No. 15　非一様乱流の交差独立性完結仮説による統計理論

巽　友正　（京大、国際高等研）

Statistical theory of inhomogeneous turbulence under the cross-independence closure hypothesis

Tomomasa Tatsumi

Kyoto University, IIAS

ABSTRACT

Inhomogeneous turbulence is studied statistically using the cross-independence closure hypothesis for the equations of multi-point velocity distributions. First, the turbulent velocity field is decomposed into the mean flow and turbulent fluctuation around the mean. The equations for the mean velocity and the distributions of turbulent velocity are derived. These equations are closed by applying the cross-independence closure hypothesis which has been successfully used for homogeneous turbulence (Tatsumi & Yoshimura, 2004, 2006). The closed equations are obtained for the mean velocity and the one- and two-point velocity distributions. At large Reynolds numbers, these equation are shown to give the inertial normal velocity distributions in the outer range and the non-normal velocity distributions in the local range respectively.

Key Words: Inhomogeneous turbulence, Cross-independence closure hypothesis, Inertial normal velocity distribution, Local non-normal velocity distribution

1. 乱流速度の Reynolds 分解

乱流速度 $\mathbf{u}(\mathbf{x},t)$ を、その平均$\langle\mathbf{u}(\mathbf{x},t)\rangle$とそれからの変動 $\hat{\mathbf{u}}(\mathbf{x},t)$とに Reynolds 分解すると、

$$\mathbf{u}=\langle\mathbf{u}\rangle+\hat{\mathbf{u}},\quad \langle\hat{\mathbf{u}}\rangle=\mathbf{0}, \tag{1}$$

となる。このとき、圧力を消去した運動方程式、

$$\partial\mathbf{u}/\partial t+(\partial/\partial\mathbf{x}\cdot\mathbf{u})\mathbf{u}-\nu|\partial/\partial\mathbf{x}|^2\mathbf{u}+(\partial/\partial\mathbf{x})(1/4\pi)\times$$
$$\times\int|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|^{-1}\{\partial/\partial\mathbf{x}'\cdot(\mathbf{u}'\cdot\partial/\partial\mathbf{x}')\mathbf{u}'\}d\mathbf{x}'=0, \tag{2}$$

および、非圧縮条件、

$$\partial/\partial\mathbf{x}\cdot\mathbf{u}=0 \tag{3}$$

に(1)式を代入すると、平均速度$\langle\mathbf{u}\rangle$に対する運動方程式と非圧縮条件、

$$\partial\langle\mathbf{u}\rangle/\partial t+(\partial/\partial\mathbf{x}\cdot\langle\mathbf{u}\rangle)\langle\mathbf{u}\rangle+\langle(\partial/\partial\mathbf{x}\cdot\hat{\mathbf{u}})\hat{\mathbf{u}}\rangle$$
$$-\nu|\partial/\partial\mathbf{x}|^2\langle\mathbf{u}\rangle+(\partial/\partial\mathbf{x})(1/4\pi)\int|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|^{-1}\partial/\partial\mathbf{x}\cdot$$
$$\cdot\{(\partial/\partial\mathbf{x}'\cdot\langle\mathbf{u}'\rangle)\langle\mathbf{u}'\rangle+\langle(\partial/\partial\mathbf{x}'\cdot\hat{\mathbf{u}}')\hat{\mathbf{u}}'\rangle\}d\mathbf{x}'=0, \tag{4}$$
$$\partial/\partial\mathbf{x}\cdot\langle\mathbf{u}\rangle=0, \tag{5}$$

および、変動速度 $\hat{\mathbf{u}}$ の運動方程式と非圧縮条件、

$$\partial\hat{\mathbf{u}}/\partial t+(\partial/\partial\mathbf{x}\cdot\langle\mathbf{u}\rangle)\hat{\mathbf{u}}+(\partial/\partial\mathbf{x}\cdot\hat{\mathbf{u}})\langle\mathbf{u}\rangle+(\partial/\partial\mathbf{x}\cdot\hat{\mathbf{u}})\hat{\mathbf{u}}$$
$$-\langle(\partial/\partial\mathbf{x}\cdot\hat{\mathbf{u}})\hat{\mathbf{u}}\rangle-\nu|\partial/\partial\mathbf{x}|^2\hat{\mathbf{u}}+(\partial/\partial\mathbf{x})(1/4\pi)\times$$
$$\times\int|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|^{-1}\partial/\partial\mathbf{x}'\cdot\{(\partial/\partial\mathbf{x}'\cdot\langle\mathbf{u}'\rangle)\hat{\mathbf{u}}'+(\partial/\partial\mathbf{x}'\cdot\hat{\mathbf{u}}')\langle\mathbf{u}'\rangle$$
$$+(\partial/\partial\mathbf{x}'\cdot\hat{\mathbf{u}}')\hat{\mathbf{u}}'-\langle(\partial/\partial\mathbf{x}'\cdot\hat{\mathbf{u}}')\hat{\mathbf{u}}'\rangle\}d\mathbf{x}'=0, \tag{6}$$
$$\partial/\partial\mathbf{x}\cdot\hat{\mathbf{u}}=0, \tag{7}$$

が導かれる

2. 変動速度分布方程式

空間内の３点における変動速度、$\hat{\mathbf{u}}_1=\hat{\mathbf{u}}(\mathbf{x}_1,t)$, $\hat{\mathbf{u}}_2=\hat{\mathbf{u}}(\mathbf{x}_2,t)$, $\hat{\mathbf{u}}_3=\hat{\mathbf{u}}(\mathbf{x}_3,t)$ の結合確率分布は、

$$f(\mathbf{v}_1,\mathbf{x}_1;t)=\langle\delta(\hat{\mathbf{u}}_1-\mathbf{v}_1)\rangle=\langle\delta(\hat{\mathbf{u}}(\mathbf{x}_1,t)-\mathbf{v}_1)\rangle,$$
$$f^{(2)}(\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2;\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2;t)=\langle\delta(\hat{\mathbf{u}}_1-\mathbf{v}_1)\,\delta(\hat{\mathbf{u}}_2-\mathbf{v}_2)\rangle$$
$$=\langle\delta(\hat{\mathbf{u}}(\mathbf{x}_1,t)-\mathbf{v}_1)\,\delta(\hat{\mathbf{u}}(\mathbf{x}_2,t)-\mathbf{v}_2)\rangle,$$
$$f^{(3)}(\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\mathbf{v}_3;\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2,\mathbf{x}_3;\ t)$$
$$=\langle\delta(\hat{\mathbf{u}}_1-\mathbf{v}_1)\,\delta(\hat{\mathbf{u}}_2-\mathbf{v}_2)\,\delta(\hat{\mathbf{u}}_3-\mathbf{v}_3)\rangle$$
$$=\langle\delta(\hat{\mathbf{u}}(\mathbf{x}_1,t)-\mathbf{v}_1)\,\delta(\hat{\mathbf{u}}(\mathbf{x}_2,t)-\mathbf{v}_2)\,\delta(\hat{\mathbf{u}}(\mathbf{x}_3,t)-\mathbf{v}_3)\rangle, \tag{8}$$

で定義される。ここに、$\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_3$ は、変動速度 $\hat{\mathbf{u}}_1$, $\hat{\mathbf{u}}_2$, $\hat{\mathbf{u}}_3$ に対する確率変数を、δ は３次元デルタ関数を表わす。

変動速度 $\hat{\mathbf{u}}$ の分布を支配する方程式は、(6)式から出発して、Lundgren (1967)の手法を用いて求められるが、それらは閉じていないから、ここでは交差独立性仮説を用いて完結させる。

2.1 1点速度分布方程式

1点速度分布 f に対する閉じた方程式は、次のように表わされる。

$$
\begin{aligned}
&[\partial/\partial t+(\langle\mathbf{u}\rangle+\mathbf{v})\cdot\partial/\partial\mathbf{x}-(\partial/\partial\mathbf{x}\cdot\mathbf{v})\langle\mathbf{u}\rangle\cdot\partial/\partial\mathbf{v}\\
&\quad-\nu|\partial/\partial\mathbf{x}|^2+\alpha(\mathbf{x},t)|\partial/\partial\mathbf{v}|^2\\
&\quad-\partial/\partial\mathbf{v}\cdot\partial/\partial\mathbf{x}\{\beta(\mathbf{v},\mathbf{x},t)+\gamma(\mathbf{v},\mathbf{x},t)\}]\,f(\mathbf{v},\mathbf{x},t)=0. \quad (9)
\end{aligned}
$$

ここに、α, β, γ はいずれも、

$$
\begin{aligned}
&\alpha(\mathbf{x},t)=\varepsilon(\mathbf{x},t)/3\\
&=(2/3)\nu\lim_{|\mathbf{r}'|\to 0}|\partial/\partial\mathbf{r}'|^2\int|\mathbf{v}_-'|^2 g_-(\mathbf{v}_-';\mathbf{x},\mathbf{r}';t)d\mathbf{v}_-',\\
&\beta(\mathbf{v},\mathbf{x},t)=(1/4\pi)\iint|\mathbf{r}'|^{-1}((\mathbf{v}+2\mathbf{v}_-')\cdot\partial/\partial\mathbf{r}')^2\times\\
&\qquad\times g_-(\mathbf{v}_-';\mathbf{x},\mathbf{r}';t)d\mathbf{r}'d\mathbf{v}_-',\\
&\gamma(\mathbf{v},\mathbf{x},t)=(1/4\pi)\iint|\mathbf{r}'|^{-1}((\mathbf{v}+2\mathbf{v}_-')\cdot\partial/\partial\mathbf{r}')^2\times\\
&\qquad\times(\mathbf{v}_-'\cdot\partial/\partial\mathbf{v})\,g_-(\mathbf{v}_-';\mathbf{x},\mathbf{r}';t)d\mathbf{r}'d\mathbf{v}_-', \quad (10)
\end{aligned}
$$

で定義されるパラメターで、$\varepsilon=3\alpha$ はエネルギー散逸率を表わし、β, γ はいずれもエネルギーの次元をもつ。

2.2 速度和分布方程式

2点速度分布 $f^{(2)}$ と同等の統計的知識は、2点交差速度分布 $g^{(2)}$ の成分である速度和分布 g_+ および速度差分布 g_- によって与えられる。

速度和分布 g_+ に対する閉じた方程式は、次のように表わされる。

$$
\begin{aligned}
&[\partial/\partial t+(\langle\mathbf{u}_1\rangle+\mathbf{v}_+)\cdot\partial/\partial\mathbf{x}_1+(\langle\mathbf{u}_2\rangle+\mathbf{v}_+)\cdot\partial/\partial\mathbf{x}_2\\
&\quad-(1/2)\{(\partial/\partial\mathbf{x}_1\cdot\mathbf{v}_+)\langle\mathbf{u}_1\rangle+(\partial/\partial\mathbf{x}_2\cdot\mathbf{v}_+)\langle\mathbf{u}_2\rangle\}\cdot\partial/\partial\mathbf{v}_+\\
&\quad-\nu\{|\partial/\partial\mathbf{x}_1|^2+|\partial/\partial\mathbf{x}_2|^2\}\\
&\quad+(1/4)\{\alpha(\mathbf{x}_1,t)+\alpha(\mathbf{x}_2,t)\}|\partial/\partial\mathbf{v}_+|^2\\
&\quad-(1/2)\partial/\partial\mathbf{v}_+\cdot\partial/\partial\mathbf{x}_1\{\beta(\mathbf{v}_+,\mathbf{x}_1,t)+(1/2)\gamma(\mathbf{v}_+,\mathbf{x}_1,t)\}\\
&\quad-(1/2)\partial/\partial\mathbf{v}_+\cdot\partial/\partial\mathbf{x}_2\{\beta(\mathbf{v}_+,\mathbf{x}_2,t)+(1/2)\gamma(\mathbf{v}_+,\mathbf{x}_2,t)\}]\\
&\qquad\times g_+(\mathbf{v}_+;\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2;t)=0. \quad (11)
\end{aligned}
$$

ここに、α, β, γ はいずれも(10)式で定義されるパラメターである。

2.3 速度差分布方程式

速度差分布 g_- に対する閉じた方程式は、次のように表わされる。

$$
\begin{aligned}
&[\partial/\partial t+(\langle\mathbf{u}_1\rangle-\mathbf{v}_-)\cdot\partial/\partial\mathbf{x}_1+(\langle\mathbf{u}_2\rangle+\mathbf{v}_-)\cdot\partial/\partial\mathbf{x}_2\\
&\quad-(1/2)\{(\partial/\partial\mathbf{x}_1\cdot\mathbf{v}_-)\langle\mathbf{u}_1\rangle+(\partial/\partial\mathbf{x}_2\cdot\mathbf{v}_-)\langle\mathbf{u}_2\rangle\}\cdot\partial/\partial\mathbf{v}_-\\
&\quad-\nu\{|\partial/\partial\mathbf{x}_1|^2+|\partial/\partial\mathbf{x}_2|^2\}\\
&\quad+(1/4)\{\alpha(\mathbf{x}_1,t)+\alpha(\mathbf{x}_2,t)\}|\partial/\partial\mathbf{v}_-|^2\\
&\quad+(1/2)\,\partial/\partial\mathbf{v}_-\cdot\partial/\partial\mathbf{x}_1\{\beta(\mathbf{v}_-,\mathbf{x}_1,t)+(1/2)\gamma(\mathbf{v}_-,\mathbf{x}_1,t)\}\\
&\quad-(1/2)\,\partial/\partial\mathbf{v}_-\cdot\partial/\partial\mathbf{x}_2\{\beta(\mathbf{v}_-,\mathbf{x}_2,t)+(1/2)\gamma(\mathbf{v}_-,\mathbf{x}_2,t)\}]\\
&\qquad\times g_-(\mathbf{v}_-;\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2;t)=0. \quad (12)
\end{aligned}
$$

ここでも、α, β, γ はいずれも(10)式で定義されるパラメターである。

3. 速度分布方程式の一般的性質

前節で導いた速度分布方程式(9),(11),(12)は、本研究における基礎方程式を構成する。非一様乱流に関する2次の統計量までのすべての知識は、与えられた平均流の境界条件の下で、これらの方程式の解として求められる。

具体的な乱流についての解を求める前に、これらの方程式の一般的性質を調べてみよう。

3.1 Kolmogorov の局所等方性仮説

速度分布方程式(9),(11),(12)に関して留意すべきことは、いずれも平均速度 $\langle\mathbf{u}\rangle$ を伝達項においてのみ含むため、その他の粘性項や圧力項は平均乱流の影響を受けず、粘性散逸に関しては一様乱流の場合と変わらないことである。

このことは、Kolmogorov (1941) がすでに、「局所等方性仮説」として仮定したことであるが、それが数学的に裏付けられたことになる。また、このことは、「非一様乱流」の統計的取扱いを著しく簡単化させる特性として留意すべきであろう。

3.2 乱流のエネルギー散逸

速度分布方程式(9),(11),(12)の粘性項に着目するとき、それが、分子粘性 ν を係数とする空間的拡散項と、エネルギー散逸率 $\alpha=\varepsilon/3$ を係数とする速度空間での逆拡散項からなることが理解されるであろう。

前者は層流の場合と同じ「粘性拡散」であり、後者は一様乱流の場合と同じ「慣性散逸」である。非一様乱流におけるエネルギー散逸が、この両者の和で表わされることは、この場合、それらの中間的な表現としての「乱流粘性」といった概念が現実的でないことを示している。

3.3 エネルギー均衡方程式

乱流のエネルギー散逸を議論するに当たって、一点速度分布方程式(9)とエネルギー均衡方程式との整合性を確かめることは有意義であろう。

乱流変動のエネルギー、

$$E(\mathbf{x},t)=(1/2)\langle\hat{u}_i^2\rangle \quad (13)$$

に対するエネルギー均衡方程式は、(6)式から直ちに次のように求められる。

$$
\begin{aligned}
&[\partial/\partial t+\langle u_k\rangle\,\partial/\partial x_k-\nu(\partial/\partial x_k)^2]\,E(\mathbf{x},t)\\
&\quad+\langle\hat{u}_i\,\hat{u}_k\rangle(\partial/\partial x_k)\langle u_i\rangle+(1/6)(\partial/\partial x_k)\langle\hat{u}_k\,\hat{u}_i^2\rangle\\
&\quad+\nu\langle(\partial\hat{u}_i/\partial x_k)^2\rangle=0. \quad (14)
\end{aligned}
$$

一方、1点速度分布に対する(9)式をテンソル形に書いて演算 $\int v_i^2 \mathbf{dv}$ を施せば、

$$\int v_i^2 [\partial/\partial t + (\langle u_k \rangle + v_k)\partial/\partial x_k - (\partial/\partial x_k)v_k\langle u_j\rangle\partial/\partial v_j - \nu\,(\partial/\partial x_k)^2 + \alpha(\mathbf{x},t)(\partial/\partial v_j)^2 - \partial/\partial v_k\,\partial/\partial x_k\{\beta(\mathbf{v},\mathbf{x},t) + \gamma(\mathbf{v},\mathbf{x},t)\}]\, f(\mathbf{v},\mathbf{x},t)\mathbf{dv} = 0$$

となるが、βおよびγに対する評価を行なうと、

$$[\partial/\partial t + \langle u_k \rangle\,\partial/\partial x_k - \nu(\partial/\partial x_k)^2]E(\mathbf{x},t) + \langle \hat{u}_k\,\hat{u}_j\rangle\,(\partial/\partial x_k)\langle u_j\rangle + (1/6)\partial/\partial x_k\langle \hat{u}_k\,\hat{u}_i^2\rangle + \varepsilon(\mathbf{x},t) = 0 \tag{15}$$

と書ける。

(15)式は、エネルギー散逸率εの定義、

$$\varepsilon(\mathbf{x},t) = \nu\langle(\partial\hat{u}_i/\partial x_k)^2\rangle \tag{16}$$

を考慮するとき、エネルギー均衡方程式(14)に他ならない。すなわち、1点速度分布方程式(9)はエネルギー均衡方程式(14)と整合している。

3.4 非発散条件

速度分布方程式として確かめておくべきことは、非発散条件(7)との整合性である。(7)式は1点速度分布 f を用いて、

$$\partial/\partial\mathbf{x}\cdot\int \mathbf{v} f(\mathbf{v},\mathbf{x},t)\mathbf{dv} = 0 \tag{17}$$

の形に書ける。

1点速度分布方程式(9)のこの条件との整合性を確かめるため、演算 $\partial/\partial\mathbf{x}\cdot\int\mathbf{v}\,\mathbf{dv}$ を施せば、

$$\partial/\partial\mathbf{x}\cdot\int\mathbf{v}\,[\partial/\partial t + (\langle\mathbf{u}\rangle + \mathbf{v})\cdot\partial/\partial\mathbf{x} + (\partial/\partial\mathbf{x}\cdot\mathbf{v})\langle\mathbf{u}\rangle\cdot\,\partial/\partial\mathbf{v} - \nu|\partial/\partial\mathbf{x}|^2 + \alpha(\mathbf{x},t)|\partial/\partial\mathbf{v}|^2 - \partial/\partial\mathbf{v}\cdot\partial/\partial\mathbf{x}\{\beta(\mathbf{v},\mathbf{x},t) + \gamma(\mathbf{v},\mathbf{x},t)\}]\, f(\mathbf{v},\mathbf{x},t)\mathbf{dv} = 0$$

となる。しかしこの方程式は、0平均値条件と積分により、

$$\partial/\partial\mathbf{x}\cdot\int\mathbf{v}\,[\mathbf{v}\cdot\partial/\partial\mathbf{x} - \partial/\partial\mathbf{v}\cdot\partial/\partial\mathbf{x}\{\beta(\mathbf{v},\mathbf{x},t) + \gamma(\mathbf{v},\mathbf{x},t)\}]\, f(\mathbf{v},\mathbf{x},t)\mathbf{dv} = 0, \tag{18}$$

と簡単化される。

(18)式の [ ] 内の第1項(移流項)は、次のように書ける。

$$T_r = \partial/\partial\mathbf{x}\cdot\int\mathbf{v}\,(\mathbf{v}\cdot\partial/\partial\mathbf{x})\, f(\mathbf{v},\mathbf{x},t)\mathbf{dv} = \int(\mathbf{v}\cdot\partial/\partial\mathbf{x})^2 f(\mathbf{v},\mathbf{x},t)\mathbf{dv}.$$

また、第2項(圧力項)は、βとγの定義式(省略)を代入すると、次のように書ける。

$$T_p = -\partial/\partial\mathbf{x}\cdot\int\mathbf{v}\,(\partial/\partial\mathbf{v}\cdot\partial/\partial\mathbf{x})\{\beta(\mathbf{v},\mathbf{x},t) + \gamma(\mathbf{v},\mathbf{x},t)\}\times f(\mathbf{v},\mathbf{x},t)\mathbf{dv}$$
$$= |\partial/\partial\mathbf{x}|^2\int[(1/4\pi)\iint|\mathbf{r}|^{-1}((\mathbf{v}+2\mathbf{v}_-)\cdot\partial/\partial\mathbf{r})^2 (1+\mathbf{v}_-\cdot\,\partial/\partial\mathbf{v}_1)\,g_-(\mathbf{v}_-;\mathbf{x},\mathbf{r};t)\mathbf{drdv}_-]\, f(\mathbf{v},\mathbf{x},t)\mathbf{dv}$$
$$= -\int[\iint\delta(\mathbf{r})((\mathbf{v}+2\mathbf{v}_-)\cdot\partial/\partial\mathbf{r})^2(1+\mathbf{v}_-\cdot\,\partial/\partial\mathbf{v}_1)\times g_-(\mathbf{v}_-;\mathbf{x},\mathbf{r};t)\mathbf{drdv}_-]\, f(\mathbf{v},\mathbf{x},t)\mathbf{dv}$$
$$= -\int[\int((\mathbf{v}+2\mathbf{v}_-)\cdot\partial/\partial\mathbf{r})^2(1+\mathbf{v}_-\cdot\,\partial/\partial\mathbf{v}_1)\,\delta(\mathbf{v}_-)\mathbf{dv}_-]\times f(\mathbf{v},\mathbf{x},t)\mathbf{dv}$$
$$= -\int(\mathbf{v}\cdot\partial/\partial\mathbf{r})^2 f(\mathbf{v},\mathbf{x},t)\mathbf{dv} = -T_r.$$

したがって、$T_r + T_p = 0$ となるから、(18)式は恒等的に成立し、1点速度分布方程式(9)は非発散条件(17)と整合することが確かめられる。

3.5 非一様乱流の統計理論

平均流を伴う乱流理論において、エネルギー均衡方程式(14)から出発して、その高次項を近似する K-ε モデルなどの近似理論が知られている(木田ほか,1999)。

しかし上に述べたように、(14)式と整合する速度分布方程式(9),(11),(12)が閉じた形に得られており、必要な統計的知識はこれらの方程式の解として導かれるので、更なる近似を必要としない。この意味で、問題は原理的には解けたと言って良い。ただ、典型的あるいは実際的に重要な非一様乱流について解を具体的に求めることは必要であり、これは今後の課題である。

4. 非一様変動乱流

平均流の無い非一様変動乱流は、一般の非一様乱流と一様乱流との中間的な存在で、一様乱流に似た一般的性質をもっている。

4.1 速度分布の慣性相似性

非一様変動乱流に対して、2節で考察した速度分布方程式(9),(11),(12)は次のように簡単化される。

4.1.1 1点速度分布方程式

$$[[\partial/\partial t - \nu|\partial/\partial\mathbf{x}|^2 + \alpha(\mathbf{x},t)|\partial/\partial\mathbf{v}|^2] + [\partial/\partial\mathbf{x}\cdot\{\mathbf{v} - \partial/\partial\mathbf{v}(\beta(\mathbf{v},\mathbf{x},t) + \gamma(\mathbf{v},\mathbf{x},t))\}]]\, f(\mathbf{v},\mathbf{x},t) = 0. \tag{19}$$

4.1.2 速度和および速度差分布方程式

$$[[\partial/\partial t - \nu\{|\partial/\partial\mathbf{x}_1|^2 + |\partial/\partial\mathbf{x}_2|^2\} + (1/4)\{\alpha(\mathbf{x}_1,t) + \alpha(\mathbf{x}_2,t)\}|\partial/\partial\mathbf{v}_\pm|^2] + [\pm\partial/\partial\mathbf{x}_1\cdot\{\mathbf{v}_\pm - (1/2)\partial/\partial\mathbf{v}_\pm(\beta(\mathbf{v}_\pm,\mathbf{x}_1,t) + (1/2)\gamma(\mathbf{v}_\pm,\mathbf{x}_1,t))\} + \partial/\partial\mathbf{x}_2\cdot\{\mathbf{v}_\pm - (1/2)\partial/\partial\mathbf{v}_\pm(\beta(\mathbf{v}_\pm,\mathbf{x}_2,t) + (1/2)\gamma(\mathbf{v}_\pm,\mathbf{x}_2,t))\}]]\times g_\pm(\mathbf{v}_\pm;\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2;t) = 0. \tag{20}$$

4.1.3 速度分布方程式のスケール分離

(19),(20)式はいずれも2つの部分、すなわち時間変化項と粘性散逸項を含む等方部分(第1の[ ])と、伝達項と圧力項を含む軸対称部分(第2

の[ ])とによって構成されている。この構成は、基本的に一様等方性乱流における対応する速度分布方程式のそれと同じである。そして後者は少粘性 $\nu \to 0$ または高 Reynolds 数 $R \to \infty$ の極限において２つのスケールに分離し、外部領域 $|\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1| > 0$ では方程式の等方部分の解となり、局所領域 $|\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1| = O(\nu^{3/4})$ では軸対称部分の解となる。(Tatsumi et al. 2006)

4.1.4 1点速度分布

以上の結果を援用すれば、1点速度分布 f は外部領域 $|\mathbf{x}| > 0$ では、(19)式の等方部分、

$$[\partial/\partial t - \nu|\partial/\partial \mathbf{x}|^2 + \alpha(\mathbf{x},t)|\partial/\partial \mathbf{v}|^2] f(\mathbf{v},\mathbf{x},t) = 0, \quad (21)$$

に従うことになる。

一様乱流の場合には、(21)式は、

$$[\partial/\partial t + \alpha(t)|\partial/\partial \mathbf{v}|^2] f(\mathbf{v},t) = 0, \quad (22)$$

となり、その自己相似解は、

$$\alpha(t) = \alpha_0 t^{-2}, \quad (23)$$

$$f(\mathbf{v},t) = f_0(\mathbf{v},t) \equiv (t/4\pi\alpha_0)^{3/2} \exp[-|\mathbf{v}|^2 t/4\alpha_0], \quad (24)$$

のように求められ、分布は N1 と名づけられた。

非一様乱流の場合にも、(21)式の解は、一様乱流と同様の慣性正規分布で表され、解の $\mathbf{x}$ 依存性は、パラメター、

$$\alpha(\mathbf{x},t) = \alpha_0(\mathbf{x},t) t^{-2} \quad (25)$$

の $\alpha_0(\mathbf{x},t)$ を通じて現れると考えることができる。このとき、(21)式は、

$$[\partial/\partial t + \alpha_0(\mathbf{x},t)t^{-2}|\partial/\partial \mathbf{v}|^2 + \{\partial/\partial t - \nu|\partial/\partial \mathbf{x}|^2\}\alpha_0(\mathbf{x},t)\partial/\partial\alpha_0] f(\mathbf{v},\mathbf{x},t) = 0,$$

となるが、この方程式が成立するためには、

$$[\partial/\partial t + \alpha_0(\mathbf{x},t)t^{-2}|\partial/\partial \mathbf{v}|^2] f(\mathbf{v},\mathbf{x},t) = 0, \quad (26)$$

$$[\partial/\partial t - \nu|\partial/\partial \mathbf{x}|^2]\alpha_0(\mathbf{x},t) = 0, \quad (27)$$

が成立すればよい。

両式の自己相似解は、

$$f(\mathbf{v},\mathbf{x},t) = f_0(\mathbf{v},\mathbf{x},t) \equiv (t/4\pi\alpha_0(\mathbf{x},t))^{3/2} \exp[-|\mathbf{v}|^2 t/4\alpha_0(\mathbf{x},t)], \quad (28)$$

$$\alpha_0(\mathbf{x},t) \equiv \alpha_0 (4\pi\nu t)^{-3/2} \exp[-|\mathbf{x}|^2/4\nu t], \quad (29)$$

で表わされる。(28)式を分布 BN1 と名づける。

(28)式は、変数 $\mathbf{v}$ と $\mathbf{x}$ に関していずれも正規分布であるが、時間的変化の仕方は互いに正反対である。すなわち速度分布は、変数 $\mathbf{v}$ に関しては一様乱流における正規分布と同様、初期時刻 $t = 0$ における分布密度 0 の一様分布から出発し、正規形を保ちながら単調に収束して、$t \to \infty$ の極限で δ 分布に移行する。一方、エネルギー散逸率 $\alpha_0(\mathbf{x},t)$ は、変数 $\mathbf{x}$ に関して、$t = 0$ における δ 分布から出発し、正規形を保ちながら単調に拡散して、$t \to \infty$ の極限で分布密度 0 の一様分布に移行する。

この非一様変動乱流における 1 点速度の慣性正規分布 BN1 は、一様等方性乱流における 1 点速度の慣性正規分布 N1 と共に、それぞれの乱流の規準(canonical)分布であると言えよう。

4.1.5 速度和および速度差分布

速度和分布 g_+ および速度差分布 g_- もまた、外部領域 $|\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1| > 0$ では、(20)式の等方部分、

$$[\partial/\partial t - \nu\{|\partial/\partial \mathbf{x}_1|^2 + |\partial/\partial \mathbf{x}_2|^2\} + (1/4)\{\alpha(\mathbf{x}_1,t) + \alpha(\mathbf{x}_2,t)\}|\partial/\partial \mathbf{v}_\pm|^2] \times g_\pm(\mathbf{v}_\pm;\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2;t) = 0. \quad (30)$$

に従うことになる。

(30)式の自己相似解は、(21)式の場合と同様、慣性正規分布 BN2 として得られるが、紙数の関係で省略する。

4.2 速度分布の局所相似性

非一様変動乱流に対する慣性正規分布 BN1 および BN2 は、一様乱流に対する慣性正規分布 N1 および N2 に対応している。前にも述べたように、分布 BN1 および BN2 の慣性相似性は、全外部領域 $|\mathbf{r}| = |\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1| > 0$ において成り立つが、BN2 は、$|\mathbf{r}| = 0$ において一致条件を満たすために不連続的に変化しなければならない。

しかし、このような分布の不連続的な変化は、局所領域を 0 とずる慣性相似性の結果であり、有限の粘性 $\nu > 0$ を考慮することによって、有限の局所領域における連続的な変化として求められる。(Tatsumi et al. 2006)

同様の取扱いは非一様変動乱流においても可能であり、速度分布方程式 (19) および(20) による理論的枠組の中で行なうことができる。その取扱いは今後の課題としたい。

引用文献

木田重雄-柳瀬真一郎(1999)：*乱流力学*, 朝倉, pp. 320-322.

Kolmogorov, A. N. (1941)： *Dokl. Akad. Nauk. SSSR,* 30, 301-305.

Lundgren, T. S. (1967)：*Phys. Fluids,* 10, 969-975.

Tatsumi, T. & Yoshimura, T. (2004)： *Fluid Dyn. Res.* 35, 123-158.

Tatsumi, T. & Yoshimura, T. (2006)： *Fluid Dyn. Res.* To be published.