させた結果であり、実線が $33 \times 33 \times 33$ 等間隔格子による結合コンパクト差分の結果である。

点数が少ないにもかかわらず、結果はほぼ同じ結果を与える。

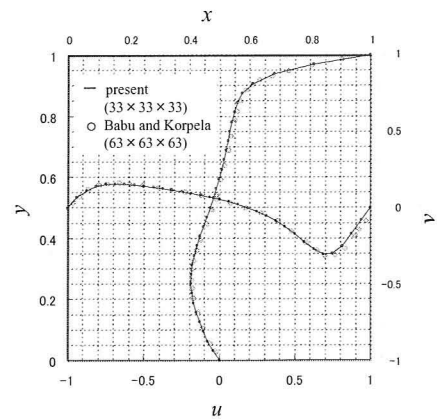


図2. 立方キャビティの速度分布 (実線: 結合コンパクト法、○: 従来の差分法の結果)

3. 計算結果

図3に3次元キャビティの概略図と解析に用いた座標系を示す。

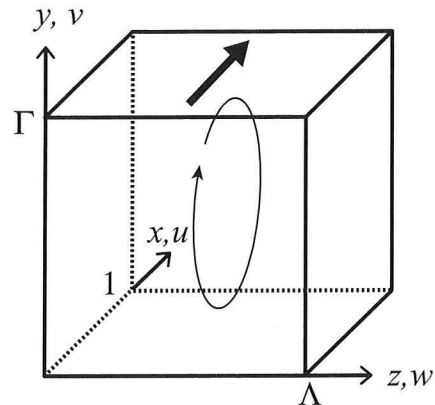


図3 三次元キャビティの概略図

3次元キャビティは $0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1.0 \leq z \leq \Lambda$ とし、スパンアスペクト比 Λ を1,3,4,5,6.55と変化させ、内部の流れ場を観察した。面 $y=1$ は速度1で x の正方向に移動し

ているとし、レイノルズ数は850に固定した。静止した状態から急に上面を速度1に動かし、内部の流体がほぼ定常な状態になるまで、非定常な Navier-Stokes 方程式を解くことによって定常解を得ている。結合コンパクト差分を使って得た、格子上的速度および速度の空間一階微分値のデータをもとに、キャビティ内のある点での速度を2次精度で補間した。この速度場を用いて、ある点から出発して適当な時間での流体粒子の軌跡を描くことで、流線の可視化を行った。図4に $\Lambda=1$ の3つの流線を示す。初期値は右半分の中で異なる3点を選んである。図中で、上面が速度1で手前に運動している。面 $z=0.5$ で、速度ベクトルの z 成分は反対称となるため、流線は面 $z=0.5$ を貫くことはない。

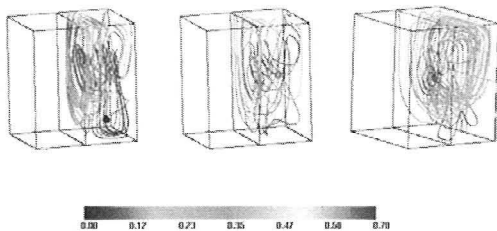


図4 $\Lambda=1$ の3つの流線

3つの流線はいずれも右半分全体を覆い、chaoticな様相を示していることがわかる。これらの流れ場の様子は $Re \sim 350$ 以上で観察でき、参考資料1,2の中での報告と一致する。

図5-1～3に $\Lambda=6.55$ の、3つの流線図を示す。

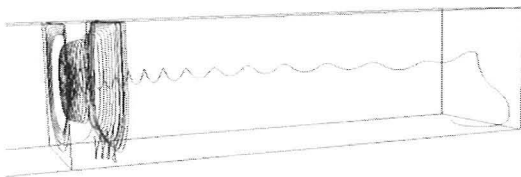


図5-1 $\Lambda=6.55$ の流線図(1)

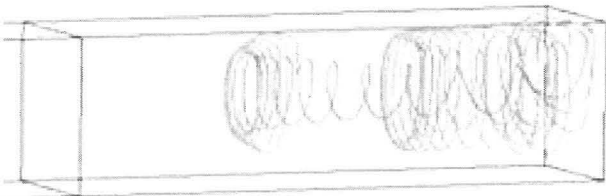


図5-2 $\Lambda=6.55$ の流線図(2)



図5-3 $\Lambda=6.55$ の流線図(3)

面 $z=3.275$ に対し、流線は対称になっているため、いずれも領域の右半分だけを示している。また、図4と同様に、上面は手前に速度1で運動している。図5-1の流線は右端の原点近くから始まって、一度、キャビティ流れの中心軸付近を半径の小さい螺旋を描きながら対称面近くまできて xy 面での回転運動の半径を大きくしながら、負の z 方向の運動をおこない、二次元キャビティ流で二次渦が見られるような下面の辺付近で、対称面にほぼ平行な面での回転運動を行っているところまでを図示している。流線は閉じてはいない。ここで示したのは一部であり、流線は流れ場全体を動き回ると考えられる。図5-2には面 $z=0$ 付近より出発して、流れの中心軸付近を通過して対称面に近づき、壁付近を伝わって側面 $z=0$ 付近に戻り、再度、キャビティ流れの中心軸付近を対称面近くに戻っている流線を示す。さらに時間を続けると、これらの流線は、キャビティの右の広い領域をうめ、カオス的になる。しかし、対称面近くにはこうした流線が入り込まない領域がある。その領域の一点を初期値として流線を描いたのが、図5-3である。流線は閉じた筒状の閉曲面(トーラス)上に束縛されている。さらに、初期値を少し変化させると、前のトーラスの中に含まれる、異なるトーラスを描くことができる。これらの様子をより詳しく調べるため、 $x=0.5$ の面でPoincaré map、つまり、ある流線が x の負方向の速度成分を持って面 $x=0.5$ を貫く点を描いた図を6に示す。ただし、図は左半面を描き原点が左下になるようにしている。左が側壁、右は対称面である。図には12流線のPoincaré mapを同時に描いている。

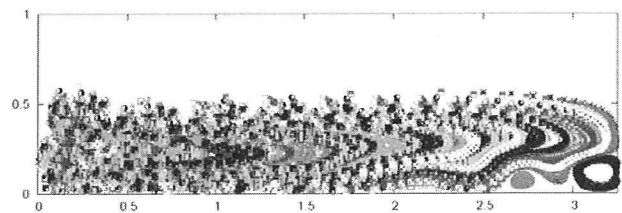


図6 面 $x=0.5$ での12流線のPoincaré断面図($\Lambda=6.55$)

右端に二つのゆがんだ円を描くPoincaré mapが見える。特に、右側のものが図5-3の流線に対応する。図5-1,2に対応する流線がその他の領域の広がった点を示し、特に、左側の側面付近ではその位置が入り乱れ、chaoticになっている。

図7に対応するAlbensoederら⁴⁾の実験の可視化写真を示す。図6と同様に、左端が側壁、右側が対称面である。

図7の実験をAlbensoederらは中央付近に二次元流の不安定性に対応するセル構造ができていると説明している。しかし、図6と図7を比較したとき、実験と数値計算で得た流れ場は、ほぼ一致しているといえる。また、図7でセル的に見えたものは、図6のトーラス的な流線(図

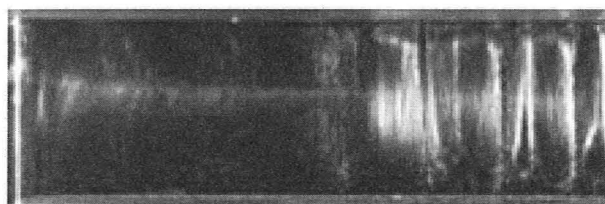


図7 面 $x=0$ 付近での流れの可視化 (Re=Albensoeder ら⁴⁾)

5-3) に対応する領域と隣接するトーラス的な流線を分離するカオス的な流線 (図5-1,2) の組合わさった構造を横から観察したものだと、結論できる。図6で、対称面近くでも、カオス的なグローバルな流線が存在することは重要であり、大きなスパンアスペクト比になっても、側壁の影響が無視できないことを示している。

一方、トーラス的な流線 (図5-3) はスパンアスペクト比が小さくなると観察されない。図8-1,2に $\Lambda = 4, 5$ の面 $x=0.5$ での12流線のPoincaré mapをそれぞれ示す。



図8-1 面 $x=0.5$ での12流線のPoincaré断面図 ($\Lambda = 4$)

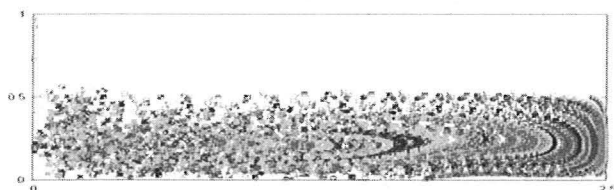


図8-2 面 $x=0.5$ での12流線のPoincaré断面図 ($\Lambda = 5$)

いずれも、図6と同様左半面だけを示している。また、これら図では、トーラス的な流線は観察できないが、図8-1の $\Lambda = 4$ ではすべての下半分の領域がカオス的な流線で埋められるのに対して、図8-2の $\Lambda = 5$ では右下部にカオス的な流線が入り込まない領域が見える。また、図6中で、 $z < 2$ の領域ではトーラス的な流線が観察されないを考慮すると $\Lambda = 4$ と5の間で、トーラス的な流線が発生すると考えられる。

4. まとめ

1. spectral-like CCD scheme は流れ場の高精度、高解像度の計算に利用できる。数値計算で、divU の誤差を小さくするのに有効である。
2. $Re=850$ で3次元キャビティのスパン長を変化させると、キャビティ中央部分にトーラス状の流線が現れる。その出現はスパンアスペクト比4と5の間であり、スパンアスペクト比が増加すると数が増加する。
3. 対称性が保たれる場合、片側では各トーラスのヘリカルへの向きは同じで、カオス的なグローバルの流れで分離されている。

参考文献

- 1) Ishii K, Iwatsu R. Numerical Simulation of the Lagrangean flow structure in a driven-cavity. "Topological Fluid Mechanics", Eds Moffatt et.al. Cambridge Univ. Press, (1990)54-63.
- 2) Ishii, K., Iwatsu, R., Kambe, T., Matsumoto, N, Chaotic streamlines in viscous incompressible flows, "Nonlinear worlds", World Scientific Publishing Co. (1989), 490-503
- 3) Shankar PN, Deshpande MD. Fluid mechanics in the Driven Cavity. Annu. Rev. Fluid Mech. 2000; 32:93-136.
- 4) Albensoeder S, Kuhlmann HC, Rath HJ. Three-dimensional Centrifugal-flow instabilities in the Lid-driven-cavity Problem. Phys. Fluids 2001; 13(1):121-135.
- 5) Nihei T, Ishii K. A Fast Solver of the Shallow Water Equations on a Sphere using a Combined Compact Difference Scheme. J. Comput. Phys. 2003; 187:639-659.