

機軸方向のモードを有する固体ロケットの音響的な振動燃焼に関する解析

東海大・工 森田 貴和
東海大・学 臼井 雄太郎
IHI エアロスペース 藤松 清人
IHI エアロスペース 山本 研吾
IHI エアロスペース 福地 亜宝郎

1. 緒言

著者らの一部は以前機軸方向にポート断面積が変化する固体ロケットにおいてグレイン形状を前光芒にした場合と後光芒にした場合に関して Velocity-Coupled Oscillation (VCO)の発生原因を調べるために、このVCOが発生する前駆段階で生じる Pressure-Coupled Oscillation (PCO)の解析を行った⁽¹⁾。このようにPCOに駆動されてVCOが発生する可能性があることがこれまでの研究により示唆されている^{(2),(3)}。本研究では以前の解析と比較して幾つかの点で改善を行った。ポート断面を通過する燃焼ガスの質量流量の無次元化の変更、ポート全体に対し区分化した時の各部を結ぶ境界条件の変更、ノズルアドミッタンスの違いによる影響の評価、モータ全体に対する intrinsic instability の条件から共鳴周波数を求めることなどである。また本研究ではこのPCOに関する線形解析の有効性を調べるために検証が比較的容易な燃焼が無い場合について解析を行い、コールドフロー試験と比較した。

2. 非燃焼時の固体ロケットモータの音響解析

著者らの一部が以前行った機軸方向の準一次元線形解析ではポート断面を通過する質量流量の摂動方程式として次式を得た⁽¹⁾：

$$C_{M2}^{(i)} \frac{d^2 \hat{M}}{dx^2} = C_{M1}^{(i)} \frac{d\hat{M}}{dx} + C_{M0}^{(i)} \hat{M}. \quad (1)$$

ただし、係数 $C_{M0}^{(i)}$, $C_{M1}^{(i)}$, $C_{M2}^{(i)}$ については前端からのガス供給のみで側面からのわき出しや燃焼の効果は無いものとしている。これらの係数を空間平均した後、式全体を無次元化すると次式を得る：

$$\frac{d^2 \mu}{dx_i^2} = f_1^{(i)} \frac{d\mu}{dx_i} + f_0^{(i)} \mu. \quad (2)$$

ここで、添え字の i は機軸方向にポート部を分割して前端から昇順に数字を割り当てたことを表している。また $f_0^{(i)}$, $f_1^{(i)}$ は以下のようになる：

$$f_0^{(i)} = L_i^2 \langle C_{M0}^{(i)} \rangle / \langle C_{M2}^{(i)} \rangle, \quad (3)$$

$$f_1^{(i)} = L_i \langle C_{M1}^{(i)} \rangle / \langle C_{M2}^{(i)} \rangle. \quad (4)$$

式(2)の解は以下のようになる：

$$\mu \equiv \frac{\hat{M} / \bar{M}_e}{\hat{p}_e / \bar{p}} = C_1^{(i)} \exp(\lambda_i^+ x_i) + C_2^{(i)} \exp(\lambda_i^- x_i). \quad (5)$$

ここで、 λ_i^+ および λ_i^- は

$$\lambda_i^\pm = \left(f_1^{(i)} \pm \sqrt{f_1^{(i)2} + 4f_0^{(i)}} \right) / 2 \quad (6)$$

である。未定定数 $C_1^{(i)}$, $C_2^{(i)}$ は各部の境界条件により定まる。ポート内を軸方向にモータ前端から前部、中間部、後部の三つの部分に分割する。必要に応じて分割数は増やしたり、減らしたりすることが可能である。以下で、燃焼による側面からの質量寄与が無い場合についての摂動方程式の係数を表す。

前部と後部に対する摂動方程式の係数 ($i=1,3$) は以下のように表される:

$$C_{M0}^{(i)} = s^2, \quad (7)$$

$$C_{M1}^{(i)} = 2\bar{u}_i s, \quad (8)$$

$$C_{M2}^{(i)} = \gamma \overline{RT} - \bar{u}_i^2. \quad (9)$$

中間部の摂動方程式の係数は以下のように表される:

$$C_{M0}^{(2)} = \left(s + 2 \frac{d\bar{u}_2}{dx} \right) A_{p,2} s, \quad (10)$$

$$C_{M1}^{(2)} = 2\bar{u}_2 A_{p,2} s + \frac{d}{dx} (\bar{u}_2^2 A_{p,2}) + (\gamma \overline{RT} - \bar{u}_2^2) \frac{dA_{p,2}}{dx}, \quad (11)$$

$$C_{M2}^{(2)} = (\gamma \overline{RT} - \bar{u}_2^2) A_{p,2}. \quad (12)$$

ポート前端では速度変動が無いと仮定すると、そこでの境界条件は $x=0$ で

$$\hat{M} = 0 \quad (13)$$

となる. 上式を無次元化すると, $x_1=0$ で

$$\mu = 0 \quad (14)$$

となる. 一方, ポート後端での境界条件を以下に示す. ノズル入口部での境界条件に対し short nozzle の仮定を用いると $x=L_3$ で

$$\hat{M} = \frac{I_\gamma}{\gamma c^*} A_t \hat{p}_e \quad (15)$$

となる. 上式を無次元化すると, $x_3=1$ で

$$\mu = \bar{M}_e \frac{I_\gamma}{\gamma} \quad (16)$$

となる. 区分化された計算部分の接続条件として質量流量の変動成分と圧力変動成分をそれぞれ連続させると, 各部の未定定数 $C_1^{(i)}, C_2^{(i)}$ が求められ以下のようなになる:

$$C_1^{(2)} = \frac{\ell_{23} \bar{M}_e I_\gamma}{\gamma D_1} (\ell_{21} F_2^{(1)} - \lambda_2 F_1^{(1)}) (F_3^{(3)} + \lambda_3 F_1^{(3)}) \quad (17)$$

ここで, D_1 は

$$D_1 = (\ell_{21} F_2^{(1)} - \lambda_2 F_1^{(1)}) (\ell_{23} F_3^{(3)} + \lambda_2^+ F_1^{(3)}) \exp(\lambda_2^+ + \lambda_3) \\ - (\ell_{21} F_2^{(1)} - \lambda_2^+ F_1^{(1)}) (\ell_{23} F_3^{(3)} + \lambda_2 F_1^{(3)}) \exp(\lambda_2 + \lambda_3) \quad (18)$$

である. $C_2^{(2)}$ は以下のようなになる:

$$C_2^{(2)} = - \frac{\ell_{21} F_2^{(1)} - \lambda_2^+ F_1^{(1)}}{\ell_{21} F_2^{(1)} - \lambda_2 F_1^{(1)}} C_1^{(2)}. \quad (19)$$

他の係数については以下のようなになる:

$$C_1^{(1)} = \frac{F_4^{(2)}}{\ell_{21} F_2^{(1)} - \lambda_2 F_1^{(1)}} C_1^{(2)}, \quad (20)$$

$$C_2^{(1)} = -C_1^{(1)}, \quad (21)$$

$$C_1^{(3)} = \frac{1}{F_1^{(3)}} \left\{ \bar{M}_e \frac{I_\gamma}{\gamma} - \exp(\lambda_2^+ + \lambda_3^-) C_1^{(2)} - \exp(\lambda_2^- + \lambda_3^+) C_2^{(2)} \right\}, \quad (22)$$

$$C_2^{(3)} = \frac{1}{\exp(\lambda_3^-)} \left\{ \bar{M}_e \frac{I_\gamma}{\gamma} - \exp(\lambda_3^+) C_1^{(3)} \right\}. \quad (23)$$

上記で得られた係数を各部の μ に代入することでガスの質量流量の伝達関数が得られる。また連続の式より、ノズル入口部の圧力振動に対するポート内の任意の点の圧力振動の伝達関数が得られる。 $i=1,3$ の場合については次式で与えられる：

$$\frac{\hat{p}}{\hat{p}_e} = -\frac{\gamma}{\tau_{a,i} s (A_{p,i}/A_e)} \left\{ \lambda_i^+ \exp(\lambda_i^+ x_i) C_1^{(i)} + \lambda_i^- \exp(\lambda_i^- x_i) C_2^{(i)} \right\}, \quad (24)$$

ただし、

$$\tau_{a,i} = \frac{L_i}{a}. \quad (25)$$

3. 計算結果

チャンバー内の流れ場が共鳴周波数に及ぼす影響を調べるために式(5)の伝達関数の絶対値を前端のオリフィスから $x/L=0.1$ の点で計算した結果が図1である。ここで、ノズル入口マッハ数 M_e が 0.0028 のケースは後述する音響試験の条件と同等である。

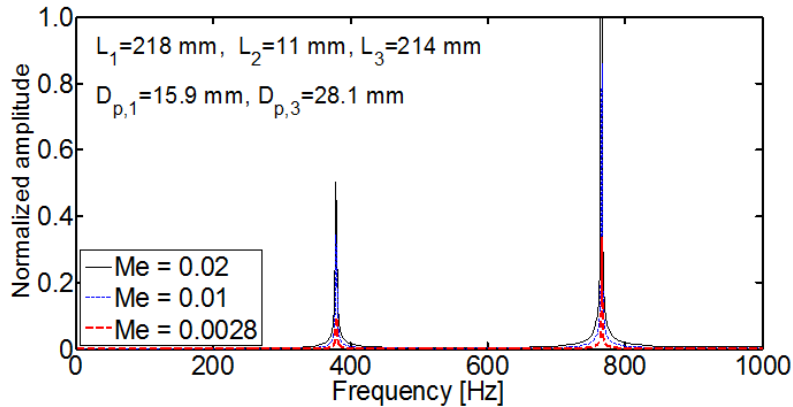


図1 段差を持つ直管内を流れるガスの質量流量変動の周波数特性

上記の計算条件ではノズル入口マッハ数 M_e が増大しても共鳴周波数のピークの位置はあまり影響しない様子が見られた。なお、計算対象とした段差を持つ直管の各部の寸法は、軸方向の長さが前端から順に $L_1=218\text{mm}$ 、 $L_2=11\text{mm}$ 、 $L_3=214\text{mm}$ である。ポート径は前部が $D_{p,1}=15.9\text{mm}$ 、後部が $D_{p,3}=28.1\text{mm}$ で、中間部の内径は直線的に変化しているとした。またここでは $A_e=A_{p,3}$ とおいた。各寸法は図2に示す記号の箇所に対応している。

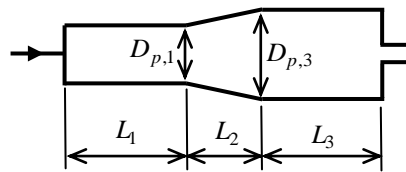


図2 段差を持つ直管に対する計算区間の分割

式(24)はノズル入口での圧力振動に対するチャンバー内の圧力振動の伝達関数を表しているが、この虚部を取り図 1 と同じ条件で周波数特性を求めたものが図 3 である。同図において零点となる周波数は上記の二つの圧力振動の位相差が 180° の整数倍となることを意味しており、実験で得られる共鳴周波数に相当すると考えられる

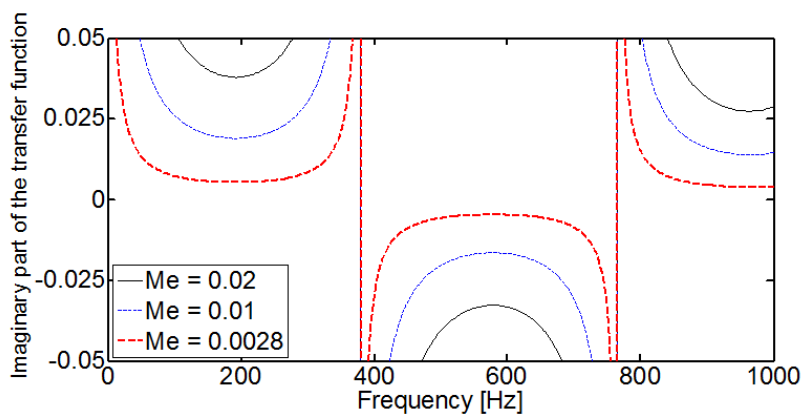


図 3 ノズル入口での圧力振動に対するチャンバー内の圧力振動の伝達関数の虚部の周波数特性

一方で前部と後部のポート径の比が大きいとノズル入口マッハ数 M_e の変化に対し共鳴周波数のピーク的位置への影響も大きくなる。以下にその計算例を示す。対象となる段差を持つ直管の各部の寸法は、後部のポート径のみ図 1 のケースの 2 倍とし、後の条件は同一とした。

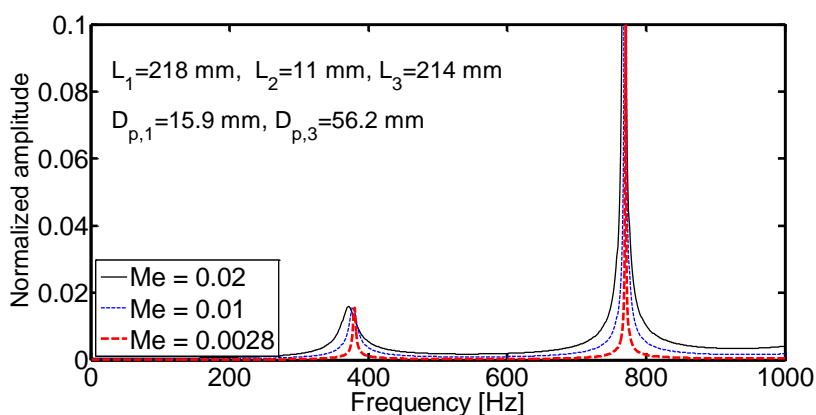


図 4 段差を持つ直管内を流れるガスの質量流量変動の周波数特性

上記の計算結果は後述する音響試験の結果と後程比較するが、結論から先に言うと基本モード (fundamental mode) は比較的一致するが、二次モードについてはずれが生じた。この原因としては振動周波数が高まるにつれて short nozzle の仮定による誤差が無視できなくなることが考えられる。そこで次に short nozzle の仮定に基づくノズルアドミッタンスの代わりにより高い周波数まで対応可能なモデルに変更して計算を行った。中間周波数では Crocco により以下のようなノズルの伝達関数が得られている⁽⁴⁾:

$$\frac{\hat{M}_e^*}{\hat{p}_e^*} = \frac{\hat{M}_e / \bar{M}_e}{\hat{p}_e / \bar{p}} = \frac{I_r}{\gamma} + i \frac{k_n}{\gamma} \omega. \quad (26)$$

上式において右辺第一項は short nozzle の仮定に基づく準定常解に相当し、第 2 項はそれからのずれを表す非定常項に相当する。ここで、 k_n はノズルアドミッタンスにおけるノズル形状に依存する比例定数で、Crocco により次式が求められている⁽⁴⁾:

$$k_n = \frac{a_*}{a_*^2 - u_e^2} \int \left(\frac{a_*}{u} - \frac{\gamma - 1}{2} \frac{u}{a_*} \right) dx. \quad (27)$$

後述する音響試験では主ノズルにオリフィスを用いているために、この k_n 値の評価が難しい。したがってここでは適当な値をいくつか代入して計算を行った。式(16)の代わりに式(26)を導入するとノズル入口部の境界条件は、 $x_3 = 1$ で

$$\mu = \bar{M}_e \left(\frac{I_\gamma}{\gamma} + i \frac{k_n}{\gamma} \omega \right) \quad (28)$$

となる。前端の境界条件である式(14)の代わりに $\mu = \mu_0$ を用い、式(1)を解いて $\{\hat{p}(x_i)/\hat{p}_e\}/\mu_0$ の形に整理し、その絶対値を図示したものが図 5 である。ただし、中間部の係数については式(7)-(9)に示すようなポート断面積一様の場合の係数を使用した。また図中の周波数のピークは、前端からガスがチョーク状態で供給される時の *intrinsic instability* の共鳴周波数を示している。このように *intrinsic instability* の条件から共鳴周波数を求める方法は Karabeyoglu によりハイブリッドロケットの振動燃焼を調べる際に利用されている⁽⁵⁾。計算条件としては $k_n = 0.06$ で固定し、ノズル入口マッハ数を変化させた。この場合最も低い共鳴周波数のピークの位置については影響が小さかったが、二次モードの方は影響を受けやすかった。

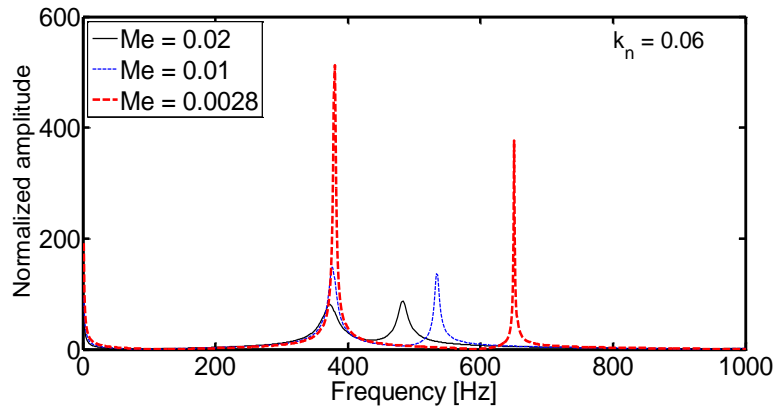


図 5 供給ガスの流量変動に対する圧力振動 ($x/L = 0.1$) の伝達関数の絶対値に及ぼすノズル入口マッハ数の影響

一方、上図と同じ計算条件であるが、ノズル入口マッハ数 M_e を 0.0028 で固定し k_n を変化させたグラフが図 6 である。この場合も最も低い共鳴周波数のピークの位置はほとんど影響がなかったが、二次モードのピークの位置は影響を受ける様子が見られた。

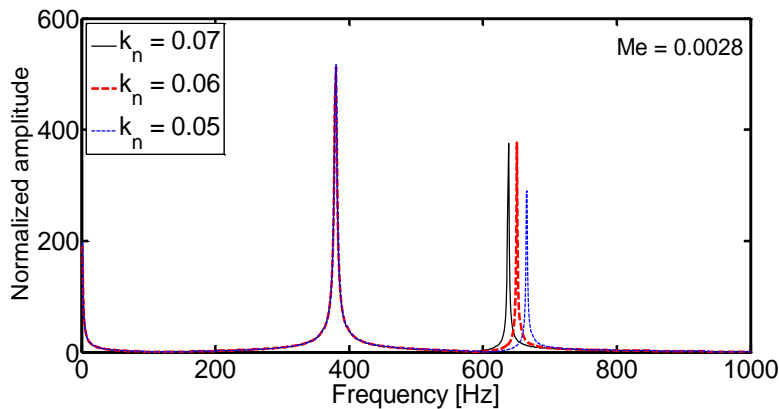


図 6 供給ガスの流量変動に対する圧力振動 ($x/L = 0.1$) の伝達関数の絶対値に及ぼすノズルアドミッタンスの非定常パラメータ k_n の影響

4. コールドフロー試験による段差を持つ直管の音響特性

一様断面の直管内に生じる定在波の共鳴周波数については周波数的に等間隔で分布していることがよく知られているが、軸方向にポート断面積が変化する直管において内部に流れを有する場合については共鳴周波数の分布は複雑である。このようなチャンバーは前光芒もしくは後光芒を有する同等の固体モータの共鳴周波数を簡便に評価するのに有効である。ただし、内面燃焼型の固体ロケットモータでは燃焼ガスがグレイン内面からポート内に軸方向に対して分布するように流入し、グレイン形状もスロットを有するため段差を持つ直管型チャンバーとは異なっている。音響試験に用いたチャンバーは SUS304 製配管用継手を用いて組み立てた。管内の凸凹は極力充填剤で埋めて対処した。音源としては上流側から噴射される高速噴流を音源とした。圧力振動の計測にはミネベア製の圧力変換器(PRC-2MP)を使用した。高压下での音響振動の測定にはピエゾ式の圧力センサが適しているが、今回対象とした範囲は比較的高い周波数ではないので上記のセンサを使用した。実験で使用したチャンバーを図7に示す。ここで、主ノズルのオリフィス径は2mm、上流側オリフィス径は1mmである。今回の実験では窒素ガスがポンペから上流側のオリフィスを通してチャンバーに供給され、チャンバー内圧が 0.44MPa(abs)となった。なお主ノズルおよび上流側オリフィスはチョークしている。図7の段差を持つ直管は後光芒の場合に相当する。また前部、後部のポート径はそれぞれ一定である。このチャンバーの各部の寸法は前出の計算条件と同じである。

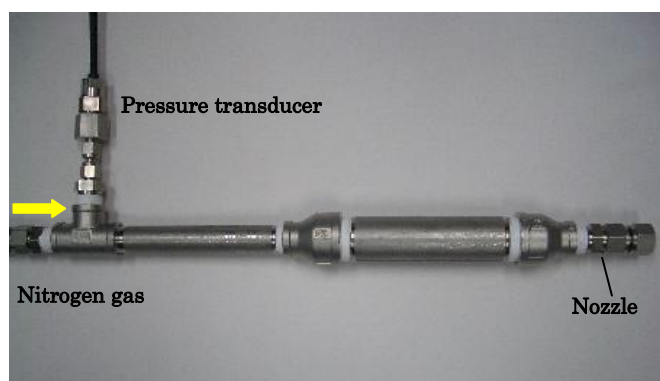


図7 段差を持つ直管の音響試験装置

音響試験から得られたパワースペクトル密度を図8に示す。370Hz 辺りに周波数が最も低い基本モードが見受けられる。なお、50Hz 辺りのピークは電源ノイズである。またサンプリング周波数は 10000Hz で、定常状態の 6 秒間のデータを解析対象とし、MATLAB を使って求めた。

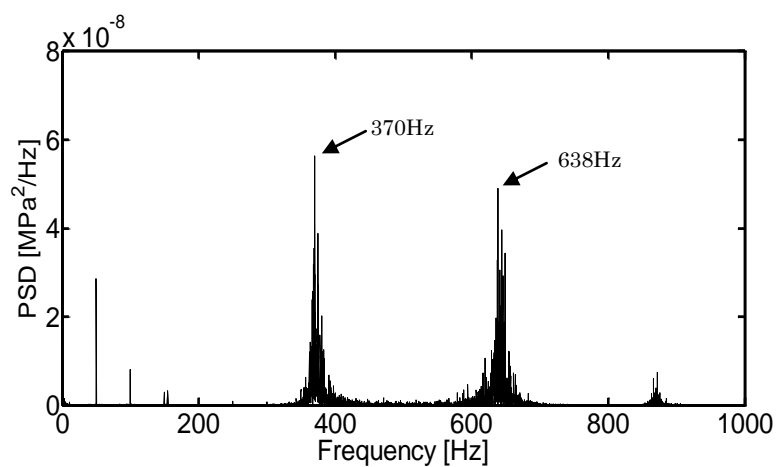


図8 段差を持つ直管の音響試験で得られたパワースペクトル密度

スペクトルのピークの位置の周波数について図1および図3の $M_e = 0.0028$ の場合の計算結果と図6の実験結果を比較すると、基本モードはほぼ一致することがわかった。ちなみに固体ロケットの軸方向モードの振動燃焼において比較的大きく影響するのはこのモードであることが多い。さらに図5, 6と比較すると、現時点で k_n の正確な値が不明ではあるが、二次モードも含めて一致する可能性が示唆された。

5. 結言

ポート断面積が軸方向に変化する固体ロケットモータにおけるPCOの線形安定性解析を改良するために、ポート断面を通過する燃焼ガスの質量流量の無次元化と、ポート全体を区分化した時の各部を結ぶ境界条件を変更した。さらに非定常効果を含むノズルアドミッタンスの導入、モータ全体に対する *intrinsic instability* の条件から共鳴周波数を求めることを行った。このPCOに関する線形安定性解析の有効性を調べるために、前端からのガス供給のみで側面からのわき出しや燃焼が無い段差を持つ直管に対し線形解析を実施し、ノズル入口マッハ数やポートの形状の影響について調べた。またコールドフロー試験により音響特性を取得し、基本モードに対して解析結果と比較した所ほぼ一致した。二次モードについてもノズルアドミッタンスにおけるノズル形状に依存する比例定数 k_n の値によっては理論値と実験値が一致する場面があることがわかった。

記号表

A_e :	ノズル入口部でのポート断面積
$A_{p,i}$:	区間 i でのポート断面積
A_f :	ノズルスロート面積
a :	音速
a^* :	臨界速度
$C_1^{(i)}, C_2^{(i)}$:	区間 i の摂動方程式の解の係数
$C_{M0}^{(i)}$:	区間 i の摂動方程式の係数
$C_{M1}^{(i)}$:	区間 i の摂動方程式の一階微分の係数
$C_{M2}^{(i)}$:	区間 i の摂動方程式の二階微分の係数
c^* :	特性排気速度
D_1 :	式(18)で定義される。
$F_1^{(i)}$:	$F_1^{(i)} = \exp(\lambda_1^+) - \exp(\lambda_1^-)$
$F_2^{(i)}$:	$F_2^{(i)} = \lambda_1^+ \exp(\lambda_1^+) - \lambda_1^- \exp(\lambda_1^-)$
$F_3^{(i)}$:	$F_3^{(i)} = \lambda_1^+ \exp(\lambda_1^-) - \lambda_1^- \exp(\lambda_1^+)$
$F_4^{(i)}$:	$F_4^{(i)} = \lambda_1^+ - \lambda_1^-$
$f_0^{(i)}$:	$f_0^{(i)} = L_i^2 \langle C_{M0}^{(i)} \rangle / \langle C_{M2}^{(i)} \rangle$
$f_1^{(i)}$:	$f_1^{(i)} = L_i \langle C_{M1}^{(i)} \rangle / \langle C_{M2}^{(i)} \rangle$
I_γ :	$I_\gamma = (\gamma + 1)/2$
i :	虚数単位
k_n :	式(26)で定義される。
L_i :	区間 i の長さ
ℓ_{21}, ℓ_{23} :	$\ell_{21} = L_2/L_1, \ell_{23} = L_2/L_3$
M :	マッハ数
\dot{M} :	ポート断面を通過するガスの質量流量

\dot{M}_0 : ポート前端から供給されるガスの質量流量
 \dot{M}^* : $\dot{M}^* = \dot{M} / \bar{M}_e$
 p : 圧力
 p_0 : ポート前端での圧力
 p^* : $p^* = p / \bar{p}$
 R : 燃焼ガスの気体定数
 s : ラプラス変換のパラメータ
 T : 燃焼ガスの温度
 u : 軸方向の流速
 u_i : 区間 i での流速
 x : 各部の上流端を原点とし、下流側を正の向きとする軸方向に沿った座標
 x_i : $x_i = x / L_i$
 γ : 燃焼ガスの比熱比
 λ_i^* : $\lambda_i^* = \left(f_1^{(i)} \pm \sqrt{f_1^{(i)2} + 4f_0^{(i)}} \right) / 2$
 μ : $\mu = \frac{\hat{M} / (\bar{\rho} \bar{a} A_e)}{\hat{p}_e / \bar{p}}$
 μ_0 : $\mu_0 = \frac{\hat{M}_0 / (\bar{\rho} \bar{a} A_e)}{\hat{p}_e / \bar{p}}$
 ρ : 燃焼ガスの密度
 $\tau_{a,i}$: $\tau_{a,i} = L_i / \bar{a}$

添え字等

e : ノズル入口
 $i (=1,2,3)$: ポート各部(前部, 中間部, 後部)
 \wedge : 振動成分のラプラス変換量
 $-$: 定常燃焼時の値
 $\langle \rangle$: 空間平均量

参考文献

- (1) 森田貴和, 福地亜宝郎, 小田島広明, 大野健 : 平成 23 年度宇宙輸送シンポジウム, STCP-2011-010.
- (2) 矢代顕慎, 他 6 名 : 平成 22 年度宇宙輸送シンポジウム, STCP-2010-058.
- (3) 森田貴和, 徳留真一郎, 矢代顕慎, 中野信之, 反野晴仁 : 平成 22 年度宇宙輸送シンポジウム, STCP-2010-059.
- (4) Crocco, L. and Cheng, S. L. : Theory of Combustion Instability in Liquid Propellant Rocket Motors, *AGARDograph* No.8, 1956.
- (5) Karabeyoglu, M. A. : Transient Combustion in Hybrid Rockets, *Ph.D. Dissertation*, Stanford University, Department of Aeronautics and Astronautics, Aug. 1998, pp.31-127.