RANSと乱流モデルに対する数値解法の数学的問題点

高橋匡康*

On Mathematical Problems in Numerical Methods for RANS and Turbulence Models

by
Tadayasu TAKAHASHI*

ABSTRACT

Several consistency conditions are required for numerical methods for the incompressible Navier-Stokes equations. From the viewpoint of consistency, we discuss mathematical problems in numerical methods for Reynolds averaged Navier-Stokes equations and turbulence models.

1. はじめに

航空宇宙分野のＣＦＤ（Computational Fluid Dynamics）における計算結果の妥当性の検証は、いわゆるヴェリフィケーション（verification）およびヴァリデーション（validation）として認識され、様々な研究や取り組みが行われ続けている。

数値解のスプリアスな挙動（spurious behavior）［1］については、ＣＦＤ等数値シミュレーションの初期の頃より認識されていたが、スプリアスな数値的挙動の真の原因を特定することに関しては決め手に欠ける状況であることも事実であり、ＣＦＤ技術の信頼性の向上は依然として重大な課題となっている。特に、有限体積法（Finite Volume Method）の適用による“乱流計算”における定量的精度や力学的精度の妥当性は、ＣＦＤ技術の信頼性の向上を図る上での難題の一つとなっている。

本報告においては、差分作用素としての発散作用素とラプラシアンの可換性の視点から、ＲＡＮＳ（レイノルズ平均ナビエ・ストークス方程式）と乱流モデルを基礎方程式とする差分スキーム等における疑問点を数学的に分析し、今後のＣＦＤ技術の信頼性の向上に向けた研究開発に対する一つの指針を提示する。

非圧縮性ナビエ・ストークス方程式に応ずる差分スキームに対して、差分作用素としての発散作用素とラプラシアンの可換であることを要求すると、格子が不等間隔である場合には、格子間隔比に依存した「粘性のモデル化」が必要となることが証明される。発散作用素とラプラシアンの可換性は必ずしも絶対条件ではないが、その議論がレイノルス応力とは独立であるため、乱流モデルへの問題提起のみならず乱流モデルの適切性及び適用範囲等の分析方法を示唆していることに注意する。なお、誤解や混乱を避けるため、本報告の議論は非圧縮性ナビエ・ストークス方程式の解としての乱流等を対象としていることを付記する。

2．非圧縮性ナビエ・ストークス方程式

総和記法の慣例に従い、非圧縮性完全流体の基礎方程式として、連続の方程式（continuity equation）およびナビエ・ストークスの運動方程式を考える。本報告の議論においては密度ρに対しては$\rho\equiv 1$と仮定し、外力項は省略する。

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u_i}{\partial x_j} = 0 \\ \dfrac{\partial u_i}{\partial t} + \dfrac{\partial u_i u_j}{\partial x_j} + \dfrac{\partial P}{\partial x_i} = \nu \dfrac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j} \end{cases}$$

ここで、u_iはｉ方向の速度成分、Ｐは圧力、νは動粘性係数を表す。

また、ＲＡＮＳ（Reynolds Averaged Navier-Stokes）は次式で定式化される（cf.［2］,［3］,［4］）。

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_j} = 0 \\ \dfrac{\partial \overline{u_i}}{\partial t} + \dfrac{\partial \overline{u_i}\,\overline{u_j}}{\partial x_j} + \dfrac{\partial \overline{P}}{\partial x_i} = \nu \dfrac{\partial^2 \overline{u_i}}{\partial x_j \partial x_j} - \dfrac{\partial \overline{u_i' u_j'}}{\partial x_j} \end{cases}$$

$$u_i = \overline{u_i} + u_i', \quad P = \overline{P} + P'$$

---

*航空宇宙技術研究所

*National Aerospace Laboratory

ここで、$\overline{u_i}$ は平均速度成分、u_i' は変動速度成分、$\overline{P}$ は平均圧力、P' は変動圧力を表す。

3．差分スキームに対する数学的要件

論点の明確化のため、知られている事実ではあるが、上で述べた方程式系に対する数学的要件を列挙する（図1参照）。

① 発散作用素とラプラシアンの可換性
② ヘルムホルツ分解への適合性
③ 圧力ポァッソン方程式の成立
④ L_2－エネルギー式の成立
⑤ 積分量の保存性

本報告では簡単化のため、空間2次元のデカルト座標系（x, y）において、数学的要件①～③の離散版を議論する：（空間3次元あるいは直交曲線座標系に対しても同様の議論が成立する。）

①発散差用素∇とラプラシアン△の可換性：

$$(\Delta u)_x + (\Delta v)_y = \Delta\left(u_x + v_y\right)$$

②ヘルムホルツ分解への適合性：

$$\iint_\Omega \left(uP_x + vP_y\right) dxdy = -\iint_\Omega \left(u_x + v_y\right) P dxdy$$

（領域Ωの境界上の積分項は省略）

③圧力ポアッソン方程式の成立：

$$\Delta P = 2\left(u_x v_y - u_y v_x\right)$$

ここで、差分スキームに対する要件①～③の議論の参考として、時間に関する離散スキームを次に示す。

$$\begin{cases} u_x^{n+1} + v_y^{n+1} = 0 \\ \dfrac{u^{n+1} - u^n}{\Delta t} + \left(u^{n+1}\right)_x^2 + \left(u^{n+1} v^{n+1}\right)_y + P_x^{n+1} \\ = \nu \Delta u^{n+1} \\ \dfrac{v^{n+1} - v^n}{\Delta t} + \left(u^{n+1} v^{n+1}\right)_x + \left(v^{n+1}\right)_y^2 + P_y^{n+1} \\ = \nu \Delta v^{n+1} \\ \Delta P^{n+1} = 2\left(u_x^{n+1} v_y^{n+1} - u_y^{n+1} v_x^{n+1}\right) \end{cases}$$

この離散スキームは、作用素論の枠組におけるレゾルベント作用素に対応するものである。

要件①と③を適用することにより、次を得る。

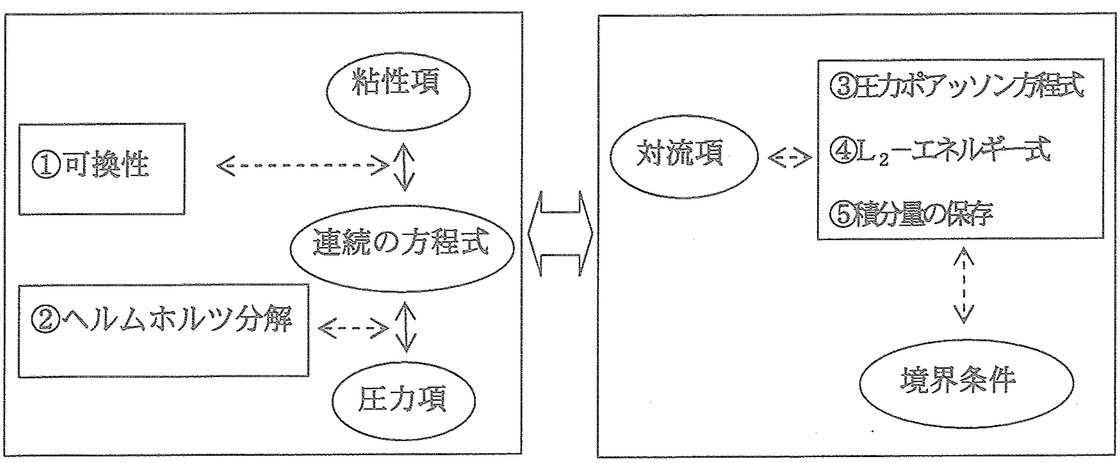
$$\left(u_x^{n+1} + v_y^{n+1}\right) - (\Delta t)\nu\Delta\left(u_x^{n+1} + v_y^{n+1}\right) = 0$$

この式は

$$u_x^{n+1} + v_y^{n+1} = 0$$

であることを意味し、$\left(u^{n+1}, v^{n+1}\right)$ は連続の方程式を満足する。

図1．空間離散化に対する基本原則



（注）一般的には、①～⑤の全要件を完璧に満足することは困難.

4．可換性と非可換性

ここでは、差分作用素としての発散作用素とラプランシアンの可換性に議論の焦点を絞り、粘性項の適切な離散化に対する一つの知見を提示する。以下では∇＝div の差分は前進差分，grad の差分は後進差分とする。

∇、△および grad の各々の離散化を次のように定義する。

・$\nabla = \left(\dfrac{\partial}{\partial x}, \dfrac{\partial}{\partial y}\right)$ の離散化：

$$(\nabla_h \cdot \mathbf{u})_{i,j} = \frac{u_{i+1,j} - u_{i,j}}{x_{i+1} - x_i} + \frac{v_{i,j+1} - v_{i,j}}{y_{j+1} - y_j}$$

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

・粘性項の離散化：

$$(\Delta_h u)_{i,j} = \frac{2}{(x_{i+1}-x_i)+(x_i-x_{i-1})}\left(\frac{u_{i+1,j}-u_{i,j}}{x_{i+1}-x_i} - \frac{u_{i,j}-u_{i-1,j}}{x_i-x_{i-1}}\right) + \frac{2}{(y_{j+1}-y_j)+(y_j-y_{j-1})}\left(\frac{u_{i,j+1}-u_{i,j}}{y_{j+1}-y_j} - \frac{u_{i,j}-u_{i,j-1}}{y_j-y_{j-1}}\right)$$

・圧力項の離散化：

$$(\nabla P)_{i,j} = (\mathrm{grad} P)_{i,j} = \left(\frac{P_{i,j} - P_{i-1,j}}{x_i - x_{i-1}}, \frac{P_{i,j} - P_{i,j-1}}{y_j - y_{j-1}}\right)^t$$

これらの離散化の下で、次の結果が得られる。

命題１（可換性）．

$$\frac{x_i - x_{i-1}}{x_{i+1} - x_i} = 1, \quad \frac{y_j - y_{j-1}}{y_{j+1} - y_j} = 1$$

とする。このとき、差分作用素としての発散作用素 ∇_h とラプシアン Δ_h は可換である。

命題２（非可換性）．

$$\frac{x_i - x_{i-1}}{x_{i+1} - x_i} \neq 1, \quad \frac{y_j - y_{j-1}}{y_{j+1} - y_j} \neq 1$$

とする。このとき、差分作用素としての発散作用素 ∇_h とラプラシアン Δ_h は可換ではない。

命題３（等比の場合の可換性）．

$$\frac{x_i - x_{i-1}}{x_{i+1} - x_i} = 1, \quad \frac{y_j - y_{j-1}}{y_{j+1} - y_j} = \delta < 1$$

とする。
粘性項の差分を次で定義する。

$$(\Delta_{h,\delta} u)_{i,j} = (\Delta_h u)_{i,j}$$

$$(\Delta_{h,\delta} v)_{i,j} = \frac{2}{(x_{i+1}-x_i)+(x_i-x_{i-1})}\left(\frac{v_{i+1,j}-v_{i,j}}{x_{i+1}-x_i} - \frac{v_{i,j}-v_{i-1,j}}{x_i-x_{i-1}}\right) + \frac{1}{\delta}\frac{2}{(y_{j+1}-y_j)+(y_j-y_{j-1})}\left(\frac{v_{i,j+1}-v_{i,j}}{y_{j+1}-y_j} - \frac{v_{i,j}-v_{i,j-1}}{y_j-y_{j-1}}\right)$$

このとき、∇_h と $\Delta_{h,\delta}$ は次の意味で可換である。

$$(\nabla_h \cdot \Delta_{h,\delta} \mathbf{u})_{i,j} = (\Delta_h(\nabla_h \cdot \mathbf{u}))_{i,j}$$

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

証明の概略：

次の式を考える。

$$\frac{1}{x_{i+1}-x_i}\left[(\Delta_h u)_{i+1,j} - (\Delta_h u)_{i,j}\right] + \frac{1}{y_{j+1}-y_j}\left[(\Delta_{h,\delta} v)_{i,j+1} - (\Delta_{h,\delta} v)_{i,j}\right]$$

このとき、x 方向の可換性は明らかである。

また、y 方向に関しては、

$$\frac{2}{(y_{j+2}-y_{j+1})+(y_{j+1}-y_j)} = \frac{2\delta}{(y_{j+1}-y_j)+(y_j-y_j)},$$

$$\frac{1}{y_{j+1}-y_j} = \frac{\delta}{y_j - y_{j-1}}$$

であることに注意して

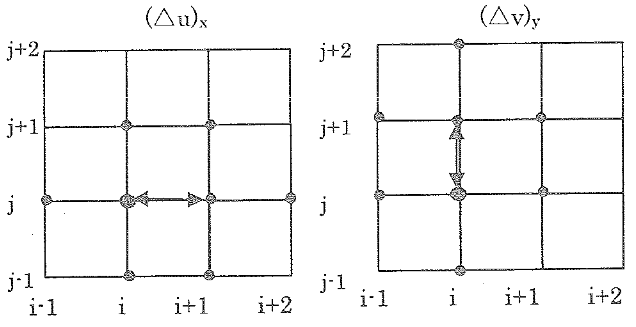
$$\phi_{i,j} = (\nabla_h \cdot \mathbf{u})_{i,j}$$

とおくと次の等式が成立する（図2参照）。

$$\left(\nabla_h \cdot \Delta_{h,\delta} \mathbf{u}\right)_{i,j}$$
$$= \frac{2}{(x_{i+1}-x_i)+(x_i-x_{i-1})}\left(\frac{\phi_{i+1,j}-\phi_{i,j}}{x_{i+1}-x_i}-\frac{\phi_{i,j}-\phi_{i-1,j}}{x_i-x_{i-1}}\right)$$
$$+\frac{2}{(y_{j+1}-y_j)+(y_j-y_{j-1})}\left(\frac{\phi_{i,j+1}-\phi_{i,j}}{y_{j+1}-y_j}-\frac{\phi_{i,j}-\phi_{i,j-1}}{y_j-y_{j-1}}\right)$$

したがって、∇_h と$\Delta_{h,\delta}$ は可換である。

図 2. div＝0の定義点



差分作用素としての発散作用素とラプラシアンの可換性・非可換性の考察に基づいた注意点を以下に述べる。

（1）可換性の視点においても、格子は等間隔であることが望ましいこと。
（2）不等間隔格子において可換性を成立させるためには、粘性のモデル化が必要となること。
（3）不等間隔格子の場合には、格子サイズが十分に小さい、すなわち、Kolmogorov スケール以下としても陰スキームは数値的に可解とは限らないため、直接シミュレーション(DNS)の数値的安定性は保証されないこと。

4. 粘性のモデル化の考察

ここでは、命題1～命題3を背景として、RANSと乱流モデルを基礎方程式とする差分スキームの問題点について考察する。LES(Large Eddy Simulation) [5] にても同様の議論が適用できることを付記する。

壁や物体の近傍においては不等間隔格子が採用されることは、CFDの歴史的な経緯や発展の経緯が示している。一般的には、不等間隔格子上で構成された差分スキームに対しては、連続の方程式の離散的な満足度が悪化し、壁や物体から発生する剥離渦等の渦を捕らえることが難しくなる。従って、計算の安定性や分解能を高めるためには、「粘性のモデル化」が数値的な意味で不可欠となり、乱流モデル等に基づく渦動粘性係数の付加が必要となる（cf. [6]，[7]，[8])。

さて、詳細については省略するが、RANSと乱流モデルを基礎方程式とする差分スキームにおいては、差分作用素としての発散作用素とラプラシアンの可換性の成立は一般には期待できない。従って、関係式

$$(\Delta u)_x + (\Delta v)_y = 0$$

に対応して、ν_tを渦動粘性係数とするとき、形式的には次の条件の離散版が要求されることになる。

$$\nabla \cdot \frac{\partial}{\partial x_j}\left((\nu + \nu_t)\left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i}\right)\right) = 0$$

この条件は、渦動粘性係数が流れ場に依存することを示している。また、数値的には渦動粘性係数が応力などに依存する代数的関係式を満足する必要があることを示唆している。さらに、多くの計算例が示しているところであるが、個々の乱流モデルの適用範囲が限定されることを意味している。注意すべき点は、この場合においても空間離散化の格子依存性を考慮する必要があるということである。

5. まとめ

非圧縮性ナビエ・ストークス方程式に応ずる差分スキームにおいて、格子が不等間隔である場合には粘性のモデル化が必要となる可能性を示した。粘性のモデル化の必要性は、差分作用素としての発散作用素とラプラシアンが可換であるための要件として導出されていることに注意する。その結果は、工学的応用計算における格子の重要性を再認識させるものであるが、適切な格子および適切な空間離散化等に対する知見を提供していることも事実と思われる。

本報告における解析および結果は極めて簡明であるが、数学的、物理的並びに工学的な意味合いは深遠である。実際、抽象的ではあるが、乱流モデル等により算出された渦動粘性係数が満足すべき関係式も導くことができる。それらの関係式は、個々の乱流モデルの適用限界を示すと共に、RANSと乱流モデルを基礎方程式とする数値解法へ問題提起ともなっている。

このような視点を背景とすると、今後のCFD技術の研究開発の進め方も自ずと明らかと思われる。すなわち、CFD技術の信頼性の飛躍的な向上を図るためには、スキーム特性、格子依存性および境界条件の数値的処理等に関す

る研究を系統的に進めることと併行して、乱流モデルからの脱却を見据えた取り組みが不可欠である。

いずれにしても、信頼性の向上を念頭とする理論的および応用的な研究活動の活発化を期待するものである。

参考文献

[1] H. C. Yee and P. K. Sweby, Aspects of numerical uncertainties in time marching to steady-state numerical solutions, AIAA Journal, 36(5), 712-724(1998)
[2] R. Temam, Navier-Stokes Equations: Theory and Numerical Analysis, North-Holland, 1977.
[3] J. C. Tannehill, D. A. Anderson and R. H. Pletcher, Computational Fluid Mechanics and Heat Transfer, 2nd Ed., Taylor & Francis, 1984.
[4] J. D. Anderson Jr., Computational Fluid Dynamics, McGraw-Hill, New York, 1995.
[5] J. Smagorinsky, Mon. Weather Rev., 91, 99-164, 1963.
[6] B. S. Baldwin and H. Lomax, Thin layer approximation and algebraic models for separation flow, AIAA Paper 78-257, 1978.
[7] B. E. Launder and D. B. Spalding, The numerical computation of turbulent flows, Comp. Mech. Appl. Mech. Eng., 3, 269-289, 1974.
[8] P. R. Spalart and S. R. Allmaras, A one-equation turbulence model for aerodynamic flows, AIAA Paper 92-0439, 1992.