

宇宙航空研究開発機構研究開発資料

JAXA Research and Development Memorandum

単純化したバルクフローモデルによるふれまわり運動する
円錐物体に作用するロータダイナミック流体力

吉田 義樹

2011年11月

宇宙航空研究開発機構

Japan Aerospace Exploration Agency

単純化したバルクフローモデルによるふれまわり運動する円錐物体に作用するロータダイナミック流体力*

吉田 義樹^{*1}

Fluid-induced Rotordynamic Forces Acting on Conical Shroud in Whirling Motion Based on the Simplest Bulk-Flow Model^{*}

Yoshiki YOSHIDA^{*1}

Abstract

Fluid-induced rotordynamic forces produced by the fluid in the leakage passage surrounding the shroud of a pump are known to contribute substantially to the potential excitation forces acting on the rotor. In this article, rotordynamic forces acting on a conical shroud are calculated based on the simplest bulk-flow model. Semi-analytical solutions are presented under a few simplifying assumptions as follows, (1) unsteady wall shear stress is neglected, (2) no leakage flow, and (3) steady tangential velocity is forced vortex distribution. The results can simulate, however, fairly well with the previous experimental results qualitatively. It has worth to elucidate the fundamental mechanism of rotordynamic forces acting on a conical shroud.

Key Words : Bulk-flow model, Whirling Motion, Fluid-induced Rotordynamic Forces, Conical Shroud

1. 緒言

ポンプインペラシュラウドに作用するロータダイナミック流体力の解析は、Childs の Bulk-flow model^[1]によるものが主流であったが、最近では CFD による試みもなされるようになって来ている^{[2]-[4]}。しかし、非定常問題で計算量が膨大になることやふれまわり運動によるメッシュの変形の制限等に課題は残っているようである。

本報告では、CFD の趨勢に逆行するが、種々の仮定を設けて支配方程式(運動量方程式, 連続の式)を出来る限り簡略化し、従来の Bulk-flow model のように0次計算(定常流れ)と1次計算(定常流れの諸値を使った非定常流れ)に分けて行うことなく、狭い隙間を持つケーシング内でふれまわり運動する円錐物体(これも式を簡略化するための形状の単純化である)まわりの流れの擾乱圧力を複素方程式から求める方法を提案する。また、パラメータスタディからロータダイナミック流体力(以下 RDF と略す)を不安定化するための旋回流れ ω^*/ω (ω^* : 隙間流れの旋回角速度, ω : ロータの自転角速度)と計算境界での圧力損失抵抗 (K_j) の重要性を解析例から示すことにする。

* 平成 23 年 9 月 2 日受付 (Received 2 September 2011)

*1 宇宙輸送ミッション本部 宇宙輸送系推進技術研究開発センター (Space Transportation Propulsion Research and Development Center, Space Transportation Mission Directorate)

2. 解析方法

2.1 基礎式

座標系を図1に示すようにとり, ChildsのBulk-flow model^[1]の支配方程式にある壁面との剪断応力を“全て”省略する式(1)(運動量方程式と連続の式)を基礎式とする。(注1, Anular sealの解析に使われるBulk-flow modelでは基礎式を乱流でReynolds lubrication方程式とするが,ここで採用するインペラシユラウドのBulk-flow modelの基礎式は慣性項($\frac{\partial}{\partial t}$)を考慮していることが特徴であり,結果的にこれにより後述するロータダイナミック係数が現れることになる.)

また,ふれまわり運動は図2に示すように,円錐物体がふれまわり半径 ϵ で,角速度 Ω で公転しているふれまわり運動を考えることにする.

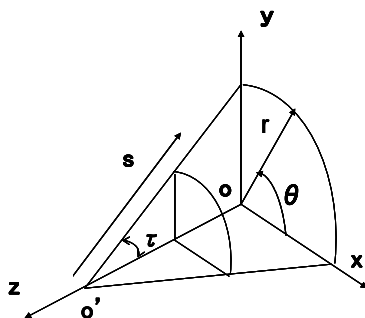


Fig.1 Conical geometry

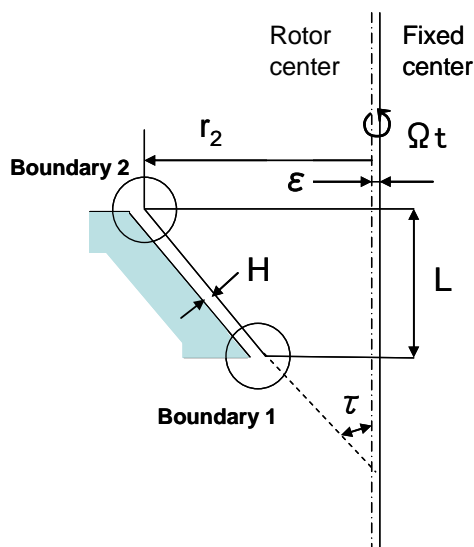


Fig.2 Whirling conical model

・運動量方程式

s - path

$$\frac{\partial u_s}{\partial t} + \frac{c}{s} u_\theta \frac{\partial u_s}{\partial u_\theta} + u_s \frac{\partial u_s}{\partial s} - \frac{u_\theta^2}{s} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial s}$$

θ - circumferencial

$$\frac{\partial u_\theta}{\partial t} + \frac{c}{s} u_\theta \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + u_s \frac{\partial u_\theta}{\partial s} + \frac{u_\theta u_s}{s} = -\frac{1}{\rho} \frac{c}{s} \frac{\partial p}{\partial \theta}$$

・連続の式

$$\frac{\partial H}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial s}(u_s H) + \frac{c}{s} \frac{\partial}{\partial \theta}(u_\theta H) + \frac{H}{s} u_s = 0$$

(1)

式(1)の *s* 方向, *θ* 方向の運動量方程式および連続の式から, ふれまわり運動による擾乱成分を \tilde{x} (\bar{x} は平均成分を示す)として物理量 u_s, u_θ, p および隙間 H を式(2)のようにそれぞれ $x = \bar{x} + \tilde{x}(s)e^{j(\Omega t - \theta)}$ と複素表示する. なお, $j = \sqrt{-1}$ で, $\tilde{x}(s)$ は複素数である. また, 円錐の頂角を τ とすると $c = 1/\sin(\tau)$, $\varepsilon' = \varepsilon \times \cos(\tau)$ であり, \bar{H} ($=H_0$) はふれまわり運動がない場合の円錐物体(ロータ)とケーシングの隙間を表す.

$$\begin{aligned} u_s &= \bar{u}_s + \tilde{u}_s(s)e^{j(\Omega t - \theta)} \\ u_\theta &= \bar{u}_\theta + \tilde{u}_\theta(s)e^{j(\Omega t - \theta)} \\ p &= \bar{p} + \tilde{p}(s)e^{j(\Omega t - \theta)} \\ H &= \bar{H} + \tilde{H}(s)e^{j(\Omega t - \theta)} \end{aligned}$$

(2)

2.2 仮定

(1) path 方向の平均流れは $\bar{u}_s = 0$ とする. \Rightarrow つまり平均漏れ流れはないと仮定する.

(2) θ 方向の平均流れは $\bar{u}_\theta = r\omega^*$ とする. \Rightarrow つまりケーシング隙間の平均旋回流れに強制渦

形式を仮定し, その旋回角速度は ω^* とする(この仮定は, 円錐物体が自転(ω)していることによる隙間流れの粘性効果をモデル化したものである).

$$\begin{aligned} \bar{u}_s &= 0 \\ \bar{u}_\theta &= r\omega^* = \frac{s}{c}\omega^* \end{aligned}$$

(3)

式(1)に式(2)を代入し, 式(3)の仮定から, 擾乱成分 \tilde{x} に対して式(4)の方程式を得る.

•運動量方程式

s - path

$$j(\Omega - \omega^*)\tilde{u}_s - \frac{2}{c}\omega^*\tilde{u}_\theta = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial\tilde{p}}{\partial s}$$

θ - circumferencial

$$j(\Omega - \omega^*)\tilde{u}_\theta + \frac{2}{c}\omega^*\tilde{u}_s = j\frac{c}{s}\frac{\tilde{p}}{\rho}$$

•連続の式

$$j(\Omega - \omega^*)\tilde{H} + \bar{H}\left\{\frac{\partial\tilde{u}_s}{\partial s} + \frac{1}{s}(\tilde{u}_s - jc\tilde{u}_\theta)\right\} = 0$$

(4)

2.3 解くべき方程式

軸のふれまわり半径を ε とすると, 円錐とケーシングの隙間の変化は式(5)で表される.

$$\begin{aligned}\tilde{H} &= \tilde{H}(s)e^{j(\Omega t - \theta)} = \varepsilon' e^{j(\Omega t - \theta)} \\ \varepsilon' &= \varepsilon \times \cos(\tau)\end{aligned}\tag{5}$$

式(5)を用いて式(4)を整理することにより, \tilde{u}_s に関して以下の複素方程式が得られる.

$$s^2 \frac{\partial^2 \tilde{u}_s}{\partial s^2} + 3s \frac{\partial \tilde{u}_s}{\partial s} - (c^2 - 1)\tilde{u}_s + j \frac{2\varepsilon'}{H} (\Omega - 2\omega^*)s = 0\tag{6}$$

\tilde{u}_s の一般解は,

$$\tilde{u}_s = C_1 s^\alpha + C_2 s^\beta + C_3 A s$$

$$\alpha, \beta = -1 \pm c\tag{7}$$

$$A = j \frac{2\varepsilon'}{H} (\Omega - 2\omega^*)$$

$$C_3 = -\frac{1}{3 - (c^2 - 1)}$$

C_1, C_2 は複素係数であり、次節2.4に示す境界条件から求める。 \tilde{u}_s が求めれば、 $\tilde{u}_\theta, \tilde{p}$ は、式(8)から求めることが出来る。

$$\begin{aligned}\tilde{u}_\theta &= \frac{s}{c} \frac{\varepsilon'}{H_0} (\Omega - \omega^*) - j \left(\frac{1}{c} \tilde{u}_s + \frac{s}{c} \frac{\partial \tilde{u}_s}{\partial s} \right) \\ \frac{\tilde{p}}{\rho} &= \frac{s}{c} (\Omega - \omega^*) \tilde{u}_\theta - j \frac{2s}{c^2} \omega^* \tilde{u}_s\end{aligned}\quad (8)$$

2.4 境界条件

図2に示す円錐物体の境界 1, 2 で、擾乱圧力 \tilde{p} と擾乱速度 \tilde{u}_s の関係を式(9)とする。この物理的意味は、境界で速度比例型の圧力損失(層流(ポアズイユ流れ))を仮定することになる^[5]。後述するが、この圧力損失の境界条件は RDF に大きく影響する。

$$\begin{aligned}\frac{\tilde{p}(s_1)}{\rho} &= K_1 \tilde{u}_s(s_1) \\ \frac{\tilde{p}(s_2)}{\rho} &= K_2 \tilde{u}_s(s_2)\end{aligned}\quad (9)$$

境界 1, 2 での圧力損失係数 K_1, K_2 (実数で定数)を与えることで C_1, C_2 に関する複素連立方程式(式(10))が出来て、これを解いて C_1, C_2 を決定することが出来る。決定した C_1, C_2 により式(7), (8)より $\tilde{u}_s, \tilde{u}_\theta, \tilde{p}$ が得られる。

$$\begin{aligned}& \left[K_i s_i^\alpha + j \frac{s_i^{\alpha+1}}{c^2} \{ (1 + \alpha)(\Omega - \omega^*) + 2\omega^* \} \right] C_1 + \left[K_i s_i^\alpha + j \frac{s_i^{\beta+1}}{c^2} \{ (1 + \beta)(\Omega - \omega^*) + 2\omega^* \} \right] C_2 \\ &= \frac{\varepsilon'}{H} \left\{ \frac{s_i^2}{c^2} (\Omega - \omega^*)^2 + 4 \frac{s_i^2}{c^2} C_3 \Omega (\Omega - 2\omega^*) - 2j K_i C_3 (\Omega - 2\omega^*) s_i \right\}\end{aligned}$$

$$\text{ここで, } K_i, s_i \text{ (} i=1 \text{ and } 2\text{)} \quad (10)$$

2.5 ロータダイナミック流体力 F_n, F_t

従来、軸振動解析によく使われる形のふれまわり半径方向力 F_n , 接線方向力 F_t (図3参照)を求める⁽⁶⁾。但し、ここでは RDF は円錐物体(ロータ)の壁面に作用する非定常圧力の積分によって得られる力とする。また次章に示す F_n, F_t は、全て $\rho \pi \omega^2 r_2^3 L \varepsilon / r_2$ で除して無次元化して示すことにする。

$$\begin{aligned}
F_x &= -\int_{s_1}^{s_2} \int_0^{2\pi} \tilde{p}(s) \times \cos \theta \times \cos \tau \times r d\theta ds \\
F_y &= -\int_{s_1}^{s_2} \int_0^{2\pi} \tilde{p}(s) \times \sin \theta \times \cos \tau \times r d\theta ds \\
F_n + jF_t &= (F_x + jF_y) e^{-j\Omega t} \\
F_n + jF_t &= -\pi(\cos \tau \times \sin \tau) \int_{s_1}^{s_2} \tilde{p}(s) s ds \\
\int_{s_1}^{s_2} \tilde{p}(s) s ds &= \frac{\varepsilon'}{H_o} \frac{1}{c^2} \{(\Omega - \omega^*)^2 + 4C_3 \Omega(\Omega - 2\omega^*)\} \left\{ \frac{1}{4}(s_2^4 - s_1^4) \right\} \\
&- j \frac{C_1}{c^2} \{ (1 + \alpha)(\Omega - \omega^*) + 2\omega^* \} \left\{ \frac{1}{\alpha + 3}(s_2^{\alpha+3} - s_1^{\alpha+3}) \right\} \\
&- j \frac{C_2}{c^2} \{ (1 + \beta)(\Omega - \omega^*) + 2\omega^* \} \left\{ \frac{1}{\beta + 3}(s_2^{\beta+3} - s_1^{\beta+3}) \right\}
\end{aligned}$$

(11)

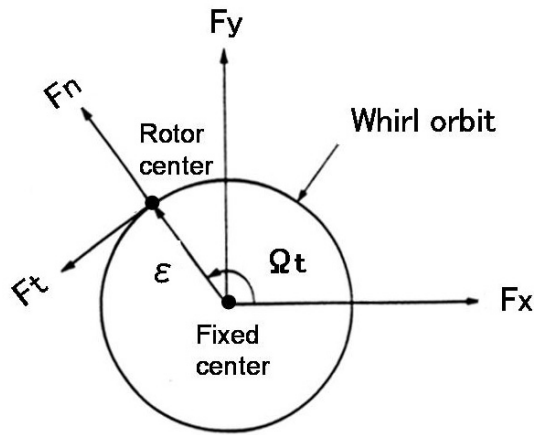


Fig. 3 Schematic of fluid-induced forces acting on whirling rotor

注意2:

C_1 と C_2 が虚数の時は、式(11)から解析的に F_n は Ω に対して2次曲線となり、 F_t は線型となる。これは式(12)に示すロータダイナミック係数が本質的にここで提示した Bulk-flow model でも基本的なことは表現できることを示している。

注意3:

また, C_1 と C_2 は, 式(10)から, ε'/\bar{H} に対して線型の関係になっている. 式(11)左辺の第1項は ε'/\bar{H} に比例し, C_1 と C_2 も ε'/\bar{H} に比例することになるので, F_n, F_t も ε'/\bar{H} に比例する. これは, Guinzburg ら^[8]が実験から報告している RCFの大きさがケーシングの隙間(\bar{H})に反比例することと同じ結果である.

また, F_n, F_t はロータダイナミック係数(以下 RDC と略す) M, C, K, m, c, k を用いて式(12)で表すことが出来る^[6]. 但し, M, C, K, m, c, k は, それぞれ直接付加質量, 直接減衰, 直接剛性, 連成付加質量, 連成減衰, 連成剛性である. (式(12)の導出は, 巻末の Appendix を参照)

$$F_n = M \left(\frac{\Omega}{\omega} \right)^2 - c \left(\frac{\Omega}{\omega} \right) - K$$
$$F_t = -m \left(\frac{\Omega}{\omega} \right)^2 - C \left(\frac{\Omega}{\omega} \right) + k$$

但し, 通常は $m=0$ となる場合が多い (12)

3. 計算結果および考察

3.1 計算条件

計算を行う円錐物体は, Caltech で実験^{[5]-[7]}が行われた図 4 に示す形状とする. 基本寸法は $r_2=93.7\text{mm}$, $L=49.2\text{mm}$, $\tau=\pi/4$, $H_o(=\bar{H})=2.54\text{mm}$ である(図 2 参照). 計算を行った 4 ケースの計算条件を表1に示す.

Table 1 Comparison of calculation conditions

Cal. condition	Case 1	Case 2	Case 3	Case 4
Swirl ratio (ω^*/ω)	0.0	0.5	0.0	0.5
Drag coefficient ($K_1/r_2\omega$)	0.0	0.0	0.13	0.13

note) $K_2=0.0$ in all conditions

注意4:

表1で $K_1=0.13$ は, Caltech で行われた実験の face seal の形状から式(13)で求めた. 粘性係数を μ , シール長さを l ($=10.9\text{mm}$), シール隙間を S_g ($=0.51\text{mm}$), ケーシング隙間を H_o ($=\bar{H}$) $=2.54\text{mm}$ すると, 2次元 Poiseuille 流れより圧力損失 Δp は次式となる.

$$\Delta p = 12\mu \frac{l}{S_g^2} \left(\frac{H_o}{S_g}\right) \times u_s$$

$$\frac{\Delta p}{\rho u_2^2} = 12 \frac{\mu}{\rho} \frac{l}{S_g^2} \frac{1}{u_2} \left(\frac{H_o}{S_g}\right) \frac{u_s}{u_2} \equiv K \frac{u_s}{u_2}$$

実験装置の face seal の寸法を用いて非定常圧力損失関係式として式(13)を得る.

$$\frac{\tilde{p}}{\rho u_2^2} = \left(\frac{K}{u_2}\right) \frac{\tilde{u}_s}{u_2} = 0.13 \times \left(\frac{\tilde{u}_s}{u_2}\right) \quad (13)$$

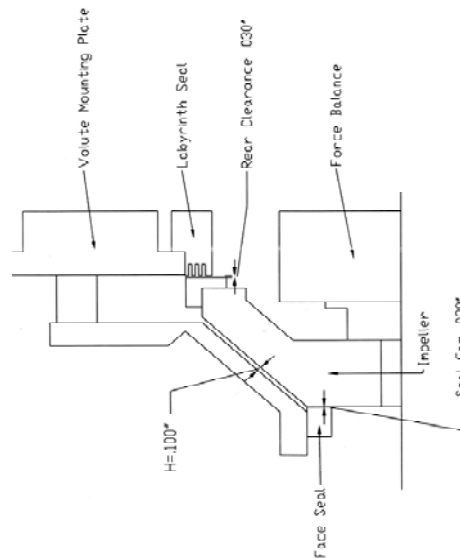


Fig.4 Rotor Force Test Facility at Caltech from [10]

3.2 計算結果および考察

(1) Case 1(図 5(a)): 先ず最初に最もシンプルな, $\omega^*/\omega=0$ (仮定として非粘性流体で定常的な旋回流がない, もしくは円錐自体が回転していない場合を想定する). また, 境界1, 2での抵抗は $K_1=0, K_2=0$ とする. すなわち, ふれまわり運動により隙間が変化して流れが境界1および2で出入りしたとしても, 圧力損失が生じないと言う仮定である. この場合 C_1 と C_2 は虚数となり解析的にも, $F_t=0, F_n \propto M\Omega^2$ となり, RDC 的には付加質量 M (~ 3.6 程度) のみとなり, この結果は妥当だと考えている^{[11][12]}.

(2) Case 2(図 5(b)): 次に, Case1 の状態から ω^*/ω を 0.5 に変更する. これは隙間の流体が, 回

転する円錐物体の $1/2$ の角速度で回転していることを仮定している(本モデルは非粘性流れを仮定しているが, 粘性流で path 方向の定常流れがない(すなわち漏れ流れがない)場合には, 隙間の流体が $1/2 \cdot \omega$ で回転するこの仮定は妥当であろう). この場合も C_1 と C_2 は虚数となって $F_r=0$ であるが, F_n は右下へシフトし, Case1 の M 以外にも $c(\sim 2.9) > 0$, $K(\sim -0.57) < 0$ が現れる. また F_n が最小となるのは, $\omega^*/\omega=0.5$ に近い $\Omega/\omega \sim 0.4$ においてである.

(3) Case 3(図 5(c)): 次に Case 1 の状態から, $K_I=0.13$ に変更する. これは, 境界1から出入りする流体が境界で速度比例型の圧力損失を発生することを意味する.(機械工学的には, ポンプシュラウドのウエアリングシールの圧力損失を想定している.) この場合, F_n は近似的に Case 1 とほとんど変化はないが, F_t は近似的に原点を通る右下がりの直線で表せるようになり, つまり RDC 的に言うと $m=0$, $C(\sim 0.49) > 0$, $k=0$ である.

(4) Case 4(図 5(d)): 更に Case 2, 3 のいずれもを考慮した場合, つまり $\omega^*/\omega=0.5$, $K_I=0.13$ とした場合, C_1 , C_2 は複素数となり, 厳密には F_t は Ω/ω の1次関数, F_n は Ω/ω の2次関数ではフィット出来なくなり, $\Omega/\omega=0.2$ 付近でやや特異性を示すが, この物理的な理由についてはよく分かっていない. 図中に1次と2次の近似曲線を示す. F_n は Case 2 と大きな変化はないが, F_t は Case 2 と同様 Case 3 の状態から左にシフトし, y 軸を切る切片の Ω/ω は $\omega^*/\omega=0.5$ に近くなる. この直線近似を用いると $k(\sim 0.15) > 0$, $C(\sim 0.46) < 0$, $k/C=0.33$ となり RDF 的解釈としては, $0 < \Omega/\omega < k/C=0.33$ の範囲で $F_t > 0$ となり, これはロータのふれまわり運動を励振する不安定流体力となり得ることを示している.

注意 5 :

Sivo ら^[9]は, ケーシング壁にリブを付けて漏れ流れの旋回度を低減した場合, 流体力が不安定化する範囲が縮小出来ることを実験結果から報告している. これは, Case 3 と Case 4 を考えあわせた場合, ω^*/ω の大きさが F_t の不安定化に影響しているのと同じ結果である.

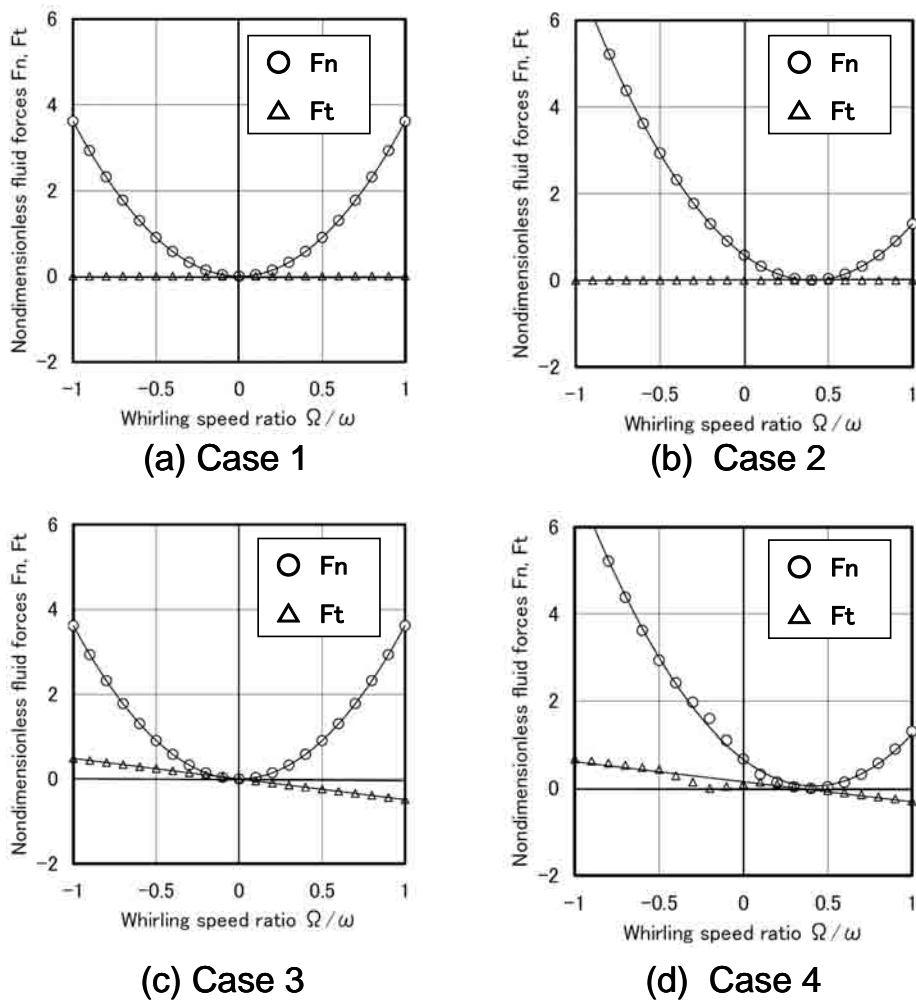


Fig. 5 Comparison of calculation results at various conditions

3.3 実験結果との比較

図6に、3.2節のCase4とUyら^[14]による実験結果との比較を示す。図中の F_n 、 F_t を2次曲線、1次曲線でフィットしたものを実線で示す。 F_n について言えば実験値の方が30%程度小さくなっており直接付加質量(M)に違いが現れている。しかし、全体に右にシフトしている事や F_t が直線で近似できる等の Ω/ω に関する特性はよく一致している。図6のフィット曲線より得られるロータダイナミック係数(M, C, K, k, c)を図7に矢印で示す。実験値との比較は $\phi=0$ での値との比較となる。M, Kの差が大きいが、これは解析の方が全般に F_n が小さく計算されることによる。しかしながら、本解析では大胆な仮定(非定常粘性力を無視、定常旋回流れに強制渦形式を仮定)を設けているにもかかわらず、ロータダイナミック流体力の基本的な特性は良く捉えられており、不安定範囲を評価する k/C には良い一致が見られている。

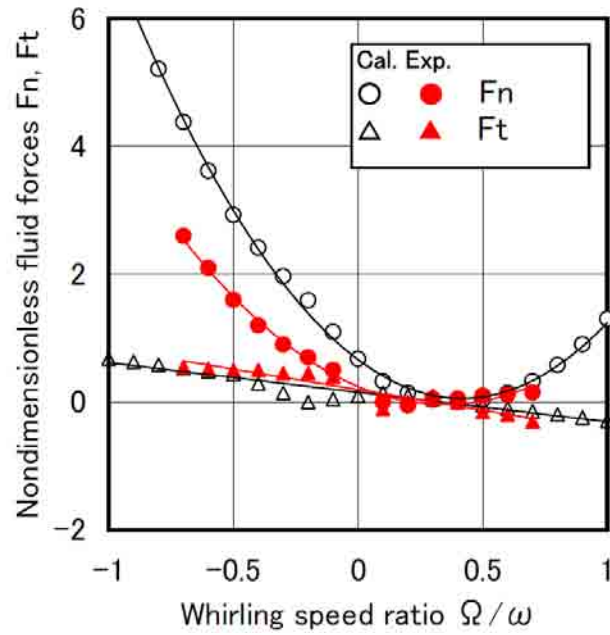


Fig. 6 Comparison of calculation results with experiment results

→ Calculation results(in Fig.6, $\phi=0$)

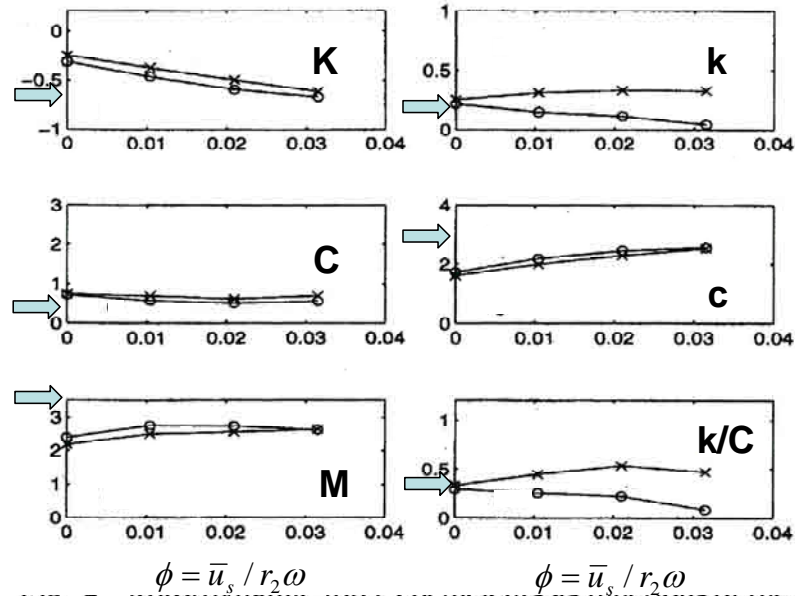


Fig. 7 Comparison of calculation results with the experiment results [13]
 Rotordynamic force coefficients as function of the leakage flow coefficient $\phi = \bar{u}_s / r_2 \omega$ for experimental tests with the conical (○) and contoured shroud (×)

4. 結言

運動量方程式および連続の式に、ふれまわり運動による微小擾乱項を加え、解法を単純化するために“ほぼ妥当”と考えられる種々の仮定を与えることにより、ふれまわり運動する円錐物体まわりの非定常圧力を求める複素方程式を導き、圧力積分値としてRDFの計算例を示した。その結果以下のことが明らかとなった。

- 旋回流れ ($\omega^*/\omega > 0$) は RDF を不安定化するために必須である^[9]。
- 一方、本解析モデルのような隙間が比較的広い場合のふれまわり運動では、解析法の単純化のために省略した非定常粘性力は本質的に流体力の不安定化には大きく影響しないものと考えられる^[5]。
- 本モデルでは境界1での抵抗係数は RDF を不安定化 ($F_i > 0 @ \Omega/\omega > 0$) させるものである。
- しかしながら、非定常圧力特性 (圧力損失の時間遅れ、もしくは隙間が変化する場合の非定常周波数特性) も境界条件として重要と考えられるが、現状ではこれらについては未だ open question であり、RDF にこういうプリミティブな問題の現象把握が軽視されているのは問題であると考えている。これらの現象把握を実験で求めることは難しいが、CFD ではこれらも含まれて計算されることになり、この点 CFD の今後の展開に期待できる。

参考文献

- [1] Childs, D. W., (1993), “Turbomachinery Rotordynamics, Phenomena, Modeling, and Analysis,” John Wiley & Sons Inc., pp. 376-389.
- [2] Williams, M., Chen, W., Brozowski, and Eastland A., (1997), “Three-Dimensional Finite Difference Method for Rotordynamic Fluid Forces on Seals,” AIAA Journal, Technical Notes, Vol. 35, No. 8, pp. 1417-1420.
- [3] Moore, J. J. and Palazzolo, A. B., (2001), “Rotordynamic Force Prediction of Whirling Centrifugal Impeller Shroud Passages Using Computational Fluid Dynamic Techniques,” ASME J. of Engineering for Gas Turbine and Power, Vol. 123, pp. 910-918.
- [4] Moore, J. J., Ransom D., and Viana F., (2011), “Rotordynamic Force Prediction of Centrifugal Compressor Impellers Using Computational Fluid Dynamics,” ASME J. of Engineering for Gas Turbine and Power, Vol. 133, pp. 042504-1-042504-10.
- [5] Tujimoto, Y., Yoshida, Y., Ohashi, H., Teramoto, N., and Ishizaki, S., (1997), “Fluid Force Moment on a Centrifugal Impeller Shroud in Precessing Motion,” ASME J. of Fluids Engineering, Vol. 119, pp. 366-371.
- [6] Brennen, C. E., (1994), “Hydrodynamics of Pumps,” Concept ETI, Inc. and Oxford University Press, pp. 261-266.
- [7] Guinzburg, A., Brennen, C. E., Acosta A. J., and Caughey, T. K., (1993), “The Effect of Inlet Swirl on the Rotordynamic Shroud Forces in a Centrifugal Pump,” ASME J. of Engineering for

Gas Turbine and Power, Vol. 115, pp. 287-293.

- [8] Guinzburg, A., Brennen, C. E., Acosta A. J., and Caughey, T. K., (1994), "Experimental Results for the Rotordynamic Characteristics of Leakage Flows in Centrifugal Pumps," ASME J. of Fluids Engineering, Vol. 116, pp. 110-115.
- [9] Sivo, J. M., Acosta, A. J., Brennen C. E., and Caughey, T. K., (1995), "The Influence of Swirl Brakes on the Rotordynamic Forces Generated by Discharge-to Suction Leakage Flows in Centrifugal Pumps," ASME J. of Fluids Engineering, Vol. 117, pp. 104-108.
- [10] Uy, R. V., and Brennen, C. E., "Experimental Measurements of Rotordynamic Forces Caused by Front Shroud Pump Leakage," (1999), ASME J. of Fluids Engineering, Vol. 121, pp. 633-637.
- [11] 今井 功、"流体力学（前編）", 裳華房, (1974), pp. 415
- [12] 大橋秀雄、"流体振動のための流体力学", (1977), 日本機械学会第 449 回講習会教材, pp. 33-43.
- [13] Uy, R. V., Bircumshaw, B., and Brennen, C., (1998), "Rotordynamic Forces from Discharge-to-Suction Leakage Flows in Shroud Centrifugal Pumps," JSME International Journal, Fluids and Thermal Engineering, Vol. 41, No.1, pp.208-213.

(Appendix) 式(12)の導出

$$\begin{bmatrix} F_x \\ F_y \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} M & m \\ -m & M \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} C & c \\ -c & C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} K & k \\ -k & K \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \quad (\text{a-1})$$

M, C, K, m, c, k は、それぞれ直接付加質量、直接減衰、直接剛性、連成付加質量、連成減衰、連成剛性である。

軸中心は座標は、

$$x = \varepsilon \cos \Omega t$$

$$y = \varepsilon \sin \Omega t$$

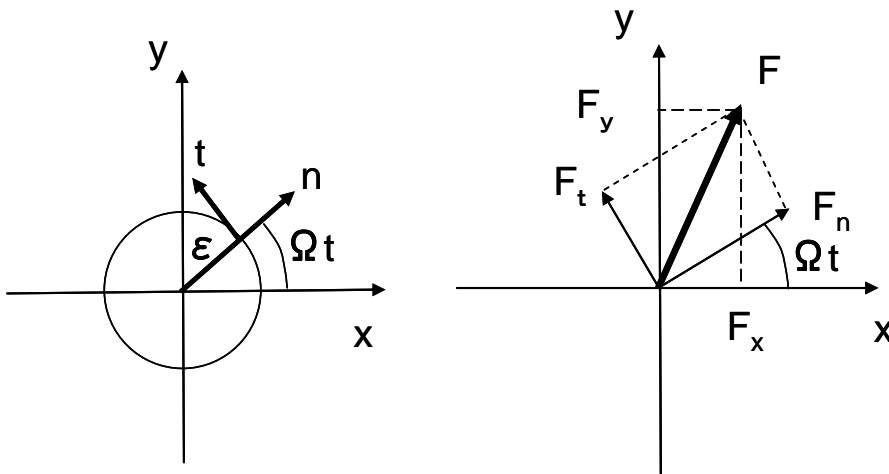


Fig. A-1 (F_x, F_y) in x-y coordinates to (F_n, F_t)

図 A-1 に示すように複素座標で考えて、 (F_x, F_y) と (F_n, F_t) の関係は以下となる。

$$(F_x + jF_y) = (F_n + jF_t)e^{j\Omega t} = (F_n + jF_t) \times (\cos \Omega t + j \sin \Omega t)$$

従って、次の関係式が成り立つ。

$$F_x = F_n \cos \Omega t - F_t \sin \Omega t$$

$$F_y = F_n \sin \Omega t + F_t \cos \Omega t$$

$$\begin{bmatrix} F_x \\ F_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \Omega t & -\sin \Omega t \\ \sin \Omega t & \cos \Omega t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_n \\ F_t \end{bmatrix} \quad (\text{a-2})$$

式 (a-1) より (F_x, F_y) は, 各マトリクス要素を用いて式 (a-3) で表せる.

$$\begin{aligned} F_x &= -\varepsilon \{ M(-\Omega^2)(\cos \Omega t) + m(-\Omega^2)(\sin \Omega t) \} \\ &\quad - \varepsilon \{ C\Omega(-\sin \Omega t) + c\Omega(\cos \Omega t) \} \\ &\quad - \varepsilon \{ K(\cos \Omega t) + k(\sin \Omega t) \} \\ F_y &= -\varepsilon \{ m(-\Omega^2)(\cos \Omega t) + M(-\Omega^2)(\sin \Omega t) \} \\ &\quad - \varepsilon \{ -c\Omega(-\sin \Omega t) + C\Omega(\cos \Omega t) \} \\ &\quad - \varepsilon \{ -k(\cos \Omega t) + K(\sin \Omega t) \} \end{aligned} \quad (\text{a-3})$$

従って

$$\begin{aligned} F_x &= F_n \cos \Omega t - F_t \sin \Omega t \\ F_y &= F_n \sin \Omega t + F_t \cos \Omega t \end{aligned}$$

より, (F_n, F_t) はふれまわり角速度比 (Ω/ω) とマトリクス要素の関数として,

$$\begin{aligned} F_n &= \varepsilon \left\{ (M\omega^2) \left(\frac{\Omega}{\omega} \right)^2 - (c\omega) \left(\frac{\Omega}{\omega} \right) - K \right\} \\ F_t &= \varepsilon \left\{ -(m\omega^2) \left(\frac{\Omega}{\omega} \right)^2 - (C\omega) \left(\frac{\Omega}{\omega} \right) + k \right\} \end{aligned} \quad (\text{a-4})$$

M, m, C, c, K, k を $\rho\pi\omega^2 r_2^2 L\varepsilon$ で無次元化することにより

$$\begin{aligned} F_n &= M \left(\frac{\Omega}{\omega} \right)^2 - c \left(\frac{\Omega}{\omega} \right) - K \\ F_t &= -m \left(\frac{\Omega}{\omega} \right)^2 - C \left(\frac{\Omega}{\omega} \right) + k \end{aligned} \quad (\text{a-5})$$

(a-5)が, 本文中の式(12)である.