

# 軸圧縮をうける平板の座屈後の挙動

## 第2報, F.E.M.による座屈値と実験値との比較

邊 吾 一・植 村 益 次

Post-buckling Behaviors of Flat Plates under Axial Compression  
2nd. Rep. Comparison of Secondary Buckling Values Obtained  
by F.E.M. with Experimental Results

By

O-il BYON and Masuji UEMURA

**Abstract:** In the first paper, the secondary buckling phenomenon of simply supported plate was elucidated by an analytical method. In this second paper, that of clamped plate is analysed by the finite element method.

The stability criterion in the nonlinear post-buckling equilibrium state is judged by the sign of determinant of stiffness matrix. It should be noted that the secondary buckling values of clamped plates are unexpectedly smaller than those of simply supported plates and are only one and a half times the first buckling values.

In the previous analyses, only a quarter of plate has been treated by considering the equilibrium state with symmetrical mode to be stable. However, the instability can be verified by taking into account the unsymmetrical mode over the whole plate.

Experiments on clamped square plates under uniaxial compression are carried out to verify the secondary instability and the experimental results are shown to agree with the numerical results.

### 概 要

第一報では周辺単純支持板について二次座屈現象を解析的手法で解明した。第二報では、解析的手法によっては極めて解析が面倒となる周辺固定の場合について有限要素法による非線型領域の数値計算を線型増分法を用いて行い、単に一次座屈後の解析のみでなく、剛性マトリックスの行列式の正負によって平衡状態の安定判別も行い二次座屈現象を解明し、周辺単純支持板より低く、一次座屈値の約1.5倍の二次座屈値を得た。この際有限要素法による従来の解析では、一次座屈後の対称波形での平衡状態のみに着眼し、例えば正方形板では1/4領域のみが解析されたが、本文では非対称波形も含め、薄板の全領域を考慮することによって二次座屈への安定判別が可能となった。他方周辺固定の正方形板について一軸圧縮実験を行い、二次座屈現象を実証すると共に、一次座屈値、一次座屈後の挙動、および二次

座屈値について数値計算結果と比較的良好な一致を得た。

## 1. ま え が き

一次座屈後の薄板の挙動は安定として従来数多く研究されてきたが、荷重増加に対していつ迄も安定ではなく、不安定となって高次波形への飛び移りを伴う二次座屈をおこし、耐荷剛性が低下する興味ある現象がある。

著者らはこの二次座屈現象に着眼し、第1報[1]で周辺単純支持の薄板について解析的手法で解析し、これに及ぼす初期たわみ、一次座屈後のたわみ波形、微小擾乱たわみ波形、面内境界条件など各種の影響を検討し、二次座屈現象をかなり解明できた。

第2報では、解析的手法によって解析が極めて面倒になる周辺固定の場合について、有限要素法による数値計算を行って一次座屈後の非線型平衡状態における剛性マトリックスの行列式の正負による安定判別を行い、二次座屈現象を解明すると共に、正方形板の実験を行い、その結果との比較検討を行う。

有限要素法による板の幾何学的非線型問題の解析では、従来は一次座屈後の平衡状態のみが注目され、その安定性が論議されることは少ない。従って例えば正方形板では一次の対称波形に注目し、板の1/4領域のみが取り扱われたが、本文では特に非対称波形も含めて薄板の全領域を考え、一次座屈後の非線型平衡状態の解析と安定判別を行って二次座屈値を求めることができた。有限要素法による幾何学的非線型問題の解析の報告は多いが、紙面の都合で集録報告[2]のみを引用しておく。

## 2. 基 礎 式

### 2.1 線型増分式と安定判別式

図1に示す板要素中央面の  $x, y, z$  軸方向の負荷による変位をそれぞれ  $u, v, w$  とし、初期たわみを  $w_0$ 、全たわみを  $w^s (= w + w_0)$  とすると、面内ひずみ成分  $(\epsilon_x, \epsilon_y, \gamma_{xy})$  と変位成分との関係式は次式となる。

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_x &= (\partial u / \partial x) + (\partial w^s / \partial x)^2 / 2 - (\partial w_0 / \partial x)^2 / 2 - z \partial^2 (w^s - w_0) / \partial x^2 \\ \epsilon_y &= (\partial v / \partial y) + (\partial w^s / \partial y)^2 / 2 - (\partial w_0 / \partial y)^2 / 2 - z \partial^2 (w^s - w_0) / \partial y^2 \\ \gamma_{xy} &= (\partial u / \partial y) + (\partial v / \partial x) + (\partial w^s / \partial x)(\partial w^s / \partial y) \\ &\quad - (\partial w_0 / \partial x)(\partial w_0 / \partial y) - 2z \partial^2 (w^s - w_0) / \partial x \partial y \end{aligned} \right\} (1)$$

$x, y$  方向のヤング率、ポアソン比をそれぞれ  $E_x, \nu_x; E_y, \nu_y$ 、せん断剛性率を  $G_{xy}$  とすると、面内応力成分  $(\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy})$  と面内ひずみ成分との関係式は

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= E_x (\epsilon_x + \nu_y \epsilon_y) / (1 - \nu_x \nu_y) \\ \sigma_y &= E_y (\epsilon_y + \nu_x \epsilon_x) / (1 - \nu_x \nu_y) \\ \tau_{xy} &= G_{xy} \gamma_{xy} \end{aligned} \right\} (2)$$

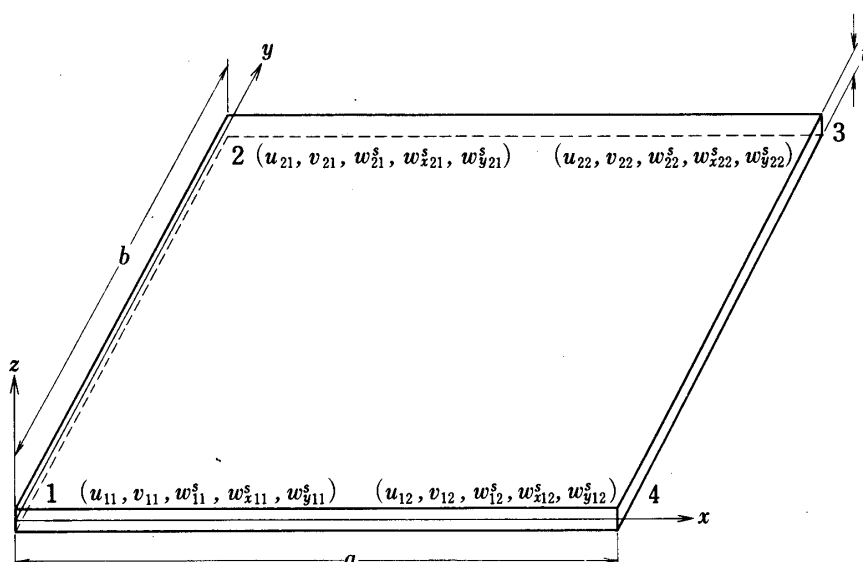


図1 要素座標系と各節点変位

となり、板の内部ひずみエネルギー  $U$  は

$$U = \int_V [ \int (\sigma_x d\varepsilon_x + \sigma_y d\varepsilon_y + \tau_{xy} d\gamma_{xy}) ] dV \quad (3)$$

となる。式(1), (2)をこれに代入し、板厚方向(板厚  $t$ )に積分してマトリックス表示すると、

$$U = \int_A \{ \varepsilon \}^T ( [K_M]/2 + [K_B]/2 + [K_I]/2 + [N_1]/6 + [N_3]/12 ) \{ \varepsilon \} dA + \alpha \quad (4)$$

ただし  $\{ \varepsilon \}^T = [ \partial u / \partial x, \partial u / \partial y, \partial v / \partial x, \partial v / \partial y, \partial w^s / \partial x, \partial w^s / \partial y, \partial^2 w^s / \partial x^2, \partial^2 w^s / \partial y^2, \partial^2 w^s / \partial x \partial y ]$  (5.1)

$$[K_M] = \begin{bmatrix} E_{11}t & 0 & 0 & E_{12}t & & & & & \\ 0 & E_{33}t & E_{33}t & 0 & & & & & \\ 0 & E_{33}t & E_{33}t & 0 & & & & & \\ E_{12}t & 0 & 0 & E_{22}t & & & & & \\ \hline & & & & & & & & \\ & & & & & & & & \\ \hline & & & & & & & & \\ & & & & & & & & \end{bmatrix} \quad (5.2)$$

$$[K_B] = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & & \mathbf{0} \\ & & E_{11}t^3/12 & E_{12}t^3/12 & 0 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & E_{12}t^3/12 & E_{22}t^3/12 & 0 \\ & & 0 & 0 & E_{33}t^3/3 \end{bmatrix} \quad (5.3)$$

$$[K_I] = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & & \mathbf{0} & & \mathbf{0} \\ & -t[E_{11}(\partial w_0/\partial x)^2 & -E_{33}t(\frac{\partial w_0}{\partial x})(\frac{\partial w_0}{\partial y}) \\ & + E_{12}(\partial w_0/\partial y)^2]/2 & & & \\ \mathbf{0} & & & -t[E_{22}(\partial w_0/\partial y)^2 \\ -E_{33}t(\frac{\partial w_0}{\partial x})(\frac{\partial w_0}{\partial y}) & + E_{12}(\frac{\partial w_0}{\partial x})^2]/2 & & & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & & \mathbf{0} & & \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (5.4)$$

$$[N_1] = \begin{bmatrix} & & \mathbf{0} & & \\ E_{11}t\partial w^s/\partial x & E_{33}t\partial w^s/\partial y & E_{33}t\partial w^s/\partial y & E_{12}t\partial w^s/\partial x & \\ E_{12}t\partial w^s/\partial y & E_{33}t\partial w^s/\partial x & E_{33}t\partial w^s/\partial x & E_{22}t\partial w^s/\partial y & \\ & & \mathbf{0} & & \\ E_{11}t\partial w^s/\partial x & E_{12}t\partial w^s/\partial y & & & \\ E_{33}t\partial w^s/\partial y & E_{33}t\partial w^s/\partial x & & & \mathbf{0} \\ E_{33}t\partial w^s/\partial y & E_{33}t\partial w^s/\partial x & & & \\ E_{12}t\partial w^s/\partial x & E_{22}t\partial w^s/\partial y & & & \\ t(E_{11}\partial u/\partial x + E_{12}\partial v/\partial y) & E_{33}t(\partial u/\partial y + \partial v/\partial x) & & & \mathbf{0} \\ E_{33}t(\partial u/\partial y + \partial v/\partial x) & t(E_{22}\partial v/\partial y + E_{12}\partial u/\partial x) & & & \mathbf{0} \\ & \mathbf{0} & & & \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (5.5)$$

$$[N_3] = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & & \mathbf{0} & & \mathbf{0} \\ & 3E_{11}t(\partial w^s/\partial x)^2/2 & 3E_{33}t(\partial w^s/\partial x)(\partial w^s/\partial y) & & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & 3E_{33}t(\partial w^s/\partial x)(\partial w^s/\partial y) & 3E_{22}t(\partial w^s/\partial y)^2/2 & & \\ & & & \mathbf{0} & \\ \mathbf{0} & & \mathbf{0} & & \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (5.6)$$

ここで,

$$\begin{aligned} E_{11} &= E_x / (1 - \nu_x \nu_y), \quad E_{22} = E_y / (1 - \nu_x \nu_y), \quad E_{33} = G_{xy} \\ E_{12} &= \nu_y E_x / (1 - \nu_x \nu_y) = \nu_x E_y / (1 - \nu_x \nu_y) \end{aligned} \quad (5.7)$$

である.  $[K_M]$ ,  $[K_B]$ ,  $[K_I]$  はそれぞれ面内変位成分, 板の線型曲げ, 初期たわみによる剛性マトリックスであり, 板の材料定数および初期たわみが与えられると計算できる.  $[N_1]$  は  $\{\epsilon\}$  成分の一次関数,  $[N_3]$  は二次関数であり, 最後の  $\alpha$  は  $\{\epsilon\}$  成分の一次関数もしくは定数項によって構成され, 初期たわみに関する項である.

図1に示すように要素座標系および節点番号を決める. 形状関数として, 面内変位成分  $u, v$  についてはエルミートの一次関数 [3], 板の曲げを表わすたわみ成分  $w$  については,  $[K_B]$  を計算するときはエルミートの3次関数 [4] を用い, 面内ひずみに連成する  $[K_I]$ ,  $[N_1]$ ,  $[N_3]$  を計算するときはエルミートの1次関数を用いる.

$\{\epsilon\}$  の成分を節点変位マトリックス

$$\{D\}^T = \{u_{11}, v_{11}, u_{12}, v_{12}, u_{22}, v_{22}, u_{21}, v_{21}, w_{11}^s, w_{x11}^s, w_{y11}^s, w_{12}^s, w_{x12}^s, w_{y12}^s, w_{22}^s, w_{x22}^s, w_{y22}^s, w_{21}^s, w_{x21}^s, w_{y21}^s\}$$

で表示すると

$$\{\epsilon\} = [B] \{D\} \quad (6)$$

となるが,  $[B]$  は紙面の都合で記述を省略する. 式(6)を式(4)に代入して内部ひずみエネルギー  $U$  を節点変位を用いて表示すると次式となる.

$$\begin{aligned} U &= \{D\}^T ([\bar{K}_M]/2 + [\bar{K}_B]/2 + [\bar{K}_I]/2 \\ &\quad + [\bar{N}_1]/6 + [\bar{N}_3]/12) \{D\} + \bar{\alpha} \end{aligned} \quad (7)$$

ここでハイフオンを符した諸量は例えば

$$[\bar{K}_M] = \int_A [B]^T [K_M] [B] dA \dots\dots\dots (8)$$

のようなものである.

式(7)の要素座標系における内部ひずみエネルギーを全体座標系に変換し, 要素数  $N$  について全部加え合せ添字  $s$  を付して示すと, 板全体の内部ひずみエネルギー  $U_s$  を得る. ただし一次座屈後における薄板の形状変化は無視できると仮定した.

$$\begin{aligned} U_s &= \sum_{i=1}^N [\{D\}^T ([\bar{K}_M]/2 + [\bar{K}_B]/2 + [\bar{K}_I]/2 \\ &\quad + [\bar{N}_1]/6 + [\bar{N}_3]/12) \{D\} + \bar{\alpha}] \\ &= \{D\}_s^T ([\bar{K}_M]_s/2 + [\bar{K}_B]_s/2 + [\bar{K}_I]_s/2 \\ &\quad + [\bar{N}_1]_s/6 + [\bar{N}_3]_s/12) \{D\}_s + \bar{\alpha}_s \end{aligned} \quad (9)$$

外力のポテンシャル  $W$  は節点変位マトリックス  $\{D\}_s$  と節点外力マトリックス  $\{P\}_s$  より

$$W = -\{D\}_s^T \{P\}_s \quad (10)$$

となり, 全ポテンシャルエネルギー  $\Pi (= U_s + W)$  の停留定理により節点変位  $\{D\}_s$  について微分すれば, 次の  $\{P\}_s$  と  $\{D\}_s$  との関係式を得る.

$$\begin{aligned} \{P\}_s = & ([\bar{K}_M]_s + [\bar{K}_B]_s + [\bar{K}_I]_s + [\bar{N}_1]_s/2 \\ & + [\bar{N}_3]_s/3) \{D\}_s + \bar{\alpha}_s \end{aligned} \quad (11)$$

ここで ( ) 内は剛性マトリックスを意味し, 最後の項  $\bar{\alpha}_s$  は定数のみの関数である.

式 (11) を増分表示し, 剛性マトリックス中の  $[\bar{N}_1]_s$ ,  $[\bar{N}_3]_s$  の 2 次以上の高次項を省略し, 線型増分化すると

$$\{\Delta P\}_s = ([\bar{K}_M]_s + [\bar{K}_B]_s + [\bar{K}_I]_s + [\bar{N}_1]_s + [\bar{N}_3]_s) \{\Delta D\}_s \quad (12)$$

となる. 従って薄板の非線型解析は, 適当な荷重増分  $\{\Delta P\}_s$  を設定し, 式 (12) で  $\{\Delta D\}_s$  を順次求めて行けばよい.

平衡状態の安定判別は,  $\Pi$  の節点変位に関するヤコビ行列が正值なら安定, 零なら中立平衡, 負値なら不安定として行う. それには式 (11) をもう一度  $\{D\}_s$  について微分すればよいが, 線型増分表示の式 (12) の ( ) 中の諸量の和がヤコビ行列となっている. 結局各荷重増分ステップごとに  $([\bar{K}_M]_s + [\bar{K}_B]_s + [\bar{K}_I]_s + [\bar{N}_1]_s + [\bar{N}_3]_s)$  の行列式の正負を判別すれば, 平衡状態の安定判別ができることになる.

## 2.2 計算方法

各増分ステップにおいて直前のステップまでの全荷重  $\{P\}_s$  と節点反力  $\{R\}_s$  との差によって計算できる不平衡力を  $\{F\}_s$  とすると

$$\{F\}_s = \{P\}_s - \{R\}_s \quad (13)$$

となる. この不平衡力  $\{F\}_s$  を荷重増分  $\{\Delta P\}_s$  と共に各ステップにおいて加え, 両者による変位増分を  $\{\Delta D_T\}_s$ , 荷重増分による変位増分を  $\{\Delta D_1\}_s$ , 不平衡力による変位増分を  $\{\Delta D_2\}_s$  とすると, 式 (12) より

$$\begin{aligned} \{\Delta D_T\}_s = & ([\bar{K}_M]_s + [\bar{K}_B]_s + [\bar{K}_I]_s + [\bar{N}_1]_s + [\bar{N}_3]_s)^{-1} \\ & (\{\Delta P\}_s + \{F\}_s) \end{aligned} \quad (14)$$

$$\{\Delta D_1\}_s = [\{\Delta P\}_s / (\{\Delta P\}_s + \{F\}_s)] \{\Delta D_T\}_s \quad (15)$$

$$\{\Delta D_2\}_s = \{\Delta D_T\}_s - \{\Delta D_1\}_s \quad (16)$$

となる. 線型増分の仮定により,  $\{\Delta P\}_s$  を与えたときの  $\{\Delta D_1\}_s$  があまり大きいときには

ある基準値  $\Delta W_N$  以下になるように  $\{\Delta P\}_s$  を修正する. 本数値計算では  $\Delta W_N$  を板厚  $t$  の数%とおき,  $\{\Delta D_1\}_s$  の中で板の中央点でのたわみ増分値  $\Delta D_{CENT}$  を  $\Delta W_N$  と比較する.

以上の事柄に留意して, 荷重増分を与えて平衡状態を求め, さらに各平衡状態での安定判別を行いながら計算を進めた. この計算手順をフローチャートにして図2に示す.

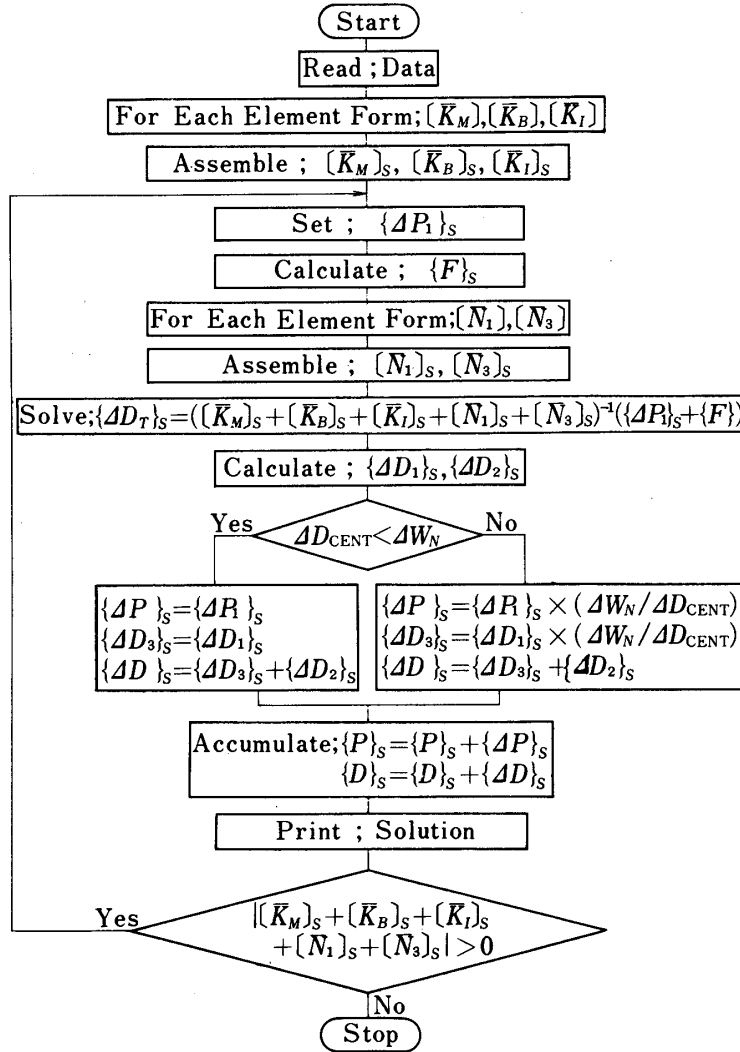


図2 数値計算手順のフローチャート

### 2.3 数値計算結果とその検討

有限要素法の実例計算においては, 後述の実験結果との比較検討の便宜のため, 等方性試験板を考え, 寸法  $a \times b = 300\text{mm} \times 300\text{mm}$ , 板厚  $t = 2\text{mm}$ , ヤング率  $E = 7,000\text{kg/mm}^2$ , ポアソン比  $\nu = 0.3$  としたが, 計算結果はすべて無次元量で示す. 板厚方向の境界条件は周辺固定とし, 面内境界条件としては, 荷重辺において  $u = \text{一定}$ ,  $v = 0$  であり, 側辺においては, (4)

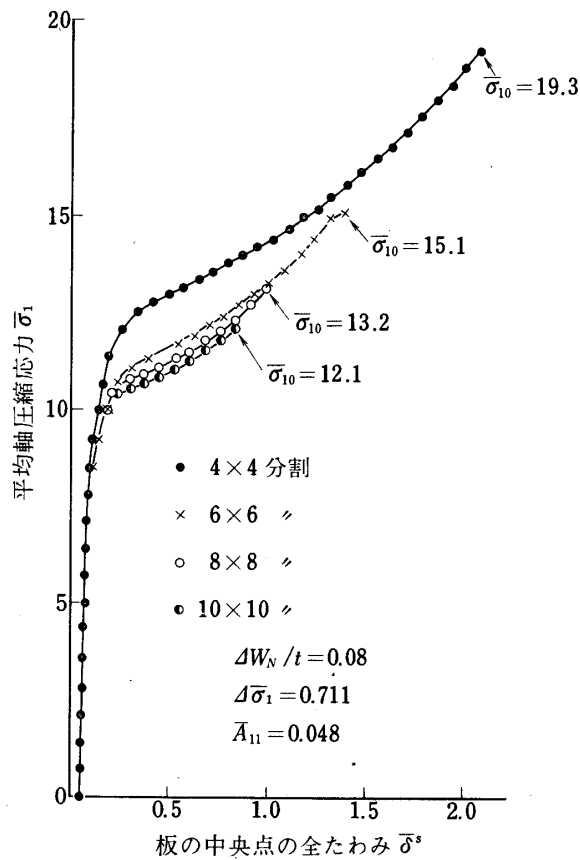


図3  $\bar{\sigma}_1 \sim \bar{\delta}^s$  関係に及ぼすメッシュ分割の影響

項で特に検討する以外は  $N_y = 0$ ,  $N_{xy} = 0$  とする。

(1) メッシュ分割数の影響, 薄板全体を①  $10 \times 10$ , ②  $8 \times 8$ , ③  $6 \times 6$ , ④  $4 \times 4$  分割した各場合について, 一次座屈後の平衡曲線および安定判別の結果得られた二次座屈値を図3に示す。これら4通りのいずれの場合についても, 平均軸圧縮応力増分  $\Delta \bar{\sigma}_1 = [\{\Delta P\}_s / bt] / (D\pi^2/tb^2) = 0.711$  (ただし  $D = Et^3/12(1-\nu^2)$ ; 板の曲げ剛性) とし, 初期たわみ  $w_0$  を

$$w_0 = A_{11} [1 - \cos(2\pi x/a)] [1 - \cos(2\pi y/b)] / 4 \quad (17)$$

で1項近似して  $\bar{A}_{11} = (A_{11}/t) \sqrt{1-\nu^2} = 0.048$  とし, ステップ増分を規定する  $\Delta W_N$  の影響は項(2)で後述するので, ここでは一応板厚の8%と一定にしてメッシュ分割の影響のみを検討する。図3からメッシュ分割が細くなるほど自由度が増すので, 板の中央点の全たわみ  $\bar{\delta}^s = (\delta^s/t) \sqrt{1-\nu^2}$  は大きくなるが, 他方一次座屈後の平衡状態が不安定となる二次座屈値  $\bar{\sigma}_{10}$  は減少することがわかる。

図3においては  $\bar{\sigma}_1$  従って  $\bar{\delta}^s$  も小さい領域では・印 ( $4 \times 4$  分割) のみを表示したが,



他の分割の場合の値は殆んど変わらないので記入を省略した。一次座屈後の平衡状態において●印（10×10分割）と○印（8×8分割）の間に若干の違いはあるが、ほぼ収束したと見なし、以後の計算では8×8分割とする。

(2) ステップ増分の影響, ここでは前項(1)で検討した結果によりメッシュ分割は8×8分割一定とし、平均軸圧縮増分  $\Delta\bar{\sigma}_1 = 0.711$ 、初期たわみの最大振幅  $\bar{A}_{11} = 0.048$  とする。 $\Delta\bar{\sigma}_1$  を与えたときに板の中央点のたわみ増分  $\Delta D_{CENT}$  がある基準値  $\Delta W_N$  よりも大きいときは、図2のフローチャートなどで説明したように修正を行い、線型増分の仮定が成立するように配慮して一次座屈後の平衡状態を解析した。図4に  $\Delta W_N$  を板厚の32%、16%、8%と3種に変えた場合の板の中央点の全たわみ  $\bar{\delta}^s$  と平均軸圧縮応力  $\bar{\sigma}_1$  との関係および平衡状態が不安定になる二次座屈値  $\bar{\sigma}_{10}$  を示す。同図より一次座屈後の平衡状態は、×印 ( $\Delta W_N/t = 0.16$ ) と○印 ( $\Delta W_N/t = 0.08$ ) との間ではほとんど相違は認められないことがわかる。従って増分ステップ数を支配する  $\Delta W_N$  は板厚の10%程度の値にとれば、ほぼ収束した妥当な平衡状態を求められると思われる。

(3) 初期たわみの大きさの影響, 初期たわみを式(17)のように  $x, y$  両方向一波のモードで表わし、 $\bar{A}_{11} = 0.014, 0.019, 0.038, 0.191$  の4種に変化させた場合の平均軸圧縮応力  $\bar{\sigma}_1$  と板の中央点の全たわみ  $\bar{\delta}^s$  の関係および二次座屈値  $\bar{\sigma}_{10}$  を図5に示す。ここではメッ

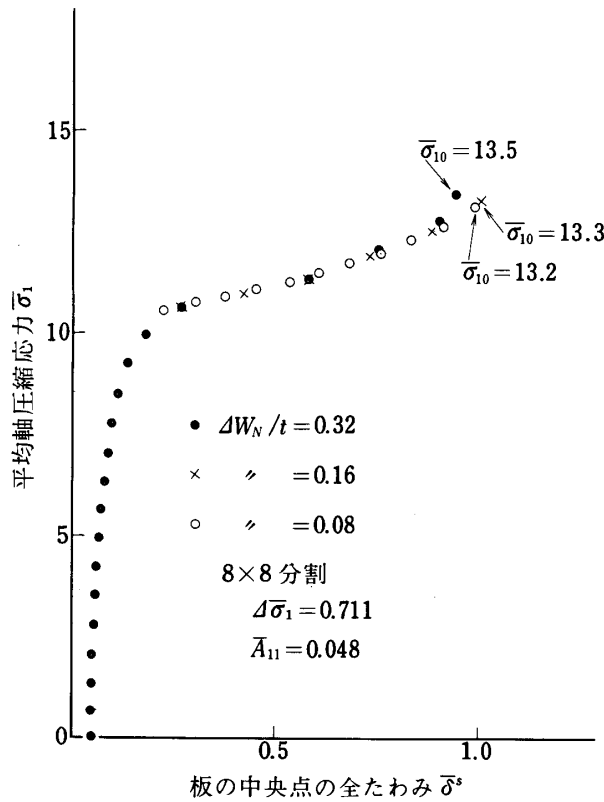


図4  $\bar{\sigma}_1 \sim \bar{\delta}^s$  関係に及ぼすステップ増分の影響

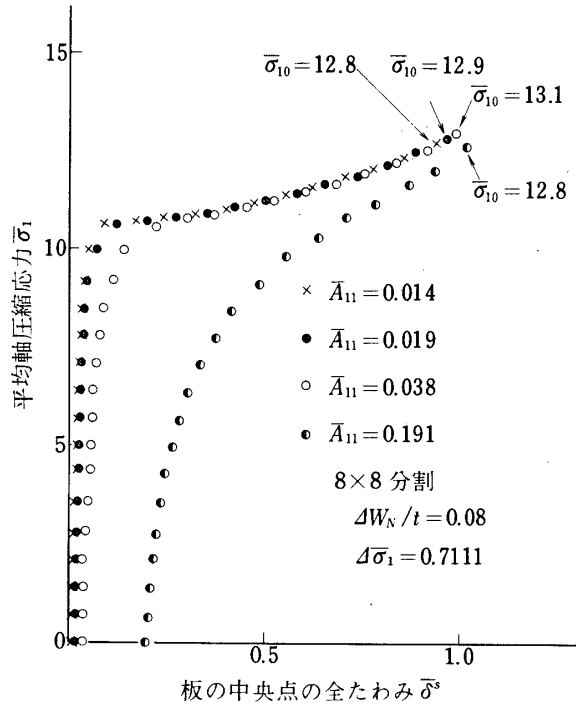


図5  $\bar{\sigma}_1 \sim \bar{\delta}^s$  関係に及ぼす初期たわみの影響

シュ分割を  $8 \times 8$  分割,  $\Delta W_N/t = 0.08$ , 平均軸圧縮応力増分  $\Delta \bar{\sigma}_1 = 0.7111$  とする.

同図から, 初期たわみが小さくなるに従って一次座屈現象は分岐座屈に近づくことがわかり,  $\bar{A}_{11} = 0.014$  (×印) の場合から一次座屈値は  $\bar{\sigma}_{cr1} = 10.6$  になることが推察される. 一次座屈後の平衡曲線について, 初期たわみが大きくなると共にたわみは大きくなる. 二次座屈値  $\bar{\sigma}_{10}$  については, 初期たわみの大きさを板厚の約20%まで変化させた程度ではほとんど変化が見られない.

(4) 側辺面内境界条件の影響, 前項(1), (2), (3)の計算では側辺面内境界条件を  $y=0, b$  で  $N_y=0, N_{xy}=0$  としたが, ここでは①  $v=0, N_{xy}=0$  の場合を加え, ②  $N_y=0, N_{xy}=0$  の場合と比較し, 側辺面内境界条件の影響を検討する. なお  $x=0, a$  での条件は前と同様に  $u = \text{一定}, v=0$  である.

図6に両場合の平均軸圧縮応力  $\bar{\sigma}_1$  と板の中央点の全たわみ  $\bar{\delta}^s$  の関係および二次座屈値  $\bar{\sigma}_{10}$  を示す. ここでは初期たわみ  $\bar{A}_{11} = 0.048$ , メッシュ分割を  $8 \times 8$  分割,  $\Delta W_N/t = 0.12$ ,  $\Delta \bar{\sigma}_1 = 0.711$  とした. 初期たわみがあると, ①  $v=0$  の場合は一次座屈直前まではポアソン比の影響により  $y$  方向に圧縮力が加わるため, ②  $N_y=0$  の場合よりも全たわみ  $\bar{\delta}^s$  が大きくなる. しかし  $\bar{\sigma}_1$  が増加し, たわみが大きくなると, ①  $v=0$  の場合には負荷初期とは反対に横方向に引張力が作用するようになるので全たわみが少なくなる傾向があり, ②  $N_y=0$  の場合の全たわみとの差は段々小さくなる. 平衡状態が不安定になる二次座屈値  $\bar{\sigma}_{10}$  は, ①  $v$

$= 0$  の場合の方が ②  $N_y = 0$  の場合よりも大きい。このことは周辺単純支持の場合について解析的手法で述べた第1報 [1] の結果と同一である。図7に  $\bar{\sigma}_1 = 11.9$  近傍での①, ②両場合の  $x, y$  方向中心線上の全たわみ波形を示すが, 両者共周辺固定条件に対応して,  $x, y$  両方向に一波のモードを示している。

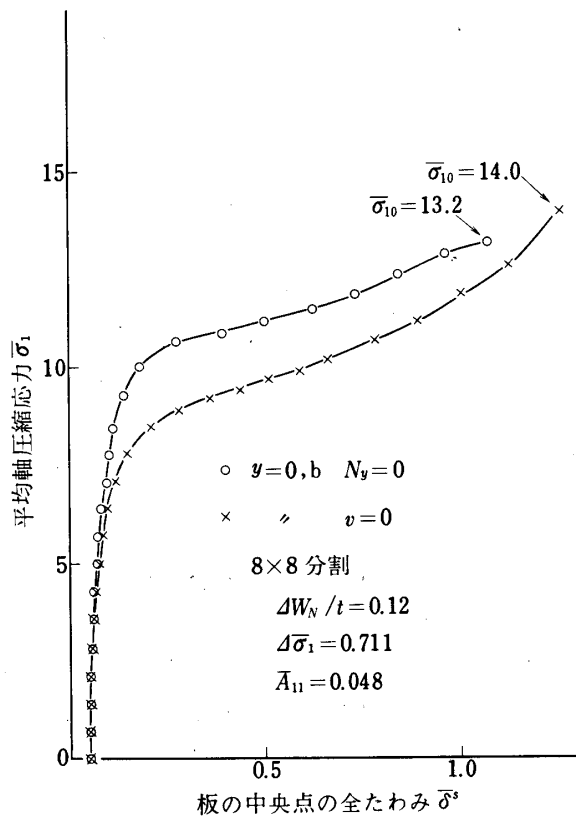


図6  $\bar{\sigma}_1 \sim \bar{\delta}^3$  関係に及ぼす側辺での面内境界条件の影響

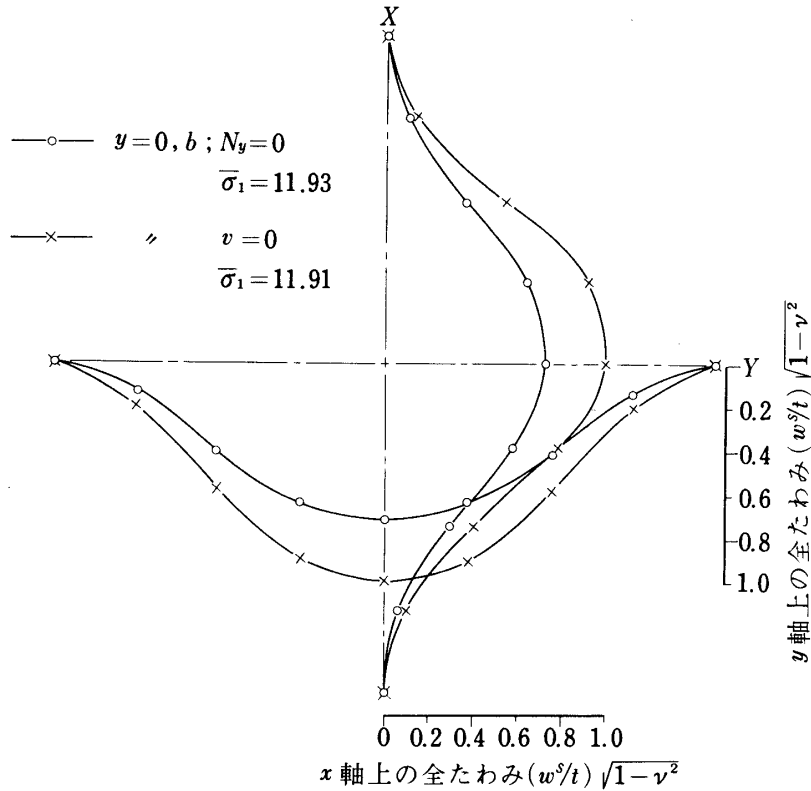


図7 板の中心線上の全たわみ波形図

### 3. 正方形板の一軸圧縮実験

二次座屈現象を実証し、二次座屈値を比較するために正方形平板の一軸圧縮実験を行った。一般に座屈実験では、有限要素法にしても理論計算で用いた数学的境界条件を現実ですべて実現することは極めて難しいことは従来指摘された通りであるが、板厚方向の面外境界条件としては周辺固定であり、面内境界条件としては最も実験し易い場合として負荷辺  $x=0, a$  で  $u = \text{一定}$ ,  $v = 0$ , 非負荷側辺  $y=0, b$  で  $N_{xy} = 0$ ,  $N_y = 0$  (あるいは  $v = 0$  ……摩擦力がある場合) の条件が近似的に満足されるように意図して装置を製作した。

#### 3.1 圧縮試験片

使用した試験片を表1に示す。試験板寸法は周辺固定部を含み  $400 \text{ mm} \times 320 \text{ mm}$  であるが、試験部は  $300 \text{ mm} \times 300 \text{ mm}$  である。試験片を図8の試験装置に取りつけた状態で  $x, y$  両方向中心線上の初期たわみ  $w_0$  を測定したが、式(17)により近似的に1項で表現でき、 $A_{11}$  の値を表1に示す。

#### 3.2 試験片支持装置と測定要領

図8に試験片支持装置を示す。負荷辺は剛なブロックを介して圧縮し、試験片とはボルト

表1 試験片の種類と初期たわみの大きさ

材 質	板 厚 $t$ (mm)	試験片数	試験片番号	初期たわみ $A_{11}$ (mm)
ジュラルミン	1	1	D-10-1	0.33
ジュラルミン	2	2	D-20-1	0.16
			D-20-2	0.10
ステンレス	1.5	1	S-15-1	-

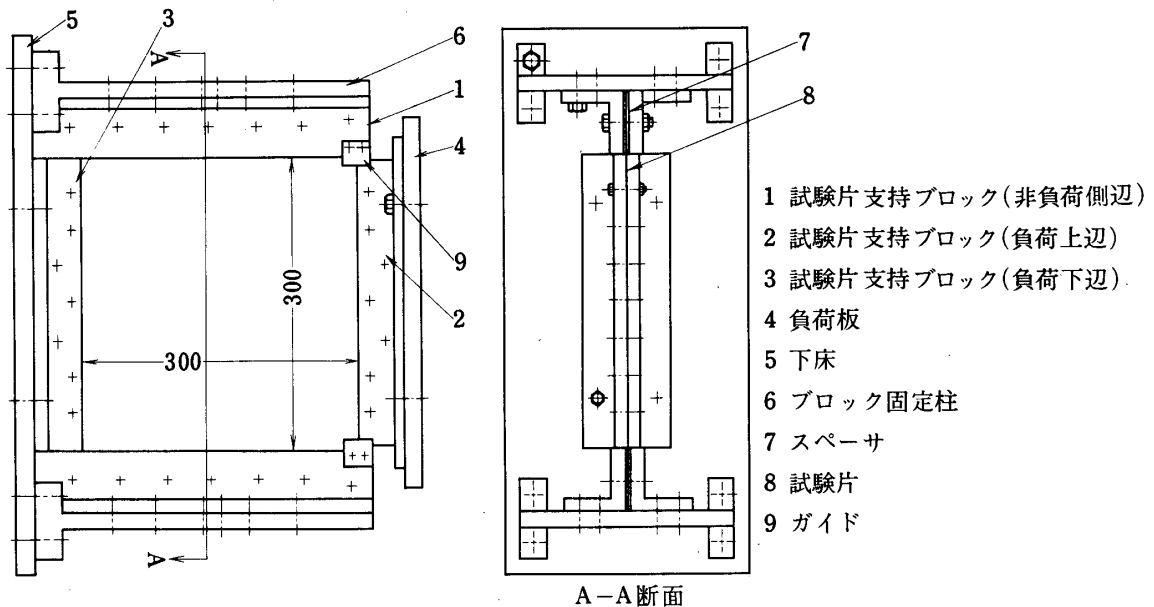


図8 平板の一軸圧縮座屈試験装置

を挿入して締め付け、たわみに対しては固定支持とした。側辺では試験片と同種材で同厚のスペーサを入れ、スペーサ部のみボルト、ナットで締めつけてたわみに対しては固定支持とした。締めつけ力の大小で面内変位を調節し、両極端の面内境界条件をなるべく満足するようにした。十文字の枠組を作り、試験板面に平行に試験装置に取り付け、 $x, y$  両方向の中心線上にダイヤルゲージを滑動させたわみを測定した。

また両側辺際に軸方向に数ヶの歪ゲージを貼付し、その平均値から平均軸縮み  $\epsilon_1$  を算出した。

### 3.3 実験結果

4枚の試験片のうち代表例として D-20-1 (ジュラルミン板,  $t=2\text{mm}$ ) の場合につい

て述べる. 図9は試験片の  $x, y$  両方向中心線上のたわみ波形図である.  $P=2420\text{ kg}$  ( $\bar{\sigma}'_{10}=13.62$ ) で  $x$  方向1波から2波 ( $\Delta$ 印) に飛び移り二次座屈していることがわかる. なお同図には初期たわみを拡大尺度にして・印で示している. 全荷重  $P$  を試験片全断面積 ( $320\text{ mm} \times t$ ) で割った見かけの軸応力を  $\sigma'_1$  とし,  $\sigma'_1$  と平均軸縮み  $\epsilon_1$  を無次元化し, 図10に両者の関係を示す. 初期たわみがあるので一次座屈での明確な分岐座屈を示さないが,  $\bar{\sigma}'_1 \sim \bar{\epsilon}_1$  曲線の傾斜は減少し, 剛性  $d\bar{\sigma}'_1/d\bar{\epsilon}_1$  は一次座屈前の 1.0 から 0.60 に低下する. 二次座屈値  $\bar{\sigma}'_{10}=13.62$  (①  $P=2420\text{ kg}$ ) でより縮み易い  $x$  方向2波,  $y$  方向1波の平衡状態に飛び移り, さらに板の圧縮剛性が  $d\bar{\sigma}'_1/d\bar{\epsilon}_1=0.44$  に低下していることが図10からわかる. なお同図において除荷過程は点線で示す.

二次座屈現象をより明瞭に表わすために, 図11に軸荷重  $P$  と板の中心点でのたわみ  $\delta$  との関係を示す. ①  $P=2420\text{ kg}$  で  $x$  方向1波から2波の平衡状態に飛び移っていることを明確に示している. 荷重除荷の際には②  $P=2150\text{ kg}$  で  $x$  方向2波 (図12の・印実線のような波形) から1波 (図12の $\Delta$ 印点線) に飛び移るが, そのときの波形は初期たわみや負荷時の1波の波形とは反対方向のものである. さらに除荷すると③  $P=1,560\text{ kg}$  でもう一

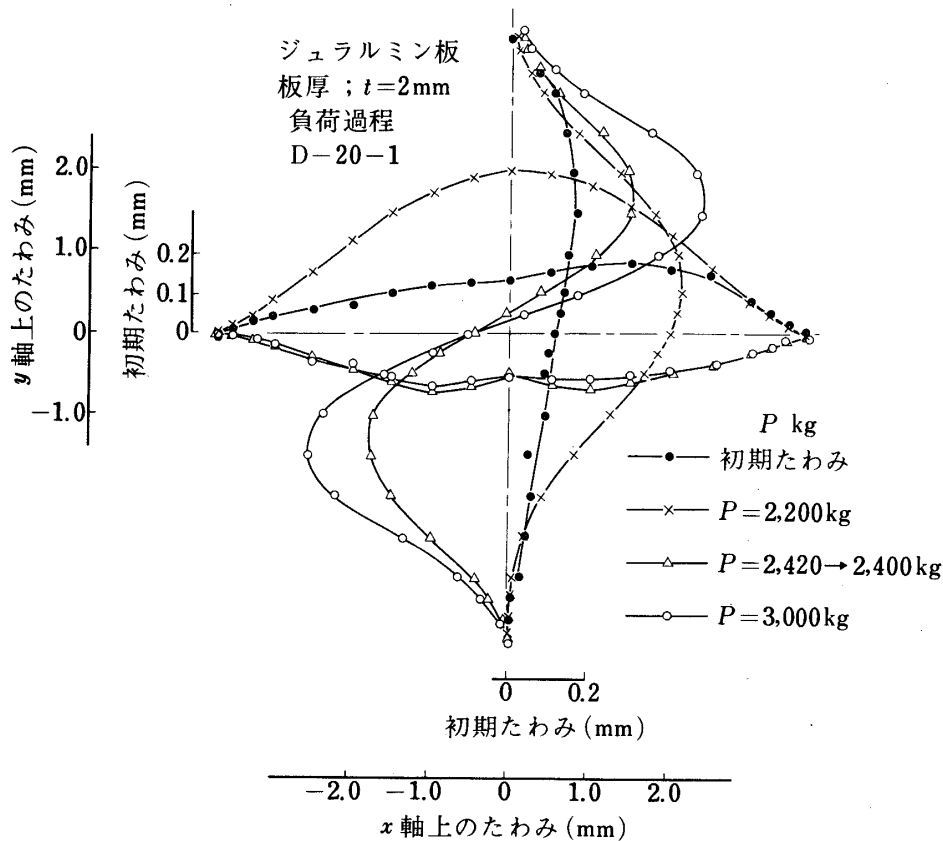


図9 板の中心線のたわみ波形 (負荷過程)

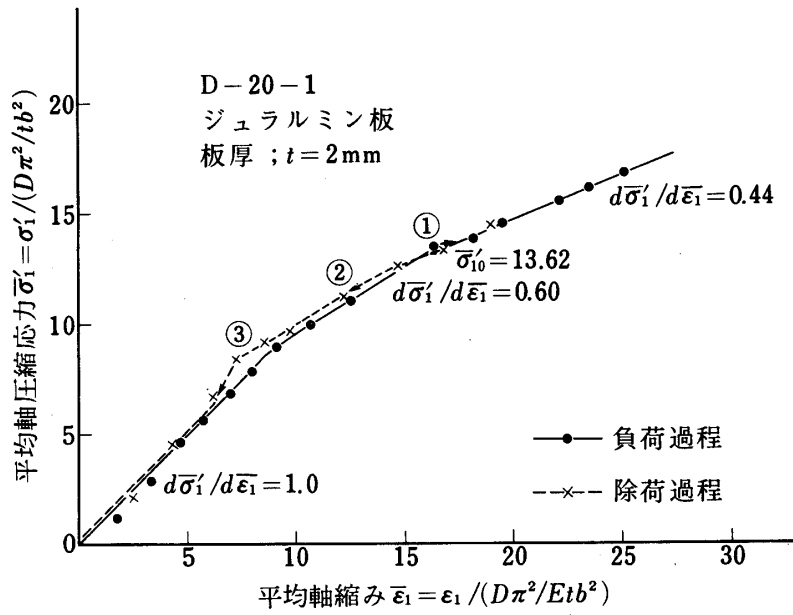


図10 D-20-1 試験板における  $\bar{\sigma}'_1 \sim \bar{\epsilon}_1$  関係の実験結果

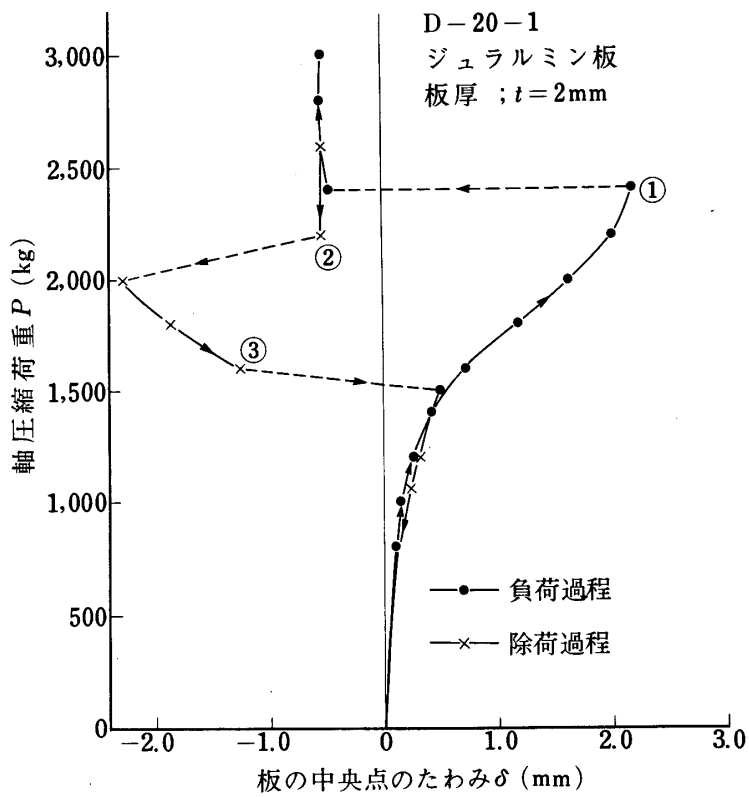


図11 D-20-1 試験板における  $P \sim \delta$  関係の実験結果

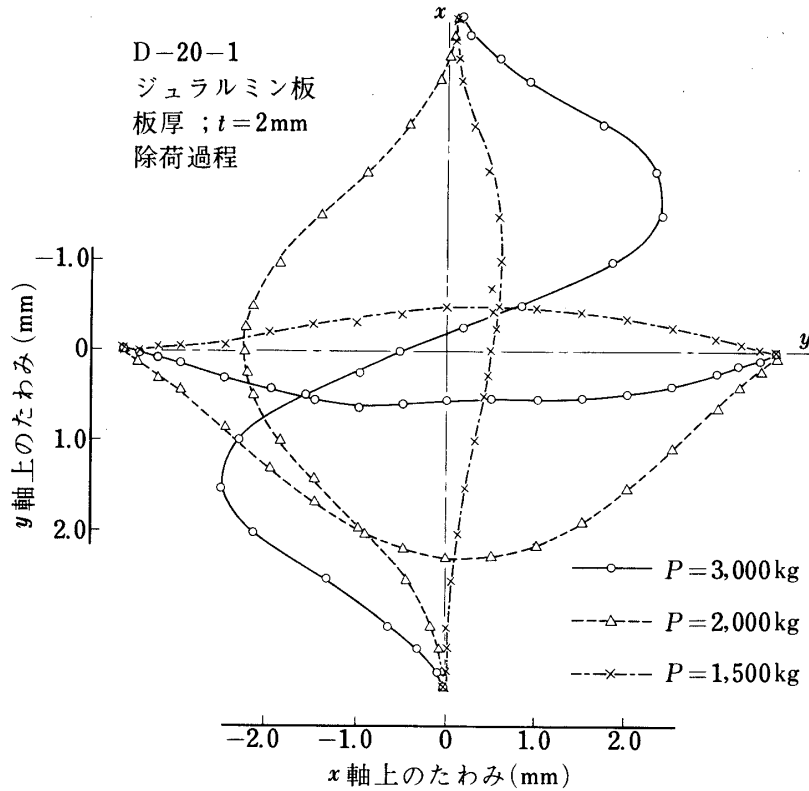


図12 板の中心線上のたわみ波形の変化 (除荷過程)

表2 各試験片の二次座屈前後の耐荷剛性 ( $d\bar{\sigma}'_1/d\bar{\epsilon}_1$ ) の値  
(一次座屈前  $d\bar{\sigma}'_1/d\bar{\epsilon}_1 = 1.0$ )

試験片記号	一次座屈後 (二次座屈前)	二次座屈後
D-10-1	0.62	0.42
D-20-1	0.60	0.44
D-20-2	0.63	0.42
S-15-1	0.60	0.30

度1波 (図12の×印鎖線) であるが初期たわみと同方向の波形に飛び移っている。なお図12は荷重除荷の際の  $x, y$  両方向中心線上のたわみ波形図である。

上述の実例を含め計4枚の試験片についての二次座屈前後の耐荷剛性  $d\bar{\sigma}'_1/d\bar{\epsilon}_1$  の実験結果を表2に示す。



#### 4. 有限要素法による計算結果と実験結果の比較検討および考察

2章の有限要素法による数値計算結果と3章の実験結果について、一・二次座屈値、一次座屈後の挙動について比較検討を行う。

なお比較に際しては、実験では側辺固定支持部が存在すること、軸方向圧縮応力は横方向に変化することを考慮して、前述の見かけの平均圧縮圧力  $\bar{\sigma}'_1$  を次のように修正する。すなわち平均軸縮み  $\bar{\epsilon}_1$  は横方向に一定であるが、側辺固定支持部に入っている板幅を左右合せて  $2b'$ 、両側辺間の試験部幅を  $b (= 300 \text{ mm})$  とすると、両支持部  $2b'$  内はたわみがなく圧縮応力は一定と考え、試験部板幅  $b$  での平均軸圧縮応力の値は無次元化して次式で与えられる。

$$\bar{\sigma}_1 = \bar{\sigma}'_1 - (2b'/b)\bar{\epsilon}_1 \quad (18)$$

ここで  $\bar{\epsilon}_1$  は  $\bar{\sigma}'_1 \sim \bar{\epsilon}_1$  線図 (図10) で  $\bar{\sigma}'_1$  に対する  $\bar{\epsilon}_1$  値である。このようにして一次・二次座屈値についても修正を行い、比較検討する。

##### 4.1 一次座屈応力

板の座屈値を求める吉識の方法 ( $P \sim \delta^2$ ) を用いて、有限要素法による計算結果と実験結果から一次座屈応力  $\bar{\sigma}_{cr1}$  を算出し、表3に比較して示す。同表には従来の解析結果 [5] による一次座屈値も合せて示すが、チモシェンコの解析値は側辺で  $v = N_{xy} = 0$  の境界条件の場合であるが、他の解析値は  $N_y = N_{xy} = 0$  の場合である。

表3 一次座屈応力  $\bar{\sigma}_{cr1}$

試験片	実験値*	F. E. M.	解析値
D-10-1	8.21 (8.81)	10.6 (8×8, $N_y = 0$ )	10.08 (FAXEN)
D-20-1	8.22 (8.82)	10.3 (10×10, $N_y = 0$ )	10.04 (妹 沢)
D-20-2	8.44 (9.04)	9.0 (8×8, $v = 0$ )	9.36 (COX)
S-15-1	—		8.31 (TIMOSHENKO)

\* ( ) 内は見かけの一次座屈応力  $\bar{\sigma}'_{cr1}$  を示す

同表によれば、一次座屈応力の実験値は側辺で  $N_y = 0$  の場合よりも  $v = 0$  の場合の解析値と有限要素法の解に近い。これは実験装置として実際にはたわみとたわみ角を零にし、固定条件を満足させるため板厚方向の締め付けが強すぎて、 $v = 0$  の面内境界条件に近くなったためと思われる。また有限要素法の解は若干大きい値を示しているが、これはメッシュ分割の制限のため自由度を増すことができなかつたためと思われる。

##### 4.2 一次座屈後の平衡曲線

二次座屈現象が発生するまでの板の中央点の全たわみ  $\bar{\delta}^s$  と平均軸圧縮応力  $\bar{\sigma}_1$  との関係をも  $D-20-2$  を一例として図13に示す。一次座屈後の挙動についても実験曲線は、前節の一次座屈値と同様に側辺で  $N_y = 0$  よりも  $v = 0$  の境界条件の場合の計算結果に近いことがわ

かる。一次座屈値の近傍において実験結果と  $v=0$  の場合の有限要素法解との間には多少違いはあるが、有限要素法の計算においては、実際の複雑な初期たわみ波形を  $x, y$  両方向1波の波形で仮定し、さらにメッシュ分割を  $8 \times 8$  分割に制限したためと思われる。図14には両者の全たわみ波形図を比較して示す。軸圧縮応力の値が若干異なるが、たわみ波形についても実験結果は有限要素法による  $v=0$  の場合の結果に類似している。

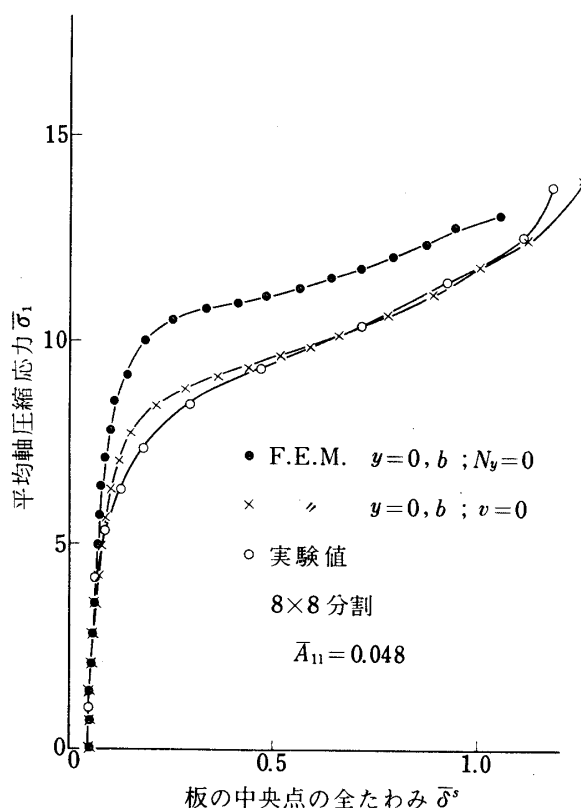


図13  $\bar{\sigma}_1 \sim \bar{\delta}^s$  関係についての F. E. M. と実験結果の比較

### 4.3 二次座屈応力

二次座屈応力  $\bar{\sigma}_{10}$  についての有限要素法による計算値と実験値を表4に比較して示す。周辺固定の場合の二次座屈応力は  $\bar{\sigma}_{10} \approx 13 \sim 14$  程度であり、周辺単純支持の場合の  $\bar{\sigma}_{10} \approx 22$  程度 [1] より極めて低いばかりでなく、一次座屈応力  $\bar{\sigma}_{cr1}$  (表3) の1.3~1.4倍位に過ぎないことは興味があり、一次座屈現象と本質的に異なることを示す。従来は一次座屈後を安定領域として多くの解析がなされたが、二次座屈現象と剛性低下に注目すべきことを示している。

表4において D-10-1 板以外の実験値は F. E. M. の数値計算結果と比較的良く一致して

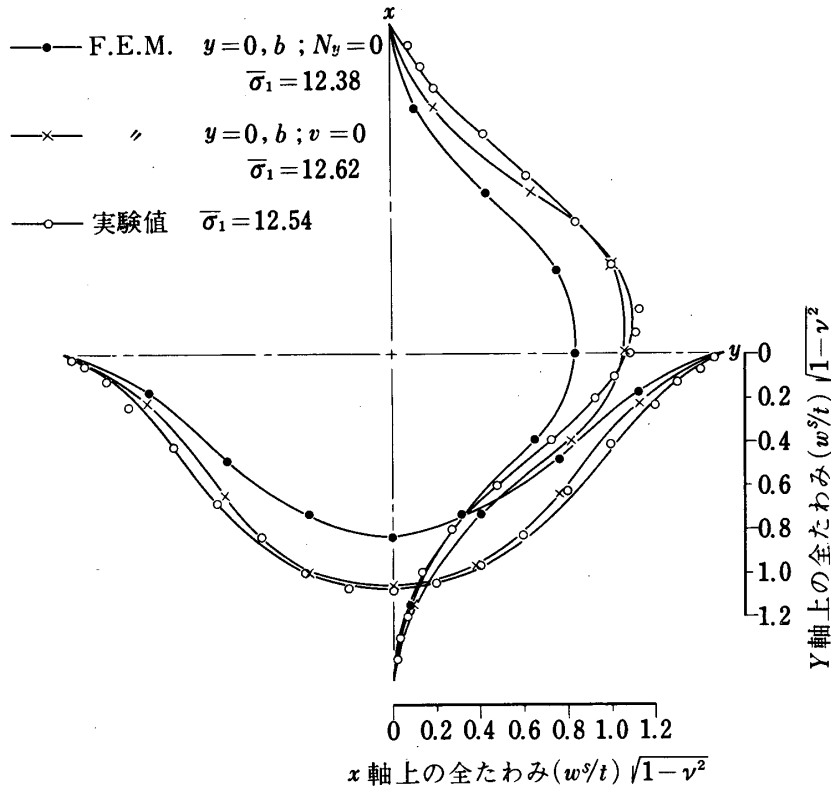


図14 板の中心線上のたわみ波形についての F. E. M. と実験結果と比較

表4 二次座屈応力  $\bar{\sigma}_{10}$

試験片	初期たわみの大きさ	実験値*	F. E. M.
D-10-1	$\bar{A}_{11} = 0.315$	19.48 (21.41)	$y = 0, b$ で
D-20-1	$\bar{A}_{11} = 0.076$	12.50 (13.62)	$N_y = 0$ $v = 0$
D-20-2	$\bar{A}_{11} = 0.048$	13.87 (15.02)	12.92
S-15-1	—	14.98 (16.55)	13.39

\* ( ) 内は見かけの二次座屈応力  $\bar{\sigma}'_{10}$  を示す

いる。ただ D-10-1 板の実験値に違いが大きかった理由としては、特に初期たわみが大きかったためと思われる。これは初期たわみが大きくなってもステップ増分を均一にとったことも一因と思われる。荷重増分によってステップ数を制御するのではなく、平衡曲線の線分に沿って増分を行う手法（ノルム増分法）が適当と思われ今後の課題とする。

#### 4.4 除荷過程の考察

除荷過程で  $x$  方向 1 波の正負の波形を 2 度飛び移りながら復元したことを実験結果として前述したが、この現象は極めて興味がある。有限要素法では除荷過程を考察したわけではないが、第 1 報の解析結果から推測を加える。これは第 1 報の解析で一次座屈後にたわみ方向が正負の複数の平衡状態があり、二次座屈値として  $\bar{\sigma}_{10}^+$  と  $\bar{\sigma}_{10}^-$  の 2 種を定義したことに対応している。どの平衡状態に移るかは、動的エネルギーも考慮する必要があるが、飛び移り前後の各種のモードでのエネルギー水準を対比すると大体推察できることを付言しておく。

### 5. 結 論

(1) 一軸圧縮をうける周辺固定の薄板の幾何学的非線型問題は解析的手法では解析が面倒なので、有限要素法による数値計算を行い、一次座屈後の挙動ばかりでなく、従来余り検討されなかった安定判別を行い、二次座屈現象を説明することができた。

(2) 周辺固定の正方形板について一軸圧縮実験を行った結果、初期たわみの小さい範囲では、二次座屈応力の実験値は有限要素法による数値計算結果と定量的に大体一致した。

(3) 周辺固定の場合の二次座屈値は一次座屈値に極めて近く、周辺単純支持の場合よりむしろ逆に低いのは興味ある結果で、二次座屈現象の本質と重要性に注目すべきである。

(4) 一次座屈応力  $\bar{\sigma}_{cr1}$  についても、有限要素法による数値計算結果は実験値や従来の解析値と大体一致した。

(5) 一次座屈後の挙動についても、板の中心線上のたわみ波形や  $\bar{\sigma}_1 \sim \bar{\delta}^s$  関係の数値計算結果は実験値と大体一致した。

(6) 荷重除荷過程において 2 度の飛び移り現象を伴って復元する興味ある実験結果を得た。これは第 1 報の解析的手法による解析あるいはエネルギー水準の考察から大体説明できる。

(7) 本報では二次座屈現象が発生する時点までに重点をおいたが、さらに二次座屈後の平衡状態および除荷過程は、動的考察も加味して今後の研究課題としたい。さらに後報では周辺単純支持の場合についても有限要素法による計算と実験を行い、第 1 報の解析的結果と比較検討したい。

最後に本実験装置の製作および実験に際し、東京大学宇宙航空研究所井山向史氏に多大の援助を得たことに厚く感謝します。

1976 年 3 月 31 日 航空力学部

### 参 考 文 献

- [ 1 ] 邊 植村, 東京大学宇宙航空研究所報告 第12巻 第2号 (A) (1976/5), 477.
- [ 2 ] Gallagher, R.H., Theo. & Practice in Finite Element Struc. Analysis, (1973), 109, Univ. of Tokyo Press.
- [ 3 ] Przemieniecki, J.S., Theory of Matrix Structural Analysis (1968), 89, McGraw-Hill.
- [ 4 ] Bogner, F.K., Fox, R.L. and Shmit, L.A., Proc. of the Conference held at Wright-Patterson Air Force Base, Ohio (AFFDL-TR-66-80), (1965), 397.
- [ 5 ] Column Research Committee of Japan (editor), Hand-book of Structural Stability, (1971), 3-3, Corona Pub. Co.,