

(II. 5. 3)

## 分散におよぼす回転速度の影響

富 田 文 治

On the Dispersion of SSR Rocket due to the Thrust Malalignment  
and the Stabilizing Effects of Spinning Motion

By

Bunji TOMITA

**Abstract:** In this report, the dispersion of flight path of SSR Rocket due to the thrust malalignment and the stabilizing effects of spinning motion during burning are analysed. The calculational results show that the fin canting method, to set the fin blades at an angle to the axis of symmetry instead of parallel with it, is of limited usefulness because it does not give the rocket spin during the early part of burning, where it is most important, and that the method of canting vane in nozzle which gives the rocket an angular acceleration about its axis of symmetry, is more useful method than that of fin canting, because it gives the rocket spin during the early part of burning.

### 1. は し が き

ロケットの飛しょう径路の分散 (Dispersion) の原因には推力不整合 (Thrust malalignment), 尾翼取付け不整合 (Fin malalignment), 初期頭下げ運動 (Tipping-off motion), 横風 (Side wind) の影響などが考えられるが, ここでは通常のロケットにおいてかなりの影響度をもつ推力不整合による分散量をまず計算し, つぎにこの分散に対してランチャ長さ (Launching length), 機体軸回りの回転速度 (Spinning rate) などのもつ影響について調べてみる. 実際の分散量を求めるには, ロケットの空力特性, 構造特性, 飛しょう条件, 燃焼特性などを考慮して, 三次元的軌道計算をする必要があるが, ここでは, 第0近似的な分散の概略値を求める意味でかなり簡単化した仮定を設けて解析的な取扱いを試みた. 特にロケットの設計段階において, 構造的な不整合 (Malalignment) をどの程度におさえるべきか, また, その不整合に原因する分散を少なくするためのランチャ長さ, 回転速度の関係を調べるような場合には, ここで述べるような簡単化した解析的取扱いが有効であろう.

### 2. 運 動 方 程 式

ロケットの分散を調べるに際して, 前述のような立場に立って運動方程式をつぎのように簡略化する. すなわち, 抵抗, ジェットダンピング等は省略する. また推力不整合の中には推力線が機体軸に対して傾きをもつ, いわゆる不整合角度 (Malalignment angle) および,

推力線が重心を通らないためのいわゆる不整合距離 (Malalignment distance) の両者が考えられるが、計算結果によると後者によるモーメントの影響の方が大きいのが普通であるのでここでは不整合距離の影響について記述する (不整合角度についても同様の解析が行ないうる)。ピッチング、上下運動、前進運動の自由度をもつロケットの運動方程式はつぎのようにあらわされる。

$$\left. \begin{aligned} v \frac{dv}{ds} &= T/M = G \\ v^2 \frac{d\theta}{ds} &= Gs - g \cos \theta_0 \\ v^2 \frac{d^2\phi}{ds^2} + v \frac{dv}{ds} \cdot \frac{d\phi}{ds} &= \frac{G \Delta_L e^{j\varphi}}{k^2} - \frac{\frac{\partial C_m}{\partial \alpha} \cdot \rho A l v^2}{M k^2} \delta \\ \varphi &= \Gamma s \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

ここで、 $v$ ; 飛行速度,  $\theta$ ; 径路角,  $s$ ; 距離,  $\delta$ ; 迎角,  $T$ ; 推力,  $\phi$ ; ピッチ角,  $M$ ; 質量,  $\varphi$ ; 回転角,  $l$ ; 全長,  $\Delta_L$ ; Malalignment distance,  $A$ ; 断面積,  $\partial C_m / \partial \alpha$ ; モーメント傾斜,  $k$ ; 回転半径

Fin canting の場合には、後述するように回転角  $\varphi$  に対して単純な表示ができないので、ここでは簡単化のためにまずノズル内に Canting vane を付けた場合について解析することにし、回転角は飛行距離に比例するとした。

(1) 式の解は  $\theta$  についてつぎのように与えられる [I].

$$\theta = \theta_p + \frac{g \cos \theta_0}{G} G_1(P, S) + \frac{\sigma \Delta_L}{8\pi k^2} G_s(P, S, \gamma) \quad (2)$$

ここで、 $\theta_p$ ; ランチング角度,  $\gamma = \frac{d\varphi}{dt} / \frac{d\phi}{dt}$ ; 回転速度とピッチング速度の比

$$G_1 \doteq \frac{1}{2} \{ir(P) - ir(S)\}$$

$$\begin{aligned} G_s &= \frac{\pi}{\sqrt{\gamma+1}} + j \left\{ \frac{2}{\sqrt{\gamma-1}} \tan^{-1} \sqrt{\gamma-1} - \frac{1}{\sqrt{\gamma+1}} \ln(\sqrt{\gamma+1}+1) + \frac{1}{\sqrt{\gamma+1}} \ln(\sqrt{\gamma+1}-1) \right\} \\ &\quad - \frac{1}{\gamma} \left\{ (1-2j\gamma P) \frac{1}{\sqrt{\gamma P}} \overline{rc}(\gamma P) e^{j\gamma P} - (1-2j\gamma P) \frac{1}{\sqrt{\gamma P}} \sqrt{\frac{\pi}{2}} (1-j) + 2j e^{j\gamma P} - 4j \right\} \\ &\quad - \frac{1}{\sqrt{(\gamma+1)P}} \left\{ \overline{rc}[(\gamma+1)P] e^{j\gamma P} - \sqrt{\frac{\pi}{2}} (1-j) e^{-j\gamma P} \right\} \{1 - \sqrt{P} \overline{rc}(P)\} \\ &\quad + \frac{1}{\sqrt{(\gamma-1)P}} \left\{ \overline{rc}[(\gamma-1)P] e^{j\gamma P} - \sqrt{\frac{\pi}{2}} (1-j) e^{j\gamma P} \right\} \{1 - \sqrt{P} \overline{rc}(P)\} \end{aligned}$$

$$\{G_s\}_{\gamma=0} = 4G_2 \doteq ra^2(P) - \frac{1}{S}$$

$P = 2\pi p / \sigma$ ; 無次元ランチング長さ,  $S = 2\pi s / \sigma$ ; 無次元飛行距離,  $\sigma = 2\pi \left\{ \frac{2Mk^2}{\partial C_m} \right\}^{1/2}$

$\rho A l$ ; ピッチングの波長,  $p$ ; ランチング長さ,  $j = \sqrt{-1}$ ,  $ir(\omega)$ ,  $\gamma_c(\omega)$ ,  $\overline{\gamma_c}(\omega)$ ,

$ra^2(\omega)$ ; ロケット関数 [I]

(2)式において、それぞれ第1項は発射の方向、第2項は重力の影響によって $\theta_p$ の方向からはずれる量、第3項は推力不整合 (Malalignment distance) の影響を示す項である。したがって、 $\Delta_L=0$ のロケット (Ideal rocket)、回転のないロケット (Nonspinning rocket)、回転するロケット (Spinning rocket) の飛しょう径路角 $\theta_I$ 、 $\theta_N$ および $\theta_S$ はそれぞれつぎのようになる。

$$\left. \begin{aligned} \theta_I &= \theta_p + \frac{g \cos \theta_0}{G} G_1(P, S) \\ \theta_N &= \theta_p + \frac{g \cos \theta_0}{G} G_1(P, S) + \frac{\sigma \Delta_L}{2\pi k^2} G_2(P, S) \\ \theta_S &= \theta_p + \frac{g \cos \theta_0}{G} G_1(P, S) + \frac{\sigma \Delta_L}{8\pi k^2} G_3(P, S, \gamma) \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

### 3. 分散

飛しょう径路の分散をつぎのように定義する。

$$\eta = \frac{1}{s} \int_p^s (\theta - \theta_I) ds \quad (4)$$

したがって、推力不整合 $\Delta_L$ による分散は回転の有無に応じてつぎのようになる。

$$\left. \begin{aligned} \eta_N &= \frac{1}{s} \int_p^s (\theta_N - \theta_I) ds = \frac{1}{s} \int_p^s \frac{\sigma \Delta_L}{2\pi k^2} G_2(P, S) ds \\ \eta_S &= \frac{1}{s} \int_p^s (\theta_S - \theta_I) ds = \frac{1}{s} \int_p^s \frac{\sigma \Delta_L}{8\pi k^2} G_3(P, S, \gamma) ds \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

また、Ideal rocketにおいて重力のためにランチング方向からはずれる量 $\eta_\theta$ はつぎのように与えられる。

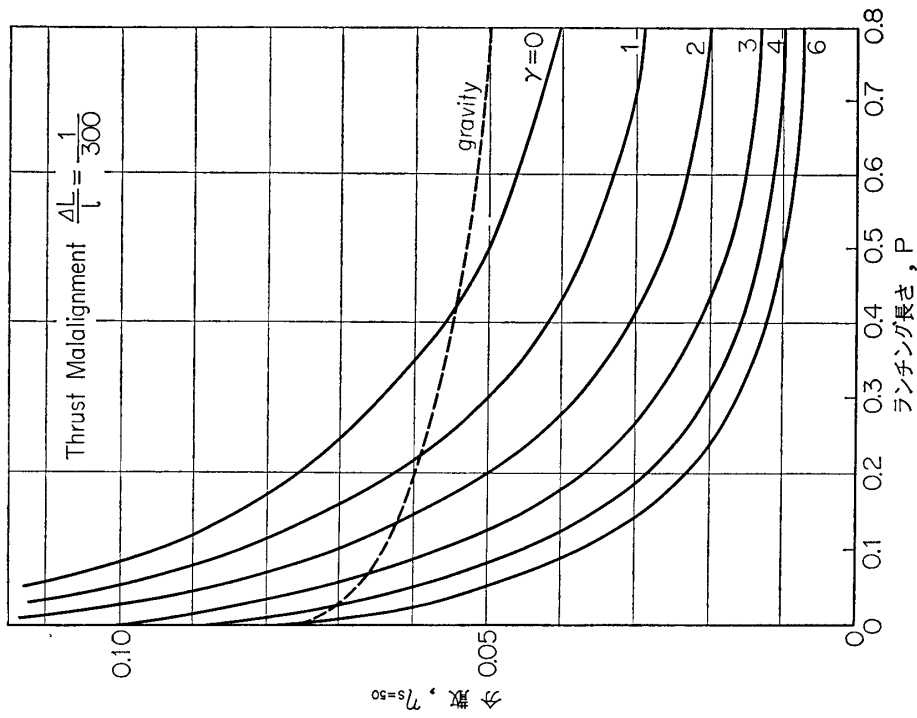
$$\eta_\theta = \frac{1}{s} \int_p^s (\theta_I - \theta_p) ds = \frac{1}{s} \int_p^s \frac{g \cos \theta_0}{G} G_1(P, S) ds \quad (6)$$

(5)、(6)式を計算すれば、それぞれの影響量による分散の程度が評価できるわけであるが、例としてHT-110型ロケットの性能、諸元をつぎのように仮定して、(5)、(6)式を計算してみる。

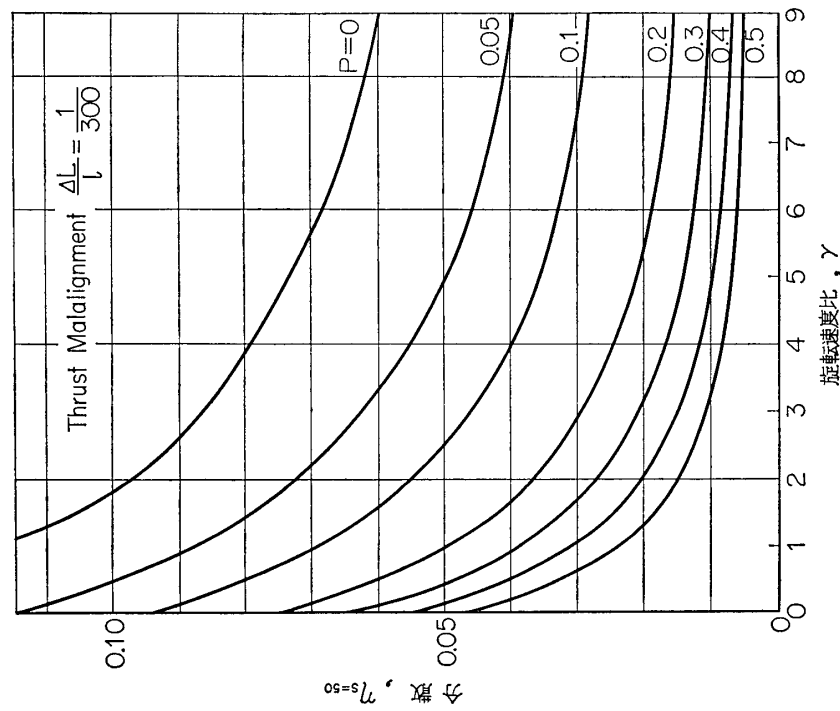
$$\begin{aligned} G &= 200 \text{ m/sec}^2, & l &= 3.0 \text{ m}, & A &= 0.01 \text{ m}^2 \\ M &= 3.0 \text{ kg m}^{-1} \text{ sec}^2, & k/l &= 1/\sqrt{10}, & \theta_0 &= 60^\circ \\ \frac{\partial C_m}{\partial \alpha} &= 3.0 & \Delta_L/l &= 1/300 \end{aligned}$$

分散量 $\eta$ は、当然 $S$ の値 (評価する位置) によって変化するが、ここでは一応 $S=50$ の位置で考えてみる。この値は、HT-110型ロケットの場合には発射点から大略1,000mの距離に相当する。また、 $\Delta_L/l=1/300$ という大きさはHT-110型については、推力線と重心との距離が約1cmに相当する。

第1図はランチング長さ $P$ をパラメータとして分散 $\eta$ と回転速度 $\gamma$ の関係を示す図で、第2図は回転速度 $\gamma$ をパラメータとして $P$ と $\eta$ の関係を示し、図中の点線は(6)式に対応する重力のみの影響を示す。HT-110型ロケットの波長は大體100~150m程度と考え



第 2 図 分散とランチング長さ



第 1 図 分散と回転速度比

られるから、無次元ランチング長さについては  $P \doteq \frac{1}{20} p$  程度に換算してこれらの図を見ればよい。

#### 4. 旋 転 速 度

ノズル内に設けたいわゆる Canting vane によってロケットに回転運動を与えるトルクを発生させる場合には、ロケットの推力が時間的に変化しないとすればトルクも時間的に一定となり、適当な仮定のもとに上述のような単純化した解析法も行ないうるわけであるが、尾翼の迎え角 (Fin canting) によって回転運動を与える場合には上述のような回転に対する仮定 (回転角が飛しょう距離に比例するという仮定) が成立しないから、この場合には別種の解析が必要になる。以下、Fin canting によって実際に生じ得る回転速度の程度を計算し、上記の結果と合せて分散に対する効果を調べてみる。

機体軸回りの回転の運動方程式はつぎのように与えられる。

$$I_x \frac{d^2\varphi}{dt^2} + C_{ep}\rho Ad^2 v \frac{d\varphi}{dt} = C_{e\delta}\rho Adv^2 \delta_R \quad (7)$$

ただし、 $I_x$ ; 慣性能率,  $\delta_R$ ; Canting の角度,  $C_{ep}$ ,  $C_{e\delta}$ ; 揚力傾斜,  $d$ ; 尾翼の代表点と機体軸の距離

である。飛しょう方向について  $v^2 = 2Gs$  (等加速度運動) を仮定すれば (7) 式は飛しょう距離  $s$  に関してつぎのように書き直される。

$$\frac{d}{ds} \left( \sqrt{s} \frac{d\varphi}{ds} \right) + \frac{C_{ep}\rho Ad^2}{I_x} \left( \sqrt{s} \frac{d\varphi}{ds} \right) = \frac{C_{e\delta}\rho Ad\delta_R}{I_x} \sqrt{s} \quad (8)$$

初期条件を

$$s=0 \quad \frac{d\varphi}{ds} = 0 \quad (9)$$

として (8) 式を解けば

$$\frac{d\varphi}{ds} = 2Ds \left\{ \frac{1}{1.3} - \frac{2Cs}{1.3 \cdot 5} + \frac{(2Cs)^2}{1.3 \cdot 5 \cdot 7} \dots \right\} \quad (10)$$

または

$$\frac{d\varphi}{dt} = 2\sqrt{2GD}s^{3/2} \left\{ \frac{1}{1.3} - \frac{2Cs}{1.3 \cdot 5} + \frac{(2Cs)^2}{1.3 \cdot 5 \cdot 7} \dots \right\} \quad (11)$$

となる。ただし

$$C = C_{ep}\rho Ad^2 / I_x \quad D = C_{e\delta}\rho Ad\delta_R / I_x$$

例として、HT-110 型ロケットの性能、諸元をつぎのように仮定して計算してみる。

$$I_x = 2 \times 10^{-2} \text{ kg m sec}^2, \quad G = 200 \text{ msec}^{-2}, \quad A = 0.01 \text{ m}^2,$$

$$C_{ep} = C_{e\delta} = 10, \quad d = 0.1 \text{ m}, \quad \delta_R = 1 \times 10^{-2}$$

(a) ランチャー離脱時の  $\varphi$  の大きさ

$$\{\varphi\}_{s=p} = \int_0^p \frac{d\varphi}{ds} ds \quad (12)$$

(12) 式の結果を第 1 表に示す。この表からわかるように、 $\varphi_p$  の値は非常に小さく、したが

第 1 表

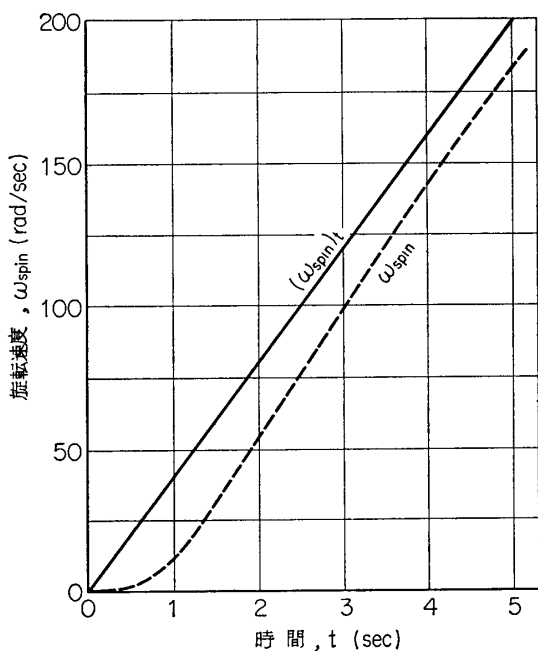
$p$ (m)	$\varphi_p$ (degree)	$p$ (m)	$\varphi_p$ (degree)
1.0	0.019	3.0	0.172
1.5	0.043	4.0	0.308
2.0	0.077	5.0	0.477
2.5	0.119		

って、上記の程度の Fin Canting ではロケットの回転によって発射機構に影響をおよぼすことはないと考えてよいだろう。

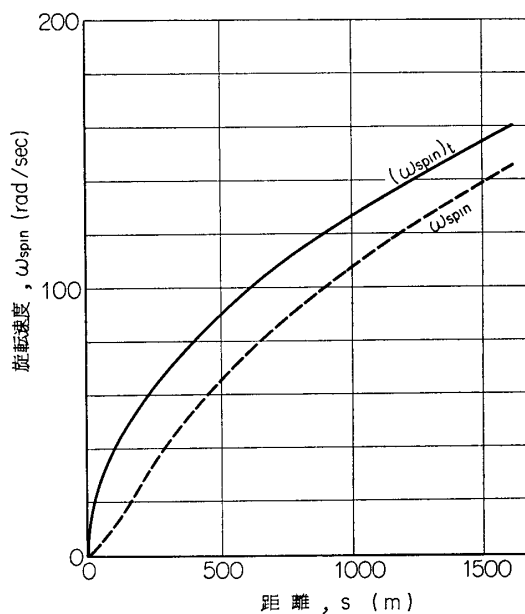
(b)  $\gamma = \omega_{\text{spin}} / \omega_{\text{pitch}}$  の大きさ

第 3 図は  $s$  に対する回転速度の変化を示す図である。  $\omega_{\text{spin}}$  は (10) 式で与えられる回転速度で  $\{\omega_{\text{spin}}\}_t$  は  $s$  における速度で等速運動をした場合の終局回転速度 (Terminal spin rate) を示す。したがって  $\{\omega_{\text{spin}}\}_t - \omega_{\text{spin}}$  は回転の時間的おくれをあらわす量と考えてよい。

第 4 図は  $t$  に対する回転速度の変化を示す図で、  $\omega_{\text{spin}}$ 、  $\{\omega_{\text{spin}}\}_t$  は第 3 図と同じである。ピッチングの角速度は、



第 3 図 回転速度



第 4 図 回転速度

$$\omega_{\text{pitch}} = \left\{ \frac{\partial C_m \cdot \rho A l}{\partial \alpha} \right\}^{1/2} v = \left\{ \frac{\partial C_m \cdot \rho A l}{\partial \alpha} \right\}^{1/2} G t = \left\{ \frac{\partial C_m \cdot \rho A l}{\partial \alpha} \right\}^{1/2} \sqrt{2 G s} \quad (13)$$

で与えられるから、

$$\gamma = \frac{\omega_{\text{spin}}}{\omega_{\text{pitch}}} = \frac{(10) \text{式}}{(13) \text{式}}$$

となり、この関係を第5図に示す。図中  $\gamma_i$  は  $\{\omega_{\text{spin}}\}_i / \omega_{\text{pitch}}$  を示す。

### 5. む す び

ロケットの飛しょう径路の分散におよぼす推力不整合の影響と、分散を少なくするための回転運動の効果について解析した。実際のロケットの分散を求めるには、エンジン性能空力特性、構造特性、飛しょう条件などにしたがって三次元的軌道計算をする必要があるが、ここでは概略値を求める意味で単純化した仮定のもとに解析的な取扱いを行なった。それらの結果からつぎのようなことが言えよう。

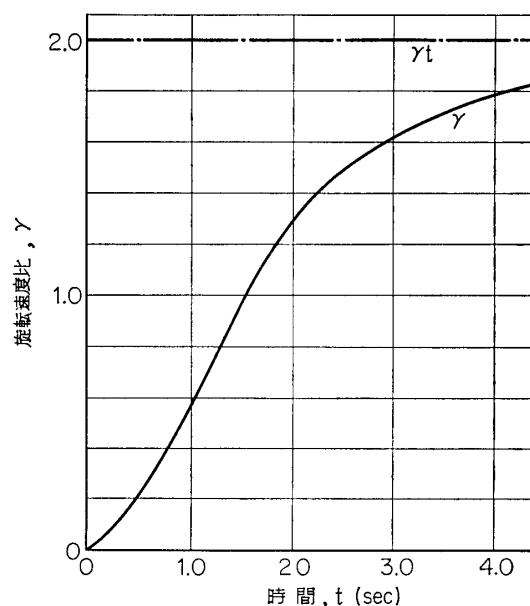
a) 分散を少なくするためには、当然のことながらランチング長さを大きくすることは非常に有効である(第2図)。また無次元ランチング長さ  $P$  を大きくすることは  $p$  を大きくすること以外にピッチング波長  $\sigma$  を小さくしても同じような効果がある。ただしこの場合は  $S$  も大きくなることに注意しなければならない。

b) 分散を少なくするためには  $\gamma$  の値を大きくすることも有効である。分散量の大きさが決まるのは最初の数波長の間が支配的であり、この意味で、この時期に比較的大きな  $\gamma$  の値を取り得るノズル内の canting vane 方式は有効な方法と考えられるが、Fin canting 方式の場合には実際的には  $\gamma$  を大きくすることはむずかしいと思われるから Canting vane より効果が少ないだろう。たとえば、例題に示したように 1/100 の fin canting の場合には、飛しょう距離が小さい範囲では  $\gamma$  は 0.1 あるいはそれ以下の値である(しかしこの場合でも最高速度 1,200 m/sec においては 20~30 rps の回転速度になる)。分散量を決定づけるのはランチャー離脱後の数波長の距離であり、この時期に  $\gamma < 0.1$  の程度の回転では効果は非常に少ないと言えよう。またこの時期に  $\gamma$  を大きくする目的で Canting angle を大きくすると、高速時の回転速度が過大になり、そのために分散の立場以外の悪影響が生ずるおそれもある。したがって fin canting は分散を減らすためには効果的な方法ではなく、ノズルに canting vane を付ける方法がシングルロケットには推奨されよう(この場合には第5図の  $\gamma$  は一定値となる)。また、ランチャーの案内機構による強制回転方式では回転速度は時間的に減衰してゆくが、数波長の間有効な  $\gamma$  の値を保持すればよいという観点に立てば、小型ロケットにおいては、むしろ fin canting にかわって考慮の対称となる方法であろう。

1966年4月30日 航空力学部

### 参 考 文 献

- [1] J. B. Rosser: Mathematical Theory of Rocket Flight, McGraw-Hill., 1947.
- [2] L. Davis: Exterior Ballistics of Rocket, D. Van Nostrand, 1958.



第5図 回転速度