

A7 せん断負荷を受ける矩形膜の皺解析を対象とした信頼区間の設定法について

Calculation method on a confident interval for Wrinkling Analysis of Rectangular Membranes under Shear Loading

亀井宏太（鳥取大・院），岩佐貴史（鳥取大）
Kota Kamei（Graduate School of Tottori University），Takashi Iwasa（Tottori University）

A method to establish a reliability of the wrinkling analysis for thin membranes was proposed. This method estimates the upper and lower limit of the actual wrinkling behavior by adding a confident interval to the analysis results. A calculation method on a confident interval requires a probabilistic distribution of the residual errors that are given by the differences between actual membrane behaviours and their analysis results. So, by conducting an experiment and analysis for the thin membrane subjected to shear loading, a probabilistic distribution of the residual errors was investigated and the confident interval was derived. And in the derivation processes of the confident interval, the bootstrap method was applied in order to estimate the reliable confident interval of the wrinkling analysis for similar membrane model. Through the comparison of the experiment and analysis, the effectiveness of confident interval was presented.

Key Words: Reliability Assessment, Wrinkled Analysis, Confident Interval, Probabilistic distribution, Bootstrap method

1. はじめに

ソーラー電力セイル (IKAROS) や大型展開アンテナ (ETS - VIII) 等の大型宇宙構造物は、ロケットでの輸送の制約のため軽量性・収納性・展開性に優れた構造であることが要求されており、この要求を満たす構造物として膜面を利用した膜面宇宙構造物が注目されている⁽¹⁾。

しかし、膜面宇宙構造物は、その柔軟さゆえに重力のような微小荷重でも容易に変形が生じてしまい、その構造特性を地上で検証することが非常に困難な構造物といえる。そのため、地上試験における検証結果の妥当性が問題になる。そこで、今後の膜面宇宙構造物の開発には、このような地上試験の困難さを補うために、これまで以上に数値解析を用いたシミュレーション技術への期待が高まっている。

膜面に生じる皺や弛みといった変形挙動は座屈現象の一種であり幾何学的非線形性が強い応答である。そのため外力や境界条件等の不確実性に強く影響を受ける。このような不確実性に敏感な変形挙動は従来の確定的な解析法で予測することが難しく、不確実性を適切に考慮して実際の構造物の応答を一定の信頼度で予測する方法論が必要となる。

不確実性を考慮した方法論の一つとして、従来の確定的見地から得られた解析結果に信頼区間を設定し、「実際の応答が生じる範囲」を一定の信頼度で予測する方法が考えられる。この方法は、実際の応答を確定的に予測するのではなく、実際の応答が生じる範囲を予測することで応答に含まれる不確実性の影響を考慮しようとするものである。そこで、このような方法を適用するためには、まずは類似な膜構造に対して実際の薄膜の変形挙動を計測し、実際の応答と解析結果との残差が従う確率分布を求めることが必要となる^(2,3)。さらに、得られた残差が従う確率分布にある特性や統一性があることが分かれば、一度求めた信頼区間を他の類似構造物の応答にも適用できると考えられる。

例えば、人工衛星の音響振動解析や衝撃応答解析では、信頼区間の考え方を適用し、その有用性を示している。これらの解析は、構造が類似な人工衛星を対象に、実際の応答と解析結果との残差が従う確率分布を過去の膨大な試験データから求め検討することで、その特性に基づいて適切な信頼区間を計算し、加速度応答の上限値を予測している⁽⁴⁾。そこで、同様の方法論を薄膜の皺解析にも適用できると考えられる。

しかし、そもそも膜面に生じる皺や弛みといった応答は音響振動や衝撃応答のような線形応答とは本質的に異なる。また、薄膜を積極的に利用する次世代の膜面宇宙構造物は従来の宇宙構造物と比較して類似な構造物の試験データが少ないことから解析結果の残差が従う確率分布を必然的に限定された試験データから求めなくてはならなくなり、得られる信頼区間の信頼性が問題となる。

このような課題を解決する方法としてブートストラップ法に注目している。この方法論については、3隅固定1隅引張を受ける正方形膜を対象に検討が行われ、薄膜の初期形状に大きな差がないモデルにおいては、得られた信頼区間は実際の応答を適切に包絡するという結果が報告されている⁽⁵⁾。本研究では他のモデルとして1辺固定他端せん断負荷を受ける矩形膜を対象に実験と解析を行い、実験結果と解析結果との残差が従う確率分布について検討する。また、ブートストラップ法を用いることで信頼区間を計算し、他の実験モデルでも実際の応答を適切に包絡するかどうか確認する。

2. ブートストラップ法による皺解析の信頼区間の設定法⁽³⁾

本章では、ブートストラップ法による皺解析の信頼区間の設定法⁽³⁾について再録する。

2-1 解析結果の信頼区間の計算法

1回の試験で計測される計測点の数を N とし、試験の回数を M とする。 j 回目の実験で取得した計測点 i 個のデータを y_{ij}^e とし、各試験に対する解析結果を y_{ij}^a とする。このとき、両者の間には以下の関係がある。

$$e_{ij} = y_{ij}^e - y_{ij}^a \quad (1)$$

ここで、 e_{ij} は残差である。残差 e_{ij} の確率分布は、残差 e_{ij} の統計処理から求めることができ、試験データ数が多い程妥当なモデルを推定することができる。仮に、推定した残差 e_{ij} の確率分布が正規分布のような理論モデルに従うと推定されると、解析結果の信頼区間 δ は残差 e_{ij} の平均値 μ と標準偏差 σ を用いて、以下の式で求められる。

$$\delta_{\beta\%}^{(\pm)} = \mu \pm k_{\beta\%} \sigma \quad (2)$$

ここで、 $k_{\beta\%}$ は、実際の応答を $\beta\%$ の確率で包絡するための係数である。これより、実際の応答をある一定の確率 ($\beta\%$) で包絡するための上限値と下限値 ($y_{\beta\%}^a$) は解析結果に式(2)を加えることで以下のように設定できる。

$$\begin{aligned} y_{\beta\%}^a &= y_{ij}^a + \delta_{\beta\%}^{(\pm)} \\ &= y_{ij}^a + \mu \pm k_{\beta\%}\sigma \end{aligned} \quad (3)$$

式(3)の意味は、解析結果 y_{ij}^a に対して残差の平均値（ドリフト量 μ ）を補正し、実際の応答を一定の確率 ($\beta\%$) で包絡するような上限値と下限値 ($\pm k_{\beta\%}\sigma$) を設定するものである。

宇宙構造物の衝撃応答解析の場合、衝撃負荷を受ける宇宙構造物の応答（SRS 値）は経験的に対数正規分布に従うことが報告されている。この確率分布は、過去の膨大な試験データの統計処理から求められたものであり、経験的に信頼性の高いモデルとなっている。衝撃応答解析では試験データと解析結果を共に対数スケールに変換した後に、式(1)と式(2)を用いて解析結果の信頼区間（上限値のみ）を計算している⁽⁴⁾。

しかし、本研究で対象としている膜面宇宙構造物の場合には、過去の実績が少ないことから、限定された試験データと解析結果から残差 e_{ij} が従う確率分布を推定しなくてはならず、その信頼性が問題となる。そこで、ブートストラップ法を適用することにより、限られた試験データからでもある一定の信頼度をもって解析結果に信頼区間を設定する方法を検討する。

2-2 ブートストラップ法^(5,6)

ブートストラップ法とは、計測されたデータの確からしさを評価するための統計手法の一つであり、サンプリングされたデータの母集団を推定することができる。データを χ で表し、データを構成する要素をベクトル \mathbf{x} で表す。

$$\chi = \{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n\} \quad (4)$$

このデータ χ を用いるとき、出力値を $\hat{\theta}$ で表すと入出力の関係を、

$$\hat{\theta} = \hat{\theta}(\chi) \quad (5)$$

と書く。ここで、 $\hat{\theta}$ が推定しようとする量を θ で表し、 $\hat{\theta}$ は実際に推定する値 θ の良い推定量であると仮定する。しかし、 χ にひそむランダムネスの影響により $\hat{\theta}(\chi)$ も変動する。そこで、ブートストラップ法では、偶然観測されたデータ χ を用いて、推定した結果 $\hat{\theta}$ の変動（バラツキ）を以下の手順により求める。

- ① データ χ を繰り返し復元抽出し、 B 個のデータ $\{\chi^{*1}, \dots, \chi^{*B}\}$ を作成する。作成されたデータは、ブートストラップ標本と呼ばれる。
- ② ブートストラップ標本を用いて値 θ を推定する。この値 $\hat{\theta}(\chi^{*b})$ は $\{\hat{\theta}^{*1}, \dots, \hat{\theta}^{*B}\}$ で表され、ブートストラップ複製と呼ばれる。
- ③ ブートストラップ複製 $\{\hat{\theta}^{*1}, \dots, \hat{\theta}^{*B}\}$ を用いて、推定値 $\hat{\theta}(\chi)$ のバラツキを評価する。

$\hat{\theta}(\chi)$ のバラツキの評価方法として、ブートストラップ複製

$\hat{\theta}^*(\chi)$ の分散を計算し、目安とする方法や、 θ の真値がとりうる範囲である信頼区間を計算する方法がある。

また、信頼区間の計算には、ブートストラップ複製 $\hat{\theta}^*(\chi)$ の確率分布が正規分布に従うと仮定して行う場合と、正規分布を仮定せず直接に信頼区間を得るパーセンタイル信頼区間を用いる方法がある。

2-3 ブートストラップ法を利用した信頼区間の計算法

限定された試験データからブートストラップ法を用いて解析結果の信頼区間を計算する場合、式(4)のデータ χ を限られた試験データから得られた残差 e_{ij} に対応させ、推定値 $\hat{\theta}(\chi)$ を、式(2)で計算される信頼区間 $\delta_{\beta\%}^{(\pm)}$ の上限値と下限値とする。即ち、少数の試験データから得られた残差 e_{ij} を多数の試験データから得られる残差（母集団）の1標本と考え、得られた残差 e_{ij} のリサンプリングを繰り返すことにより残差 e_{ij} が属する母集団の性質を推定し、バラツキを評価する。

限定された試験データからブートストラップ法を用いてある一定の信頼性を持った信頼区間を計算する手順を以下に示す。

- ① j 回の試験データと、その数値解析の結果から、式(1)を用いて残差 e_{ij} を計算する。
- ② 求めた残差 e_{ij} から繰り返し復元抽出し、 B 個のデータであるブートストラップ標本 $\{e_{ij}^{*1}, \dots, e_{ij}^{*B}\}$ を計算する。
- ③ ブートストラップ標本から、ブートストラップ複製 $\{\hat{\theta}^{*1}, \dots, \hat{\theta}^{*B}\}$ を計算し、その確率分布を計算する。なお、信頼区間は上限値と下限値で構成されるため、それぞれに対してブートストラップ複製が作成される。
- ④ ブートストラップ複製 $\{\hat{\theta}^{*1}, \dots, \hat{\theta}^{*B}\}$ の信頼区間を以下のように計算する。

$$\begin{aligned} \text{上限値 } \delta_{\beta\%}^{(+)} &: [\hat{\theta}^{+(\alpha/2)}, \hat{\theta}^{+(1-\alpha/2)}] \\ \text{下限値 } \delta_{\beta\%}^{(-)} &: [\hat{\theta}^{-(\alpha/2)}, \hat{\theta}^{-(1-\alpha/2)}] \end{aligned} \quad (6)$$

式(6)の $\hat{\theta}^{+(\alpha/2)}$ 、 $\hat{\theta}^{+(1-\alpha/2)}$ はブートストラップ複製である信頼区間の上限値の $100(1-\alpha)\%$ 両側信頼区間とし、 $\hat{\theta}^{-(\alpha/2)}$ 、 $\hat{\theta}^{-(1-\alpha/2)}$ はブートストラップ複製である信頼区間の下限値の $100(1-\alpha)\%$ 両側信頼区間とする。式(6)から解析結果の信頼区間を以下のように設定する。

$$\delta_{\beta\%}^{(\pm)} = [\hat{\theta}^{-(\alpha/2)}, \hat{\theta}^{+(1-\alpha/2)}] \quad (7)$$

以上のプロセスで導出した信頼区間 $\delta_{\beta\%}^{(\pm)}$ を式(8)を用いて解析結果に加えることで、実際の薄膜の変形挙動をある一定の確率で包絡するような上限値と下限値を限定された試験データから予測する。

$$y_{\beta\%}^a = y_{ij}^a + \delta_{\beta\%}^{(\pm)} \quad (8)$$

3. 検討モデル

3-1 実験モデル

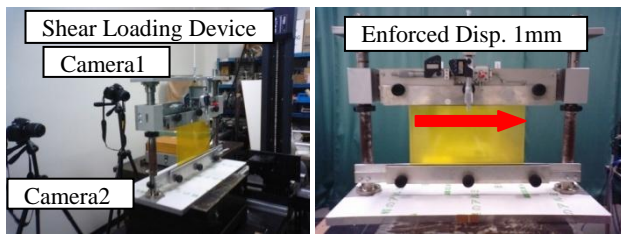
Fig.1 に実験モデルを示す. Fig.1 (a) は実験装置の配置状況であり, 同図 (b) は矩形膜の拡大写真である. 本実験では膜材として縦 160mm, 横 300mm, 膜厚 12.5 μ m のポリイミドフィルムを使用し, 膜面には縦 27 \times 横 49 個の合計 1323 個の直径 1mm の白い点を 6mm 間隔に付している. また, 2 台のカメラと矩形膜の配置状況を Fig.2 に示す.

矩形膜の変形形状は, 全視野測定である DLT 法⁽⁷⁾に基づく画像解析により計測し, 計測結果から動画計測ソフトウェア (Move TR 3D) を用いて, 膜面の各点の座標を求めた.

本実験の計測精度は x,y 方向が約 20 μ m, z 方向が約 50 μ m であることが過去の研究で示されている⁽⁸⁾. 以下に計測手順を示す.

- ① 矩形膜を取り付けたせん断負荷装置を計測位置に設置する.
- ② 膜の初期形状を 2 台のカメラで撮影する.
- ③ 膜の上端部に x 軸方向に 0.1mm の強制変位を 10 回与え, 合計 1mm のせん断負荷を加えていく過程を撮影する.

以上①~③の実験を 10 回行い, それぞれの実験ケースを Case1~Case10 とする.



(a) Overall View (b) Rectangular Membrane

Fig.1 Outline of the Experiment Device

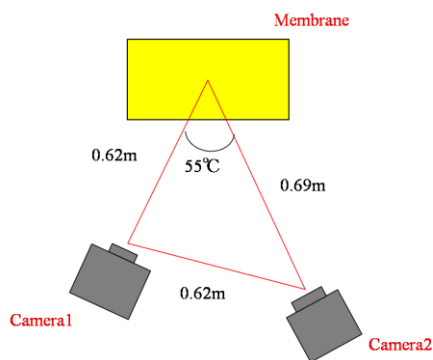


Fig.2 Configuration of Camera and Membrane

3-2 解析モデル

実験の解析は, 幾何学的非線形有限要素法により行った. 解析ソフトに FEAP(Finite Element Analysis Program)⁽⁹⁾ を用い, シェル要素には MITC (Mixed Interpolation of Tensorial Components) シェル要素⁽¹⁰⁾を用いた. Fig.3 に解析モデルを示す. 解析モデルには実験で計測した初期形状の座標を代入している. また, 要素分割には, 安定した解析を行うためにアイソパラメトリック要素⁽¹¹⁾を用いて, 縦を 80 分割で横を 150 分割とし, 2mm 間隔になるように要素を細かくしている. 下端は完全固定し, 上端には上端に平行になるような 1mm の強制変位を与える解析を行った.

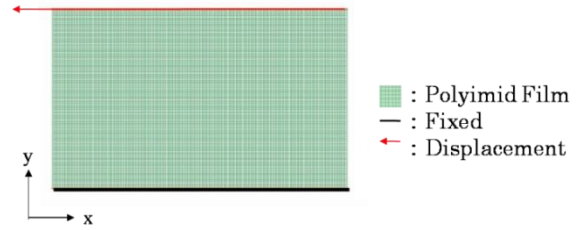


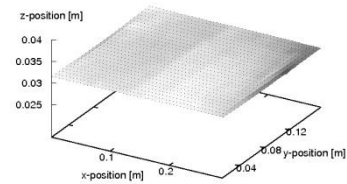
Fig.3 Analysis Model

4. 数値解析における信頼区間の設定

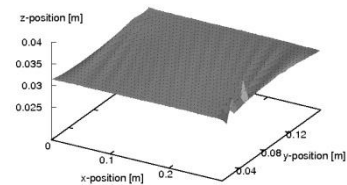
4-1 残差 e_{i1} が従う確率分布の検討

一回目の実験 (Case1) で得られた実験結果と解析結果との残差 e_{i1} を限定されたデータとして利用し, 得られた残差 e_{i1} が従う確率分布について統計的に検討する. また, 各実験ケース (Case1~Case10) から得られるそれぞれの残差 e_{ij} の特性についても検討する.

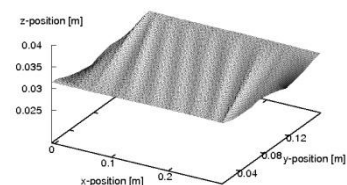
Fig.4 に Case1 の実験結果と解析結果を示す. 同図(a)は実験で計測された膜面の初期形状, (b)は実験で計測された変形後の膜面形状, (c)は解析結果である.



(a) Initial Surface Configuration



(b) Measurement Result



(c) Analysis Result

Fig.4 Measurement Result and Analysis Result

これらの結果 (同図(b), (c)) から, 各節点における解析結果の残差 e_{i1} (実験結果と解析結果の z 方向位置座標の差) を式(12)から計算し, 残差 e_{i1} の確率分布を検討した. 式中の y_{i1}^e, y_{i1}^a は Case1 の変形後の実験結果と解析結果の z 方向位置座標である.

$$e_{i1} = y_{i1}^e - y_{i1}^a \quad (12)$$

また、他の実験ケース (Case2~Case10) の残差 e_{ij} を計算し、各実験ケースで得られた残差 e_{ij} が従う確率分布を検討する。

Fig.5 に残差 e_{i1} の正規確率プロット (QQ プロット) を示す。この QQ プロットの形状は、3 隅固定 1 隅引張荷重を受ける正方形膜のモデル⁽³⁾と比較すると、どちらも直線に分布する部分が存在するものの異なる形状となり、実験モデルにより残差の確率分布には違いが生じることが分かる。

そこで、本実験のような類似構造モデルから得られた残差の確率分布について検討を行うため、Case2 で得られた残差の正規確率プロットを Fig.6 に示す。図より、Case1 と似た形状であることが分かる。この結果は、全ての実験ケース (Case1~Case10) においても同様の傾向を示すことが分かった。従って、Case1 で得られた残差 e_{i1} を利用することで、ブートストラップ法を適用し計算された信頼区間を、他の実験ケースにも適用できると考えられる。

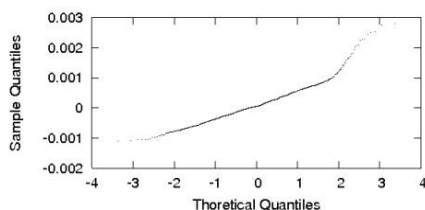


Fig.5 QQplot of Residual (Case1)

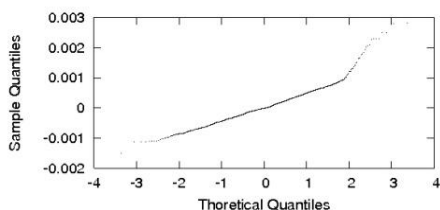


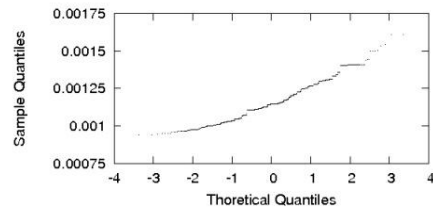
Fig.6 QQplot of Residual (Case2)

4-2 ブートストラップ法による信頼区間の設定

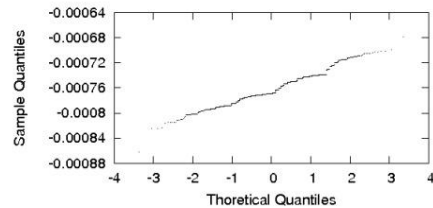
限定されたデータとして得られた残差 e_{i1} が属する母集団の性質を推定するため、ブートストラップ法を適用してブートストラップ複製 (ブートストラップ標本に対して計算されるバラツキ (上限値と下限値)) を求めた。リサンプリング回数 B は計測点数 $N (=1307)$ とした。

Fig.7 に残差 e_{i1} から求められるブートストラップ複製の正規確率プロット (QQ プロット) を示す。同図(a)はバラツキの上限値に対応したブートストラップ複製の正規確率プロットであり、同図(b)は下限値に対応したブートストラップ複製の正規確率プロットである。図より、ブートストラップ複製の正規確率プロットは概ね直線周りに分布していることが分かる。そこで、ブートストラップ複製の上限値と下限値が正規分布に従うか否かを統計的に検討するため、コロモゴロフ・スミルノフ検定 (K-S 検定) を行った。その結果、K-S 検定を適用した場合には、Fig.7 に示すブートストラップ複製は、有意水準 1% でも正規性が棄却される結果となった。そこで、本研究ではパーセンタイル信頼区間 (95%) を適用して信頼区間の計算を行った。

Table 1 にパーセンタイル信頼区間 (95%) を利用して計算されたブートストラップ信頼区間 (式(7)) を示す。同表は、残差 e_{i1} の全データ (1307 個) を用いて計算した信頼区間 (表中上段) と、膜面の x 軸に平行な中央断面 (Fig.8) のデータ (49 個) を利用して計算した信頼区間 (表中下段) をそれぞれ記している。



(a) Upper Limit



(b) Lower Limit

Fig.7 QQplot for Bootstrap Replicate

Table 1 95% Confident Interval given by Bootstrap

	Upper Limit [m]	Lower Limit [m]
All Data	1.36×10^{-3}	-0.80×10^{-3}
Central Section	1.82×10^{-3}	-1.02×10^{-3}

4-3 提案する手法の有効性の検証

Fig.9 に Table 1 で示した信頼区間 (中央断面に対して計算された値) を解析結果に加え (式(8)), Case1 で計測された中央断面と比較した図を示す。図より、ブートストラップ法で求めた解析結果の信頼区間 $\delta_{\beta\%}^{(\pm)}$ は Case1 の結果を適切に包絡していることが分かる。これは、3 隅固定 1 隅引張を受ける正方形膜を対象とした実験の結果と同様の結果を得た。

次に、Fig.10 に Case1 で計算された中央断面の信頼区間と Case2 の中央断面を比較した図を示す。図より、Case1 で計算された信頼区間が実験結果を適切に包絡していることが分かる。また、残りの実験ケース (Case3~Case10) においても同様の結果となった。

従って、本研究のように類似構造物を対象とした実験で得られた残差 e_{ij} の正規確率プロットが似た分布になれば、一つの実験ケースから計算された信頼区間を他の類似構造モデルに対しても適用できると考えられる。

今後の課題としては、類似構造モデルから得られた残差の確率分布を詳しく検討する必要がある。さらに、薄膜にせん断変位を加える実験を複数行って得られた面外変位を対数変換した値や、実験と解析との差 (残差) を対数変換した値が同一の母集団からなる傾向が強いことが報告されている⁽¹²⁾。そこで、得られた残差を対数変換した値の特性を検討するとともに、この特性を利用した信頼区間の設定について検討していく予定である。

また、今回の実験は再現性の高い結果であるため、設定した信頼区間が全実験ケースにおいて適切に機能したと考えられる。従って、他の実験モデルについても今回の方法で得られた信頼区間が適切に機能するかを検討する必要がある。

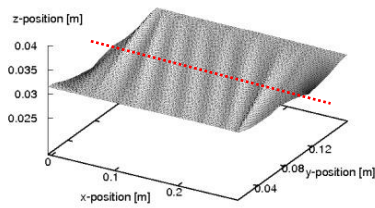


Fig.8 Central Section

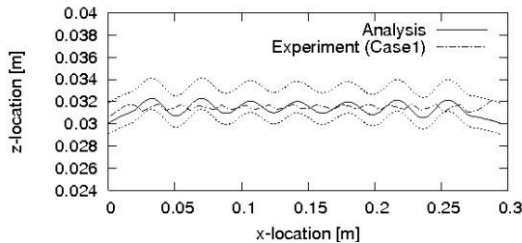


Fig.9 Comparison on Central Sectional Deformation(Case1)

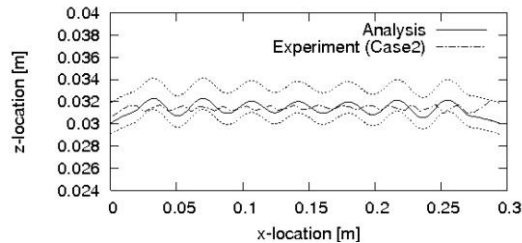


Fig.10 Comparison on Central Sectional Deformation(Case2)

5. まとめ

皺解析で得られる結果と実際の応答との差が従う確率分布について調査し、限定された試験データから薄膜の皺解析の信頼性を評価する方法論の有効性について検討した。本研究により得られた結果を以下にまとめる。

- (1) 薄膜の変形挙動の実験と解析で得られた結果の差（残差）を正規確率プロットに描いた分布の形状は、過去に行われた3隅固定1隅引張荷重を受ける正方形膜モデルの研究の実験結果と比較すると、どちらも直線に分布する部分が存在するものの全体的には異なる形状となった。つまり、実験モデル間によるバラツキがあることが分かる。
- (2) しかし、本研究のような類似構造モデルを対象とした実験結果と解析結果の残差の正規確率プロットの分布は似た傾向を示すことが分かった。
- (3) ブートストラップ法を用いて計算された信頼区間が実際の応答を適切に包絡することが分かった。この結果は3隅固定1隅引張荷重を受ける正方形膜のモデルの研究で得られた結果と同じ結果である。また、この信頼区間を他の実験ケースにも適用できることが確認できた。

謝辞

本研究は、公益財団法人マツダ財団（第28回マツダ研究助成）によりご支援を頂きました。ここに深く感謝致します。

参考文献

- (1) 森治, “IKAROS による世界初のソーラー電力セイル実証”, [No. 10-107]第19回スペース・エンジニアリング・コンファレンス [SEC'10] [’11-1-27,28]
- (2) 岩佐貴史, “皺の生じた正方形膜の面外変位の空間分布特性について”, [No. 10-107] 第19回スペース・エンジニアリング・コンファレンス[SEC'10][’11-1-27,28]
- (3) 岩佐貴史, “皺解析の信頼性評価に関する一考察”, [No. 11-88] 第20回スペース・エンジニアリング・コンファレンス[SEC'11] [’12-1-26,27]
- (4) T. Iwasa and Q. Shi, “Calculation Method for Flight Limit Load of V-band Clamp Separation Shock”, Journal of Space Engineering, Vol. 3, No. 1, 2010, pp. 15-23
- (5) 小西貞則, 越智義道, 大森裕浩, “計算統計学の方法—ブートストラップ・EM アルゴリズム・MCMC—”, 予測と発見の科学, 朝倉書店, 2009
- (6) 国友直人, 山本拓, 北側源四朗, 竹村彰通, “21世紀の統計科学III 数理・計算の統計科学”, 東京大学出版会, 2008
- (7) 池上康男, 桜井伸二, 矢部京之助, ” DLT 法”, Japanese Journal of Sports Sciences, 1991, pp. 191-195
- (8) 牧恒男, “DLT 法による全視野形状計測時の誤差モードの検討”, 平成23年度鳥取大学卒業論文
- (9) Taylor, R.L. ”FEAP-A Finite Element Analysis Program Version 7.3 User Manual”, <http://www.ce.berkeley.edu/rlt/>.
- (10) Noguchi, H and Hisada, T, “An Efficient Formulation for a Shell Element Considering Finite Rotation Increments and Its Assessment”, Trans. of JSME, No. 91-1589, Vol. 58, No. 550, pp.943-950, 1992
- (11) 瀧内亨, “せん断負荷を受ける矩形膜の数値シミュレーション誤差が従う確率分布に関する一考察”, 平成24年度鳥取大学修士論文
- (12) 亀井宏太, 岩佐貴史, “せん断負荷を受ける矩形膜の面外変位の空間分布特性”, [No. 12-115] 第21回スペース・エンジニアリング・コンファレンス [SEC'12][’13-1-25,26]