

# A10 ひずみ計測を用いた構造パラメータの逐次同定に関する一考察

秋田剛, 鈴岡拓也 (千葉工業大学)

Takeshi Akita, Takuya Suzuoka (Chiba Institute of Technology)

## 1. はじめに

近年, 構造ヘルスマニタリング分野で FGB センサー等の多点同時ひずみ計測システムが活用されるようになっている<sup>[1]</sup>. 構造ヘルスマニタリングは, (1) 計測・検出, (2) システム同定・診断, (3) 補修の3ステップで構成される. このうち, 有限要素法を基礎としたシステム同定は, 変位計測や速度・加速度計測に基づくことが多いが, FGB 等の多点同時ひずみ計測システムに対応することで, ヘルスマニタリングを高精度化・高効率化する可能性がある. 本論文では, 近年注目を集めている Ensemble Kalman Filter (EnKF)を用いた逐次システム同定法<sup>[2,3]</sup>を, ひずみ計測に対応させ, その有効性を検証する.

## 2. Ensemble Kalman Filter (EnKF) による構造パラメータの逐次同定式

### 2-1 動的非線形問題の支配方程式

非線形有限要素法に離散化された時刻  $t+1$  における動的非線形問題の支配方程式は, 次式のように表される.

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}}_{t+1} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{u}}_{t+1} + \mathbf{K}(\mathbf{u}_{t+1}) = \mathbf{F}(\mathbf{u}_{t+1}) \quad (1)$$

ここに  $\mathbf{u}_{t+1}, \dot{\mathbf{u}}_{t+1}, \ddot{\mathbf{u}}_{t+1}$  はそれぞれ節点変位ベクトル, 速度ベクトル, および加速度ベクトルであり,  $\mathbf{M}$  は質量行列,  $\mathbf{C}$  は減衰行列である. また  $\mathbf{K}(\mathbf{u}_{t+1})$  は変位の非線形関数となる内力ベクトル,  $\mathbf{F}(\mathbf{u}_{t+1})$  は外力ベクトルである. 式(1)を数値積分法により離散化することで, 次式のように時刻  $t, t+1$  における節点変位ベクトルの関係式が得られる.

$$\mathbf{\Gamma}(\mathbf{u}_t, \mathbf{u}_{t+1}, \mathbf{s}_{t+1}) = \mathbf{0} \quad (2)$$

ここに  $\mathbf{s}_{t+1}$  は, 構造パラメータを成分とするパラメータベクトルである. 本論文では, 式(2)の逆関係を便宜上以下のように表す.

$$\mathbf{u}_{t+1} = \mathbf{\Gamma}^{-1}(\mathbf{u}_t, \mathbf{s}_{t+1}) \quad (3)$$

### 2-2 ひずみ計測を用いた状態空間モデル

本論文では, 有限要素モデルの積分点に対応する位置のひずみを計測量とした状態空間モデルを構築する. いま, 時刻  $t+1$  における  $j$  番目のひずみ計測量を  $\varepsilon_{j,t+1}$  として,  $\mathbf{u}_{t+1}$  から  $\varepsilon_{j,t+1}$  に対応する積分点のひずみ計算量  $\bar{\varepsilon}_{j,t+1}$  を計算する手続きを便宜上以下のように表す.

$$\bar{\varepsilon}_{j,t+1} = f_j(\mathbf{u}_{t+1}) = f_j(\mathbf{\Gamma}^{-1}(\mathbf{u}_t, \mathbf{s}_{t+1})) = f_j(\mathbf{u}_t, \mathbf{s}_{t+1}) \quad (4)$$

いま,  $l$  個のひずみ計測量が得られたとして, 観測方程式を

$$\mathbf{y}_{t+1} = [\varepsilon_{1,t+1} \ \cdots \ \varepsilon_{l,t+1}]^T = [f_1(\mathbf{u}_t, \mathbf{s}_{t+1}) \ \cdots \ f_l(\mathbf{u}_t, \mathbf{s}_{t+1})]^T + [v_{1,t+1} \ \cdots \ v_{l,t+1}]^T = \mathbf{F}_{t+1}(\mathbf{u}_t, \mathbf{s}_{t+1}) + \mathbf{v}_{t+1} \quad (5)$$

と表す. ここに,  $\mathbf{y}_{t+1}$  はひずみ計測量を成分とする観測値ベクトル,  $v_{j,t+1}$  は時刻  $t+1$  における  $j$  番目のひずみ計測量とひずみ計算量の差 (観測ノイズ) である. また,  $l$  個のひずみ計算量, 観測ノイズをベクト

ルで表したものが  $\mathbf{F}_{t+1}(\mathbf{u}_t, \mathbf{s}_{t+1})$ ,  $\mathbf{v}_{t+1}$  である.

本論文では, 以下のようなパラメータの時間更新式とひずみの観測式からなる状態空間モデルを考える.

$$\begin{aligned}\mathbf{s}_{t+1} &= \mathbf{s}_t + \mathbf{w}_t \\ \mathbf{y}_{t+1} &= \mathbf{F}_{t+1}(\mathbf{s}_{t+1}) + \mathbf{v}_{t+1}\end{aligned}\quad (6)$$

ここに,  $\mathbf{w}_t$  はパラメータの時間更新式に対するシステムノイズベクトルである. 式(6)第2式の  $\mathbf{F}_{t+1}$  の引数である  $\mathbf{u}_t$  は, タイムステップ  $t$  での既知量となるので, ここでは省略して表記した. 式(6)で表されるシステムは, パラメータベクトルを状態ベクトルとした, 線形の時間更新式と非線形の観測式からなるシステムとなる.

### 2-3 状態推定値の近似計算<sup>[3]</sup>

EnKF を用いて, 式(6)のシステムに対して  $\mathbf{y}_{t+1}$  に基づく  $\mathbf{s}_{t+1}$  の条件付き確率密度関数  $p(\mathbf{s}_{t+1} | \mathbf{y}_{t+1})$  を近似的に評価することで, パラメータベクトルの逐次推定を行うことができる. EnKF では, 多数のサンプル(粒子とよぶ)により次式により近似計算する.

$$p(\mathbf{s}_{t+1} | \mathbf{y}_{t+1}) \approx \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M \delta(\mathbf{s}_{t+1} - \mathbf{s}_{t+1|t+1}^{(m)}) \quad (7)$$

ここに  $M$  は粒子数,  $\delta$  は Dirac のデルタ関数であり, 上付の  $m$  は粒子のインデックスを表す. このとき, 推定値は例えば  $p(\mathbf{s}_{t+1} | \mathbf{y}_{t+1})$  の期待値として,

$$\mathbf{s}_{t+1|t+1} = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{s}_{t+1} p(\mathbf{s}_{t+1} | \mathbf{y}_{t+1}) d\mathbf{s} \quad (8)$$

のように評価される. 式(7)を式(8)に代入すると

$$\mathbf{s}_{t+1|t+1} \approx \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M \mathbf{s}_{t+1|t+1}^{(m)} \quad (9)$$

が得られる. EnKF では, 一般的なカルマンフィルタと同様の手順によって, 各粒子の状態推定値  $\mathbf{s}_{t+1|t+1}^{(m)}$  を求め, その集合平均として, 式(9)によりパラメータ推定値を算出する.

### 2-4 EnKF の実行手順

具体的な EnKF の実行手順を以降に示す.

#### (a) 初期設定

初期状態での粒子集合を以下の式に従って作成する.

$$\{\mathbf{s}_{0|0}^{(m)}\}_{m=1}^M : \mathbf{s}_{0|0}^{(m)} = \mathbf{s}_0 + \mathbf{w}_0^{(m)}, \mathbf{w}_{k,0}^{(m)} \sim N(\mathbf{0}, \sigma_{s_0,k}^2) \quad (10)$$

ここに  $\mathbf{s}_0$  は, 推定対象であるパラメータベクトルの初期値である. また式(10)第2式は,  $m$  番目粒子のパラメータベクトル第  $k$  成分を, 平均値  $\mathbf{0}$ , 分散  $\sigma_{s_0,k}^2$  の正規分布の実現値として作成することを意味している.

#### (b) 予測ステップ

パラメータベクトルの時間更新を以下のように行う.

$$\mathbf{s}_{t+1|t}^{(m)} = \mathbf{s}_{t|t}^{(m)} + \mathbf{w}_t^{(m)}, \mathbf{w}_{k,t}^{(m)} \sim N(\mathbf{0}, \sigma_{s,k}^2) \quad (11)$$

上式では, 粒子ごとにパラメータベクトルの第  $k$  成分に与えるシステムノイズを, 平均値  $\mathbf{0}$ , 分散  $\sigma_{s,k}^2$  の

正規分布の実現値として作成する．次に粒子ごとに時刻  $t+1$  の節点変位ベクトルを，式(2)で

$$\Gamma(\mathbf{u}_t^{(m)}, \mathbf{u}_{t+1}^{(m)}, \mathbf{s}_{t+1|t}^{(m)}) = \mathbf{0} \quad (12)$$

として計算する．また次式で定義される拡大状態ベクトル

$$\mathbf{x}_{t+1|t}^{(m)} = \begin{bmatrix} \mathbf{s}_{t+1|t}^{(m)} \\ \mathbf{F}_{t+1}(\mathbf{s}_{t+1|t}^{(m)}) \end{bmatrix} \quad (13)$$

を計算する．

### (c) カルマンゲインの計算

次式によりカルマンゲインを計算する．

$$\mathbf{K}_{t+1} = \mathbf{P}_{t+1|t} \tilde{\mathbf{H}}_{t+1}^T (\tilde{\mathbf{H}}_{t+1} \mathbf{P}_{t+1|t} \tilde{\mathbf{H}}_{t+1}^T + \mathbf{R})^{-1} \quad (14)$$

ここに

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_{t+1|t} &= \frac{1}{M-1} \sum_{m=1}^M \bar{\mathbf{x}}_{t+1|t}^{(m)} \bar{\mathbf{x}}_{t+1|t}^{(m)T}, \bar{\mathbf{x}}_{t+1|t}^{(m)} = \mathbf{x}_{t+1|t}^{(m)} - \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M \mathbf{x}_{t+1|t}^{(m)} \\ \tilde{\mathbf{H}}_{t+1} &= [\mathbf{0} \quad \mathbf{I}] \end{aligned} \quad (15)$$

であり， $\mathbf{R}$ は観測値の共分散行列である．本論文では， $\sigma_{obs}^2$ を観測ノイズの分散として， $\mathbf{R} = \sigma_{obs}^2 \mathbf{I}$ と定義する．

### (d) 推定ステップ

粒子ごとに以下の観測残差を計算する．

$$\mathbf{r}_{t+1}^{(m)} = \mathbf{y}_{t+1} - \mathbf{F}_{t+1}(\mathbf{s}_{t+1|t}^{(m)}) + \mathbf{v}_{t+1}^{(m)} \quad (16)$$

ここに $\mathbf{v}_{t+1}^{(m)}$ は，観測誤差実現値であり，粒子ごとに作成する．カルマンゲインと観測残差から，

$$\mathbf{x}_{t+1|t+1}^{(m)} = \mathbf{x}_{t+1|t}^{(m)} + \mathbf{K}_{t+1} \mathbf{r}_{t+1}^{(m)} \quad (17)$$

により粒子ごとの状態推定値を算出する．式(17)の拡大状態ベクトルに含まれるパラメータベクトルから，次式により推定値を評価する．

$$\mathbf{s}_{t+1|t+1} = \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M \mathbf{s}_{t+1|t+1}^{(m)} \quad (18)$$

### (e) 終了判定

解析ステップが終了ステップに達するまで，(b)に戻り推定を継続する．

## 3. 検証実験

図1に示すような片持ちはりモデルを用いて，ひずみ計測による構造パラメータの逐次推定の検証実験を行った．供試体は全長 600 mm，幅 19.6 mm，厚さ 1.84mm のアルミ板を用いる．片持ちはりの固定部付近にひずみゲージを設置し，先端に荷重を负荷した際の振動応答を計測する．図2に先端に 80g のおもりを负荷した際の，ひずみの計測データを示す．

検証実験として，先端荷重の大きさをモデルパラメータとして EnKF による逐次推定を行った．粒子数を  $M=100$  とし，システムノイズを  $\sigma_{s,1}=10^{-1}, 10^{-2}, 10^{-3}$  として推定を行った．また，パラメータ初期値は 40g とした．図3に，EnKF での逐次推定誤差を示す．図より，推定履歴はシステムノイズの影響を強く受けるものの，最終的にはほぼ真値に収束していることがわかる．

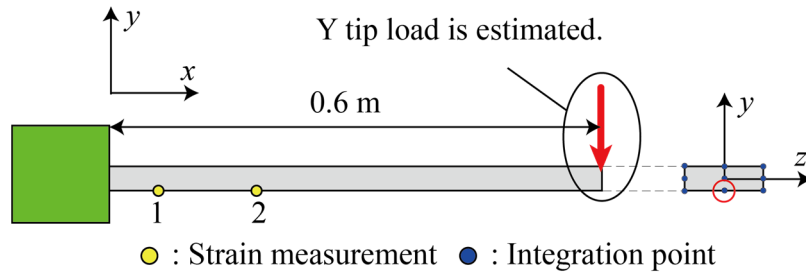


図1 片持ちはりモデル

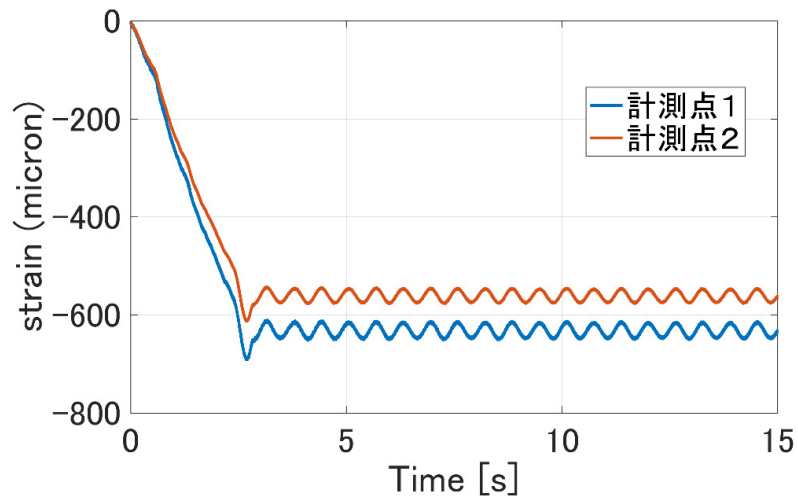


図2 ひずみ計測データ

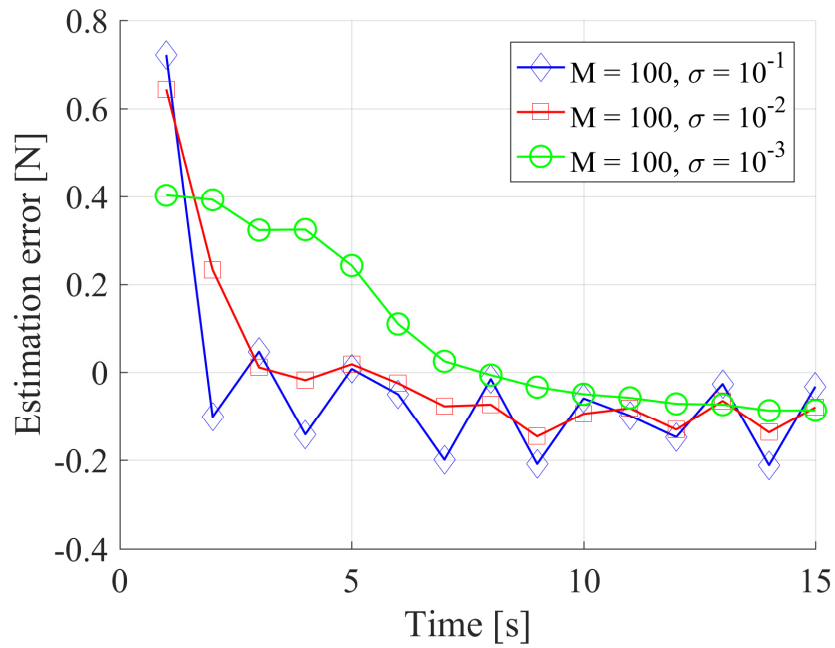


図3 推定結果

#### 4. おわりに

本論文において、ひずみ計測を用いた Ensemble Kalman Filter による逐次パラメータ同定法を示した。片持ちはりを使った検証実験により、その有効性を検証した。

#### 謝辞

本研究の一部は、私立大学戦略的研究基盤形成支援事業 S1511002 の助成を受けた。ここに感謝の意を表す。

#### 参考文献

- [1] 井川寛隆, 和田大地, 葛西時雄, ヘリブレード模擬供試体における FBG-OFDR 計測システムを用いた動的ひずみ分布計測評価, JSASS-2016-3030.
- [2] Banerjee, B., Roy, D., and Vasu, R. M., Self regularized pseudo time-marching schemes for structural system identification with static measurements, International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 82, No. 7, 2010, pp. 896–916.
- [3] Akita, T., Takaki, R., and Kogiso, N., An Adaptive Estimation of Nonlinear Structural Deformations by Using the Ensemble Kalman Filter, Transactions of the Japan Society for Aeronautical and Space Sciences, Aerospace Technology Japan, Vol. 14 (2016) No. ists30, p. Pc\_43-Pc\_49.