

錐体まわりの超音速流に対する近似解

松野謙一・河村龍馬

Approximate Solutions to the Supersonic Flow around Conical Bodies

By

Ken-ichi MATSUNO and Ryuma KAWAMURA

Abstract: An analytical method of solution to the flow over slightly yawed conical body are presented. The cross section of the body is assumed to be nearly circular but otherwise arbitrary. The conical flow equations and boundary conditions are linearized by means of small perturbation from the Taylor-Maccoll conical flow solution for unyawed circular cone. The equations are simplified by the use of isentropic assumption and the solutions are obtained analytically.

It is applied to the cases of slightly yawed circular cones and elliptic cones. The results are compared with experiment and with other approximate solutions, and it is shown that for the circular cones and elliptic cones, the simplest closed form solution based on the density-constant approximation estimates the aerodynamic characteristics fairly well.

概 要

超音速流中におかれた非軸対称錐体，または，有迎角円錐まわりの流れに対する近似方程式および，その解を提示する。

本近似理論は，等エントロピ流仮定に基づく線型理論である。無迎角円錐に対する Taylor-Maccoll の厳密解を基本とし，それからの微小擾乱の考えを用いることにより，近似方程式を導出し，その解法を示す。

例として，有迎角円錐，及び楕円錐まわりの流れに適用した。他の近似理論，実験結果と比較することにより，その有効性が示された。

記 号

a : 音速

b/a : 楕円の長径短径比

C_p : 圧力係数

c : 極限速度

K_1	: (25) 式で定義される定数	α	: 迎角
K_2	: (29) 式で定義される定数	r	: 比熱比
M_∞	: 一様流マッハ数	δ^*	: 錐状衝撃波の tilt 角 (図4 参照)
m	: マッハパラメータ	ε_n	: フーリエ係数 (2)式参照)
p	: 圧力	κ	: 衝撃波 tilt 角と迎角との比
p_t	: 衝撃波後の淀み点圧力	θ	: 極座標系天頂角
R	: 気体定数	$\bar{\theta}_0$: 円錐 (基準円錐) の半頂角
r	: 極座標系の放射方向座標	$\bar{\theta}_1$: 円錐状衝撃波面の半頂角
S	: エントロピ	$\theta_0 b$: 物体形状の円錐からの偏り (2)式参照)
T	: 温度	$\theta_1 w$: 衝撃波面形状の円錐形からの偏り (2)式参照)
U_∞	: 一様流速度	φ	: 極座標系方位角
u	: r 方向速度成分	ψ	: 物体中心極座標系方位角 (図1 参照)
u_p	: r 方向擾乱速度成分	$(\bar{\quad})$: 無迎角円錐に対する Taylor -Maccoll の解
\bar{u}_s	: 無迎角円錐表面上速度	$(\quad)_\infty$: 一様流の状態
v	: θ 方向速度成分	$(\quad)_p$: 微小擾乱量
v_p	: θ 方向擾乱速度成分		
w	: φ 方向速度成分		
w_p	: φ 方向擾乱速度成分		

1. 緒 言

円錐や楕円錐まわりの超音速錐状流の研究は、物体の幾何学的形状の簡単さからだけでなく、それらの流れは、より一般の回転体や、非軸対称物体まわりの流れのひとつの典型として古くから興味もたれてきた。そういった錐状流に対する理論的研究は、無迎角円錐まわりの流れに対する Taylor-Maccoll の解 [1] を発端としている。その後 Stone [2] の有迎角円錐まわりの流れについての研究を皮切りに、多くの研究者により、種々の解析、計算が行なわれてきた [3]~[8]。それらの研究は、微小擾乱流理論であり、逆解法等による数値計算等であった。錐状流は、しかしながら、一般の物体をすぎる流れの、ひとつのモデルとしての意味からも、より解析的に取り扱われることが望ましい。一方、錐状流においては、Ferri [3] によって指摘された、いわゆる “vortical singularity” なる特異点に関する問題が存在する。この vortical singularity は、錐状流理論においては、衝撃波層内におけるエントロピ分布が一様でないため、非粘性流を仮定するとき必然的に流れ場内に発生するもので、解析を困難にしているひとつの理由でもある。衝撃波層内のエントロピ分布を考える場合、一次オーダーの微小擾乱流の仮定のもとでは、方位角方向のエントロピ変化のみが問題とされ、子午面内におけるエントロピ変化は、無視される。したがって、必然的に “vortical layer” におけるエントロピの急激な変化は、取り扱うことができない。

さて、衝撃波前後の圧力変化は、エントロピには、3次のオーダーの変化を与えるにすぎない。したがって、弱い衝撃波を考える場合には、エントロピの不均一自体は、小さく、空

力特性を評価するには、問題にならない程度と考えられる。

本論文の目的は、その様な条件のもとに、等エントロピ流仮定を設けることにより、vortical singularity の発生を防ぎながら、任意断面形状の錐体をすぎる流れを解析的に取り扱い、その解を簡便な形で与えることである。

まず、無迎角円錐まわりの流れに対する Taylor-Maccoll の厳密解を基本流として用い、その解からの微小擾乱を行なうことにより、任意断面形状の錐体まわりの超音速流に対する常微分方程式を導出することを試みる。更に、近似を導入して、その方程式を解くことを試みる。

例として、求められた方程式を、有迎角円錐および楕円錐まわりの流れに適用し、その結果を他の近似理論、実験と比較しようとする。

2. 基礎方程式の線型化

2.1 座標系と物体面の表示

座標系は、軸が風向と一致した球座標系、すなわち、図1に示す様な、いわゆる“wind fixed spherical coordinate system”を用いる。

このとき、迎角 α でおかれた錐体の物体表面の方程式

$$\theta = \theta_b(\varphi) \quad (1)$$

は、 α が十分に小さいとき、次の様に Fourier 級数表示することができる。

$$\begin{aligned} \theta = \theta_b(\varphi) &= \bar{\theta}_0 + \theta_{0b}(\varphi) \\ &= \bar{\theta}_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \epsilon_n \cos n\varphi + \alpha \cos \varphi, \end{aligned} \quad (2)$$

ここでは、

$$\theta_{0b}/\bar{\theta}_0 \ll 1 \quad (3)$$

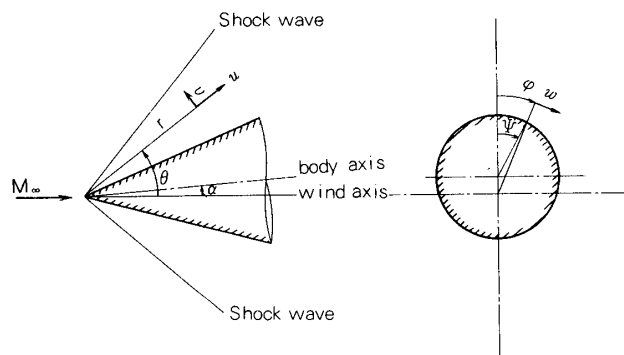


図1 座 標 系

の成立する錐体を取り扱い、以後、 θ_{0b} のオーダーを“ ε ”と呼ぶ。錐体が(2)式で表示される時、それは、半頂角 $\bar{\theta}_0$ の円錐が、 $\sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n \cos n\varphi$ で表わされる量だけ歪ませられ、迎角 α の状態でおかれていると解釈することができる。そこで、(2)式の第1項 $\bar{\theta}_0$ を、今考えている錐体に対する基準円錐の半頂角とみなし、流れは、基準円錐からの偏り“ $\theta_{0b}(\varphi)$ ”により、擾乱を受けていると考える。

特に、

$$\varepsilon_n = 0, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (4)$$

のとき、すなわち、

$$\theta = \theta_b(\varphi) = \bar{\theta}_0 + \alpha \cos \varphi \quad (5)$$

は、迎角 α でおかれた半頂角 $\bar{\theta}_0$ の円錐を表わす。

2.2 基礎方程式

完全気体の錐状流に対する基礎方程式は、次の様になる。

$$\frac{\partial}{\partial \theta} (\rho v \sin \theta) + \frac{\partial}{\partial \varphi} (\rho w) + 2\rho u \sin \theta = 0 \quad (6.1)$$

$$v \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{w}{\sin \theta} \frac{\partial u}{\partial \varphi} - v^2 - w^2 = 0 \quad (6.2)$$

$$v \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{w}{\sin \theta} \frac{\partial v}{\partial \varphi} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial \theta} + uv - w^2 \cot \theta = 0 \quad (6.3)$$

$$v \frac{\partial w}{\partial \theta} + \frac{w}{\sin \theta} \frac{\partial w}{\partial \varphi} + \frac{1}{\rho \sin \theta} \frac{\partial p}{\partial \varphi} + uw + vw \cot \theta = 0 \quad (6.4)$$

$$\frac{2}{r-1} a^2 + u^2 + v^2 + w^2 = c^2 \quad (6.5)$$

音速 a は、次式で表わされる。

$$a^2 = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_S = \frac{r p}{\rho} \quad (7)$$

(6)および(7)式より、 p 、 ρ に関する項を消去すると、

$$u \left(2 - \frac{v^2 + w^2}{a^2} \right) + v \cot \theta + \frac{\partial v}{\partial \theta} \left(1 - \frac{v^2}{a^2} \right) + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial w}{\partial \varphi} \left(1 - \frac{w^2}{a^2} \right) - \frac{vw}{a^2} \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial v}{\partial \varphi} + \frac{\partial w}{\partial \theta} \right) = 0 \quad (8)$$

となる。(8)式より、無迎角円錐に対する Taylor-Maccoll の解

$$u = \bar{u}, \quad v = \bar{v}, \quad w = 0 \quad (9)$$

は、次式の解として得られる〔9〕.

$$\begin{cases} \bar{u} \left(2 - \frac{\bar{v}^2}{a^2} \right) + \bar{v} \cot \theta + \frac{d\bar{v}}{d\theta} \left(1 - \frac{\bar{v}^2}{a^2} \right) = 0 \\ \bar{v} = \frac{d\bar{u}}{d\theta} \end{cases} \quad (10)$$

ここで、

$$\bar{a}^2 = \frac{r-1}{2} (c^2 - \bar{u}^2 - \bar{v}^2) \quad (11)$$

2.3 基礎方程式の線型化

(2)式によって表示される錐体まわりの流れを考える場合、半頂角 $\bar{\theta}_0$ の無迎角円錐まわりの流れが、 $O(\varepsilon)$ の偏り $\theta_{0b}(\varphi)$ によって擾乱を受けていると考えることができる。すなわち、半頂角 $\bar{\theta}_0$ の円錐に対するTaylor-Maccollの解 $\bar{u}(\theta)$ 、 $\bar{v}(\theta)$ で表わされる流れが、擾乱を受けていると考え、円錐からの偏り $\theta_{0b}(\varphi)$ によって引き起こされた擾乱速度 u_p 、 v_p 、 w_p を次の様に導入する。

$$u(\theta, \varphi) = \bar{u}(\theta) + u_p(\theta, \varphi) \quad (12.1)$$

$$v(\theta, \varphi) = \bar{v}(\theta) + v_p(\theta, \varphi) \quad (12.2)$$

$$w(\theta, \varphi) = w_p(\theta, \varphi) \quad (12.3)$$

ここで、 u_p 、 v_p 、 w_p およびそれらの導関数は、 $O(\varepsilon)$ と仮定する。

(8)式に(12)式を代入し、(6.2)および(10)式を考慮して $O(\varepsilon^2)$ 以上の高次の微小項を省略すると、次の線型方程式が得られる。

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial w_p}{\partial \varphi} + \left(1 - \frac{\bar{v}^2}{a^2} \right) \frac{\partial^2 u_p}{\partial \theta^2} \\ + \left\{ -\frac{r-1}{a^4} \bar{v}^3 \left(\bar{u} + \frac{d\bar{v}}{d\theta} \right) - 2 \frac{\bar{u}\bar{v}}{a^2} + \cot \theta - 2 \frac{\bar{v}}{a^2} \frac{d\bar{v}}{d\theta} \right\} \frac{\partial u_p}{\partial \theta} \\ + \left\{ -\frac{r-1}{a^4} \bar{u}\bar{v}^2 \left(\bar{u} + \frac{d\bar{v}}{d\theta} \right) + 2 - \frac{\bar{v}^2}{a^2} \right\} u_p = 0 \end{aligned} \quad (13)$$

ここで適当な $\bar{\theta}_0$ 、 M_∞ の範囲においては、衝撃波層内におけるエントロピの変化は、近似的に無視しうると考えられる(補遺参照)。

そこで、渦なし

$$w = \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial u}{\partial \varphi} \quad (14)$$

を仮定すると, (13) 式は u_p のみに関する方程式に帰着する. すなわち, 等エントロピ流仮定のもとに,

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 u_p}{\partial \varphi^2} + \left(1 - \frac{\bar{v}^2}{a^2}\right) \frac{\partial^2 u_p}{\partial \theta^2} \\ & + \left\{ -\frac{r-1}{a^4} v^3 \left(\bar{u} + \frac{d\bar{v}}{d\theta}\right) - 2 \frac{\bar{u}\bar{v}}{a^2} + \cot \theta - 2 \frac{\bar{v}}{a^2} \frac{d\bar{v}}{d\theta} \right\} \frac{\partial u_p}{\partial \theta} \\ & + \left\{ -\frac{r-1}{a^4} \bar{u}\bar{v}^2 \left(\bar{u} + \frac{d\bar{v}}{d\theta}\right) + 2 - \frac{\bar{v}^2}{a^2} \right\} u_p = 0 \end{aligned} \quad (15)$$

を得る.

2.4 境界条件

(i) 物体面における境界条件

境界条件として, 流れは, 物体面に沿うことが要求される. これは $\theta = \theta_b(\varphi)$ において

$$v \frac{\partial}{\partial \theta} [\theta - \theta_b(\varphi)] + \frac{w}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} [\theta - \theta_b(\varphi)] = 0 \quad (16)$$

すなわち

$$v - \frac{w}{\sin \theta} \frac{d}{d\varphi} \theta_b(\varphi) = 0 \quad (17)$$

が成立することを意味する. ここで (17) 式の各項を $\theta = \bar{\theta}_0$ で Taylor 級数に展開する. $\bar{v}(\bar{\theta}_0) = 0$, $d\bar{v}(\theta)/d\theta|_{\theta=\bar{\theta}_0} = -2\bar{u}_s$ を考慮し, $O(\varepsilon^2)$ 以上の高次微小項を省略すると, (17) 式は, 結局

$$v_p(\bar{\theta}_0, \varphi) = 2\bar{u}_s \theta_{0b}(\varphi) \quad (18)$$

に帰着される. これより物体面上の境界条件は,

$$\begin{aligned} & \theta = \bar{\theta}_0 \quad \text{において,} \\ & v_p(\theta, \varphi) = 2\bar{u}_s \theta_{0b}(\varphi) \end{aligned} \quad (19)$$

または,

$$\frac{\partial}{\partial \theta} u_p(\theta, \varphi) = 2\bar{u}_s \left(\sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n \cos n\varphi + \alpha \cos \varphi \right) \quad (19')$$

となる.

(ii) 衝撃波面における境界条件

衝撃波面の方程式を

$$\theta = \theta_w(\varphi) = \bar{\theta}_1 + \theta_{1w}(\varphi) \quad (20)$$

と表示する. ここで $\theta_{1w}(\varphi)$ は $O(\varepsilon)$ であると考えられる.

このとき衝撃波面に垂直方向の単位ベクトル \mathbf{n} は,

$$\mathbf{n} = \left(0, 1, -\frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\varphi} \theta_{1w}(\varphi) \right) \quad (21)$$

また, 接線方向の単位ベクトル $\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2$ は,

$$\mathbf{t}_1 = (1, 0, 0) \quad (22.1)$$

$$\mathbf{t}_2 = \mathbf{t}_1 \times \mathbf{n} = \left(0, \frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\varphi} \theta_{1w}(\varphi), 1 \right) \quad (22.2)$$

である.

まず, 衝撃波面に対して接線方向の速度成分は, 変化しないことから,

$$\begin{aligned} &\theta = \theta_w(\varphi) \text{ において,} \\ &(U_\infty \cos \theta, -U_\infty \sin \theta, 0) \cdot \mathbf{t}_1 = (u, v, w) \cdot \mathbf{t}_1. \end{aligned} \quad (23)$$

これより, (20) 式を (23) 式に代入し. $\theta = \bar{\theta}_1$ で Taylor 級数展開を行ない, $O(\varepsilon^2)$ 以上の微小項を省略すると,

$$\theta_{1w}(\varphi) = K_1 u_p(\bar{\theta}_1, \varphi), \quad K_1 = -\frac{1}{\bar{v}(\bar{\theta}_1) + U_\infty \sin \bar{\theta}_1} \quad (24), (25)$$

を得る.

衝撃波面に垂直方向の速度成分の変化は, Rankine-Hugoniot の関係式より定まる.
今

$$\nu_I = (U_\infty \cos \theta, -U_\infty \sin \theta, 0) \cdot \mathbf{n} \quad (26.1)$$

$$\nu_{II} = (u, v, w) \cdot \mathbf{n} \quad (26.2)$$

とおくと,

$$\nu_{II} = \frac{1}{r+1} \left\{ (r-1) \nu_I + \frac{2a_\infty^2}{\nu_I} \right\} \quad (27)$$

が成立する. (27) 式に (20) 式を代入して, $\theta = \bar{\theta}_1$ で Taylor 級数展開して, $O(\varepsilon^2)$ 以上の微小項を無視すると,

$$v_p(\bar{\theta}_1, \varphi) = K_2 \theta_{1w}(\varphi) \quad (28)$$

を得る. ただし,

$$K_2 = -\frac{d}{d\theta} \bar{v}(\theta) \Big|_{\theta = \bar{\theta}_1} - \frac{r-1}{r+1} U_\infty \cos \bar{\theta}_1 + \frac{2a_\infty^2}{(r+1) U_\infty \sin \bar{\theta}_1} \cot \bar{\theta}_1 \quad (29)$$

(24) 式および (28) 式より, 衝撃波面における境界条件は,

$$\theta = \bar{\theta}_1 \text{ において}$$

$$v_p(\theta, \varphi) = K_1 K_2 u_p(\theta, \varphi) \quad (30)$$

または,

$$\frac{\partial}{\partial \theta} u_p(\theta, \varphi) = K_1 K_2 u_p(\theta, \varphi) \quad (30')$$

となる. なお, 衝撃波形状は, (24) 式により決定される.

2.5 変数分離

摂動方程式 (15) を, 次の様に変換する.

$$\frac{\partial^2 u_p}{\partial \varphi^2} + A(\theta) \frac{\partial^2 u_p}{\partial \theta^2} + B(\theta) \frac{\partial u_p}{\partial \theta} + C(\theta) u_p = 0 \quad (31)$$

ここで,

$$A(\theta) = \sin^2 \theta \left(1 - \frac{\bar{v}^2}{a^2}\right), \quad (32.1)$$

$$B(\theta) = \sin^2 \theta \left\{ -\frac{\gamma-1}{a^4} \bar{v}^3 \left(\bar{u} + \frac{d\bar{v}}{d\theta}\right) - 2 \frac{\bar{u}\bar{v}}{a^2} + \cot \theta - 2 \frac{\bar{v}}{a^2} \frac{d\bar{v}}{d\theta} \right\} \quad (32.2)$$

$$C(\theta) = \sin^2 \theta \left\{ -\frac{\gamma-1}{a^4} \bar{u}\bar{v}^2 \left(\bar{u} + \frac{d\bar{v}}{d\theta}\right) + 2 - \frac{\bar{v}^2}{a^2} \right\} \quad (32.3)$$

(19') および (30') 式を考慮して, $u_p(\theta, \varphi)$ を変数分離する.

$$u_p(\theta, \varphi) = \Theta(\theta) \Phi(\varphi) \quad (33)$$

これを (31) に代入すると

$$\frac{1}{\Theta} \left\{ A(\theta) \frac{d^2 \Theta}{d\theta^2} + B(\theta) \frac{d\Theta}{d\theta} + C(\theta) \Theta \right\} = -\frac{1}{\Phi} \frac{d^2 \Phi}{d\varphi^2} \quad (34)$$

を得る. 分離定数を n^2 ($n > 0$) とおくと, それぞれ次の常微分方程式を得る.

(i) φ に関する方程式

$$\frac{d^2 \Phi}{d\varphi^2} + n^2 \Phi = 0 \quad (35)$$

(35) 式は, 基本解系

$$\cos n\varphi, \quad \sin n\varphi \quad (36)$$

をもつ.

(ii) θ に関する方程式

$$A(\theta) \frac{d^2 \Theta}{d\theta^2} + B(\theta) \frac{d\Theta}{d\theta} + \{ C(\theta) - n^2 \} \Theta = 0 \quad (37)$$

(37)式は、基本解系

$$\Theta_{n1}(\theta), \Theta_{n2}(\theta) \quad (38)$$

をもつ (Θ_{n1}, Θ_{n2} については、次章で取り扱う)。

以上より、解 $u_p(\theta, \varphi)$ は、これらの基本解系を境界条件に適合する様に組合せた和として得られる。すなわち (19') (30') より、

$$u_p(\theta, \varphi) = \sum_{n=1}^{\infty} (C_{n1} \Theta_{n1} + C_{n2} \Theta_{n2}) \cos n\varphi \quad (39)$$

となる。ここで C_{n1}, C_{n2} は積分定数である。

2.6 圧力係数

圧力係数 C_p を次式で定義する。

$$C_p = \frac{2}{rM_\infty^2} \left(\frac{p}{p_\infty} - 1 \right) \quad (40)$$

(40)式に斜め衝撃波関係式および等エントロピ関係式を用い、 $O(\epsilon^2)$ 以上の高次微小項を省略すると、物体面上における圧力係数が、次式で与えられる。

$$C_p = \frac{2}{rM_\infty^2} \left[\frac{p_t}{p_\infty} \left(1 - \frac{\bar{u}_s^2}{c^2} \right) \frac{r}{r-1} \left\{ 1 - \frac{r}{r-1} \frac{2\bar{u}_s}{c^2 - \bar{u}_s^2} u_p(\bar{\theta}_0, \varphi) \right\} - 1 \right] \quad (41)$$

または、

$$C_p = \bar{C}_p - \eta u_p(\bar{\theta}_0, \varphi) \quad (42)$$

ここで、

$$\bar{C}_p = \frac{2}{rM_\infty^2} \left[\frac{p_t}{p_\infty} \left(1 - \frac{\bar{u}_s^2}{c^2} \right) \frac{r}{r-1} - 1 \right] \quad (43.1)$$

$$\eta = \frac{2}{rM_\infty^2} \frac{p_t}{p_\infty} \left(1 - \frac{\bar{u}_s^2}{c^2} \right) \frac{r}{r-1} \frac{r}{r-1} \frac{2\bar{u}_s}{c^2 - \bar{u}_s^2} \quad (43.2)$$

$$\frac{p_t}{p_\infty} = \left[\frac{(\gamma+1) M_\infty^2 \sin^2 \bar{\theta}_1}{(\gamma-1) M_\infty^2 \sin^2 \bar{\theta}_1 + 2} \right]^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \left[\frac{\gamma+1}{2\gamma M_\infty^2 \sin^2 \bar{\theta}_1 - (\gamma-1)} \right]^{\frac{1}{\gamma-1}} \\ \times \left[1 + \frac{\gamma-1}{2} M_\infty^2 \right]^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \quad (43.3)$$

3. 近似方程式

前章において、摂動方程式(15)を解くことは、常微分方程式(37)を解くことに帰着された。しかしながら、(37)式中の係数 $A(\theta)$ 、 $B(\theta)$ および $C(\theta)$ は、複雑な形をしており、また、 \bar{u} 、 \bar{v} は、Taylor-Maccollの式(又は(10)式)を解いてはじめて定まるものであるから、更に取り扱いが煩雑である。

そこで、以下3種類の近似を行なうことにより、(37)式を解析的に取り扱う。

3.1 近似 I

衝撃波層内において、密度の変化は一般に小さい。そこで、ひとつの極限として

$$\rho = \text{const.} \quad (44)$$

を仮定する。このとき $a = \infty$ となり、(37)式は、

$$\sin^2 \theta \frac{d^2 \theta}{d\theta^2} + \sin \theta \cos \theta \frac{d\theta}{d\theta} + (2 \sin^2 \theta - n^2) \theta = 0 \quad (45)$$

に簡略化される。

(45)式は、 $n=1, 2$ の場合、求積法により解が求められ、初等関数で表示される。

(i) $n=1$ の場合

C_{11} 、 C_{12} を積分定数として

$$\theta_{n=1}(\theta) = C_{12} e^{H_1(\theta; C_{11})} \sin \theta \quad (46)$$

ここで

$$H_1(\theta; C_{11}) = \int_{\theta_0}^{\theta} \frac{4}{C_{11} \sin^3 \theta - \sin 2\theta + 2 \sin^3 \theta \log \left(\tan \frac{\theta}{2} \right)} d\theta \quad (47)$$

C_{11} 、 C_{12} は、境界条件から定められ、

$$C_{11} = \frac{1}{\sin^2 \bar{\theta}_1} \left\{ \frac{4}{K_1 K_2 \sin \bar{\theta}_1 - \cos \bar{\theta}_1} + 2 \cos \bar{\theta}_1 \right. \\ \left. - 2 \sin^2 \bar{\theta}_1 \log \left(\tan \frac{\bar{\theta}_1}{2} \right) \right\} \quad (48.1)$$

$$C_{12} = 2 \bar{u}_s (\varepsilon_1 + \alpha) \left\{ \cos \bar{\theta}_0 + \frac{4}{C_{11} \sin^3 \bar{\theta}_0 - 2 \cos \bar{\theta}_0 + 2 \sin^2 \bar{\theta}_0 \log \left(\tan \frac{\bar{\theta}_0}{2} \right)} \right\} \quad (48.2)$$

(ii) $n = 2$ の場合

C_{21}, C_{22} を積分定数として

$$\theta_{n=2}(\theta) = C_{22} e^{H_2(\theta; C_{21})} \sin^{-2} \theta \quad (49)$$

ここに

$$H_2(\theta; C_{21}) = - \int_{\bar{\theta}_0}^{\theta} \frac{3 \sin^3 \theta}{\sin^2 \theta \cos \theta + 2 \cos \theta + C_{21}} d\theta \quad (50)$$

C_{21}, C_{22} は、境界条件から定められ、

$$C_{21} = - \cos \bar{\theta}_1 (\sin \bar{\theta}_1 + 2) - \frac{3 \sin^3 \bar{\theta}_1}{K_1 K_2 + 2 \cot \theta_1} \quad (51.1)$$

$$C_{22} = - 2 \bar{u}_s \varepsilon_2 \left\{ 2 \sin^{-3} \bar{\theta}_0 \cos \bar{\theta}_0 + \frac{3 \sin \bar{\theta}_0}{\cos \bar{\theta}_0 (\sin^2 \bar{\theta}_0 + 2) + C_{21}} \right\} \quad (51.2)$$

一般の $n \geq 3$ の場合について、求積法で解くことは困難である。そこで、解を級数表示で求める方法を用いる。(45)式は、 $\theta = 0$ を確定特異点 (regular singular point) とする二階線型常微分方程式であるから、Frobenius 法により、解が求められる [10]。

基本解のひとつは、

$$\theta_{n1}(\theta) = \theta^\lambda \sum_{\nu=0}^{\infty} d_\nu \theta^\nu \quad (d_0 = 1) \quad (52)$$

と表示され、 λ および d_ν は、次の様にして決定される。

まず、(45)式を次の様に変形する。

$$\theta^2 \frac{d^2 \theta}{d\theta^2} + \theta \left(\cos \theta \frac{\theta}{\sin \theta} \right) \frac{d\theta}{d\theta} + \left\{ 2\theta^2 - n^2 \left(\frac{\theta}{\sin \theta} \right)^2 \right\} \theta = 0 \quad (53)$$

(53)式中 括弧の中は正則関数であるから Taylor 級数展開ができて、それぞれ

$$\cos \theta \cdot \frac{\theta}{\sin \theta} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \alpha_\nu \theta^\nu \quad (54.1)$$

$$2\theta^2 - n^2 \left(\frac{\theta}{\sin\theta}\right)^2 = \sum_{\nu=0}^{\infty} \beta_{\nu} \theta^{\nu} \quad (54.2)$$

となる。ただし

$$\begin{cases} \alpha_0 = 1 \\ \alpha_{2k} = \sum_{j=0}^{k-1} (-1)^j \frac{1}{(2j)!} \frac{2^{2k-2j-2}}{(2k-2j)!} B_{k-j} + (-1)^k \frac{1}{(2k)!} \\ \alpha_{2k-1} = 0 \end{cases} \quad (k = 1, 2, 3, \dots) \quad (55.1)$$

$$\begin{cases} \beta_0 = -n^2, \quad \beta_1 = 0, \quad \beta_2 = 2 - \frac{1}{3}n^2 \\ \beta_{2k} = -n^2 \sum_{j=1}^{k-1} \frac{(2^{2j-2}) (2^{2k-2j-2})}{(2j)! (2k-2j)!} B_j B_{k-j} - 2n^2 \frac{2^{2k-2}}{(2k)!} B_k \\ \beta_{2k-1} = 0 \end{cases} \quad (k = 2, 3, 4, \dots) \quad (55.2)$$

B_k : Bernoulli の数.

λ は, 決定方程式

$$I(\lambda) = \lambda^2 + (\alpha_0 - 1)\lambda + \beta_0 = 0 \quad (56)$$

のひとつの根として与えられる。すなわち

$$\lambda = \lambda_1 = n \quad (57)$$

d_{ν} は,

$$I_0(\lambda) = I(\lambda), \quad I_{\nu}(\lambda) = \lambda \alpha_{\nu} + \beta_{\nu} \quad (\nu = 1, 2, \dots) \quad (58)$$

とおくと

$$d_{\nu} = -\frac{1}{I_0(n+\nu)} \sum_{k=1}^{\nu} d_{\nu-k} I_k(n+\nu-k) \quad (\nu = 1, 2, \dots) \quad (59)$$

として決定される。

次に $\Theta_{n1}(\theta)$ と独立な解 $\Theta_{n2}(\theta)$ は,

$$\Theta_{n2}(\theta) = \left[\frac{\partial}{\partial \lambda} (\lambda + n) \Theta_{n1}(\theta) \right]_{\lambda = -n} \quad (60)$$

として求められる。

3.2 近似 II

衝撃波層内においては、天頂角方向速度成分 \bar{v} は、一般に小さな値をとる ($\theta = \bar{\theta}_0$ において $\bar{v} = 0$)。したがって、ここでは

$$\left(\frac{\bar{v}}{a}\right)^2 \ll 1 \quad (61)$$

を仮定する。

まず基本流 \bar{u} , \bar{v} に対する (10) 式は, (61) 式の仮定のもとでは,

$$\frac{d^2 \bar{u}}{d\theta^2} + \cot \theta \frac{d\bar{u}}{d\theta} + 2\bar{u} = 0 \quad (62)$$

に簡略化される。このとき \bar{u} は, (62) 式の解として初等関数で表わされて

$$\begin{aligned} \bar{u} = \bar{u}_s & \left(\cos \bar{\theta}_0 - \sin^2 \bar{\theta}_0 \log \frac{\sin \bar{\theta}_0}{1 + \cos \bar{\theta}_0} \right) \cos \theta \\ & + \bar{u}_s \sin^2 \bar{\theta}_0 \left(1 + \cos \theta \log \frac{\sin \theta}{1 + \cos \theta} \right) \end{aligned} \quad (63)$$

となる [11]。ここで,

$$\log \frac{\sin \theta}{1 + \cos \theta} = \log \theta - \log 2 + \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{(2^{2\nu-1} - 1) B_\nu}{(2\nu)! \nu} \theta^{2\nu} \quad (64)$$

B_ν : Bernoulli の数。

である。(64) 式中, $\theta = 0$ で多価性をもつ $\log \theta$ を, 次の様に θ の多項式で近似する;

$$\log \theta = \sum_{\nu=1}^N (-1)^{\nu-1} \frac{(\theta-1)^\nu}{\nu} \quad (65)$$

(64), (65) 式を (63) 式に適用すると \bar{u} は, 正則関数となり, $\bar{v} = d\bar{u}/d\theta$ も同様に正則関数となる。

次に (61) 式の仮定のもとに, (37) 式中の $A(\theta)$, $B(\theta)$ および $C(\theta)$ の評価を行う。まず,

$$-\frac{r-1}{a^4} \bar{v}^3 \left(\bar{u} + \frac{d\bar{v}}{d\theta} \right) = 0 \quad (66)$$

(62) 式に \bar{v}/\bar{a}^2 を掛けると

$$-\frac{\bar{v}}{\bar{a}^2} \frac{d\bar{v}}{d\theta} = 2 \frac{\bar{u}\bar{v}}{\bar{a}^2} \quad (67)$$

(10) 式より

$$\bar{u} + \frac{d\bar{v}}{d\theta} = -\bar{u} - \bar{v} \cot \theta \quad (68)$$

したがって,

$$-\frac{r-1}{a^4} \bar{u} \bar{v}^2 \left(\bar{u} + \frac{d\bar{v}}{d\theta} \right) = \frac{r-1}{a^4} \bar{u}^2 \bar{v}^2 \quad (69)$$

ここで, $\cot \theta = O(1)$ とした. 更に,

$$\bar{a}^2 = \frac{r-1}{2} c^2 \left(1 - \frac{\bar{u}^2}{c^2} \right) \quad (70)$$

であるから

$$\frac{\bar{u} \bar{v}}{a^2} = \frac{2 \bar{u} \bar{v}}{(r-1) c^2} \left\{ 1 + \frac{\bar{u}^2}{c^2} + \left(\frac{\bar{u}^2}{c^2} \right)^2 + \dots \right\} \quad (71)$$

ここで

$$\frac{\bar{u}^3 \bar{v}}{c^4} < \frac{\bar{v}^2}{a^2} \quad (72)$$

と考えられるから, 結局

$$\frac{\bar{u} \bar{v}}{a^2} = \frac{2}{r-1} \frac{\bar{u} \bar{v}}{c^2} \quad (73)$$

以上, (66), (67), (69)および(73)式を用いると, (37)式は,

$$\begin{aligned} \sin^2 \theta \frac{d^2 \theta}{d\theta^2} + \sin^2 \theta \left(\frac{4}{r-1} \frac{\bar{u} \bar{v}}{c^2} + \cot \theta \right) \frac{d\theta}{d\theta} \\ + \left[\sin^2 \theta \left\{ \frac{4}{r-1} \left(\frac{\bar{u} \bar{v}}{c^2} \right)^2 + 2 \right\} - n^2 \right] \theta = 0 \end{aligned} \quad (74)$$

に近似される.

\bar{u} , \bar{v} は, 前述の様に正則関数で近似されるから, (74)式は, 近似 I の場合と同様に, $\theta = 0$ を確定特異点とする二階線型常微分方程式であるから, 前節と同様に, Frobenius 法により, 級数表示解を求めることができる.

3.3 近似 III

(37)式中の \bar{u} , \bar{v} を θ の多項式で近似する. すなわち Maccoll [12]に従って, \bar{u} , \bar{v} を Taylor 級数表示;

$$\begin{aligned}\bar{u} &= \bar{u}_s - \bar{u}_s (\theta - \bar{\theta}_0)^2 + \bar{u}_s \cot \bar{\theta}_0 \frac{(\theta - \bar{\theta}_0)^3}{3} - \dots \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} x_j (\theta - \bar{\theta}_0)^j\end{aligned}\quad (75.1)$$

$$\begin{aligned}\bar{v} &= -2\bar{u}_s (\theta - \bar{\theta}_0) + \bar{u}_s \cot \bar{\theta}_0 (\theta - \bar{\theta}_0)^2 - \dots \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} j x_j (\theta - \bar{\theta}_0)^{j-1}\end{aligned}\quad (75.2)$$

するとき，ここでは，その最初の第N項までの θ の多項式で， \bar{u} ， \bar{v} を近似する．すなわち

$$\bar{u} = \sum_{j=0}^N x_j (\theta - \bar{\theta}_0)^j \quad (76.1)$$

$$\bar{v} = \sum_{j=1}^N j x_j (\theta - \bar{\theta}_0)^{j-1} \quad (76.2)$$

さらに，衝撃波層内は，到る所 $\bar{v}^2/\bar{a}^2 < 1$ を仮定する．

上述の仮定のもとに(37)式の評価を行なう．(37)式を次の様に変形する．

$$\frac{d^2 \theta}{d \theta^2} + D(\theta) \frac{d \theta}{d \theta} + E(\theta) \theta = 0 \quad (77)$$

ここに，

$$D(\theta) = \frac{-\frac{r-1}{\bar{a}^4} \bar{v}^3 \left(\bar{u} + \frac{d\bar{v}}{d\theta} \right) - \frac{\bar{u}\bar{v}}{\bar{a}^2} + \cot \theta - \frac{2\bar{v}}{\bar{a}^2} \frac{d\bar{v}}{d\theta}}{1 - \frac{\bar{v}^2}{\bar{a}^2}} \quad (78.1)$$

$$E(\theta) = \frac{-\frac{r-1}{\bar{a}^4} \bar{u} \bar{v}^2 \left(\bar{u} + \frac{d\bar{v}}{d\theta} \right) + 1}{1 - \frac{\bar{v}^2}{\bar{a}^2}} + 1 - \frac{n^2}{\sin^2 \theta \left(1 - \frac{\bar{v}^2}{\bar{a}^2} \right)} \quad (78.2)$$

今，

$$\frac{1}{\bar{a}^2} = \frac{2}{(r-1)c^2} \sum_{\nu=0}^{\infty} \left(\frac{\bar{u}^2 + \bar{v}^2}{c^2} \right)^{\nu} \quad (79)$$

と表わすことができるから

$$\frac{1}{1 - \frac{\bar{v}^2}{a^2}} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \left(\frac{\bar{v}^2}{a^2} \right)^{\nu} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \left[\frac{2\bar{v}^2}{(\tau-1)c^2} \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{\bar{u}^2 + \bar{v}^2}{c^2} \right)^j \right]^{\nu} \quad (80)$$

である。(79) および (80) 式を (77) 式に代入し, (76) 式を用いると, $D(\theta)$, $E(\theta)$ 中の \bar{u} , \bar{v} に関する項はすべて正則な θ の関数となる. 結局 $D(\theta)$ の中では $\cot \theta$ が, $E(\theta)$ の中では, $1/\sin^2 \theta$ が, それぞれ $\theta=0$ を特異点としてもつことになる. したがって (77) 式もまた, $\theta=0$ を確定特異点とする二階線型常微分方程式であるから, Frobenius 法により, 解を級数表示で求めることができる.

4. 応用—計算例と実験結果との比較

4.1 実験

実験は宇宙航空研究所の 40×40 cm 超音速風洞を用いて行なわれた. 模型は, 半頂角 20° の円錐を用い, 一様流マッハ数 $M_\infty = 2.0$, レイノズル数 $Re_\infty = 3 \times 10^5 / \text{cm}$ で, 迎角 $\alpha = -8^\circ \sim 8^\circ$ の範囲で, 表面圧力および錐状衝撃波の tilt 角を測定した. 特に, 小さな迎角におけるデータを得ることを目的として実験を行なった.

4.2 計算例

現在, 電子計算機用の数値解法が良く発達している. ここでは, 常微分方程式に対する数値解法として, 高精度の Runge-Kutta-Gill 法を用いて, 各近似 I, II, III を直接数値積分を

表1 錐体の Fourier 係数および迎角

model		Case 1		Case 2	
		circular cone		elliptic cone $b/a = 1.39$	
M_∞		2.0	3.53	3.09	
$\bar{\theta}_0$ (degree)		20	15	16.6600	
Fourier coefficient (degree)	ϵ_1	/		0.	
	ϵ_2			-2.59564	
	ϵ_3			0.	
	ϵ_4			0.30269	
	ϵ_5			0.	
	ϵ_6			-0.03920	
	ϵ_7			0.	
	ϵ_8			0.00533	
	ϵ_9			0.	
	ϵ_{10}			-0.00074	
α (degree)		2.4	5.0	0	5.0

行ない、それら近似式の有効性を検討する。なお、近似Ⅲに関して、 \bar{u} 、 \bar{v} は、(10)式を直接数値積分した結果を用いる。したがって、以下では、近似Ⅲとして参照するものはすべて(15)式の厳密解に対応する。計算は、

Case 1. $M_\infty = 2.0$, 半頂角 20° 円錐に対する実験, および, $M_\infty = 3.53$, 半頂角 15° 円錐に対する Halt ら [13] の実験

Case 2. $M_\infty = 3.09$, 長径短径比 1.39 の楕円錐に対する Zakkay ら [14] の実験, Martellucci [15] の計算と実験

のそれぞれの条件に合わせて行なう。表 1 に各ケースの物体の Fourier 係数および迎角を示す。なお楕円錐は、Fourier 級数の第10項までとる。

4.3 結果と考察

(i) Case 1. (円錐の場合) :

図 2 に、 20° 円錐の表面上 $\psi = 150^\circ$ の点における圧力係数の迎角に対する変化の様子を、実験結果に、近似Ⅰによる計算結果とを合せて示す。図 2 より、観測点における実験値は、風上側に位置する場合には、迎角に直線的に依存して変化するが、風下側に位置した場合、迎角が大きくなると、直線的でなくなる。この場合、境界層が、風下側に移るにつれて厚くなり [16]、その影響で圧力が、本近似理論で計算される程には低下せず、また、迎角が大

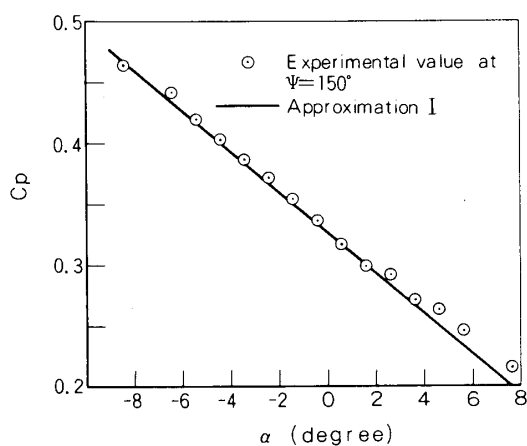


図 2 迎角による円錐表面 ($\psi = 150^\circ$) の圧力変化
 $M_\infty = 2.0$, $\bar{\theta} = 20^\circ$

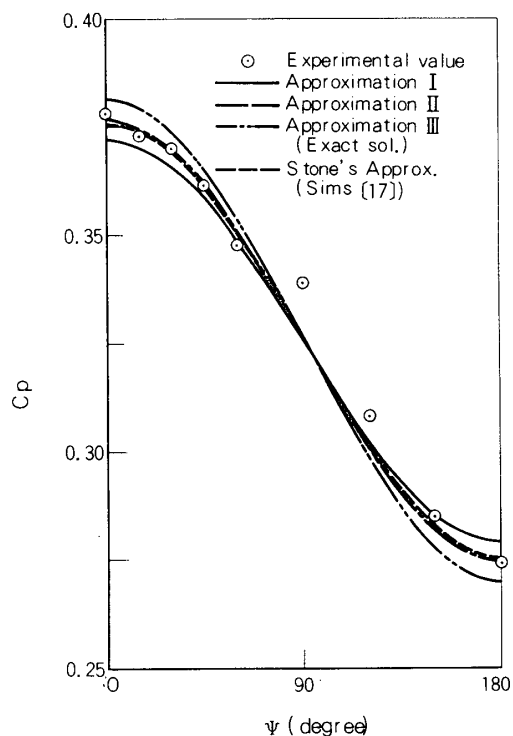


図 3 円錐表面上圧力分布
 $M_\infty = 2.0$, $\bar{\theta}_0 = 20^\circ$, $\alpha = 2.4^\circ$

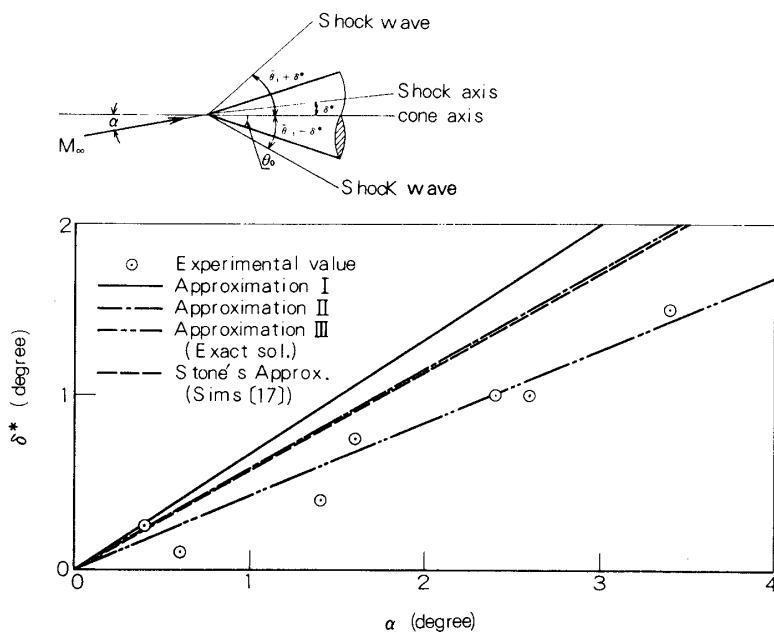


図4 円錐状衝撃波の tilt 角の迎角による変化
 $M_\infty = 2.0, \bar{\theta}_0 = 20^\circ$ (円錐)

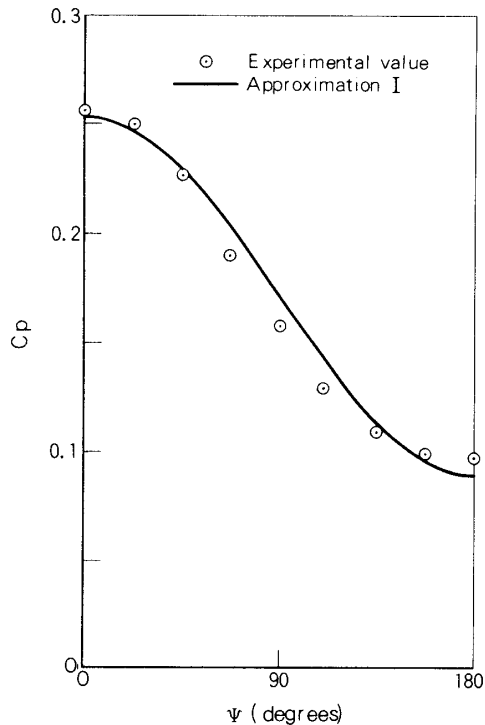


図5 円錐表面上圧力分布
 $M_\infty = 3.53, \bar{\theta}_0 = 15^\circ, \alpha = 5^\circ$

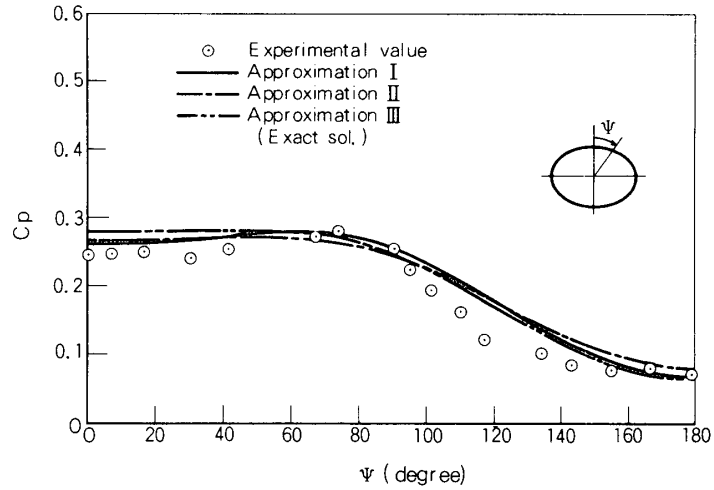


図6 楕円錐表面上圧力分布(1)
 $M_\infty = 3.09, b/a = 1.39, \alpha = 5^\circ$

きくなるにつれて剥離の現象が、生ずるためと考えられる。「 C_p が、 α に線型依存する。」というのが、本近似理論の必要条件である。図2より、迎角が小さい場合、それが実験的に支持されているのがわかる。図3に、同円錐の $M_\infty = 2.0, \alpha = 2.4^\circ$ のときの表面上圧力分布について、実験結果及び、各近似式の計算結果を示す。比較のため、Stone の理論に基づく Sims [17] の計算結果も合せて示す。Stone の理論は、衝撃波層内における方位角方

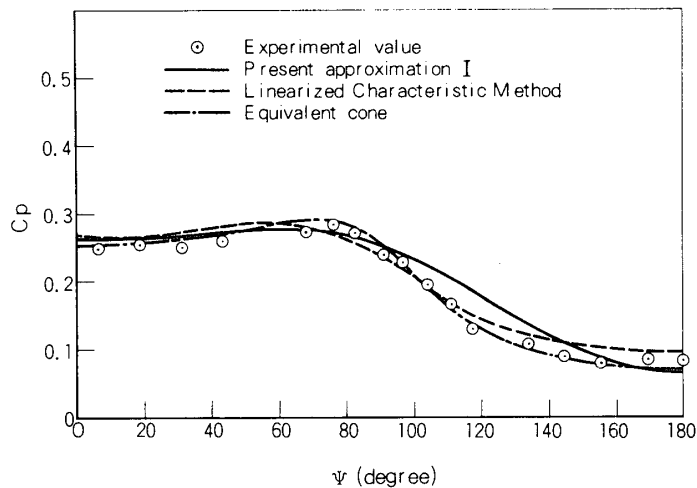


図7 楕円錐表面上圧力分布(2)
 $M_\infty = 3.09, b/a = 1.39, \alpha = 5^\circ$

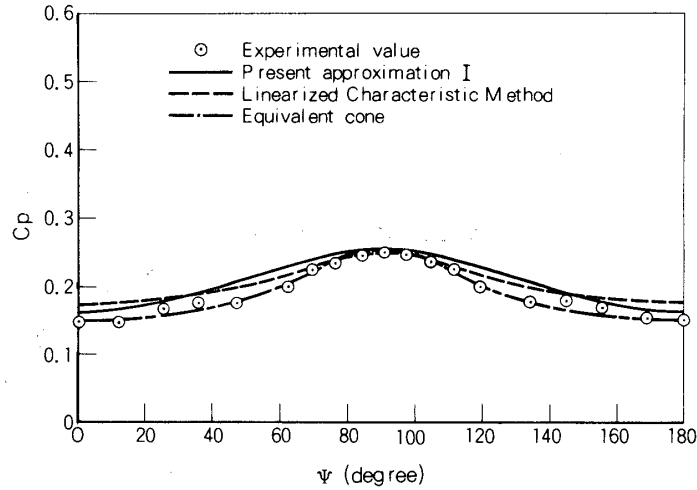


図8 楕円錐表面上圧力分布
 $M_\infty = 3.09$, $b/a = 1.39$, $\alpha = 0^\circ$

向のエントロピ変化も考慮に入れた線型理論であるが、それによる結果は、本近似理論と、とくに近似Ⅱと、ほとんど差異が見られない。図4に錐状衝撃波の tilt 角の迎角による変化の様子を示す。

この図からも、Stone の理論と近似Ⅱは、良く一致しているのがみられる。15° 円錐の場合についての表面上の圧力分布を、図5に示す。

(ii) Case 2. (楕円錐の場合) :

$\alpha = 5^\circ$ の場合について、まず図6に、物体面上圧力分布に関して、Zakkay らによる実験結果〔14〕と、近似Ⅰ、Ⅱ、Ⅲによる計算結果とを合せて示す。これより、楕円錐の場合でも、各近似式間の差異は、ほとんど見られない。また楕円錐は、表1より、Fourier 級数の第3項まで、すなわち、

$$\theta = \bar{\theta}_0 + \varepsilon_2 \cos 2\varphi + \alpha \cos \varphi \quad (81)$$

で、十分に、その形状が、近似されることがわかる。他の近似理論との比較のため、図7に equivalent cont による近似、Ferri の Linearized characteristics method を用いた Martellucci の計算結果〔15〕、および、近似Ⅰの結果を示す。図7の実験値は、Martellucci〔15〕によるものである。無迎角の場合についての圧力分布を図8に示す。この場合は本近似解と、Martellucci の計算結果とでは、実験に対する差異の程度は、同等である。

以上両ケースの計算例より、等エントロピ流仮定を用いた本近似理論で十分に圧力を評価することがわかる。本計算例は、微小擾乱範囲の限界以上の条件（例えば、Case 2は

$\alpha/\bar{\theta}_0 = 0.30$)への適用例である。したがって、物体形状が、より無迎角円錐に近い場合には、更に実験結果と良く一致するであろう。また各近似 I, II, III (厳密解)とも、ほとんど同程度の結果を与えているので、密度一定の仮定にもとづく近似 I で、十分に、圧力を評価しうることがわかる。とくに、円錐や楕円錐まわりの流れに対しては、近似 I の、初等関数で表示された閉じた形式の解、(46)および(49)式が有用であり、簡便である。

5. 結 論

円からわずかに偏った断面形状をもつ錐体まわりの超音速流に対する3種の近似式およびその解が、提示された。

実験結果および他の近似理論と比較した結果、本近似理論は、有効であると考えられる。とくに、衝撃波層内を密度一定と仮定した近似 I で十分に空力特性を近似しうることが示された。円錐および楕円錐の場合には、近似 I の閉じた形式の解で、簡単に、流れを評価することができる。

謝 辞

本研究を遂行するにあたって、適切な助言、示唆をして下さった辛島桂一助教授、並びに労をおしまず、実験を援助して下さい、関和司氏、および辛島研究室の佐藤清、金城政敏両氏に深く感謝の意を表します。

1976年7月20日 航空力学部

参 考 文 献

- [1] G. I. Taylor and J. W. Maccoll: The Air Pressure on a Cone Moving at High Speeds, Proc. Roy. Soc. (A), Vol. 139 (1933) pp. 278-310.
- [2] A. H. Stone: On Supersonic Flow past a Slightly Yawing Cone, J. Math. and Phys., Vol. 27 (1948) pp. 67-81.
- [3] A. Ferri: Supersonic Flow around Circular Cones, NACA TN-2236 (1950).
- [4] G. B. W. Young and C. P. Siska: Supersonic Flow around Cones at Large Yaw, J. Aero. Sci., Vol. 19 (1952) pp. 111-142.
- [5] R. L. Chapkis: Hypersonic Flow over an Elliptic Cone, J. Aero. Sci., Vol. 28 (1961) pp. 844-854.
- [6] P. M. Stocker and F. E. Mauger: Supersonic Flow past Cones of General Cross-Section, J. Fluid Mech., Vol. 13 (1962) pp. 383-399.
- [7] B. A. Woods: The Supersonic Flow past an Elliptic Cone, The Aeronautical Quarterly, Vol. 20 (1969) pp. 382-404.
- [8] M. Ya. Ivanov and A. N. Kraiko: Calculation of the Supersonic Flow around Conical Bodies, U.S. S.R. Comp. Math. and Math. Phys., Vol. 13 (1973) pp. 228-245.
- [9] J. L. Sims: Tables for Supersonic Flow around Right Circular Cones at Zero Angle of Attack, NASA SP-3004 (1964).
- [10] 齊藤利弥: 常微分方程式論, 朝倉, (1967).
- [11] H. E. Fettis: An Approximate Solution to Supersonic Conical Flow, J. Aero. Sci., Vol. 23 (1956) pp. 1122-1123.

- [12] J. W. Maccoll: The Conical Shock Wave formed by a Cone moving at a High Speed, Proc. Roy. Soc. (A), Vol. 159 (1937) pp. 459-472.
- [13] M. Halt and J. Blackie: Experiments on Circular Cones at Yaw in Supersonic Flow, J. Aero. Sci., Vol. 23 (1956) pp. 931-936.
- [14] V. Zakkay and M. Visich, Jr.: Experimental Pressure Distributions on Conical Elliptical Bodies at $M_\infty = 3.09$ and 6.0, PIBAL Rept. No. 467 (1959).
- [15] A. Martellucci: An Extension of the Linearized Characteristics Method for Calculating the Supersonic Flow around Elliptic Cones, PIBAL Rept. No. 517 (1959).
- [16] F. K. Moore: Three-Dimensional Laminar Boundary-Layer Flow, J. Aero. Sci., Vol. 20 (1953) pp. 525-534.
- [17] J. L. Sims: Tables for Supersonic Flow around Right Circular Cones at Small Angle of Attack, NASA SP-3007 (1964).

補 遺

衝撃波層内におけるエントロピの変化について

一様エネルギー流の場合，速度ベクトル，渦度をそれぞれ， \mathbf{v} ， \mathbf{w} とすると，

$$\mathbf{v} \times \mathbf{w} = -T \text{grad } S \quad (\text{A-1})$$

が成立する。成分で表わすと，

$$v \left(v - \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) - w \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial u}{\partial \varphi} - w \right) = 0 \quad (\text{A-2})$$

$$w \left(\frac{\partial w}{\partial \theta} - \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial v}{\partial \varphi} + w \cot \theta \right) - u \left(v - \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) = -2T \frac{\partial S}{\partial \theta} \quad (\text{A-3})$$

$$u \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial u}{\partial \varphi} - w \right) - v \left(\frac{\partial w}{\partial \theta} - \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial v}{\partial \varphi} + w \cot \theta \right) = -\frac{2T}{\sin \theta} \frac{\partial S}{\partial \varphi} \quad (\text{A-4})$$

となる。(A-2)，(A-3)をまとめると，

$$vw \left(\frac{\partial w}{\partial \theta} - \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial v}{\partial \varphi} + w \cot \theta \right) - uw \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial u}{\partial \varphi} - w \right) = -2vT \frac{\partial S}{\partial \theta} \quad (\text{A-5})$$

ここで上式に(12)式を代入すると，左辺は $O(\epsilon^2)$ となる。

したがって $\partial S / \partial \theta$ も $O(\epsilon^2)$ ，すなわち，

$$\frac{\partial S}{\partial \theta} = 0 \quad (\text{A-6})$$

となる。これより，エントロピは，子午面内では一定となり，一次オーダーの微小擾乱流の仮定のもとでは，vortical layer におけるエントロピの急激な変化は，取り扱いえない。

従って、(A-6)式よりエントロピは、

$$S = \bar{S} + S_p(\varphi), \quad \bar{S} = \text{const.} \quad (\text{A-7})$$

と表わされる。

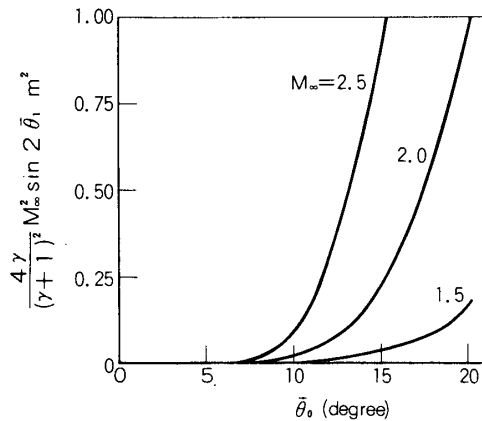
一方、方位角方向の最大エントロピ差 ΔS_{max} は、例えば、有迎角円錐の場合では、 $\varphi = 0, \pi$ の子午面の間で生ずる。今、衝撃波の tilt 角を δ^* とすると、風上、風下側の衝撃波角は、それぞれ $\bar{\theta}_1 - \delta^*$, $\bar{\theta}_1 + \delta^*$ となる、衝撃波を横切ったエントロピ増加量は、 $m = (M_\infty^2 \sin^2 \bar{\theta}_1 - 1)$ について3次の程度であるので、 m の4次以上の項を省略するとき、近似的に

$$\frac{\Delta S_{max}}{R} = \frac{4\gamma}{(\gamma+1)^2} M_\infty^2 \sin 2\bar{\theta}_1 \cdot m^2 \delta^* \quad (\text{A-8})$$

と評価できる。 δ^* の係数の大きさの程度を、 $\bar{\theta}_0$ および M_∞ に対応づけて、図A-1に示す。これより、 $\bar{\theta}_0$ が小さな場合、又は M_∞ が小さな場合、その係数自体が1よりも充分小さくなり、全体として、 ΔS_{max} は、無視できる程度となる。更に、

$$\delta^* = \kappa \alpha$$

とおくと、 κ の値は、実験的に、0.1 ~ 0.8 の程度であり m が小さい場合程 κ は小さい値をとる [2]。



図A-1 (A-8)式の δ^* の係数の $\bar{\theta}_0$ による変化