

大きな迎角をもつ錐体を過ぎる流れの研究 (2)

河村 龍馬・中尾 晨一

Supersonic Flow past Conical Bodies at Large Angles of Attack (2)

By

Ryuma KAWAMURA and Shin-ichi NAKAO

Abstract: In the previous report (15), we propose the method that avoids the divergence of the computation by the vortical singularity, which occurs in the inviscid supersonic flow field as conical bodies have large angles of attack. This report presents the mathematical support to the concept of the equivalent body. The detailed consideration of the vortical singularity confirms the character and the “lift off” phenomenon of that, and so the flow pattern in the vicinity of the lifted singularity is estimated.

概 要

大迎角での錐体回りの流れに発生する特異点の性質が、詳しく調べられた。それによって、その特異点の性質その回りの可能な流れの型、又、「lift-off」という現象の可能性が、明らかにされた。そして、その(1) [15]、で、特異点をさける方法として提案された equivalent body の考え方の数学的な面からの裏付けが、与えられた。

記 号

r, θ, φ : 球面座標系 (第1図の(1))

z, r, φ : 円柱座標系 (第1図の(2))

u, v, w : 球面座標系では、それぞれ (r, θ, φ) 方向の、又、円柱座標系では、それぞれ (z, r, φ) 方向の速度成分である。

p, ρ, S, γ : それぞれ、圧力、密度、エントロピー、比熱比をあらわす。

θ_c : $\varphi = \pi$, 風下側対称面での錐体の半頂角。

V_N : 円柱座標系での垂直速度成分で、球面座標系での v にあたる。

θ_0, ξ_0 : 物体面上を離れた、特異点の位置で、球面座標での表示と、円柱座標での表示である。

κ : その(1)で報告した Equivalent body の形状を示すパラメーター。

R_b, R_s : $R_b = z \cdot r_b(\varphi)$, $R_s = z \cdot r_s(\varphi)$ であり、それぞれ、物体と、衝撃波の形状を表わし

ている。(その(1)参照)

$f(\theta, \varphi)=0$: 錐状流場での流線を表わす。

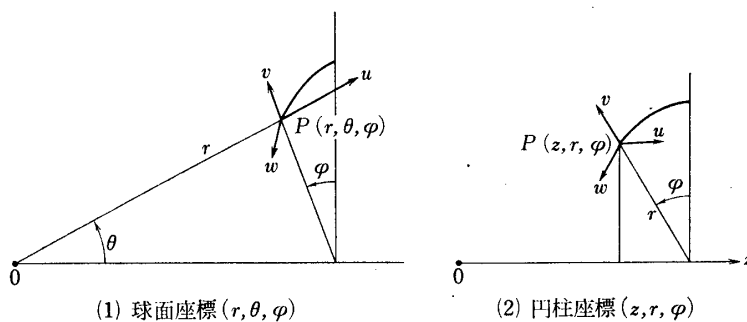
1. 緒 言

迎角をもった円錐回りの流れの研究は, Stone, Kopal によって, 零迎角の流れの微小変動によって求められたのが, はじめてである。しかし, Ferri [1] は, この Stone の解が, 物体表面で異なったエントロピーをもつ事を指摘し, 物体面は, 一つの流線面であるから, 等エントロピーでなければならないという考えのもとづき, そして, 等エントロピー面の集まる物体表面の近くに, vortical layer の考えを取り入れた。又, 風下側の対称面の物体面上に, vortical singularity という, エントロピー多価の点が, 発生する事を示した。その結果は, 実験値とより良い一致を示した。その後, この vortical layer の考えを取り入れて, 円錐回りの流れを解く事が試みられた [2]-[7]。その解法は, 大きな流れの量の勾配をもつ, vortical layer の内側と外側とに分けて, 別の展開を考え, 両方の解をうまく結合させて, 流れ場に一樣に適用できる。解を求めようとしたものである。しかし, vortical singularity の近傍において適用できる解までは, 求められていない。

それとは別に, この錐状流の中にあられる, 特異点および, その回りの流れの様子を解明しようという努力も多くなされてきた。Cheng [7] は, vortical layer なるものが, 鋭頭物体の場合, 三次元流れにおいても発生する事を示した。そして, Melnik [8], Golubinskii [9] 等によって, 特異点回りの流れの様子が, 詳しく調べられ, Melnik は, Ferri の指摘した, vortical singularity の "lift-off" の可能性を示した。Scheuing [10], Smith [11] 等は, 数学的な, 立ち場から, 錐状流場のもつ特異点の性質を解明し, 可能な流線の形を求めている。

最近, Feldhuhn [13] は, 実際の流れにおいて, 十分大きな迎角を円錐が取った時, 風上側の流れと, 風下側の流れとが, 出合う所として, 対称面内に一つの激み点が存在する事を確かめた。そして, その点を, 横ぎって大きな密度勾配がある事, すなわち, エントロピーの急激な変化が, 存在する事を報告している。彼は, その激み点を, 「vortical singularity like」の激み点とよんでいる。

本報告は, 錐状流の計算過程において, この特異点の発生の様子, および, その性質を明



第 1 図

らかにする事を目的としている。それによってその(1)で行ったような、数値計算において、この特異点を、どのように取りあつかったか、そして Equivalent body の考え方に、数学的な裏づけを与えようとしたものである。

2. 物体表面での条件

ここでは、球面座標 (r, θ, φ) で、流れ場を考える。

その時、方程式系は、次のようになる。

$$\frac{\partial}{\partial \theta}(\rho v \sin \theta) + \frac{\partial}{\partial \varphi}(\rho w) + 2u\rho \sin \theta = 0 \quad (1.1)$$

$$v \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{w}{\sin \theta} \frac{\partial u}{\partial \varphi} - v^2 - w^2 = 0 \quad (1.2)$$

$$v \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{w}{\sin \theta} \frac{\partial v}{\partial \varphi} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial \theta} - w^2 \cot \theta + uv = 0 \quad (1.3)$$

$$v \frac{\partial w}{\partial \theta} + \frac{w}{\sin \theta} \frac{\partial w}{\partial \varphi} + \frac{1}{\rho \sin \theta} \frac{\partial p}{\partial \varphi} + vw \cot \theta + uw = 0 \quad (1.4)$$

ベルヌーイの式から、

$$u^2 + v^2 + w^2 + \frac{2\gamma}{\gamma-1} \frac{p}{\rho} = 1 + \frac{2\gamma}{\gamma-1} \frac{p_\infty}{\rho_\infty} \quad (1.5)$$

又、エントロピーは、

$$S = C p / \rho^\gamma \quad (C: \text{定数}) \quad (1.6)$$

と書ける。

$\varphi = 0, \pi$ の対称面においては次の条件が成立する。

$$\frac{\partial u}{\partial \varphi} = \frac{\partial v}{\partial \varphi} = \frac{\partial p}{\partial \varphi} = \frac{\partial \rho}{\partial \varphi} = w = 0 \quad (2.1)$$

又、物体面上 $\theta = \theta_c$ においては、

$$v = 0 \quad (2.2)$$

という物体面上の条件が、成り立つ。

今物体面上を考えると、(2.2)の条件を、(1.2)式に代入すると、

$$w \cdot \left(\frac{1}{\sin \theta_c} \frac{\partial u}{\partial \varphi} - w \right) = 0 \quad (3)$$

(3)より

$$w = 0 \quad (4.1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial \varphi} = w \sin \theta_c \quad (4.2)$$

の2つの条件が、あられ、物体面上での2つの状況を生む。

(1) $\frac{\partial u}{\partial \varphi} = w \sin \theta_c$ の時、

これを(1.4)式に代入すると

$$\frac{w}{\sin \theta_c} \frac{\partial w}{\partial \varphi} + \frac{1}{\rho \sin \theta_c} \frac{\partial p}{\partial \varphi} + uw = 0 \quad (5)$$

又, (1.5)式を φ で微分すれば,

$$u \frac{\partial u}{\partial \varphi} + w \frac{\partial w}{\partial \varphi} + \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{p}{\rho} \right) = 0 \quad (6)$$

(5), (6)の両式より,

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial p}{\partial \varphi} - \frac{\gamma p}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial \varphi} \right) / \rho (\gamma-1) &= 0 \\ \frac{\partial p}{\partial \varphi} - \frac{\gamma p}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial \varphi} &= 0 \end{aligned} \quad (7)$$

が, 得られる. これは, (1.6)式において,

$$\frac{\partial S}{\partial \varphi} = 0 \quad (8)$$

を意味している. これは, 物体面上でエントロピーは, φ 方向に変化しないという事であり, この時, 物体面は, 等エントロピーの, 1つの流線面である事を意味しており, Ferri の指摘と一致している. (4.2) の条件が, 物体面上で, 等エントロピーの解を与える.

(2) $w=0$

対称面だけでなくすべての物体面上で, $v=w=0$ が, 成立するわけである.

(1.4)式より,

$$\frac{\partial p}{\partial \varphi} = 0 \quad (9)$$

であり, 物体面上で, 圧力は, 一定となる.

(1.5)式を, φ で微分すると,

$$u \frac{\partial u}{\partial \varphi} - \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{p}{\rho^2} \frac{\partial \rho}{\partial \varphi} = 0 \quad (10)$$

となり, 又, (1.6)式を φ で微分すると,

$$\frac{\partial S}{\partial \varphi} = -\frac{\gamma S}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial \varphi} \quad (11)$$

(10), (11)式より, S は, φ 方向に, 変化する量である事がわかる. すなわち, 物体面上で, 等エントロピーではない. しかし, この結果は, 迎角に, 無関係に, 物体面上の圧力が, 一定であるという, 物理的にはおかしい解を与える事になる. しかし, Golubinskii [9] は, 先の等エントロピーの面と, この非等エントロピーの面とを, 連続的に, 接続させる事によって, 物理的に可能な解が, 存在できるとしている. この事については, 後の章で, 詳しく, 述べる事にして, ここでは, 等エントロピーの解について, その vortical singularity の近傍における, 流れの様子を調べる事にする.

3. 特異点の型について

(1.1)式に, 対称面の条件を適用すれば,

$$\frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{\partial w}{\partial \varphi} \frac{1}{\sin \theta} + 2u = 0 \quad (12)$$

をえる。

(1.3)式を φ で微分した後, 対称面の条件, 又, 物体のごく近傍を考えると, v が十分小さいとすれば,

$$\left(\frac{\partial w}{\partial \varphi}\right)^2 + u \sin \theta \frac{\partial w}{\partial \varphi} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial^2 p}{\partial \varphi^2} = 0 \quad (13)$$

が, 得られる。

(12)式より,

$$\frac{\partial v}{\partial \theta} = -\left(2u + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial w}{\partial \varphi}\right) \quad (14)$$

(13)式より,

$$\frac{\partial w}{\partial \varphi} = \frac{-u \sin \theta}{2} \{1 \pm \sqrt{1 - \kappa}\} \quad (15)$$

ここで

$$\kappa = 4 \frac{\partial^2 p}{\partial \varphi^2} / (\rho u^2 \sin^2 \theta) \quad (16)$$

は, Melnik の設定したパラメーターである。

(15)式によれば, $\left(\frac{\partial w}{\partial \varphi}\right)$ に 2 つの解が, 可能であるが, それぞれについて調べてみる。

(1) $\frac{\partial w}{\partial \varphi} = -\frac{u \sin \theta}{2} (1 + \sqrt{1 - \kappa})$ の時,

これを(14)式に代入して,

$$u = -2 \frac{\partial v}{\partial \theta} / (3 - \sqrt{1 - \kappa}) \quad (17)$$

となるこれを図示すると 2 図のようにかける。

図で実線は, $\partial v / \partial \theta < 0$ の時であり, 破線は, $\partial v / \partial \theta > 0$ の時である。

この図からもわかるように, u は, 必ず正でなければ, ならないから,

$$\begin{aligned} - < \kappa \leq 1 \text{ の時, } & \quad \frac{\partial v}{\partial \theta} < 0 \\ \kappa < -8 \text{ の時, } & \quad \frac{\partial v}{\partial \theta} > 0 \end{aligned} \quad (18)$$

の関係が, えられる。又, この時条件より, $\frac{\partial w}{\partial \varphi} < 0$ でもある。

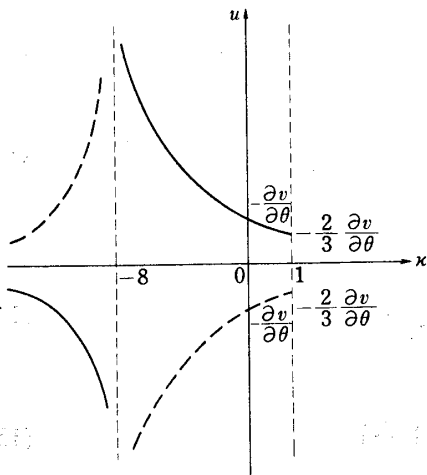
(a) $-8 < \kappa \leq 1$

$\frac{\partial v}{\partial \theta} < 0$, $\frac{\partial w}{\partial \varphi} < 0$, また, $v < 0$, $w < 0$ である。

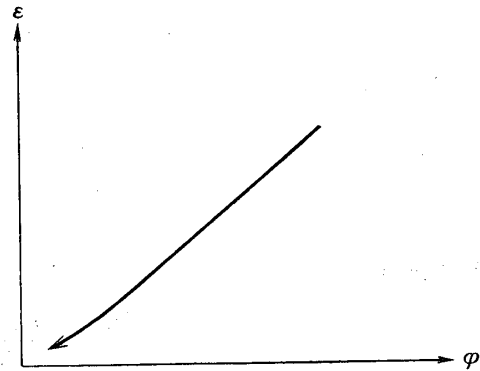
故に, 流れの型は, 3 図のようになり, この時, 特異点の形は, node である。ここで $\varepsilon = \theta - \theta_c$ を表わすものとする。

(b) $\kappa < -8$

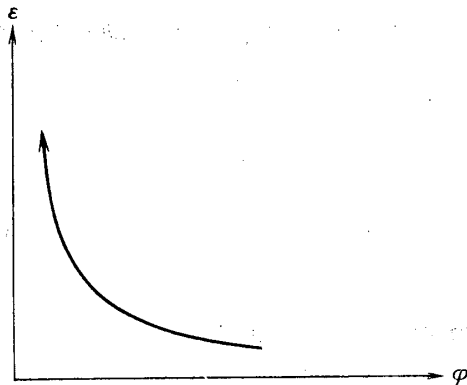
$\frac{\partial v}{\partial \theta} > 0$, $\frac{\partial w}{\partial \varphi} < 0$ であり, ここでは, $w < 0$ であるが, $v > 0$ である。そして, 流れの型は,



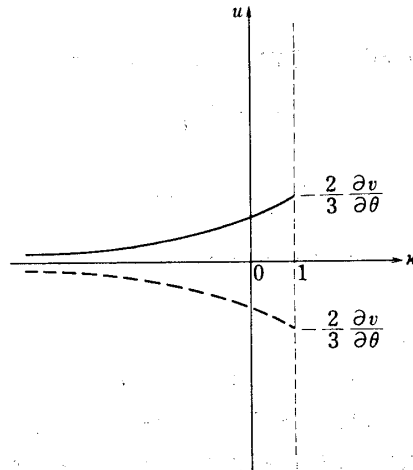
第2図



第3図



第4図



第5図

4図に示されたようになり、特異点の型としては、saddle となる。

(2) $\frac{\partial w}{\partial \phi} = -\frac{u \sin \theta}{2} (1 - \sqrt{1 - \kappa})$ の時,

(14)式に代入すれば,

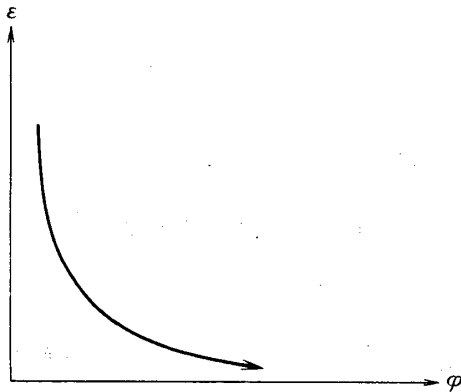
$$u = -2 \frac{\partial v}{\partial \theta} / (3 + \sqrt{1 - \kappa}) \tag{19}$$

がえられ、これを図示すると、5図のようになる。2図と同じように、実線は、 $\partial v / \partial \theta < 0$ を、破線は、 $\partial v / \partial \theta > 0$ の時を表わしている。

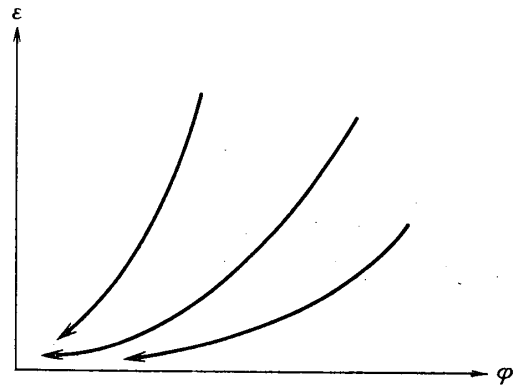
ここで、 $u > 0$ であるには、常に $\partial v / \partial \theta < 0$ でなければならない。

(a) $0 < \kappa < 1$

この時、 $\frac{\partial w}{\partial \phi} < 0$, $\frac{\partial v}{\partial \theta} < 0$ である。故に、 $w < 0$, $v < 0$ である。これは、(1)の(a)の時



第 6 図



第 7 図 $0 < \kappa \leq 1$

と同じ状況であり、流線の型は、3 図に示されたようであり、node である。

(b) $\kappa < 0$ の時、

この時、 $\frac{\partial w}{\partial \varphi} > 0$ となり、 $w > 0$ 、 $v < 0$ である。この時の流線の型は、6 図に示されたようになり saddle type の特異点となる。

以上の考察から、(1)が風下側の、(2)が風上側のそれぞれ対称面に対応していると思われる。そして、現在、問題としているのは、風下側の対称面近傍であるから、(1)の場合についてもう少し詳しく調べてみる。

錐状流場の流線は、 r には無関係であるから、 $f(\theta, \varphi) = 0$ という形であらわす事ができる。そこでは、垂直速度成分は、“0”であるから、

$$\frac{v}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} + \frac{w}{r \sin \theta} \frac{\partial f}{\partial \varphi} = 0 \tag{20}$$

という関係がえられ、 ε を用いれば、錐状流場の流線は、

$$\frac{d\varepsilon}{d\varphi} = \frac{v \sin(\theta_0 + \varepsilon)}{w} \tag{21}$$

と書ける。

今、 $\varepsilon \rightarrow 0$ 、 $\varphi \rightarrow 0$ という原点 (特異点) の近傍を考えるならば、流れの諸量は、 ε, φ について、展開した形で、次のように書ける。

$$u = u_{00} + u_{01}\varepsilon + u_{10}\varphi + \dots$$

故に(15)式の正の方、および、(17)式を、それぞれ積分するならば、 v, w は、

$$\begin{aligned} v &= -\frac{u_{00}}{2}(3 - \sqrt{1 - \kappa})\varepsilon + \dots \\ w &= -\frac{u_{00}}{2}\sin(\theta_0 + \varepsilon)(1 + \sqrt{1 - \kappa})\varphi + \dots \end{aligned} \tag{22}$$

という形で求められる。(22)式の第一項だけを考え、(21)式に代入するならば、次のようになる。

$$\frac{d\varepsilon}{d\varphi} = \frac{3 - \sqrt{1 - \kappa}}{1 + \sqrt{1 - \kappa}} \frac{\varepsilon}{\varphi} \tag{23}$$

これより、

$$\varepsilon = C\varphi^a \quad (C: \text{定数}) \quad (24)$$

ここで、

$$a = \frac{3 - \sqrt{1 - \kappa}}{1 + \sqrt{1 - \kappa}} \quad (25)$$

これは、原点（特異点）近傍における、流線の形を、あらわしている。それは、次の五つの場合に分ける事ができる。

(i) $a > 1$

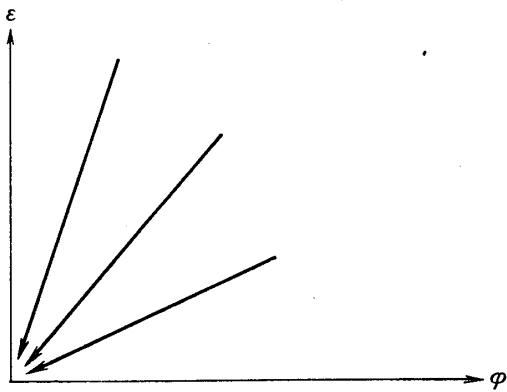
この時 $0 < \kappa \leq 1$ であり、流線は、7図に示されたように、 $\varepsilon = 0$ すなわち、物体表面に、接するように原点に近づく。

(ii) $a = 1$

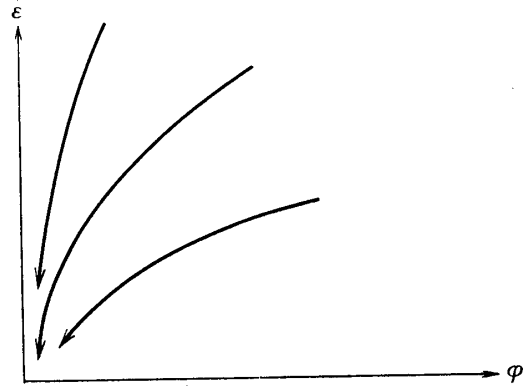
この時 $\kappa = 0$ であり、その時、流線は、8図に示されるような形となり、原点は、吸い込み型の特異点となる。

(iii) $0 < a < 1$

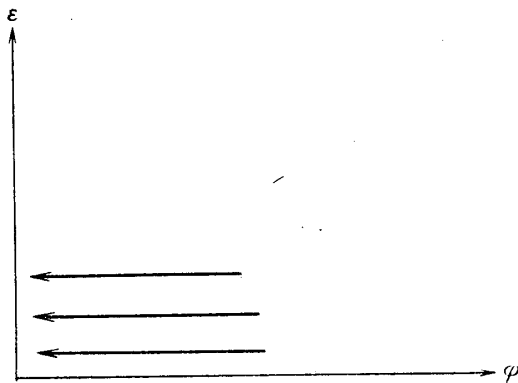
この時、 $-8 < \kappa \leq 0$ であり、流線は9図に示されたようになり、 $\varphi = 0$ に接する様な形をとる。すなわち、特異点近傍で流線は物体に垂直となる。



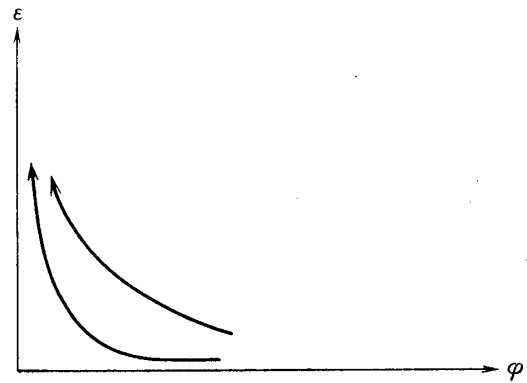
第8図 $\kappa = 0$



第9図 $-8 < \kappa < 0$



第10図 $\kappa = -8$



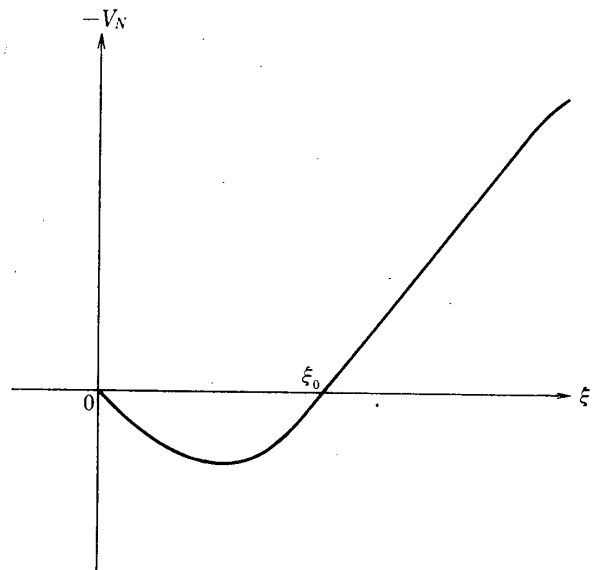
第11図 $\kappa < -8$

(iv) $a=0$

この時は、 $\kappa=-8$ に対応する。これは、(17)式からわかる様にこの時、 $\frac{\partial v}{\partial \theta}=0$ である。すなわち、対称面上で $v=0$ となり、この上は、すべて澱み点となる。又、(24)式から、流線は、 $\varphi=0$ に平行な直線群であり、10 図に示したようになる。

(v) $a<0$

この時は、 $\kappa<-8$ で流線は、11 図のようになる。これは、 $\varepsilon=\varepsilon_0$ ($\varepsilon_0 \neq 0$) に、原点以外の澱み点 $v=0, w=0$ の点が、存在する事を意味している。いわゆる、vortical singularity の“lift-off”という現象に対応しているものと思われる。これは又、Melnik の条件と一致している。



特異点が物体面より離れた時の対称面内 ($\varphi=\pi$) での V_N の ξ 方向変化

第 12 図

次にこれらの存在の可能性を議論しよう。

(ii) の場合は、(16)式より物体面上で圧力一定の解がえられ、迎角“0”の円錐の場合を与えるものと思われる。この時、流線は、物体に垂直になるから、(24)の式では、 $C=\infty$ となる。故に、8 図に示したような、吸込みのような形には、ならない。

次に(iii)の場合を考えよう。物体表面は、一つの流線面であるから、流線が、物体表面に垂直に入る事はなく、必ず接するような形を、物体近傍では、とらなければならない。その時は、物体近傍では $\partial v/\partial \theta > \partial w/\partial \varphi$ である。しかし、特異点近傍では、9 図のような、流線の形をとるのであるから、 $\partial w/\partial \varphi > \partial v/\partial \theta$ である。故に、特異点に近づく途中に、 $\partial w/\partial \varphi \approx \partial v/\partial \theta$ の領域がある事になるが、ここでは、物体面に接するような流線の形は、えられない。故に、(iii)の a の領域で、物理的に可能な解は、存在しない。物理的に可能な解は、(i)、(v)の a の範囲、すなわち $0 \leq \kappa \leq 1$ と $\kappa < -8$ の時である。

4. 非等エントロピー面の可能性について

Golubinskii は、非等エントロピー面が、単独で、存在する事は、不可能である事は認めている。彼は、非等エントロピー面と等エントロピー面の各々の領域で、別々の、矛盾しない展開を考え、それをを用いる事によって、両方の領域に適用できる解が、存在する事を示した。それによって、この二つの面をスムーズに結ぶ様な流れの存在が可能であるとしている。もし存在するとするならば、迎角を大きくとってゆく時に、風下側の対称面の近傍に、非等エントロピー面が、広がってゆくという場合であろう。そしてこの時は、対称面上に vortical singularity というような特異点は、発生しないわけである。この非等エントロピー面の物体面上では、 $v=w=0$ であり、これは、物体近傍で流線が、 r 方向、すなわち、錐状物体の頂点からの放射線に近づくという事である。そこでは、圧力が一定となるという事

から、それは、実際の流れにおいては離れに対応するような、非粘性流れの状況を与えるかもしれない。以上の事を考えて、今までと同じ様な方法で、物体近傍の流れの様子を調べてみる事にする。

物体面上では、 $v=w=0$ である。故に、(1.4)式により、

$$\frac{\partial p}{\partial \varphi} = 0$$

となり $\partial^2 p / \partial^2 \varphi = 0$ となるから、(16)式より

$$\kappa = 0 \quad (26)$$

を与える。

又、(14)、(15)式は、ここでは、対称面近傍という前提なしに、物体近傍というだけで成立する。(15)式で $\kappa=0$ とすれば、

$$\frac{\partial w}{\partial \varphi} = \begin{cases} 0 & (27.1) \\ -u \sin \theta & (27.2) \end{cases}$$

が得られる。

(1) $\frac{\partial w}{\partial \varphi} = 0$ の時、

(14)式より

$$\frac{\partial v}{\partial \theta} = -u \quad (28)$$

今、物体近傍のみを考えているから u は、次のような形の展開で表わす事ができる。

$$u = u_0(\varphi) + u_1(\varphi)\varepsilon + \dots \quad (29)$$

又、(27.1)式、および、物体面上で $w=0$ である事から、

$$w = w_1\varepsilon + w_2\varepsilon^2 + \dots \quad (30)$$

とかけ、ここで、 w_1, w_2, \dots は、定数である。

今、物体面上で $v=w=0$ であるから、流線を与える(21)式は、“0/0”という形となる。そこで物体近傍の流線の形は、次のようにして考える。

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{d\varepsilon}{d\varphi} = \frac{\partial(v \sin(\theta_c + \varepsilon)) / \partial \varepsilon}{\partial w / \partial \varepsilon} \quad (31)$$

(31)式に(29)、(30)を用いれば、

$$\frac{d\varepsilon}{d\varphi} = \frac{-u_0(\varphi) \sin \theta_c}{w_1} \quad (32)$$

を得る。

$u_0(\varphi) \neq 0$ であるから、(32)式は、流線が、ある傾きをもって物体表面 $\varepsilon=0$ とぶつかる事をあらわしている。等エントロピー面をもつ物体の領域では、流線は、物体表面の近くで、物体表面と平行な形である。故に、もしも、等エントロピー面と、非等エントロピー面とが、共存するとすれば、その接合点の近くで、流線は、突然に、その向きを変える事が、要求される。それは、物理的におかしい。故に、この様な流れは、存在しないと考えるのが、妥当であろう。

(2) $\frac{\partial w}{\partial \varphi} = -u \sin \theta$ の時,

(14)式より

$$\frac{\partial v}{\partial \theta} = -2u \quad (33)$$

(29)式の展開式を用いれば, (27.2)式より,

$$w = -\sin(\varepsilon + \theta_c)[u_0^*(\varphi) + u_1^*(\varphi)\varepsilon + \dots] \quad (34)$$

をえる. ここで u_0^*, u_1^*, \dots は, u_0, u_1, \dots を, φ について積分したものを表わしている.

物体近傍の流線の形を考えるのに, やはり, (31)式を用いそれに, (33), (34)式を代入すれば,

$$\frac{d\varepsilon}{d\varphi} = -\frac{u_0 \cos \theta_c}{u_0^* \sin \theta_c} \quad (35)$$

がえられ,

$$d\varepsilon = -\cot \theta_c d[\log u_0^*(\varphi)]$$

より,

$$\varepsilon = c_1(c_2 - \log u_0^*(\varphi)) \quad (c_1, c_2: \text{定数}) \quad (36)$$

をえる. (36)式より, $\varepsilon=0$ の物体面上を考えてみれば, $u_0^*(\varphi) = e^{c_1}$ と φ に無関係になる. φ について積分した値が, φ によらない定数であるという事は, 原始関数. 今の場合には, u_0 が, "0" であるという事を意味している. すなわち, この非等エントロピー面上は, 三次的な, 流れ場の中での激み点である事を意味している. 流線が, 物体面上で止まる事であって, 物理的におかしい事になる. 故に, この場合も, この非等エントロピー面は, 存在しえないと考えられる.

5. 特異点の性質について

この特異点は, 三次元流れにおいて存在するようなものではなく, 錐状流の場で考える時にでてくるものである. その意味で, 一般の激み点の様な特異点とは, 異なった性質をもっているものと考えられる. それを詳しく調べる事は, 数値計算においてある示唆を与えるものと思われる.

(1) θ 方向について

$\varphi=0$ の対称面内で考える事にする. 対称面の条件を用いれば, (1)の方程式系は,

$$\frac{\partial}{\partial \theta}(\rho v \sin \theta) + 2u\rho \sin \theta = 0 \quad (37.1)$$

$$v \frac{\partial u}{\partial \theta} - v^2 = 0 \quad (37.2)$$

$$v \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial \theta} + uv = 0 \quad (37.3)$$

$$u^2 + v^2 + \frac{2\gamma}{\gamma-1} \frac{p}{\rho} = \text{const.} \quad (37.4)$$

となる.

(37.2)より,

$$v\left(\frac{\partial u}{\partial \theta} - v\right) = 0 \quad (38)$$

$v=0$ とすれば, (37.1)式より, $u=0$ となる. 故に, (38)式より,

$$\frac{\partial u}{\partial \theta} - v = 0 \quad (39)$$

でなければならない.

今, $v=0$, すなわち, 特異点 (vortical singularity) が, $\theta=\theta_0$ にあるとする. $\varepsilon=\theta-\theta_0$. とおき, $\varepsilon=0$ 近傍を考えよう.

(37.1)式で $v=0$ とすれば,

$$\frac{\partial v}{\partial \theta} + 2u = 0 \quad (40)$$

(39), (40)両式を用いて, 又, ここでは, 対称面内だけを考えているから, 流れの諸量は, θ だけの関数と考えるとするならば,

$$\begin{aligned} u &= u_0 \cos(\sqrt{2}(\theta-\theta_0)) \\ v &= -\sqrt{2}u_0 \sin(\sqrt{2}(\theta-\theta_0)) \end{aligned} \quad (41)$$

(u_0 : 定数)

を得る. 今, $\varepsilon=0$ の近傍を考えているから, (41)から, u, v は, 次の形で, 書く事ができる.

$$\begin{aligned} u &= u_0 \left(1 - \varepsilon^2 + \frac{\varepsilon^4}{6} - \dots\right) \\ v &= -2u_0 \left(\varepsilon - \frac{1}{3}\varepsilon^3 + \dots\right) \end{aligned} \quad (42)$$

これを, (37.3)式に代入して, 整理すれば,

$$\frac{dp}{d\varepsilon} = -2u_0\rho \left(\varepsilon - \frac{4}{3}\varepsilon^3 + \dots\right) \quad (43)$$

を得る.

(37.4)式を ε について微分した式に, (42), (43)式を代入してまとめると,

$$\frac{d\rho}{d\varepsilon} = -\frac{\rho^2}{\gamma p} 2u_0 \left(\varepsilon - \frac{4}{3}\varepsilon^3 + \dots\right) \quad (44)$$

が, えられる.

(43), (44)式から, 圧力, 密度の θ に関する微分は, $\varepsilon=0$, 特異点で, ともに“0”となり, $\varepsilon=0$ を横切って, ともに, 負から, 正へ, 符号を変える事がわかる.

ここで,

$$\rho = \rho_0 + \rho_1\varepsilon^m + \rho_2\varepsilon^{2m} + \dots \quad (0 < m \leq 1) \quad (45)$$

と展開し, それを, (43)式に代入して, 積分すれば,

$$p = p_0 - 2u_0^2 \left[\frac{\rho_0}{2}\varepsilon^2 + \frac{\rho_1}{m+2}\varepsilon^{m+2} + \dots \right] \quad (46)$$

という形で圧力は, 求められる. ここで p_0 は, 定数である.

ここで, (44) 式に, (45), (46) 両式を代入し, 両辺の次数を比較して, m の値を決定する事にする.

((44)式左辺 $\times p$)

$$= m p_0 \rho_1 \varepsilon^{m-1} + 2m p_0 \rho_2 \varepsilon^{2m-1} + 3m p_0 \rho_3 \varepsilon^{3m-1} \\ - m u_0^2 \rho_0 \rho_1 \varepsilon^{m+1} - 2m u_0^2 \rho_0^2 \rho_2 \varepsilon^{2m+2} - \frac{2m}{m+2} \rho_1^2 u_0^2 \varepsilon^{2m+1} + \dots$$

((44)式左辺 $\times p$)

$$= -\frac{2u_0^2}{\gamma} [\rho_0^2 \varepsilon + 2\rho_0 \rho_1 \varepsilon^{m+1} + (\rho_1^2 + 2\rho_0 \rho_2) \varepsilon^{2m+1} + \dots]$$

右辺の最低の次数は, “1”. 左辺の最低次数は $(m-1)$ である. これは, m の条件下では, 一次の次数になりえない. 故に, $\rho_1 \equiv 0$ でなければならない. 以下各項について, 比較してゆけば, $m=1$ の時, $\rho_1, \rho_3, \rho_5, \dots$ と奇数次の項を “0” とする時, 両辺が, 恒等的に等しくなる事がわかる. 故に, ρ は,

$$\rho = \rho_0 + \rho_2 \varepsilon^2 + \rho_4 \varepsilon^4 + \dots$$

という形で書く事ができる. 以上より, ε 方向, すなわち, θ 方向には, エントロピーの特異性が, でてこない事がわかる.

(2) φ 方向について,

$\theta = \theta_0$, すなわち, $\varepsilon = 0$ の, 特異点近傍で考える事にする. (1) の方程式系を, 次のように書きかえる.

$$w \frac{\partial \rho}{\partial \varphi} = -\rho \frac{\partial w}{\partial \varphi} - 2u\rho \sin \theta - \rho v \cos \theta - \rho \frac{\partial v}{\partial \theta} \sin \theta - v \frac{\partial \rho}{\partial \theta} \sin \theta \quad (47.1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial \varphi} = \frac{\sin \theta}{w} \left(v^2 + w^2 - v \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) \quad (47.2)$$

$$\frac{\partial v}{\partial \varphi} = \frac{\sin \theta}{w} \left(w^2 \cot \theta - uv - v \frac{\partial v}{\partial \theta} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial \theta} \right) \quad (47.3)$$

$$\frac{\partial w}{\partial \varphi} = \frac{\sin \theta}{w} \left(-v \frac{\partial w}{\partial \theta} - \frac{1}{\rho \sin \theta} \frac{\partial p}{\partial \varphi} - vw \cot \theta - uw \right) \quad (47.4)$$

又, ベルヌーイの式を, φ で微分すれば,

$$u \frac{\partial u}{\partial \varphi} + v \frac{\partial v}{\partial \varphi} + w \frac{\partial w}{\partial \varphi} + \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{1}{\rho^2} \left(\rho \frac{\partial p}{\partial \varphi} - p \frac{\partial \rho}{\partial \varphi} \right) = 0 \quad (47.5)$$

が得られる.

(47.5) 式に, (47.1) ~ (47.4) 式を代入して, $\partial p / \partial \varphi$ について整理すれば,

$$\frac{\partial p}{\partial \varphi} = \frac{\sin \theta}{(w^2 - a^2)} \left\{ (\gamma-1)w \left(\rho v^2 \frac{\partial v}{\partial \theta} + v \frac{\partial p}{\partial \theta} + \rho w v \frac{\partial w}{\partial \theta} \right) \right. \\ \left. + a^2 \left[\rho v \frac{\partial w}{\partial \theta} - w \left(\rho \frac{\partial v}{\partial \theta} + \rho u + v \frac{\partial \rho}{\partial \theta} \right) \right] \right\} \quad (48)$$

原点 (特異点) に近づく時, $w, v \rightarrow 0$ であり, 又 θ 方向に関する議論より $\partial w / \partial \theta \rightarrow 0$ となる. 故に,

$$\lim_{\varphi \rightarrow 0} \frac{\partial p}{\partial \varphi} = 0$$

である。

ここで、エントロピーの式を用いる。それは、次のように書ける。

$$v \frac{\partial S}{\partial \theta} + \frac{w}{\sin \theta} \frac{\partial S}{\partial \varphi} = 0 \quad (49)$$

又、 $v/w = h$ という量を考え、それを用いて(49)式を書き直すと、

$$h \frac{\partial S}{\partial \theta} + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial S}{\partial \varphi} = 0 \quad (50)$$

特異点においては、 $\partial S / \partial \theta = 0$ である。故に、もし、 $\frac{\partial S}{\partial \varphi} = 0$ であるとするならば、 h は、特異点で、ある有限値 h_0 とならなければならない。(47.4)式を、 h を用いて書けば、

$$\frac{\partial w}{\partial \varphi} = \sin \theta \left(-h \frac{\partial w}{\partial \theta} - \frac{1}{\rho w \sin \theta} \frac{\partial p}{\partial \varphi} - v h \cot \theta - u \right) \quad (51)$$

ここで、特異点に近づけてゆけば、 $h \rightarrow h_0$, $v, w, \partial w / \partial \theta \rightarrow 0$, である。又、(48)式からわかるように $\partial p / \partial \varphi \times \frac{1}{w}$ は、ある有限値 P_0 に近づく。故に、

$$\lim_{\varphi \rightarrow 0} \frac{\partial w}{\partial \varphi} = -P_0 - u \sin \theta$$

となり $\partial w / \partial \varphi$ は、特異点で、有限値となる。次に(47.1)式を考えてみる。

$$\frac{\partial \rho}{\partial \varphi} = -\frac{\rho}{w} \frac{\partial w}{\partial \varphi} - \frac{2u\rho \sin \theta}{w} - \rho h \cos \theta - \frac{\rho}{w} \frac{\partial v}{\partial \theta} \sin \theta - h \frac{\partial \rho}{\partial \theta} \sin \theta \quad (52)$$

これを特異点に近づけてゆくと、第1, 2, 4項は、それぞれ、分母が“0”となり、その結果、 $\partial \rho / \partial \varphi$ は、特異点では、無限大となる。これは、 $\partial S / \partial \varphi \rightarrow \infty$ を意味し、はじめに仮定した $\partial S / \partial \varphi = 0$ と矛盾をする。そして、それは、同時に、特異点に近づく時、 h は、ある値に近づかない。すなわち、その値は、不定となる事を意味している。そして、この時、 $\partial S / \partial \varphi$ も又、不定となる。これは、 h, S が特異点の近傍におけるパラメーターによる展開の形でその解を、あらわせない事を意味している。

h が、特異点で、不定であるという事を考慮して、流れの諸量の様子を調べてみよう。(48)式より $\partial p / \partial \varphi$ は、 h によらないから、前の結果が、保たれる。又、(52)より、 $\partial \rho / \partial \varphi$ は、第3, 5項に h の項があるので、不定となる事がわかる。これは、はじめの仮定と矛盾しない。(47.2)式を考えてみると、

$$\frac{\partial u}{\partial \varphi} = \sin \theta \left(v h + w - h \frac{\partial v}{\partial \theta} \right)$$

特異点で、 $\partial v / \partial \theta$ は、有限であるから、 $\partial u / \partial \varphi$ も又、特異点では、不定となる事がわかる。

以上より、 φ 方向の変化を考慮する時、特異点において、圧力をのぞく流れの量に、特異性があらわれる事が示された。

6. 数値計算上での特異点の考察

これまでの考察によって、vortical singularity という特異点の性質が、明らかにされ又、

その特異点が、錐状物体が、ある迎角以上を取った時、必ず物体表面より離れ、流れ場の中に、出現する事も確認された。その特異点回りの解析的な解は、求められていないが、その(1)で報告されたような数値解法によって、その点を、のがれて、流れを近似的に求める事は、可能である。ここでは、その特異点の取りあつかい方を詳しくのべる事にする。

その(1)では、境界条件が、少し複雑になるが、物体形状を簡単な形で与える事ができるように円柱座標系 (z, r, φ) を用いた。そこで、ここでも、円柱座標系で、議論を進める事にする。以後、用いる文字は、すべてその(1)と同じ意味で用いる事にする。運動方程式は、次のようになる。

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial z} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial(\rho w)}{\partial \varphi} + \frac{\rho v}{r} = 0 \quad (53.1)$$

$$u \frac{\partial u}{\partial z} + v \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{w}{r} \frac{\partial u}{\partial \varphi} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} = 0 \quad (53.2)$$

$$u \frac{\partial v}{\partial z} + v \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{w}{r} \frac{\partial v}{\partial \varphi} - \frac{w^2}{r} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} = 0 \quad (53.3)$$

$$u \frac{\partial w}{\partial z} + v \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{w}{r} \frac{\partial w}{\partial \varphi} + \frac{wv}{r} + \frac{1}{\rho r} \frac{\partial p}{\partial \varphi} = 0 \quad (53.4)$$

$$u \frac{\partial S}{\partial z} + v \frac{\partial S}{\partial r} + \frac{w}{r} \frac{\partial S}{\partial \varphi} = 0 \quad (53.5)$$

$$\text{また, } S = Cp/\rho^{\gamma} \quad (C: \text{定数}) \quad (53.6)$$

である。

これに次の変換を適用する。

$$\begin{aligned} Z &= z \\ \xi &= (r - R_b)/(R_s - R_b) \\ \varphi &= \varphi \end{aligned} \quad (54)$$

ここで、錐状流の性質より、 $\partial/\partial Z$ の項を“0”とおき整理すれば、次の式をえる。

$$\frac{\rho \lambda}{\varepsilon} \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\rho}{\varepsilon} \frac{\partial v}{\partial \xi} + \frac{\rho \mu}{\varepsilon} \frac{\partial w}{\partial \xi} + \frac{V_N}{\varepsilon} \frac{\partial \rho}{\partial \xi} + \frac{\rho}{r} \frac{\partial w}{\partial \varphi} + \frac{w}{r} \frac{\partial \rho}{\partial \varphi} + \frac{\rho v}{r} = 0 \quad (55.1)$$

$$\frac{V_N}{\varepsilon} \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\lambda}{\rho \varepsilon} \frac{\partial p}{\partial \xi} + \frac{w}{r} \frac{\partial u}{\partial \varphi} = 0 \quad (55.2)$$

$$\frac{V_N}{\varepsilon} \frac{\partial v}{\partial \xi} + \frac{1}{\rho \varepsilon} \frac{\partial p}{\partial \xi} + \frac{w}{r} \frac{\partial v}{\partial \varphi} - \frac{w^2}{r} = 0 \quad (55.3)$$

$$\frac{V_N}{\varepsilon} \frac{\partial w}{\partial \xi} + \frac{\mu}{\rho \varepsilon} \frac{\partial p}{\partial \xi} + \frac{w}{r} \frac{\partial w}{\partial \varphi} + \frac{wv}{r} + \frac{1}{r \rho} \frac{\partial p}{\partial \varphi} = 0 \quad (55.4)$$

$$\frac{V_N}{\varepsilon} \left(\frac{\partial p}{\partial \xi} - a^2 \frac{\partial \rho}{\partial \xi} \right) + \frac{w}{r} \left(\frac{\partial p}{\partial \varphi} - a^2 \frac{\partial \rho}{\partial \varphi} \right) = 0 \quad (55.5)$$

ここで

$$\begin{aligned} \varepsilon &= r_s - r_b \\ \lambda &= -\xi \varepsilon - r_b \\ \mu &= - \left(\xi \left(\frac{\partial r_s}{\partial \varphi} - \frac{\partial r_b}{\partial \varphi} \right) + \frac{\partial r_b}{\partial \varphi} \right) / r \end{aligned} \quad (56)$$

また,

$$V_N = u\lambda + v + \mu w \quad (57)$$

である.

(55)式をそれぞれ ξ についての微分について解くと次のようになる.

$$\frac{\partial u}{\partial \xi} = -\frac{\varepsilon}{V_N} \left(C + \frac{\lambda}{\rho \varepsilon} \frac{\partial p}{\partial \xi} \right) \quad (58.1)$$

$$\frac{\partial v}{\partial \xi} = -\frac{\varepsilon}{V_N} \left(D + \frac{1}{\rho \varepsilon} \frac{\partial p}{\partial \xi} \right) \quad (58.2)$$

$$\frac{\partial w}{\partial \xi} = -\frac{\varepsilon}{V_N} \left(E + \frac{\mu}{\rho \varepsilon} \frac{\partial p}{\partial \xi} \right) \quad (58.3)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial \xi} = \frac{1}{a^2} \left(\frac{\varepsilon}{V_N} A + \frac{\partial p}{\partial \xi} \right) \quad (58.4)$$

$$\frac{\partial p}{\partial \xi} = -\frac{G}{H} \quad (58.5)$$

ここで, $A, B, C, D, E, G, H,$ は, それぞれ付録で与えられるような式である.

(58)式から, わかるように, $\partial p / \partial \xi$ の式以外は, V_N が, “0” に近づくとつれて急激にその変化量は, 大きくなり, $V_N = 0$ は, (58)の方程式系では, 特異点となっている. 故に, ここで用いた数値計算では, 物体面上 ($\xi = 0$) は, $V_N = 0$ でなければならないから, 特異点の集まりという事になる. (58)の方程式系は, $\xi = 0$ まで, 積分する事は, できない. 故に, ここでは, $\Delta \xi = 0.00625$ まで, 積分を行い, そこまでの値をもとにして, 外挿によって $\xi = 0$ での圧力 p の値を求めている. そして, 他の流れの量は, 物体面上の等エントロピーという条件をもとに, (53.6)および, ベルヌーイ式等から, 求めている.

ある衝撃波の形状が, 与えられたとする. その時, $\xi = \xi_0 (\xi_0 \neq 0)$ で $V_N = 0$ となる. この時, この値をもとに, $\xi = 0$ での V_N の値を外挿によって求め, その値が, 判定条件 ($|V_{N0}| < 10^{-3}$) を, 満足している時, その衝撃波の形は, 正しいと見なされる. 又, その条件を満足しない時, 衝撃波は, 誤っていると判定される. この時, $\xi = \xi_0$ での $V_N = 0$ が, 衝撃波の誤りから, きたものなのか, それとも, 特異点の「lift-off」という現象によるものなのかが, 問題となる. vortical singularity という特異点は, 必ず, 対称面内にあり, それが, 物体面を離れた時も, その面内を動くから ([14]), 対称面以外における, $\xi = \xi_0$ での $V_N = 0$ の点が, 生じる事は, 衝撃波の誤りによるものと考えられる. そこで, 対称面内での, $\xi = \xi_0$ での $V_N = 0$ について考えてみる.

対称面の条件を用いれば, (41)式より,

$$V_N = u\lambda + v \quad (59)$$

これを ξ について偏微分すれば,

$$\frac{\partial V_N}{\partial \xi} = \lambda \frac{\partial u}{\partial \xi} - \varepsilon u + \frac{\partial v}{\partial \xi} \quad (60)$$

(60)式に, (58.1) (58.2)を代入してまとめると,

$$\frac{\partial V_N}{\partial \xi} = -\frac{(\lambda^2 + 1)}{\rho V_N} \frac{\partial p}{\partial \xi} - \varepsilon u \quad (61)$$

$\xi=0$ の物体面上で $V_N=0$ でなければ、ならないから、 V_N のグラフは、12 図のような形とならなければならない。すなわち、 $\xi>\xi_0$ では、 $\partial V_N/\partial \xi < 0$ 、 $V_N < 0$ 、又、 $\partial p/\partial \xi < 0$ である。しかし、 $\xi < \xi_0$ では、 $V_N > 0$ 、 $\frac{\partial p}{\partial \xi} > 0$ となる。そして又、 $\xi=0$ の近くでは、 $\partial V_N/\partial \xi > 0$ とならなければならない。しかし、(61)式から、わかるように、そのためには、 $u < 0$ という事が、必要となり、これは、物理的におかしい。故に、 $\partial V_N/\partial \xi$ は、符号を変える事は、できない。これは、 $\xi=0$ での境界条件を満足する事ができない事を、意味しており、 $\xi=\xi_0$ での $V_N=0$ の点をこえての計算は、無意味であり、発散する。

今、 $\xi=\xi_0$ で、 $V_N=0$ となったまま、計算が、収束したとする。もしも、その $V_N=0$ の点が、衝撃波の誤りによって生じたものであるならば、 ξ_0 の値を少しずつ“0”に近づけてゆく事によって、正しい衝撃波の形が、得られるであろう。又、もしも、それが、特異点の「lift-off」という現象によって生じたものであるならば、 ξ_0 の値を“0”へ動かしてゆく途中で、計算は発散するであろう。

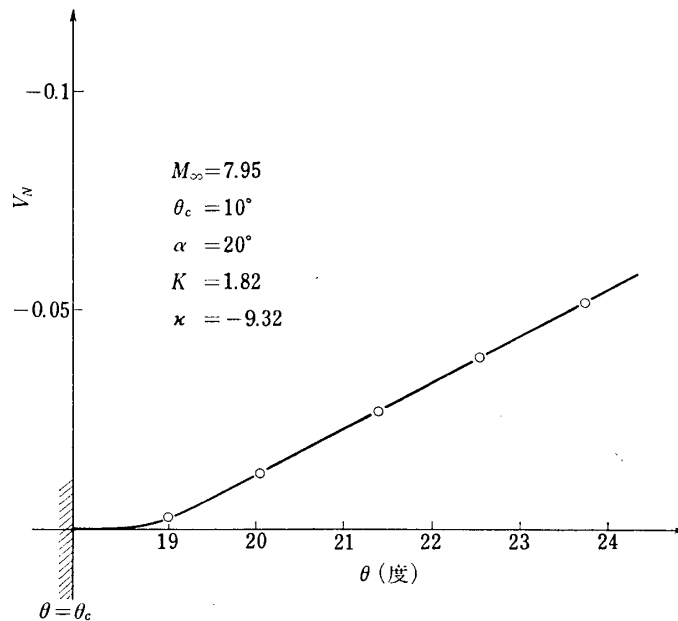
(i) $0 < \xi_0 < 4\xi$ である時、 $V_N=0$ の点が、物体面上を離れていても、すなわち、 κ が、「lift-off」の状況を示していたとしても、計算は、可能であり、その収束を認める。

(ii) $\xi_0 > 4\xi$ の時、 $\xi_0 \rightarrow 0$ の過程において、計算が、発散するその限界値 ξ_{0l} に、特異点が、存在するものとする。

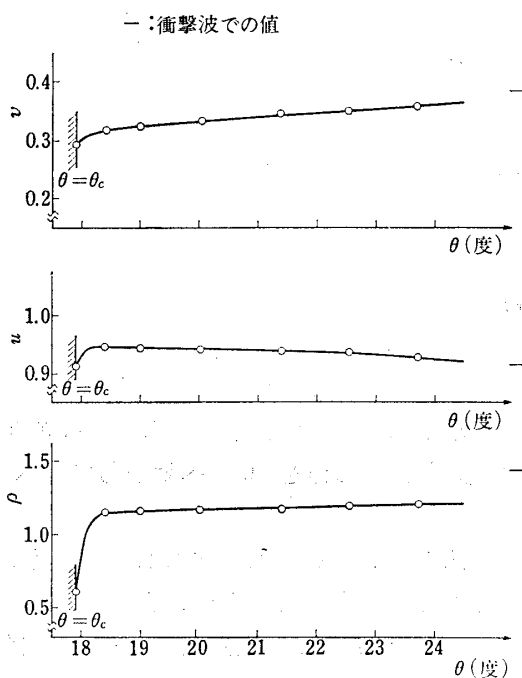
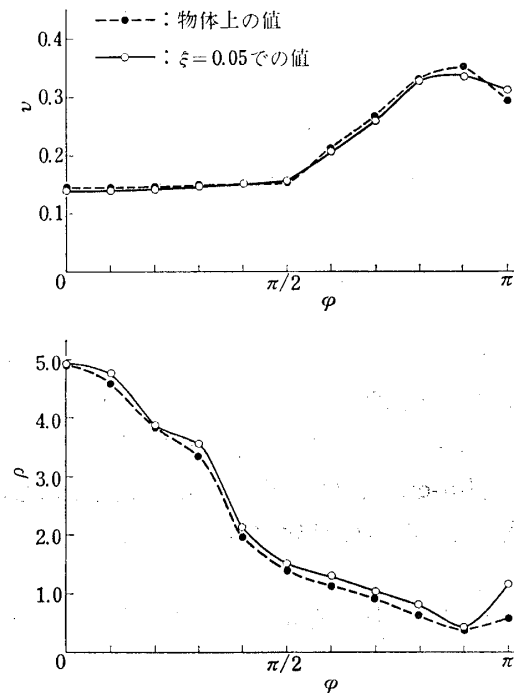
(iii) ξ_{0l} が、物体表面上になるように、Equivalent Body を決定する。

7. 計算例

実際の計算と、今までの議論とを、 $M_\infty=7.95$ 、 $\theta_c=10^\circ$ 、 $\alpha=20^\circ$ を例にとって比べてみる。



第13図 V_N の θ 方向の変化 ($\varphi=\pi$) $\left(\frac{\partial V_N}{\partial \theta}\right)_{\theta=\theta_c} = 0.0969$

第14図 v, u, ρ の θ 方向の変化 ($\varphi = \pi$)第15図 v, ρ の φ 方向の変化

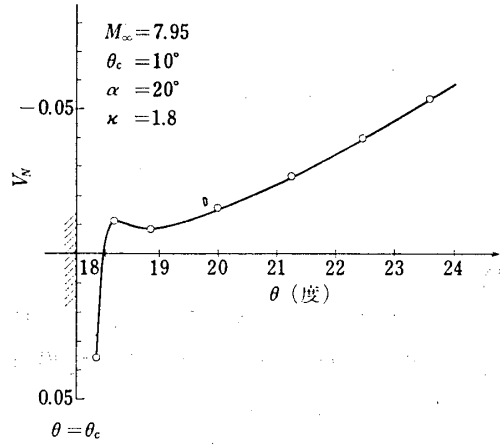
この場合、 $\kappa = 1.82$ (Equivalent body の大きさ) で収束するが、それよりも物体を小さくすると発散する。同一の流れの条件に対して、収束する場合と発散する場合との、特異点近傍の様子を調べてみよう。

(1) 収束する時

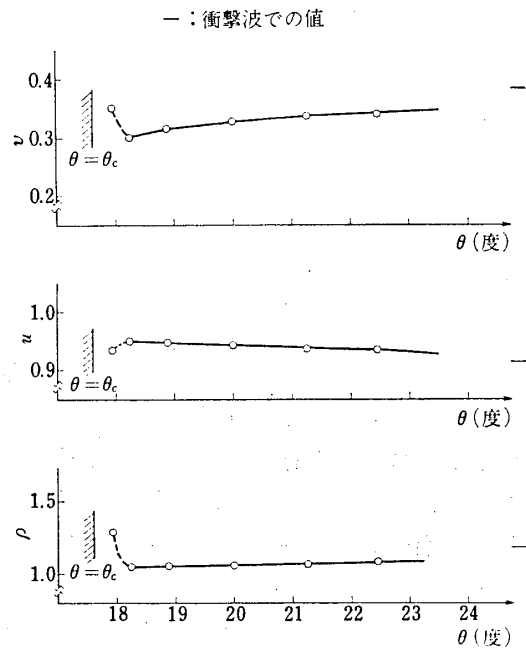
13 図に、 $\varphi = \pi$ での V_N の θ 方向の変化が示してある。図よりわかるように、 $\theta = 18.6^\circ$ で V_N は、非常に小さくなるが、まだ負のままである。この時の物体面上の結果より x を求めると $x = -9.32$ である。又、(17)式より $\partial V_N / \partial \theta = 0.0969$ (V_N と(17)式の v は、同じもの)となり、 $V_N > 0$ の所が、物体近傍に存在する事を示している。しかし、lift-off した特異点は、 4ξ と物体との間にあり、現在の計算では、その位置、又その回りの流れの様子を知る事はできない。14 図には、 u, v, ρ の各量の θ 方向の変化の様子が、示してある。いずれもスムーズに物体へと致っている。物体近傍での急激な変動は、vortical layer によるものである。15 図に v, ρ の φ 方向変化が、示してある。そして、それは一様な物体面上への収束の様子をあらわしている。

(2) 発散する時

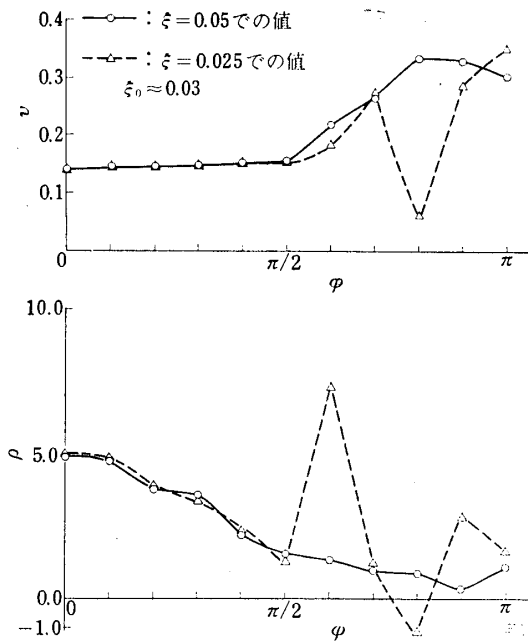
この時の $\varphi = \pi$ の対称面上での V_N の変化が、16 図に示してある。 $\theta = 18^\circ$ 前後で $V_N = 0$ となりそれ以後 $V_N > 0$ となっている。そして、(61) 式の議論でもわかるように、それ以後の計算は、無意味となり、 $\theta = 17.9^\circ$ で止められている。 $V_N = 0$ となる少し前で、 $|V_N|$ が、増加しているが、その理由はわからない。しかしこの図から $\theta = 18^\circ$ に、 $V_N = 0$ の点、すなわち、vortical singularity なる特異点が、存在する事は、明らかである。17 図に、 θ 方向の変化が、 u, v, ρ の各量について示してあるが、 $V_N = 0$ の点を横切って値の飛びを示して



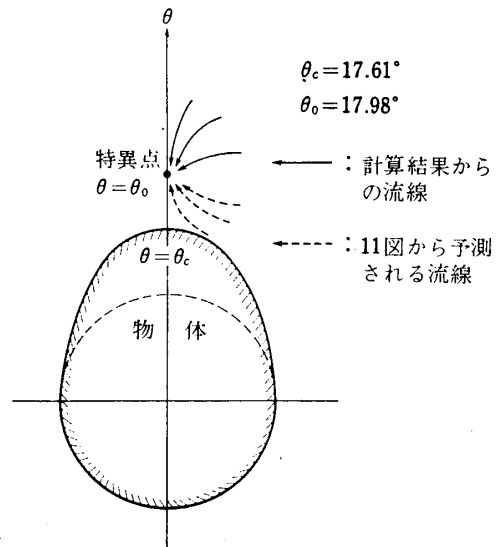
第 16 図 V_N の θ 方向の変化 ($\varphi = \pi$)



第 17 図 v, u, ρ の θ 方向の変化 ($\varphi = \pi$)



第 18 図 v, ρ の φ 方向の変化



第 19 図 特異点回りの流線の型

いる。この特異点 (その位置は、 $\xi_0 \approx 0.03$, $\theta_0 \approx 17.98^\circ$) の前後での φ 方向の変化を 18 図にあらわしてある。特異点を過ぎての値に、大きな振動があらわれ、計算は、無意味となっている。

次に、 $\xi_0 \approx 0.03$, すなわち特異点の近くの流れの様子を調べてみよう。計算値より、 $\xi_0 \approx 0.03$

では, $\partial w/\partial \varphi = -0.405$, 又, $\partial V_N/\partial \theta = -0.257$ となる. $|\partial w/\partial \varphi| > |\partial V_N/\partial \theta|$ という事は, 流線が, $\varphi=0$ に接する様に, 特異点に近づく事をあらわしている. 特異点と物体との間の流れの様子は, 現在の計算からは, わからない. しかし, 特異点の「lift-off」という事から, 物体近傍での流れは, 11 図のようになっていると考えられる. そして, これは, 先の計算結果の流れと矛盾しない. 故に, 特異点近傍の流れは, 19 図の様になっていると考えられる. そしてこの流れの型は, φ 方向からの流線が, 特異点で, $\varphi=0$ に接する様に, 急激に曲げられる. これは, ξ 方向 (θ 方向) には, 特異性は, 無いが, φ 方向に特異性をもつという第5節での議論と一致している.

8. 結 論

錐状流場において出現する特異点, vortical singularity の性質, および, その周辺の流れの様子が, 数学的な観点から, 詳しく調べられた. 又, 実際の計算においての, その特異点に対する処理, そして, Equivalent Body の考え方が, 詳しく述べられた.

(1) 物体面は, 一つの流線面であり, 風下側の対称面の一点をのぞいて, 等エントロピーである.

(2) vortical singularity の「lift-off」という現象は, 非粘性の錐状流を考える時, 必ずおこる. それは, 風下側の対称面での圧力が, 極大値をもつ時である.

(3) Golubinskii の指摘した様な, 非等エントロピー面と, 等エントロピー面の共存は, できない. 彼の用いた展開が, 考えている領域には, 適用できないものと考えられる.

(4) vortical singularity の特異性は, θ 方向にはなく, φ 方向に存在する. 故に, 流れの諸量を, φ 方向について展開した形で求める事はできない.

(5) $\xi=\xi_0$ に, $V_N=0$ の点がある時, それが, 誤った衝撃波によるものなのか, 特異点の「lift-off」という現象によるものなのかの判断は, $\xi_0 \rightarrow 0$ において, 計算が, 可能か, 否かによる.

(6) $\xi_0 \rightarrow 0$ において計算が, 発散した時, その $\xi_0=\xi_{0i}$ に物体がくるような, Equivalent body を考える.

9. 謝 辞

本研究を遂行するにあたって, 適切な助言, 示唆をして下さった鎌田元紀助教授に, 深く感謝致します.

1974年4月17日 航空力学部

付 録

$$A = \frac{w}{r} \left(\frac{\partial p}{\partial \varphi} - a^2 \frac{\partial \rho}{\partial \varphi} \right)$$

$$B = \frac{\rho}{r} \frac{\partial w}{\partial \varphi} + \frac{w}{r} \frac{\partial \rho}{\partial \varphi} + \frac{\rho v}{r}$$

$$C = \frac{w}{r} \frac{\partial u}{\partial \varphi}$$

$$D = \frac{w}{r} \frac{\partial v}{\partial \varphi} - \frac{w^2}{r}$$

$$E = \frac{w}{r} \frac{\partial w}{\partial \varphi} + \frac{wv}{r} + \frac{1}{r\rho} \frac{\partial p}{\partial \varphi}$$

$$G = (\rho\lambda C + \rho D + \rho\mu E - AV_N/a^2 - V_N B)\varepsilon$$

$$H = \lambda^2 + 1 + \mu^2 - (V_N/a)^2$$

参 考 文 献

- [1] Ferri, A.: "Supersonic Flow around Circular Cone" NACA TN 2236, 1951.
- [2] Woods, B.A.: "The Supersonic Flow past Circular Cone at Incidence" A.R.C. R&M No. 3413, 1963.
- [3] Munson, A.G.: "The Vortical Layer on an Inclined Cone" J.F.M. Vol. 20, (p. 625-643) 1964.
- [4] Holt, M. and Blackie, J.: "Experiments on Circular Cones at Yaw in Supersonic Flow" J. A. S. Vol. 23 (p. 931-936) 1956.
- [5] Willett, J.E.: "Supersonic Flow at the Surface of a Circular Cone at Angle of Attack" J. A. S. Vol. 27, (p. 907-912) 1960.
- [6] Bulakh, B.M.: "Vortex Sheet on a Circular Cone" Fluid Dyna. Vol. 6 (p. 90-94) 1971.
- [7] Cheng, H.K.: "Hypersonic Flows past a Yawed Circular Cone and Other Pointed Bodies" J. F. M. Vol. 17 (p. 167-191) 1961.
- [8] Melnik, R.E.: "Vortical Singularities in Conical Flow" AIAA. J. Vol. 5 (p. 631-637) 1970.
- [9] Golubinskii, A.I.: "Particular Stream Surfaces in Conical Gas Flow" P.M.M. Vol. 34, (p. 1058-1066) 1970.
- [10] Scheuing, R.A.: "Theoretical Prediction of Pressures in Hypersonic Flow with Special Reference to Configurations having Attached Leading Edge Shock" Part. 1 Theoretical Investigation ASDTR 61-60 1962.
- [11] Smith, J.H.B.: "Remarks on the Structure of Conical Flow" Progress in Aerospace Sciences Vol. 12 (p. 241-272) 1972.
- [12] Holt, M.: "A Vortical Singularity in Conical Flow" Quart. J. Mech. and Applied Math. Vol. 7, (p. 438-445) 1954.
- [13] Feldhuhn, R.H. and Winkelmann, A.E.: "An Experimental Investigation of the Flow Field around a Yawed Circular Cone" AIAA. J. Vol. 9 (p. 1074-1081) 1971.
- [14] Jones, D.J.: "Numerical Solution of the Flow Field for Conical Bodies in a Supersonic Stream" NRC No. 10361 1968.
- [15] 玉木章夫, 河村龍馬, 中尾農一 "大きな迎角をもつ錐体を過ぎる流れの研究 (1)" 宇宙研報告 第10巻第1号 (p. 62-71) 1974.