

ハウシinger効果を考慮した弾塑性有限要素解析

川原 睦人* 井口 雄一* 岸 輝雄
田辺 龍彦**

Elastic-Plastic Analysis by means of Finite Element Method in Concideration of Bauschinger Effect

By

T. KISHI, Y. IGUCHI, M. KAWAHARA and T. TANABE

Abstract: Kinematical hardening yield criterion deduced by Kishi and Tanabe was used to analyze the elastic plastic problems by means of finite element method. In this paper this technique was applied to the problems of pure shear, cantilever bending, and center-hollowed sheet compression deformations, and the characteristic results due to Bauschinger effect were obtained, as compared with the results of the Von Mises' criterion.

1 緒 言

この報告は、有限要素法によって弾塑性解析を行う一方法を提案するものである。微小変形の仮定の上で弾塑性解析を行う場合の有限要素法は、Zienkiewuy [1], Margal [2] らを始めとして多くの論文が発表されている。これらの既発表論文の多くは、ミーゼスの降伏条件によって代表されるような応力のみ関数として与えられる降伏条件を使用した場合に限られている。著者のうちの一人は、すでにハウシinger効果の影響を取り入れた降伏条件を発表している。この場合は、降伏条件が応力および塑性ひずみの関数として与えられる。このような降伏条件に立脚する有限要素法による解析例は、いまだ発表せられていない。弾塑性解析を、実用として、実際の設計に応用するためには、一つでも多くの計算例を得ることが重要である。この意味において、ハウシinger効果を考慮した弾塑性解析の一方法をここに提案するものである。

2 基礎方程式

方程式は、すべて添字つき記号を用いて表示し、くり返して表われる添字については、総

* 中央大学工学部

** 金属材料研究所

和規約を適用するものとする。座標系は、直角座標系 x_i ($i = 1, 2, 3$) を使用する。 \cdot は、偏微分量 $\frac{\partial}{\partial x_i}$ を、 $\dot{\cdot}$ は増分量を、 \wedge は既知量を各々表わす記号として用いる。変形は、微小であるとし、有限変形の影響については考えない。微小要素のつりあいより、平衡方程式は、次のようになる。

$$\sigma_{ij,j} + f_i = 0 \quad (2.1)$$

いま、これを時間に対する増分形で表わすと、

$$\dot{\sigma}_{ij,j} + \dot{f}_i = 0 \quad (2.2)$$

となる。ここに、 σ_{ij} は応力、 f_i は物体力を各々表わす。次に、変位とひずみの関係は、次のように考えられる。

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (U_{ij} + U_{ji}) \quad (2.3)$$

これを、増分形で表わすと

$$\dot{\varepsilon}_{ij} = \frac{1}{2} (\dot{U}_{ij} + \dot{U}_{ji}) \quad (2.4)$$

となる。ここに、 ε_{ij} はひずみ、 U_i は x_i 方向の変位を各々表わす。境界において、応力と表面力との間に、それぞれ、

$$\sigma_{ij} n_j = T_i \quad (2.5)$$

$$\dot{\sigma}_{ij} n_j = \dot{T}_i \quad (2.6)$$

が成立するとする。ここに、 n_j は境界表面 S の外向き法線ベクトルの x_i 方向の成分であり、 T_i は表面力の x_i 方向成分である。これより、境界条件として、

$$U_i = \hat{U}_i \quad \text{on } S_1 \quad (2.7)$$

$$\dot{T}_i = \hat{\dot{T}}_i \quad \text{on } S_2 \quad (2.8)$$

なる関係を用いる。一般に、(2.7) は強制境界条件、(2.8) は自然境界条件と呼ばれる。ここに、 S_1, S_2 は各々の境界条件の与えられる境界を示す。両者の間では、

$$S_1 \cap S_2 = \phi$$

$$S_1 \cup S_2 = S$$

であるとしておく。一方、増分形で境界条件を表わすと、

$$\dot{U}_i = \hat{\dot{U}}_i \quad \text{on } S_1 \quad (2.9)$$

$$\dot{\dot{T}}_i = \hat{\dot{\dot{T}}}_i \quad \text{on } S_2 \quad (2.10)$$

となる。

以上の方程式のうちから、増分形で表わされた方程式は基礎方程式として用いることにす

る。

3 構成方程式

材料の降伏を規定するためには、降伏関数を導入することが行なわれている。ここでは、降伏関数 f が応力と塑性ひずみの関数として与えられるものとする。すなわち、材料が塑性状態にある時は、

$$f(\sigma_{ij}, \varepsilon_{ij}^p) = \pi(\varepsilon_{ij}^p) \quad (3.1)$$

が成立する。ここで、 π は降伏曲面の大きさを表わし、塑性ひずみだけに関係するものである。

材料が降伏し、塑性状態にある場合、さらに次の関係が成立するものとする。

第一に、塑性ひずみ増分は流れ法則に従う。

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^p = A \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \quad (3.2)$$

ここにおいて、 A はあるスカラー定数である。

第二に、全ひずみは弾性及び塑性の各々のひずみの和より成立する。すなわち、

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^e + \varepsilon_{ij}^p \quad (3.3)$$

$$\dot{\varepsilon}_{ij} = \dot{\varepsilon}_{ij}^e + \dot{\varepsilon}_{ij}^p \quad (3.4)$$

である。ここで、 ε_{ij}^e 、 ε_{ij}^p は各々弾性、塑性のひずみの成分を示すものである。

第三に、応力とひずみとの関係は、ひとまず等方性線形弾性体を仮定し、

$$\dot{\sigma}_{ij} = E_{ijkl} \dot{\varepsilon}_{kl}^e = E_{ijkl} (\dot{\varepsilon}_{kl} - \dot{\varepsilon}_{kl}^p) \quad (3.5)$$

が成立するとしておく。ここに、

$$E_{ijkl} = \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{ji} \delta_{kl})$$

$$\delta_{ij} = \begin{cases} i = j, & \delta_{ij} = 1 \\ i \neq j, & \delta_{ij} = 0 \end{cases}$$

λ, μ : ラメの定数

である。

降伏関数を用いて、次の三つの状態を定義することができる。

I) 初期弾性 ($\dot{\varepsilon}_{ij}^p = 0$)

$$f < \pi, \quad \dot{\pi} = 0, \quad \varepsilon_{ij}^p = 0$$

II) 負荷 ($\dot{\varepsilon}_{ij}^p \neq 0$)

$$f = \pi, \quad \dot{\pi} \neq 0, \quad \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \dot{\sigma}_{ij} > 0$$

Ⅲ) 除荷 ($\dot{\epsilon}_{ij}^p = 0$)

$$f \leq \pi, \quad \dot{\pi} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \dot{\sigma}_{ij} \leq 0$$

以上の三つの状態のうち、Ⅰ)とⅢ)の場合は、弾性ひずみの増分と全ひずみの増分は等しく、応力とひずみの間で、

$$\dot{\sigma}_{ij} = E_{ijkl} (\dot{\epsilon}_{kl} - \dot{\epsilon}_{kl}^p) = E_{ijkl} \dot{\epsilon}_{kl}$$

が成立する。

さて、次に(3.2)式における Λ を求めることを考える。このために、まず(3.1)式の両辺の増分を考えると、

$$\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \dot{\sigma}_{ij} + \frac{\partial f}{\partial \epsilon_{ij}^p} \dot{\epsilon}_{ij}^p = \frac{\partial \pi}{\partial \epsilon_{ij}^p} \dot{\epsilon}_{ij}^p$$

となる。この方程式に(3.5)式を代入すると、

$$\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} E_{ijkl} \dot{\epsilon}_{kl} - \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} E_{l jkl} \dot{\epsilon}_{kl}^p + \frac{\partial f}{\partial \epsilon_{ij}^p} \dot{\epsilon}_{ij}^p = \frac{\partial \pi}{\partial \epsilon_{ij}^p} \dot{\epsilon}_{ij}^p$$

である。さらに、この方程式に(3.1)式を代入し整理すると、

$$\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} E_{ijkl} \dot{\epsilon}_{kl} = \Lambda \left(\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} E_{ijkl} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{kl}} + \frac{\partial \pi}{\partial \epsilon_{ij}^p} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} - \frac{\partial f}{\partial \epsilon_{ij}^p} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \right)$$

となり、 Λ は、

$$\Lambda = \frac{\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} E_{ijkl} \dot{\epsilon}_{kl}}{\left(\frac{\partial f}{\partial \sigma_{mn}} E_{mnpq} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{pq}} + \frac{\partial \pi}{\partial \epsilon_{mn}^p} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{mn}} - \frac{\partial f}{\partial \epsilon_{mn}^p} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{mn}} \right)}$$

として求めることができる。これより、 Λ を(3.1)式にあらためて代入すると、

$$\dot{\epsilon}_{ij}^p = \frac{\frac{\partial f}{\partial \sigma_{kl}} E_{klmn} \dot{\epsilon}_{mn} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}}}{\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ab}} E_{abcd} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{cd}} + \frac{\partial \pi}{\partial \epsilon_{ab}^p} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ab}} - \frac{\partial f}{\partial \epsilon_{ab}^p} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ab}}} \quad (3.6)$$

とすることができる。この(3.6)式を(3.5)式に再度、代入し整理すると、

$$\dot{\sigma}_{ij} = E_{ijkl} \dot{\epsilon}_{kl} - \frac{E_{ijkl} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{mn}} E_{mnpq} \dot{\epsilon}_{pq} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{kl}}}{\left(\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ab}} E_{abcd} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{cd}} + \frac{\partial \pi}{\partial \epsilon_{ab}^p} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ab}} - \frac{\partial f}{\partial \epsilon_{ab}^p} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ab}} \right)}$$

となり、これの添字を整理すると、最終的に、

$$\dot{\sigma}_{ij} = D_{ijkl} \dot{\epsilon}_{kl} \tag{3.7}$$

$$D_{ijkl} = E_{ijkl} - \frac{E_{ijmn} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{mn}} E_{pqkl} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{pq}}}{\left(\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ab}} E_{abcd} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{cd}} + \frac{\partial \pi}{\partial \epsilon_{ab}^p} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ab}} - \frac{\partial f}{\partial \epsilon_{ab}^p} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ab}} \right)}$$

なる方程式を得ることができる。

このことから、先述の三つの状態における応力とひずみとの関係を一つにまとめて、次のごとくに表わすことが可能になる。すなわち、

$$\dot{\sigma}_{ij} = C_{ijkl} \dot{\epsilon}_{kl} \tag{3.8}$$

I) 初期弾性 $f < \pi, \dot{\pi} = 0, \epsilon_{ij}^p = 0$

$$C_{ijkl} = E_{ijkl}$$

II) 負荷 $f = \pi, \dot{\pi} \neq 0, \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \dot{\sigma}_{ij} > 0$

$$C_{ijkl} = D_{ijkl}$$

III) 除荷 $f \leq \pi, \dot{\pi} = 0, \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \dot{\sigma}_{ij} \leq 0$

$$C_{ijkl} = E_{ijkl}$$

である。(図-1)

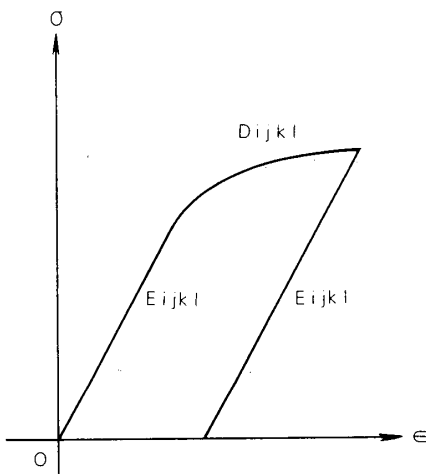


図-1 弾塑性応力ひずみ関係

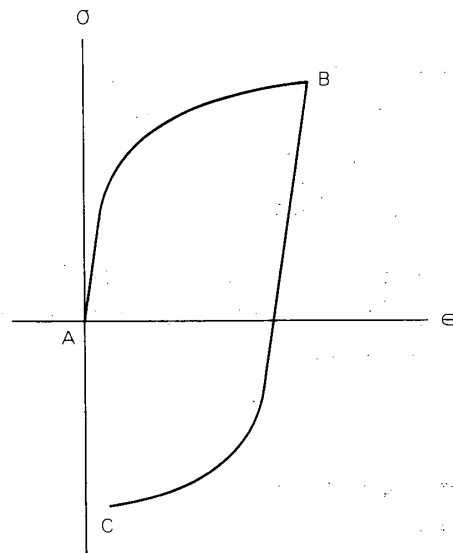


図-2 バウシinger効果のある場合の応力ひずみ関係

次に、降伏条件としては、バウシinger効果の影響を考慮した岸・田辺の降伏条件〔10〕を用いる。この岸・田辺の降伏条件は、バウシinger効果による降伏応力の低下が塑性ひずみの関数として与えられることに立脚した降伏条件である。よって、図-2におけるA-B区間では、この降伏条件を用いることは適当ではない。岸・田辺の降伏条件は、

$$f' = S_{ij} S_{ij} - 2k (2 \varepsilon_{kl}^p \varepsilon_{kl}^p)^{(m-1)/2} S_{ij} \varepsilon_{ij}^p \quad (3.9)$$

である。ここに、 k 、 m は実験により求まる定数である。右辺の第2項が、バウシinger効果の影響を表わしている。 S_{ij} は偏差応力で、

$$S_{ij} = \sigma_{ij} - \frac{1}{3} \sigma_{kk} \delta_{ij}$$

である。(3.2)式において、降伏関数は応力の次元を持つとしている。しかし、この降伏条件は応力の2乗の次元を持つ。よって、降伏関数としては、

$$f = (S_{ij} S_{ij} - 2k (2 \varepsilon_{kl}^p \varepsilon_{kl}^p)^{(m-1)/2} S_{ij} \varepsilon_{ij}^p)^{1/2} = \pi k \quad (3.10)$$

を用いることにする。

先述のように、この降伏条件を全ての応力状態に適用することは適当ではない。この場合には、その成立範囲外では、漸定的にミーゼスの降伏関数を用いることにする。すなわち、

$$f = \left(\frac{3}{2} S_{ij} S_{ij}\right)^{1/2} = \pi m \quad (3.11)$$

である。両方の降伏関数におけるひずみ硬化係数の関係は、

$$\pi k = \sqrt{\frac{2}{3}} \pi m \quad (3.12)$$

とする。

ミーゼスの降伏関数においては、加工硬化の影響は次のように表わすことができる。まず、(3.7)式の第2式の分母において、

$$\frac{\partial \pi}{\partial \varepsilon_{ij}^p} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} = H'$$

であるとし、さらに、 H' を相当応力と相当塑性ひずみの関係における接線勾配に対応させることができる〔11〕。この勾配は、単軸引張試験の結果より求められる。ここでは、相当応力 $\bar{\sigma}$ と相当塑性ひずみ ε^p の関係を、

$$\bar{\sigma} = a (\bar{\varepsilon}^p)^n + \sigma_r$$

の形で表わされるものとした。ここに、 a 、 n は実験的に与えられる定数、 σ_r は降伏応力である。

しかし、岸・田辺の降伏関数においては、相当応力と相当塑性ひずみの関係によって加工硬化の影響を表わす事は極めて困難である。除荷直前の H' を定数とみなして、そのまま一定

値を保つものとした。

最後に、各々の降伏関数の応力と塑性ひずみに関する微分量を、次のように与えておく。
岸・田辺の降伏関数に対しては、

$$\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} = \frac{2 S_{ij} - 2k (2 \varepsilon_{kl}^p \varepsilon_{kl}^p)^{(m-1)/2} \varepsilon_{ij}^p}{(S_{mn} S_{mn} - 2k (2 \varepsilon_{pq}^p \varepsilon_{pq}^p)^{(m-1)/2} S_{mn} \varepsilon_{mn}^p)^{1/2}}$$

$$\frac{\partial f}{\partial \varepsilon_{ij}^p} = \frac{-2k (2 \varepsilon_{kl}^p \varepsilon_{kl}^p)^{(m-1)/2} \varepsilon_{ij}^p - 4 (m-1) (2 \varepsilon_{kl}^p \varepsilon_{kl}^p)^{(m-3)/2} S_{rs} \varepsilon_{rs}^p \varepsilon_{ij}^p}{(S_{mn} S_{mn} - 2k (2 \varepsilon_{pq}^p \varepsilon_{pq}^p)^{(m-1)/2} S_{mn} \varepsilon_{mn}^p)^{1/2}}$$

であり、ミーゼスの降伏関数に対しては、

$$\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} = \frac{3}{2} S_{ij} \left(\frac{3}{2} S_{kl} S_{kl} \right)^{-1/2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial \varepsilon_{ij}^p} = 0$$

である。

4 有限要素法

有限要素法を適用するために、第1に、変分方程式を誘導する必要がある。ここでは、仮想仕事による定式化を用いる。変位の与えられる境界では0で、その他では任意の値をとる仮想変位 U_i^* を考える。これを、平衡方程式(2.2)式の両辺に乗じて、任意の領域 V について積分すると、

$$\int_V U_i^* \sigma_{ij} dv + \int_V U_i^* f_i dv = 0 \quad (4.1)$$

となる。ガウス・グリーンンの定理により

$$\int_V U_i^* \sigma_{ij,j} dv = \int_S U_i^* \sigma_{ij} n_j ds - \int_V U_{i,j}^* \sigma_{ij} dv$$

である。この式を(4.1)式に代入し、整理すると、

$$\int_V U_{i,j}^* \dot{\sigma}_{ij} dv = \int_S U_i^* \dot{\sigma}_{ij} n_j ds + \int_V U_i^* \dot{f}_i dv \quad (4.2)$$

となる。仮想ひずみを、

$$\varepsilon_{ij}^* = \frac{1}{2} (U_{i,j}^* + U_{j,i}^*)$$

と定義する. このことと $\dot{\sigma}_{ij} = \dot{\sigma}_{ji}$ であることから, (4.2) 式は,

$$\int_v \varepsilon_{ij}^* \dot{\sigma}_{ij} dv = \int_s U_i^* \dot{\sigma}_{ij} n_j ds + \int_v U_i^* \dot{f}_i dv$$

となる. この関係に, (2.6) 式を代入すると,

$$\int_v \varepsilon_{ij}^* \dot{\sigma}_{ij} dv = \int_s U_i^* \dot{T}_i ds + \int_v U_i^* \dot{f}_i dv \quad (4.3)$$

となる. これが, 外力の仮想仕事と内力の仮想仕事等しいとする仮想仕事の定理である. 次に, 構成方程式 (3.8) 式を (4.3) 式に代入すると,

$$\int_v \varepsilon_{ij}^* C_{ijkl} \dot{\varepsilon}_{kl} dv = \int_s U_i^* \dot{T}_i ds + \int_v U_i^* \dot{f}_i dv$$

となる. 等方性であることを考慮し, (2.4) 式を代入すると,

$$\int_v U_{i,j}^* C_{ijkl} \dot{U}_{k,l} dv = \int_s U_i^* \dot{T}_i ds + \int_v U_i^* \dot{f}_i dv \quad (4.4)$$

と書き表わすことができる.

これを用いて, 有限要素法を展開する. 解析する構造を任意の形状をもつ有限要素に分割する. その要素について, 内部の変位を節点の変位によって次のように内挿する.

$$\dot{U}_i = \Phi_\alpha \dot{U}_{\alpha i} \quad (4.5)$$

ここに, Φ_α は形状関数, $\dot{U}_{\alpha i}$ は第 α 節点の x_i 方向の変位を示す. 仮想変位 U_i^* についても, 同様の関係を用いて,

$$U_i^* = \Phi_\alpha U_{\alpha i}^* \quad (4.6)$$

とする. (4.5) (4.6) 式を (4.4) 式に代入すると,

$$\int_v U_{\alpha l}^* \Phi_{\alpha, j} C_{ijkl} \dot{U}_{\beta k} \Phi_{\beta, l} dv = \int_s U_{\alpha i}^* \Phi_\alpha \dot{T}_i ds + \int_v U_{\alpha i}^* \Phi_\alpha \dot{f}_i dv \quad (4.7)$$

が得られる. ここで, $U_{\alpha i}^*$ は任意の値をとる量であるから,

$$\int_v \Phi_{\alpha, j} C_{ijkl} \Phi_{\beta, l} \dot{U}_{\beta k} dv = \int_s \Phi_\alpha \dot{T}_i ds + \int_v \Phi_\alpha \dot{f}_i dv \quad (4.8)$$

でなければならない. 最終的に次の方程式を得ることができる.

$$K_{\alpha i \beta k} \dot{U}_{\beta k} = \Omega_{\alpha i} \quad (4.9)$$

$$K_{\alpha i \beta k} = \int_v \Phi_{\alpha, j} C_{ijkl} \Phi_{\beta, l} dv$$

$$\Omega_{\alpha i} = \int_s \Phi_\alpha \dot{T}_i ds + \int_v \Phi_\alpha \dot{f}_i dv$$

ここに、 Q_{ai} は表面力及び物体力に重みをつけて平均した既知量で換算節点力と呼ばれる。また、 $K_{ai\beta k}$ は剛性行列に相当する。さらに、また、これは応力と塑性ひずみの関数である。よって、外力荷重を細かく刻み少しずつ増加させ、その増分に対する変位の増分を計算していく方法をとることによって計算を進めることにする。

5 数値計算例

数値計算にあたっては、二次元平面応力問題として取り扱い、物体力については考えない。有限要素は、図-3のような3節点三角形要素を用いることにする。変位 U_i は、要素内で線形性を仮定して、

$$U_i = a_0 + a_1 x + a_2 y \quad (5.1)$$

とする。これから、3つの未定定数 a_0, a_1, a_2 は節点の変位によって次のように定められる。

$$\begin{bmatrix} U_{1i} \\ U_{2i} \\ U_{3i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}$$

よって

$$\begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} U_{1i} \\ U_{2i} \\ U_{3i} \end{bmatrix}$$

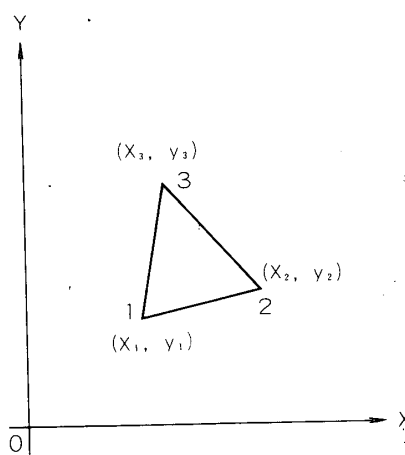


図-3 三角形有限要素

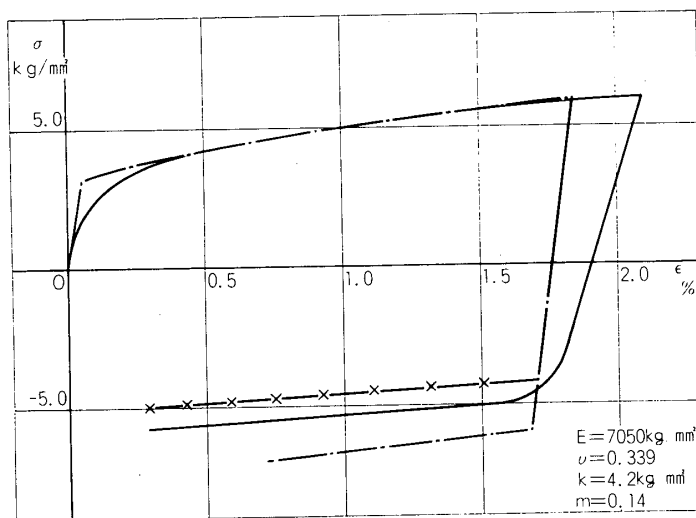


図-4 単純引張における応力ひずみ関係

である。今求めた3つの定数を、再度(5.1)式に代入すると、

$$U_i = [1 \ x \ y] \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} U_{1i} \\ U_{2i} \\ U_{3i} \end{bmatrix}$$

となる。ゆえに、形状関数 ϕ_α は、

$$\phi_\alpha = [1 \ x \ y] \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{bmatrix}$$

として定められる。

まず、図-4はアルミニウムによる単板に単純引張の状態を与えた時の応力・ひずみ曲線に対して、岸・田辺の降伏条件による場合とミーゼスの降伏条件による場合と実験値との3例を比較したものである。-×-は岸・田辺の降伏条件による計算値、-.-はミーゼスの降伏条件による計算値、-は実験値を各々示す。外力荷重の増分は、弾性体として挙動を示す範囲では計算時間を短くするために、大きな値を用いている。降伏を生じた後は、増分

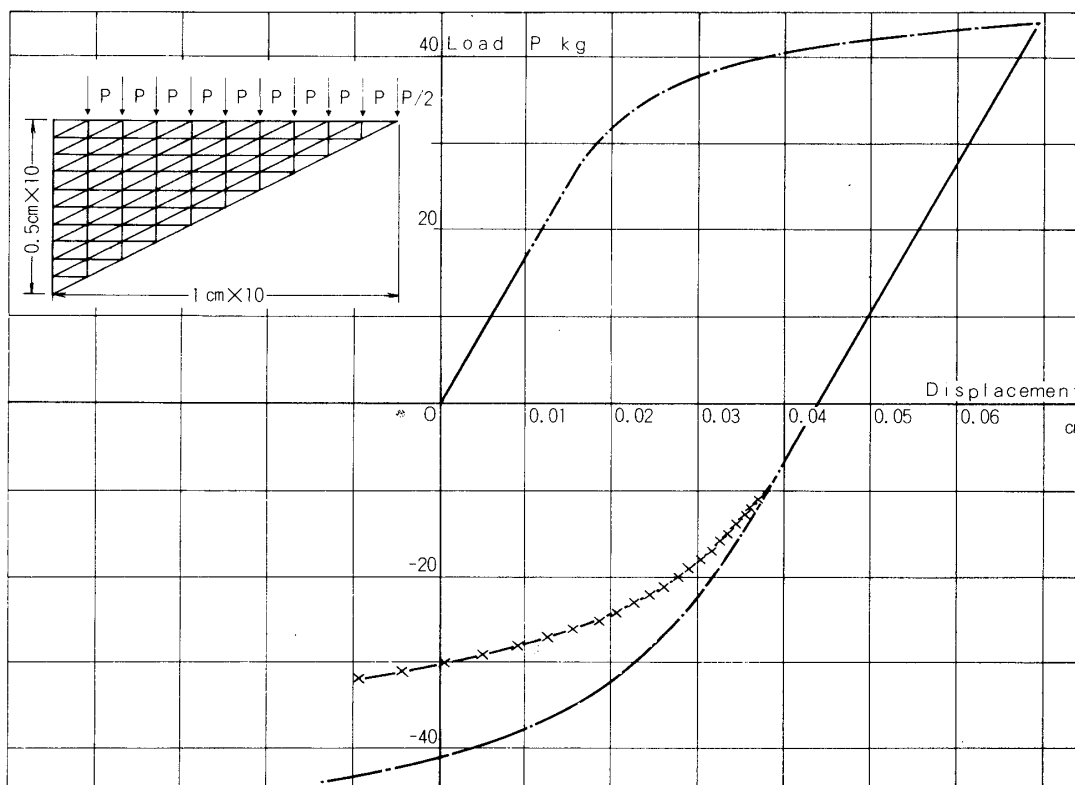


図-5 三角形片持梁における荷重変位曲線

を $1 \text{ kg}/\text{mm}^2$ の応力増分を生じるように载荷している。計算結果より、岸・田辺の降伏条件を使用した計算では、ハウシinger効果の影響が良く表われていることがわかる。初期弾性の範囲で、実験値と一致していないのは、材質がアルミニウムであることによる次の理由が考えられる。アルミニウムが弾性域において等方性線形弾性としての挙動を示すと言いたいこと、アルミニウムの降伏点の不明瞭なこと、そのために応力・ひずみ曲線の近似が不明確であることなどである。

以下、三つの構造に対して、岸・田辺の降伏条件による計算値とミーゼスの降伏条件による計算値との比較したものである。材質はアルミニウムを考慮し、諸定数は前図と同じである。外力荷重の増分は、弾性体として挙動を示す範囲では計算時間を短くするために、大き

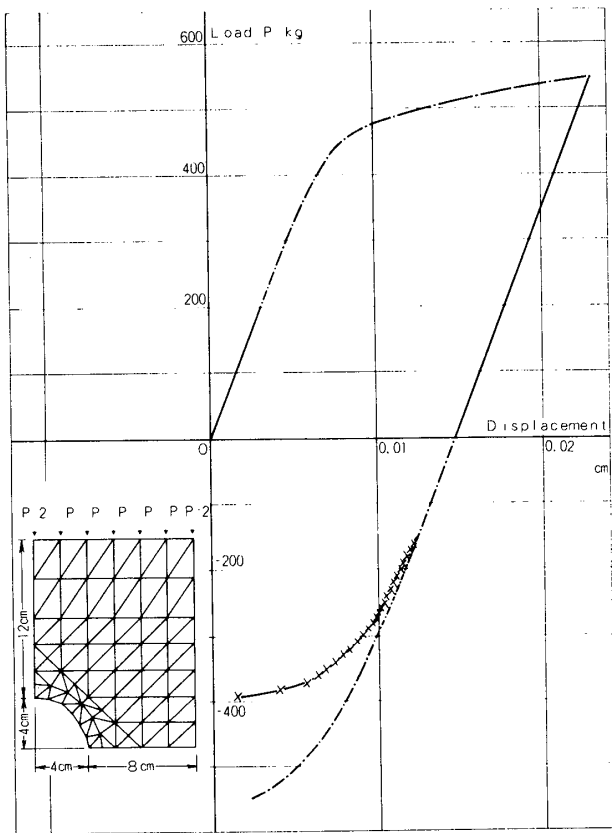


図-6 円孔のある板における荷重変位曲線

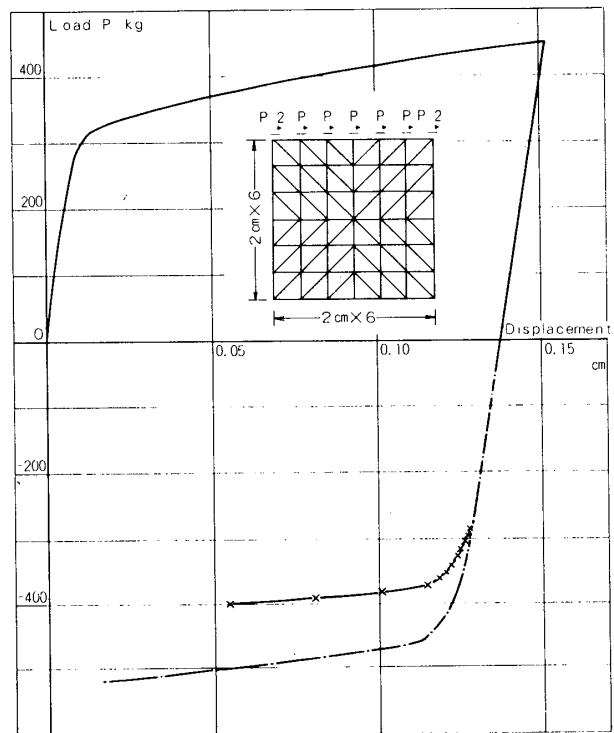


図-7 純せん断における荷重変位曲線

な値を用いる。—×—は岸・田辺の降伏条件による計算値，—・—はミーゼスの降伏条件による計算値を各々示す。

図-5は，図中にあるような三角形の片持梁について解析したものである。曲線は，先端の上下方向の変位と換算節点力Pとの関係を示している。降伏の生じた後の換算節点力の増分は1kgとして載荷している。ここにおいて，ミーゼスの降伏条件では表わし得ないバウシinger効果の影響を，岸・田辺の降伏条件を用いることによって表現することが可能になっている。

図-6は，円孔のある板の四分の一を図中のように分割し解析したものである。曲線は，左上縁の端部の変位と換算節点力Pとの関係を示している。降伏を生じた後の換算節点力の増分は10kgとして載荷している。この図において，ミーゼスの降伏条件による計算値と岸・田辺の降伏条件による計算値との違いが，明らかに現われている。

続いて，図-7は，純せん断の状態を考慮して図中のモデルについて解析したものである。曲線は，左上隅の点と変位と換算節点力との関係を示している。降伏を生じた後の換算節点力の増分は10kgとして載荷している。この図においても，ミーゼスの降伏条件による計算値と岸・田辺の降伏条件による計算値との違いが，明確に示されている。

6 結 言

有限要素法による弾塑性解析のうち，岸・田辺の降伏条件を用いた場合について考察した。岸・田辺の降伏条件は，バウシinger効果を取り入れて解析されたものである。したがって，ここで述べた有限要素法によって解析すれば，構造物に対するバウシinger効果の影響を計算することが可能になる。ここに述べた数値計算例では，構造に対するバウシinger効果の影響を取り入れた計算することができたと考えている。実在の材料についての岸・田辺の降伏条件に対する諸定数を決定することができれば，ここに述べた有限要素解析を適用することができる。

なお，計算にあたっては東大宇宙研究所FACOM 230-75及び東大大型計算機センターHITAC 8800/8700を使用した。

1976年7月10日 材料部

参 考 文 献

- [1] O. C. Zienkiewicz: "Finite Element Methods in Engineering Science", McGraw Hill, 1972.
- [2] P. V. Marcal: "Finite Element Analysis with Material Non Linearities", Recent Advances in Matrix Methods of Structural Analysis and Design, ed. R. H. Gallagher, et al., University of Alabama press, 1971.
- [3] Y. Yamada, N. Yoshimura and T. Sakurai: "Plastic Stress-Strain Matrix and Its Application for the Solution of Elastic-plastic Problems by Finite Element Method", Int. J. Mech. Sci., Vol. 10, 7, pp. 343-354, 1968.
- [4] Y. Yamada: "Recent Japanese Developments in Matrix Displacement Methods for Elastic-Plastic Problems in Japan", Recent Advances in Matrix Methods of Structural Analysis and Design, ed. R. H. Gallagher, J. T. Oden and Y. Yamada, University of Alabama press, 1971.
- [5]

- [6] H. Armen, Jr., G. Isackson and A. Pitko: "Discrete Element Methods for Plastic Analysis of Structures Subjected to Cyclic Loading", *Int. J. Num. Meth. in Engng.*, Vol. 2, No. 2, pp. 189-206, 1970.
- [7] O. C. Zienkiewicz, S. Valliappan and I. P. King: "Elasto-Plastic Solution of Engineering Problems, "Initial Stress" Finite Element Approach", *Int. J. Num. Meth. in Engng.* Vol. 1, No. 1, pp. 75-100, 1969.
- [8] F. A. Akyuz and J. E. Merwin: "Solution of Nonlinear Problems of Elastoplasticity by the Finite Element Methods", *AIAA J.* Vol. 6, No. 11, Oct., pp. 1825-1831, 1968.
- [9] M. Kawahara and K. Horii: "Large Strain, Elastic-Plastic Numerical Analysis by Means of Finite Element Methods", *Proc. of JSCE*, No. 194, Oct., 1971.
- [10] T. Kishi and T. Tanabe: "The Bauschinger Effect and its Role in Mechanical Anisotropy", *J. Mech. Phys. Solids.*, Vol. 2, pp. 305-315, 1973.
- [11] 川原睦人, 「有限要素法による弾塑性体の解析」 土木学会関西支部 昭和48年度講習会テキスト