A13　パネルヒンジモデルの特異状態における可折モード抽出

渡邉尚彦（岐阜工業高等専門学校）
Naohiko Watanabe (NIT, Gifu College)

1. はじめに

展開型構造物は輸送コスト削減の要求される宇宙構造物設計において必要であり，これら柔軟に大変形する展開型構造物に関する特徴は興味深い問題を多く含んでいる．多くのヒンジ点を有する可変トラス構造に対して，一般逆行列を使った解析法[1][2]が提案されており，[3]では不安定トラスの折畳み解析が制約条件付き最適化問題として扱えることが示されている．また不安定トラスへ二次項まで考慮した解析によって特異状態での有限変形範囲の変形モード判定，高精度の変形解析を得ることができることが報告されている．一方，幾つかの剛な多角形パネルとヒンジで構成された構造モデルとして「剛体折紙」と呼ばれるモデルに対しての研究が進展している[5][6]．剛体折紙とは「それぞれのヒンジに囲まれた多角形は伸びや曲げを生ぜずに，全体構造の変形はヒンジ回転のみによって引き起こされるモデル」と理想化されたモデルであり，こうしたパネルヒンジモデルはリンケージの拡張モデルととらえることができる．

本研究では，特異状態における不安定トラスモデルのモード抽出への有効性が確認されている高次項までを考慮した一般逆行列を使用した解析手法を，特異状態のパネルヒンジモデルの二面角変化モード抽出へ適用する方法を提示する．まず２章で，既存の研究で得られているトラスモデルを対象にしたモード抽出，変形経路解析の定式化方法を整理する．またパネルヒンジモデルを対象に畳込み経路解析を行った際に平坦時の特異性について示す．３章では特異状態である平坦時においてパネルヒンジモデルの可能な二面角変化モードを抽出するために拘束条件式において２次項まで考慮した解析が示され，具体的な例から有効であることを示す.

2. トラスモデルにおける特異状態

2.1 モード抽出

半谷らの研究[1][2]によると，トラスモデルを対象として拘束条件式から一般逆行列 $\mathbf{A}^{+}$を用いて剛体変位モードが抽出できることが示されており，２次項までを考慮することで有限範囲での剛体変位可能性が判定できることも示されている. これは Linkage の Rigidity の問題に対応し，Connelly and Whiteley[7]は２次の剛性まで考える枠組みを議論している.

以下 2.1 では制約条件式から同次解を抽出する問題として[1]を整理して定式化の枠組みを記述する.

まず拘束条件として例えば位置$\boldsymbol{x}_p, \boldsymbol{x}_q$である２点 p,q を結ぶ部材 k の部材長が l_kであることから

$$g_k = \left|\boldsymbol{x}_p - \boldsymbol{x}_q\right|^2 - {l_k}^2 = 0 \tag{2.1}$$

と表すことができる．式(2.1)をそれぞれに満たす複数の部材に関する拘束条件は以下のように表すことができる.

$$(g_1, g_2, \cdots)^{\boldsymbol{T}} = \boldsymbol{A}(\boldsymbol{x_1}, \boldsymbol{x_2}, \cdots) = \boldsymbol{0} \tag{2.2}$$

これを t で微分したとき，式(2.3),(2.4)ができる.

$$\boldsymbol{A}'\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{0} \tag{2.3}$$

$$\boldsymbol{A}'\ddot{\boldsymbol{x}} + \dot{\boldsymbol{x}}^T\boldsymbol{A}''\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{0} \tag{2.4}$$

ここで，dot は時間微分を表し，$\blacksquare'$はx_iでの微分を表す.

$$\boldsymbol{A}' = {A'}_{ki} = \frac{dg_k}{dx_i} \tag{2.5}$$

例えば関係式(2.2)を満たす部材であれば

$$\begin{bmatrix} -\dfrac{(\boldsymbol{x}_p - \boldsymbol{x}_q)}{l_k} & \dfrac{(\boldsymbol{x}_p - \boldsymbol{x}_q)}{l_k} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\boldsymbol{x}}_p \\ \dot{\boldsymbol{x}}_q \end{bmatrix} = \boldsymbol{0} \tag{2.6}$$

となる.

式(2.3)の関係を満足する同次解は $\mathbf{A}$ の一般逆行列 $\mathbf{A}^{+}$を用いて

$$\dot{\boldsymbol{x}} = [\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}^{+}\boldsymbol{A}]\boldsymbol{\alpha} \tag{2.7}$$

と表すことができ，ゼロ空間正規直交基底である(2.8)は微小変位範囲での剛体変位モード解となる．

$$\boldsymbol{H} = [\boldsymbol{h_1}\boldsymbol{h_2}\cdots\boldsymbol{h_n}] = \left[\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A'}^{+}\boldsymbol{A'}\right] \tag{2.8}$$

次に式(2.4)の内容を考える．index を用いると左辺は(2.9)のように表すことができる．

$$A'_{ki}\dot{x}_i + A''_{kij}\dot{x}_i\dot{x}_j = 0 \tag{2.9}$$

ここでA''_{kij}は 3 階のテンソルである．

$$A''_{kij}\dot{x}_i\dot{x}_j = \sum_{i}^{n}\sum_{j}^{n}\frac{\partial^2 g_k}{\partial x_i \partial x_j}\dot{x}_i\dot{x}_j \tag{2.10}$$

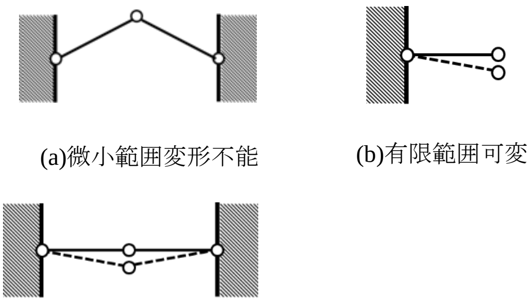
(2.4)は次のように変形できる．

$$\boldsymbol{A'}\ddot{\boldsymbol{x}} = -\dot{\boldsymbol{x}}^T\boldsymbol{A''}\dot{\boldsymbol{x}} \tag{2.11}$$

ここで$\ddot{\boldsymbol{x}}$の存在条件は式(2.12)のようである．

$$[\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A'}\boldsymbol{A'}^{+}][-\dot{\boldsymbol{x}}^T\boldsymbol{A''}\dot{\boldsymbol{x}}] = \boldsymbol{0} \tag{2.12}$$

式(2.7)で求めた$\dot{\boldsymbol{x}}$を式(2.12)に代入し，これを満足していれば有限変位で剛体変位モードであると判定できる．例えば，文献[1]では微小変形/有限変形の観点から各トラスの可能な変形モードとして図のような例を挙げている．



(a)微小範囲変形不能　(b)有限範囲可変

(c)微小範囲可変・有限範囲変形不可能

図 2.1 微小/有限範囲での変形可能性

2.2 変形経路解析における特異状態

不安定トラスの変形追跡を，制約条件付き最適化問題として扱うことができることが文献[3]で示されている．ここでは制約条件$g_i(x_1, x_2, \cdots, x_n) = 0$をもとに，ある目的関数$S = f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$を最適化するとする過程を畳込み経路追跡に適用し，トラスモデルにおける条件を修正してパネルヒンジモデルを表現し畳込み経路追跡を行った際に，初期平坦状態が特異性を持つことを示す．

畳込み経路解析の概要は次のようである．S→min に向けて式(2.12)のように逐次更新して求めることを考える．

$$\dot{\boldsymbol{x}}_{\boldsymbol{i+1}} = \boldsymbol{x_i} + \dot{\boldsymbol{x}}_{\boldsymbol{i}}\Delta t \tag{2.12}$$

$\dot{\boldsymbol{x}} = (\dot{x_1}, \dot{x_2}, \cdots \dot{x_n})$の組合せは(2.13)を満足するため，$\dot{\boldsymbol{x}}$は **B** の一般逆行列 **B**⁺を用いて(2.14)のように求めることができるというものである．

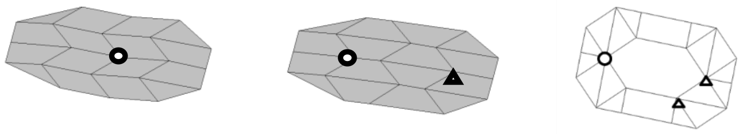
$$\begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \dot{S} \end{bmatrix} \mathrm{dt} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial g_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial g_1}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial g_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \dfrac{\partial g_m}{\partial x_1} & \dfrac{\partial g_m}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial g_m}{\partial x_n} \\ \dfrac{\partial S}{\partial x_1} & \dfrac{\partial S}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial S}{\partial x_n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x_1} \\ \dot{x_2} \\ \vdots \\ \dot{x_n} \end{bmatrix} dt \tag{2.13}$$

$$(\dot{\boldsymbol{S}} = \boldsymbol{B'}\dot{\boldsymbol{x}})$$

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{B'}^{+}\dot{\boldsymbol{S}} \tag{2.14}$$

パネルヒンジモデルでは制約条件としてトラスモデルで使用した部材不伸長に加えて頂点周りの角度の和不変を採用することができる．また目的関数として各頂点周りの二面角の和の最小化を採用することができる．

以上の定式化をもとに図 2.2 に示す３つのモデルに対し，変形経路解析を行った．各ゼロステップにおいては適宜初期不整が与えられている．折畳み進行指標として，射影勾配$[\boldsymbol{I} - \boldsymbol{J}^{+}\boldsymbol{J}]\nabla S$（ここで$\boldsymbol{J} = [\nabla g_1, \nabla g_2 \cdots \nabla g_m]^T$)，また解の存在条件（$[\boldsymbol{I} - \boldsymbol{B}\boldsymbol{B}^{+}]\Delta\boldsymbol{S}$）が採用されている．指標の挙動を図 2.3 に示す．射影勾配に着目すると，折畳み経路の終了時に指標がゼロになっており，初期ステップの平坦時も同様にゼロであることが観察できる．これは平坦時がパネルヒンジモデルの折畳み経路における特異状態であることを示唆している．



model(a)　　model(b)　　model(c)

図 2.2 畳込み経路解析対象モデル

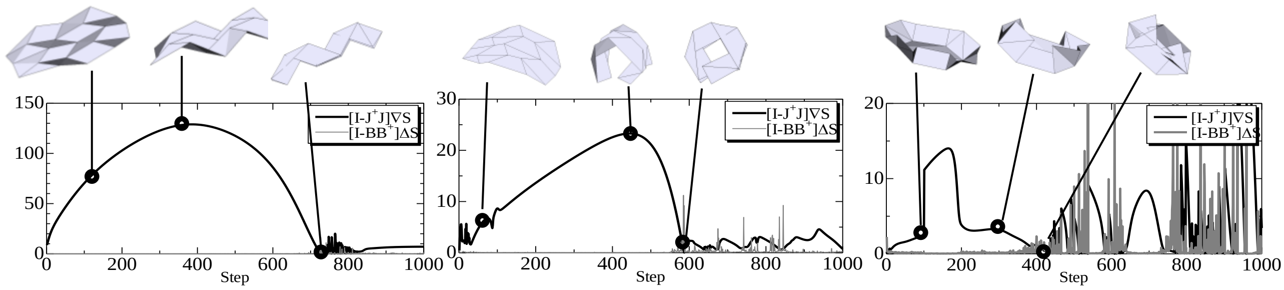


図 2.3 経路解析結果

3. 特異状態における二面角モード抽出

2 章では初期不整の与えられた展開図情報から平坦状態まで畳込み追跡が可能なことを示した．以下では二面角を変数とし，頂点周りの平面角・二面角に関する条件を拘束条件とした取り扱いを示す．特に平坦時という特異状態における変形モード抽出として，2.1 で示した二階微分による取り扱いを援用する．パネルヒンジモデルにおける変形モード抽出において二面角を変数として扱うことは，拘束条件数との整合性の観点から節点変位よりも有利であるといえる．剛体折紙の可能な変形モード抽出法は[5][6]で提案されているが，本報告ではこれをトラスモデルの微小変形，有限変形の抽出のための式(2.7)(2.12)に対応付けた導出を示す．

3.1 定式化ー二階微分までの考慮

拘束条件式の導出

一般的な単頂点周りで成り立つ角度条件式を考える．

n 本の折線が集中する頂点周りの各平面角 $\theta_1, \theta_2, \cdots \theta_n$ と二面角 $\rho_1, \rho_2, \cdots \rho_n$ の拘束条件式は一周できるという条件から(3.1)のように表すことができる[8][9]．

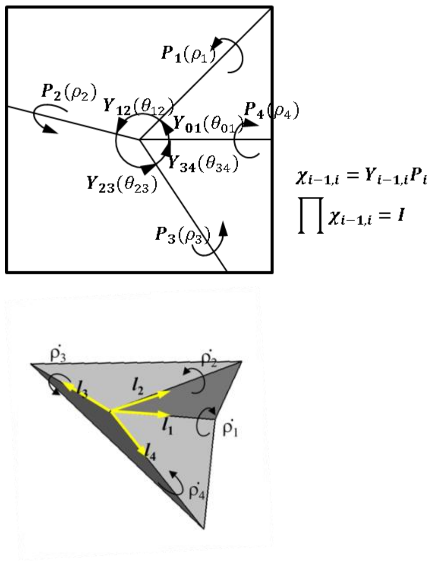


図 3.1 頂点周りの拘束条件

$$\boldsymbol{R}(\boldsymbol{\rho}) = \boldsymbol{\chi}_{01}\boldsymbol{\chi}_{12}\cdots\boldsymbol{\chi}_{n-1,n} = \mathbf{I} \tag{3.1}$$

$$\boldsymbol{\chi}_{i-1,i} = \boldsymbol{YP}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos\theta_{i-1,i} & -\sin\theta_{i-1,i} & 0 \\ \sin\theta_{i-1,i} & \cos\theta_{i-1,i} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\rho_i & -\sin\rho_i \\ 0 & \sin\rho_i & \cos\rho_i \end{bmatrix} \tag{3.2}$$

(3.1)を時間微分すると，(3.3)のようになる．

$$\boldsymbol{R}'\dot{\boldsymbol{\rho}} = \frac{\partial \boldsymbol{R}}{\partial \rho_1}\dot{\rho_1} + \frac{\partial \boldsymbol{R}}{\partial \rho_2}\dot{\rho_2} + \cdots \frac{\partial \boldsymbol{R}}{\partial \rho_n}\dot{\rho_n} = \mathbf{0} \tag{3.3}$$

$\boldsymbol{R}'\dot{\boldsymbol{\rho}}$ は 3 x 3matrix となるが，各成分に関する拘束条件式を行として，(2.3)に表記を合わせると，(3.4)のようになる．

$$\boldsymbol{R}'\dot{\boldsymbol{\rho}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial R_{(\mathbf{1.1})}}{\partial \rho_1} \frac{\partial R_{(\mathbf{1.1})}}{\partial \rho_2} & \cdots \frac{\partial R_{(\mathbf{1.1})}}{\partial \rho_n} \\ \frac{\partial R_{(\mathbf{1.2})}}{\partial \rho_1} \frac{\partial R_{(\mathbf{1.2})}}{\partial \rho_2} & \cdots \frac{\partial R_{(\mathbf{1.2})}}{\partial \rho_1} \\ \vdots \quad\quad \vdots & \vdots \\ \frac{\partial R_{(\mathbf{3.3})}}{\partial \rho_1} \frac{\partial R_{(\mathbf{3.3})}}{\partial \rho_2} & \cdots \frac{\partial R_{(\mathbf{1.1})}}{\partial \rho_n} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\rho_1} \\ \dot{\rho_2} \\ \vdots \\ \dot{\rho_n} \end{Bmatrix} = \mathbf{0} \tag{3.4}$$

ここで$R_{(i,j)}$は R の i,j 成分を表す．ここから独立な３成分を抜き出し(3.5)のように表すことができる[6]．ここで$\boldsymbol{l_1}$は各ヒンジの方向余弦ベクトルである．

$$\boldsymbol{C}\dot{\boldsymbol{\rho}} = [\boldsymbol{l_1}\boldsymbol{l_2}\cdots\boldsymbol{l_n}] \begin{Bmatrix} \dot{\rho_1} \\ \dot{\rho_2} \\ \vdots \\ \dot{\rho_n} \end{Bmatrix} = \mathbf{0} \tag{3.5}$$

この剛体変形角のモード解は，(2.5)と同様に(3.6)のように求めることができる．

$$\boldsymbol{H} = [\boldsymbol{h_1}\boldsymbol{h_2}\cdots\boldsymbol{h_n}] = \left[\boldsymbol{I} - \boldsymbol{R'}^{+}\boldsymbol{R}'\right] \tag{3.6}$$

$$\boldsymbol{h_i} = (\dot{\rho_1}, \dot{\rho_2}, \cdots \dot{\rho_n})^{\boldsymbol{T}}{}_{\boldsymbol{i}}$$

しかし平坦状態においては(3.5)において各ヒンジが同一平面上に乗るため，考える拘束条件が 1 本減り不十分となる．これはトラスモデルの図 2.1(c)と同様，パネルヒンジモデルの平面性に由来する特異性と考えることができる．特異状態の有限範囲での剛体変位モードを考える場合，トラスモデルと同様に２次項まで考慮する．

$$\boldsymbol{R}'\ddot{\boldsymbol{\rho}} + \dot{\boldsymbol{\rho}}^T\boldsymbol{R}''\dot{\boldsymbol{\rho}} = \mathbf{0} \tag{3.7}$$

$$\boldsymbol{R}' = R'_{ki} = \frac{dR_k}{d\rho_i} \tag{3.8}$$

$$\dot{\boldsymbol{\rho}}^T\boldsymbol{R}''\dot{\boldsymbol{\rho}} = R''_{kij}\dot{\rho}_i\dot{\rho}_j = \sum_i^n\sum_j^n \frac{\partial^2 R_k}{\partial\rho_i\partial\rho_j}\dot{\rho}_i\dot{\rho}_j \tag{3.9}$$

i,j: 1～n (頂点に集中する折線の本数)

k: (1,1)～(3,3) (3x3matrix の成分数)

(3.7)の左辺は 3x3matrix の各成分に関する 9 本の拘束条件式となる．

$\dot{\boldsymbol{\rho}}$が有限範囲で変形可能な条件は$\ddot{\boldsymbol{\rho}}$の存在条件である(4.10)を満足することである．

$$[\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}'\boldsymbol{A}'^{+}][-\dot{\boldsymbol{x}}^T\boldsymbol{A}''\dot{\boldsymbol{x}}] = \mathbf{0} \tag{3.10}$$

(3.10)を満たす実際の$\dot{\boldsymbol{\rho}}$の探索にあたっては，以下のように Newton-Raphson 法に準じた計算を行った．

解析手順

(3.4)(3.10)を満たす$\dot{\boldsymbol{\rho}}$の探索は，適当な$\dot{\boldsymbol{\rho}}$から出発して制約条件付き最適化問題により扱うことができる．(3.4)(3.10)を再掲すると(3.11)(3.12)のような問題として扱える．

制約条件　$\boldsymbol{R}'\dot{\boldsymbol{\rho}} = \mathbf{0}$ (3.11)

目的関数

$$\boldsymbol{S} = [\boldsymbol{I} - \boldsymbol{R}'\boldsymbol{R}'^{+}][-\dot{\boldsymbol{x}}^T\boldsymbol{A}''\dot{\boldsymbol{x}}] = \boldsymbol{r} \to \mathbf{0} \tag{3.12}$$

最初，(3.6)によって得られる(3.11)を満たす適当な$\dot{\boldsymbol{\rho}} = \dot{\boldsymbol{\rho}}_{\mathbf{0}}$を代入すると，普通(3.12)で S=0 を満たさない．そこで，残差$\boldsymbol{r}$を $\mathbf{0}$ に近づけるため$\Delta\dot{\boldsymbol{\rho}}$を以下のように求める．今適当に代入した$\dot{\boldsymbol{\rho}} = \dot{\boldsymbol{\rho}}^*$，その時の$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}^*$とする．(3.11)，(3.12) より(3.13)が成り立つ．一般逆行列を用いて(3.14)のように$\{\Delta\dot{\boldsymbol{\rho}}\}$が求まる．これを用いて(3.15)のように逐次$\dot{\boldsymbol{\rho}}^*$を更新し，***r=0*** となるまで繰り返す．

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{R}' \\ \boldsymbol{\nabla S}(\boldsymbol{\rho}^*) \end{bmatrix}\{\Delta\dot{\boldsymbol{\rho}}\} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \boldsymbol{r}^* \end{bmatrix} \tag{3.13}$$

$$\{\Delta\dot{\boldsymbol{\rho}}\} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{R}' \\ \boldsymbol{\nabla S}(\boldsymbol{\rho}^*) \end{bmatrix}^{+} \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \boldsymbol{r}^* \end{bmatrix} \tag{3.14}$$

$$\dot{\boldsymbol{\rho}}^* \leftarrow \dot{\boldsymbol{\rho}}^* + \Delta\dot{\boldsymbol{\rho}} \tag{3.15}$$

3.2　二階微分条件の図式的解釈

(3.10)が有限範囲での剛体変位モード条件であることを導出したが，R''は直感的に理解しづらい．ここで$\dot{\boldsymbol{\rho}}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{R}''\dot{\boldsymbol{\rho}}$の意味を図形的に考える．

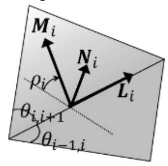


図 3.2 ヒンジ線 i 周辺の記標

$$\boldsymbol{T}_{\boldsymbol{i\_j}} = \boldsymbol{\chi}_{\boldsymbol{i-1,i}}\boldsymbol{\chi}_{\boldsymbol{i,i+1}}\cdots\boldsymbol{\chi}_{\boldsymbol{j-1,j}} \tag{3.16}$$

とすると

$$\boldsymbol{T}_{\boldsymbol{o\_i}} = \begin{bmatrix} L_i^x & M_i^x & N_i^x \\ L_i^y & M_i^y & N_i^y \\ L_i^z & M_i^z & N_i^z \end{bmatrix} \tag{3.17}$$

となる．ここで $\boldsymbol{L}$ はヒンジ線$\boldsymbol{i}$の方向余弦，$\boldsymbol{M}$はヒンジ$\boldsymbol{i-1,i}$面内方向の$\boldsymbol{L}$と垂直な単位ベクトル，$\boldsymbol{N} = \boldsymbol{L} \times \boldsymbol{M}$である．

$$\frac{\partial \boldsymbol{\chi}_{i-1,i}}{\partial \rho_i} = \boldsymbol{\chi}_{i-1,i} \boldsymbol{P}_i^{-1} \frac{\partial \boldsymbol{P}_i}{\partial \rho_i} =$$

$$\boldsymbol{\chi}_{i-1,i}\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 0\end{bmatrix} = \boldsymbol{\chi}_{i-1,i}\boldsymbol{Q} \tag{3.18}$$

であることを利用すると，

$$\frac{\partial^2 \boldsymbol{R}}{\partial \rho_i \partial \rho_j} = \boldsymbol{\chi}_{0,i} \cdots \frac{\partial \boldsymbol{\chi}_{i-1,i}}{\partial \rho_i} \cdots \frac{\partial \boldsymbol{\chi}_{j-1,j}}{\partial \rho_j} \cdots \boldsymbol{\chi}_{n-1,0}$$

$$= \boldsymbol{T}_{0\_i}\boldsymbol{Q}\boldsymbol{T}_{i\_j}\boldsymbol{Q}\boldsymbol{T}_{j\_0} \tag{3.19}$$

となる．

$$[\boldsymbol{T}_{0\_i}][\boldsymbol{T}_{0\_i}]^T = \boldsymbol{I}, \qquad [\boldsymbol{T}_{0\_i}][\boldsymbol{T}_{i\_j}][\boldsymbol{T}_{j_0}] = \boldsymbol{I} \tag{3.20}$$

であることを考慮すると

$$\frac{\partial^2 \boldsymbol{R}}{\partial \rho_i \partial \rho_j} = \boldsymbol{T}_{0\_i}\boldsymbol{Q}\boldsymbol{T}_{i\_j}\boldsymbol{Q}\boldsymbol{T}_{j\_0} = \boldsymbol{T}_{0\_i}\boldsymbol{Q}\boldsymbol{T}_{0\_i}^T\boldsymbol{T}_{0\_j}\boldsymbol{Q}\boldsymbol{T}_{0\_j}^T$$

$$= \begin{bmatrix}0 & -L_i^z & L_i^y\\ L_i^z & 0 & -L_i^x\\ -L_i^y & L_i^x & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & -L_j^z & L_j^y\\ L_j^z & 0 & -L_j^x\\ -L_j^y & L_j^x & 0\end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix}-L_i^z L_j^z - L_i^y L_j^y & L_i^y L_j^x & L_i^z L_j^x\\ L_i^x L_j^y & -L_i^z L_j^z - L_i^x L_j^x & L_i^z L_j^y\\ L_i^x L_j^z & L_i^y L_j^z & -L_i^y L_j^y - L_i^x L_j^x\end{bmatrix} \tag{3.21}$$

となる．なお，$i=j$の場合，

$$\frac{\partial^2 \boldsymbol{R}}{\partial \rho_i^2} = \boldsymbol{\chi}_{0,i} \cdots \boldsymbol{\chi}_{i-1,i}\boldsymbol{P}_i^{-1}\frac{\partial^2 \boldsymbol{P}_i}{\partial \rho_i^2} \cdots \boldsymbol{\chi}_{n-1,0}$$

$$= \boldsymbol{T}_{0\_i}\boldsymbol{Q}\boldsymbol{T}_{i\_j}\boldsymbol{Q}\boldsymbol{T}_{j\_0} \tag{3.22}$$

となるが，(3.20)等を考慮すると

$$\frac{\partial^2 \boldsymbol{R}}{\partial {\rho_i}^2} = \begin{bmatrix}(L_i^x)^2 - 1 & L_i^y L_i^x & L_i^z L_i^x\\ L_i^x L_j^y & (L_i^y)^2 - 1 & L_i^z L_j^y\\ L_i^x L_j^z & L_i^y L_j^z & (L_i^z)^2 - 1\end{bmatrix} \tag{3.23}$$

となり，(3.21)での表現に含まれる．

今，平坦状態を考えると$L_i^z = 0$より(3.21)は

$$\begin{bmatrix}-L_i^y L_j^y & L_i^y L_j^x & 0\\ L_i^x L_j^y & -L_i^x L_j^x & 0\\ 0 & 0 & -L_i^y L_j^y - L_i^x L_j^x\end{bmatrix} \tag{3.24}$$

となる．いま，(3.7)の第２項が０という条件を考えるとこれは(3.24)のそれぞれの成分を考えて，

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\begin{Bmatrix}L_i^x L_j^x\\ L_i^y L_j^y\\ L_i^x L_j^y\\ L_i^y L_j^x\end{Bmatrix}\dot{\rho}_i\dot{\rho}_j = \boldsymbol{0} \tag{3.25}$$

という条件になるが，これは$\dot{\rho}_i \boldsymbol{L}_i^{\blacksquare}$と$\dot{\rho}_j \boldsymbol{L}_j^{\blacksquare}$の総組合せの積の和が０を意味する．ここから，各折線ベクトルと起こりうる微小二面角とで作られる各ベクトル$\dot{\rho}_i \boldsymbol{l}_i$を考えたとき，総組合せベクトルの内積，外積の和が０であることは必要条件となる．またここから特定の成分を選んで作成した条件(3.26)は「ベクトル$\dot{\rho}_i \boldsymbol{l}_i$を順次接続していくと向き付けされた面積が０となる」という条件に相当し，この条件は平坦時における剛体可折モードを簡易的に判定する必要条件であるといえる．

$$\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=i+1}^{n}(\dot{\rho}_i \boldsymbol{l}_i \times \dot{\rho}_j \boldsymbol{l}_j)$$

$$= \sum_{j=2}^{n}\left(\left(\sum_{i=1}^{j-1}\dot{\rho}_i \boldsymbol{l}_i\right) \times \dot{\rho}_j \boldsymbol{l}_j\right) = \boldsymbol{0} \tag{3.26}$$

3.3　解析例

3.1，3.2 で提案された計算手法の妥当性を以下に検討する．n 本の折線に対し可能な山谷付けの組合せは 2ⁿ 通りである．図 3.3 に示すそれぞれの全 2ⁿ 通りの山谷付けに対し，(3.12)の計算の結果として収束した$\dot{\boldsymbol{\rho}}$の値を表 3.1 に示す．

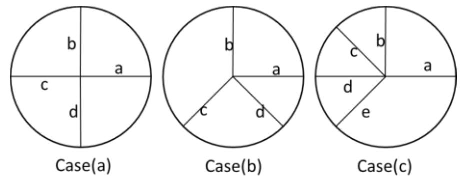


図 3.3 対象とした展開図

これらの結果は適切な山谷組合せを示していることが観察できる．Case(b)に着目すると，これらの山谷の組合せは「ベクトル$\dot{\rho}_i \boldsymbol{l}_i$を接続して向き付けされた面積が０となる図を描くことができる」という条件を満足している．抽出された$\dot{\rho}_i$の組合せは平坦折り可能な折線図に成立する ”$|\dot{\boldsymbol{\rho}}_1| = |\dot{\boldsymbol{\rho}}_3|,\ |\dot{\boldsymbol{\rho}}_2| = |\dot{\boldsymbol{\rho}}_4|$” という条件を満たしていることにも気づくこと出来る．式(3.25)の必要十分性の確認は今後の課題といえる．

表 3.1 抽出された二面角モード

	a	b	c	d	e
case(a)	×	×	×	×	
case(b)	1.207	0.5	1.207	-0.5	
	0.5	-1.207	-0.5	-1.207	
	-0.5	1.207	0.5	1.207	
	-1.207	-0.5	-1.207	0.5	
case(c)	0.666	0.482	0.783	-0.923	1.464
	0.77	1.229	-1.023	0.986	0.716
	0.491	1.147	-0.3	-0.231	1.322
	1.455	-0.534	1.032	0.53	0.277
	0.969	-0.272	1.289	-0.582	0.905
	-0.969	0.272	-1.289	0.582	-0.905
	-1.455	0.534	-1.032	-0.53	-0.277
	-0.491	-1.147	0.3	0.231	-1.322
	-0.77	-1.229	1.023	-0.986	-0.716
	-0.666	-0.482	-0.783	0.923	-1.464

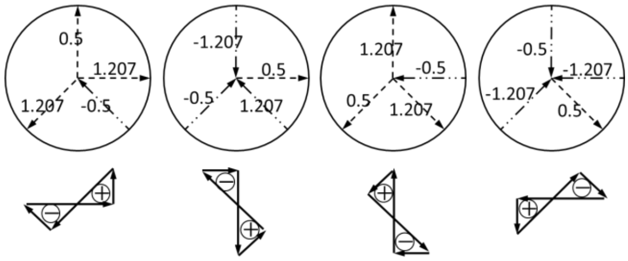


図 3.4 case(b)の抽出モード

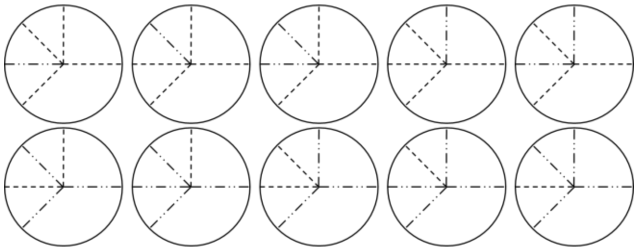


図 3.5 case(c)の抽出モード

4. 結論

本報告ではトラスモデルでその妥当性が確認されている一般逆行列を使用した多ヒンジ構造の変形モード抽出解析について，２次項までを考慮した解析をパネルヒンジモデルへの適用を示した．特にパネルヒンジモデルの平坦状態が変形経路において特異な状態であることが示され，また平坦状態における妥当な変形モードは二次項までを考慮することによって始めて得ることができるものであることが示された．

References

[1] 田中，半谷：不安定トラスの剛体変位と安定化条件，日本建築学会構造系論文集(356)，1985, 35-43.

[2] 半谷, 川口 : 形態解析－一般逆行列とその応用，培風館，1991.

[3] 川口，那花，半谷：骨組み構造の畳み込み解析，日本建築学会構造系論文集(498), 1997, 99-104.

[4] 川口：一般逆行列と構造工学への応用，コロナ社，2011.

[5] N. Watanabe, K. Kawaguchi, The method for judging rigid foldability. in R. Lang (ed.): Origami4: The Fourth International Conference on Origami in Science, Mathematics, and Education, A K Peters 2009; 165-174.

[6] T. Tachi, Simulation of rigid origami. in R. Lang (ed.): Origami4: The Fourth International Conference on Origami in Science, Mathematics, and Education, A K Peters 2009; 175-187.

[7] R. Connelly, W. Whiteley, Second order rigidity and pre-stress stability for tensegrity frameworks. *SIAM J. Discrete Math.* 9(3), 1996; 153-491.

[8] T. Kawasaki, R(γ)=I. in K. Miura (ed.): Orgami Science and Art: Proceedings of the Second International Meeting of Origami in Science and Scientific Origami, (Seian University of Art and Design), 1997; 31-40.

[9] S.-M. Belcastro, T.C. Hull, A mathematical model for non-flat origami. in T.C. Hull (ed.) Origami^3: Proceedings of the Third International Meeting of Origami in Science, Mathematics, and Education, A K Peters 2009; 39-51.

[10] T. Tachi, Design of Infinitesimally and Finitely Flexible Origami Based on Reciprocal Figures. in Journal for Geometry and Graphics, 16(2), 2012; 223-234.