

# 静止衛星打上げのための低推力飛しょう径路の最適化

的 川 泰 宣\*・松 尾 弘 毅

## Optimization of Low Thrust Trajectories for a Synchronous Satellite

By

Yasunori MATOGAWA and Hiroki MATSUO

**Abstract:** Optimization of low thrust trajectories for a synchronous satellite is studied. The payload is at first on an equatorial parking orbit and is to be transferred to an equatorial stationary orbit. The criterion of the optimization is the maximization of payload ratio in a certain transfer time.

Technique used is as follows.

First, small changes of orbital elements in one revolution are treated with perturbation technique.

Second, large changes of them in whole transfer time are given by adding small changes.

Third, optimization of trajectories is performed with the variational method.

Results show that as a parking orbit an elliptic has the advantage of a circle and that optimal transfer from a circle to a circle is accomplished keeping the orbit circular.

### 概 要

赤道面上の出発軌道にあるペイロードを電気推進によって、同じ面上の静止衛星軌道へ遷移させるための最適遷移径路について考察を加える。

最適化の評価の基準を、一定の遷移時間におけるペイロード比の最大化という点におく。

用いた手法は、摂動の手法によって、一回転ごとの軌道要素の変化を処理し、それを積み重ねて行くことによって、全遷移時間中の変化を扱う。そして変分法によって最適化を行なった。

計算の結果は、出発軌道として楕円をとった方が、円よりも有利であることを示しており、また円軌道から円軌道への最適な遷移は、常に円を保ちつつ行なわれることをも示している。

---

\* 東京大学大学院生

## 記号

|       |          |            |           |
|-------|----------|------------|-----------|
| $a$   | 半長軸長さ    | $R$        | 力の動径方向成分  |
| $b$   | 半短軸長さ    | $r$        | 中心からの距離   |
| $c$   | 排気速度     | $S$        | 力の水平方向成分  |
| $e$   | 離心率      | $T$        | 推力        |
| $F$   | 力        | $t$        | 時間        |
| $f$   | 近点離角     | $t_p$      | 近地点通過時刻   |
| $g$   | 重力加速度    | $V$        | 速度        |
| $h$   | 角運動量     | $V_r$      | 速度の動径方向成分 |
| $i$   | 軌道傾斜角    | $V_\theta$ | 速度の水平方向成分 |
| $M$   | 飛しょう体の質量 | $W$        | 力の軌道面外成分  |
| $M_l$ | ペイロードの質量 | $\alpha$   | $M_w/P$   |
| $M_p$ | 推進剤の質量   | $\mu$      | 重力常数      |
| $M_w$ | 動力装置の質量  | $\Omega$   | 昇交点経度     |
| $N$   | 回転数      | $\omega$   | 近地点引数     |
| $P$   | 電力       |            |           |

## 1. 序 論

日本の技術にとって、高々度衛星や月・惑星への飛行が射程距離内に入る日が近づいている。低推力による飛しょう径路および推力計画に関する研究は、日本ではまだ端緒についたばかりであるが、今後の重要な研究テーマの一分野を成すであろう。

1954年以来数編の論文[1]~[3]によって、E. Stuhlinger が、電気推進による火星飛行の展望を与えて以来、低推力飛しょう径路に関する研究は二つの方向をとってきた。第一は、あらかじめ設定された推力計画に従う飛しょう体について、非線型の運動方程式を解こうとするものであり、第二は、軌道遷移 (orbital transfer) を遂行し、同時にある指標を最大化あるいは最小化するように、推力ベクトルの最適スケジュールを決定するものである。

第一の方向は、五つの典型的な推力計画 (tangential, circumferential, radial, normal, orthogonal) がおもにとりあげられ、ミッションの相異によるおのおのの推力計画の優劣が論じられている[4]~[12]。ここでは、Крылов-Боголюбов の手法をはじめとして、非線型の振動理論におけるほとんどあらゆる展開法が試みられており、あざやかな解法体系を成している。

しかし、ロケット技術の進歩に伴って、推力ベクトルを人間が自由にあやつることができるようになるにつれて、低推力飛しょうの理論的研究も、より能動的な第二の方向へと脱皮をとげた。最近のこの分野での努力は主として、この第二の流れに集中されている。

さて、ロケットのミッションを考える際に重要な要請として、ペイロード比の最大化という問題がある。一般に低推力におけるペイロード比最大化の問題は、次式の  $M_f$  (終期質量) を最大化する問題に還元される。

$$\frac{1}{M_f} = \frac{1}{M_i} + \frac{1}{2} \int_0^{t_f} \frac{\alpha}{M_w} \left( \frac{T}{M} \right)^2 dt \quad (1)$$

$M_f$  を最大にするにはまず  $\alpha$  を小さく保つことが考えられるが、飛しょう体が与えられるとエンジン質量  $M_w$  は固定されるから、エンジン出力  $P$  が常にその最高のパワーを発揮している時のみ  $\alpha$  は最小におさえられる。この状態を仮定することにより、上式の問題は  $\int_0^{t_f} (T/M)^2 dt$  を最小化することと同値である。このように  $\alpha$  を一定におさえた場合の最小化問題は、J. H. Irving によって設定され、二次元問題としての解は 1959 年に彼自身の手で与えられ [17]、三次元については K. A. Ehricke が与えた [13]。また T. N. Edelbaum は、低推力飛しょうについてきわめて特徴的な取り扱いをしている。すなわち、一周間の軌道要素が非常に小さな変化しかしないため、これを摂動の手法によって処理し、この一周ごとの変化をつみ重ねていくことによって、動力飛しょう中全径路についての積分をやりとげようとするものである [18]。Edelbaum 以前にも、たとえば、Stuhlinger が同様の手法で円軌道から月までの飛行を記述しているし [2]、人工衛星の寿命に関する研究にもこの手法がひんばんに使用されている [19]。ただ Edelbaum の論文は、円から円への遷移を、ともかくも「最適化」という観点から考察しているところに注目すべき点がある。

## 2. 問題の定式化

本稿の扱う問題は次のとおりである。

「赤道上のある楕円軌道から、同一平面上の静止衛星軌道へ低推力によって軌道間遷移を行なう課題において、飛しょう体の初期質量・エンジン出力を与えた場合、接線推力・遷移時間一定でペイロード比を最大化するためにはいかなる遷移軌道を選べばよいか」

問題の定式化に当っては、各軌道要素の変動を Lagrange の摂動方程式によって表現し、これを序論に述べた Edelbaum の方法によって、二段階に分けて取り扱う。

第一段階では、一周ごとの軌道要素の変化を摂動の方法によって設定し、

第二段階では、この微小変化を次々とつみ重ねることによって、回転の進行に伴う軌道要素の変化を求める。そしてペイロード比最大化という課題を、変分法を用いて定式化し、これを解くことによって目的を達しようとする。

### 2.1 軌道要素の時間変化の記述

二体問題は定点  $O$  からの距離の二乗に反比例する加速度で  $O$  に向って運動している動点、というモデルによって代表的に考察される。その動点の運動方程式は、

$$\ddot{\mathbf{r}} = -\frac{\mu}{r^3}\mathbf{r} \quad (2)$$

となり、三個の二階微分方程式であるから解は六つの積分定数—軌道要素—を含む。摂動を受けている二体運動においては、軌道要素は時間の関数として与えられる。Lagrange はじょうらんをうけている力がスカラー関数のこう配によって表わされる場合に、軌道要素の時間変化について簡単な式を導いた。すなわち

$$\mathbf{F} = \nabla \phi \quad (3)$$

のとき

$$\left. \begin{aligned}
 \frac{da}{dt} &= -\frac{2}{n^2 a} \frac{\partial \phi}{\partial t_p} \\
 \frac{de}{dt} &= -\frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2 e} \left[ \frac{\sqrt{1-e^2}}{n} \frac{\partial \phi}{\partial t_p} + \frac{\partial \phi}{\partial \omega} \right] \\
 \frac{di}{dt} &= \frac{1}{h \sin i} \left[ \cos i \frac{\partial \phi}{\partial \omega} - \frac{\partial \phi}{\partial \Omega} \right] \\
 \frac{d\Omega}{dt} &= \frac{1}{h \sin i} \frac{\partial \phi}{\partial i} \\
 \frac{d\omega}{dt} &= \frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2 e} \frac{\partial \phi}{\partial e} - \frac{\cot i}{h} \frac{\partial \phi}{\partial i} \\
 \frac{dt_p}{dt} &= \frac{2}{n^2 a} \frac{\partial \phi}{\partial a} + \frac{1-e^2}{a^2 n^2 e} \frac{\partial \phi}{\partial e}
 \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

単位質量当りのじょうらん力  $\mathbf{F}$  の成分を考えて、中心から半径方向に  $R$ 、軌道面上で  $R$  に直角に運動方向に  $S$ 、( $RSW$ ) が右手系を成すように  $W$  をとると、軌道要素の時間変化は次のようになる。

$$\left. \begin{aligned}
 \frac{da}{dt} &= 2\sqrt{\frac{a^3}{\mu}} \sqrt{1-e^2} \left[ Re \sin f + \frac{b^2}{ar} S \right] \\
 \frac{de}{dt} &= \sqrt{\frac{a}{\mu}} \sqrt{1-e^2} [R \sin f + S(\cos E + \cos f)] \\
 \frac{d\chi}{dt} &= \sqrt{\frac{a}{\mu}} \frac{1}{e} \left[ R \left\{ (1-e^2) \cos f - \frac{2er}{a} \right\} - S \left( 1-e^2 + \frac{r}{a} \right) \sin f \right] \\
 \frac{d\Omega}{dt} &= \frac{1}{\sqrt{a\mu(1-e^2)}} [rW \operatorname{cosec} i \cdot \sin(\omega+f)] \\
 \frac{d\omega}{dt} &= \sqrt{\frac{a}{\mu}} \frac{\sqrt{1-e^2}}{e} \left[ -R \cos f + S \sin f \left( 1 + \frac{ar}{b^2} \right) \right] - \cos i \frac{d\Omega}{dt} \\
 \frac{di}{dt} &= \frac{1}{\sqrt{a\mu(1-e^2)}} [rW \cos(\omega+f)]
 \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

ここで問題を特殊化して、我々の扱う接線推力の場合に移ることにする。この場合は、 $W=0$  であり、 $T/M$  の  $R$  方向、 $S$  方向の成分は速度に関する考察によって、記述することができる。

飛しょう体の速度を  $V$  とし、その半径方向の成分を  $V_r$ 、軌道面上、半径と垂直な運動方向の成分を  $V_\theta$  とすると、

$$\left. \begin{aligned}
 r &= \frac{h^2/\mu}{1+e \cos f} \\
 r^2 \dot{f} &= h
 \end{aligned} \right\}$$

より、

$$V_r = \frac{\mu}{h} e \sin f$$

$$V_\theta = \frac{\mu}{h} (1+e \cos f)$$

$$\begin{aligned} \therefore V &= \sqrt{V_r^2 + V_\theta^2} \\ &= \frac{\mu}{h} \sqrt{1 + e^2 + 2e \cos f} \end{aligned} \tag{6}$$

したがって、

$$\left. \begin{aligned} R &= \frac{T}{M} \frac{e \sin f}{\sqrt{1 + e^2 + 2e \cos f}} \\ S &= \frac{T}{M} \frac{1 + e \cos f}{\sqrt{1 + e^2 + 2e \cos f}} \end{aligned} \right\} \tag{7}$$

(7) と (5) によって、接線低推力の場合における各軌道要素の時間変化を求めることができるが、本論文では、軌道要素は一周ごと的小変化をつみ重ねる方式をとっているので、独立変数を  $t \rightarrow f$  と変換しておこう。こうして次の式を得る。

$$\left. \begin{aligned} \frac{dh}{df} &= \frac{T}{M} \frac{h^5}{\mu^3} \frac{1}{(1 + e \cos f)^2 \sqrt{1 + e^2 + 2e \cos f}} \\ \frac{de}{df} &= 2 \cdot \frac{T}{M} \frac{h^4}{\mu^3} \frac{e + \cos f}{(1 + e \cos f)^2 \sqrt{1 + e^2 + 2e \cos f}} \\ \frac{d\omega}{df} &= 2 \cdot \frac{T}{M} \frac{h^4}{\mu^3} \frac{\sin f}{e(1 + e \cos f)^2 \sqrt{1 + e^2 + 2e \cos f}} \\ \frac{d\chi}{df} &= -2 \cdot \frac{T}{M} \frac{h^4}{\mu^3} \frac{\sin f (e + \cos f) (1 - e^3)}{e \sqrt{1 - e^2} (1 + e \cos f)^3 \sqrt{1 + e^2 + 2e \cos f}} \\ \frac{d\Omega}{df} &= 0 \\ \frac{di}{df} &= 0 \end{aligned} \right\} \tag{8}$$

ただし、 $a$  は

$$\frac{h^2}{\mu} = a(1 - e^2)$$

によって、 $e$  を媒介として  $h$  に変換した。

### 2.2 質量比の定式化

右図のような表示法を定めると、 $M_i$  を与えて  $M_L$  を最大化する。あるいは  $M_L$  を与えて  $M_i$  を最小化する問題を解くことに相当する。

質量保存則  $M = M_L + M_p + M_w$

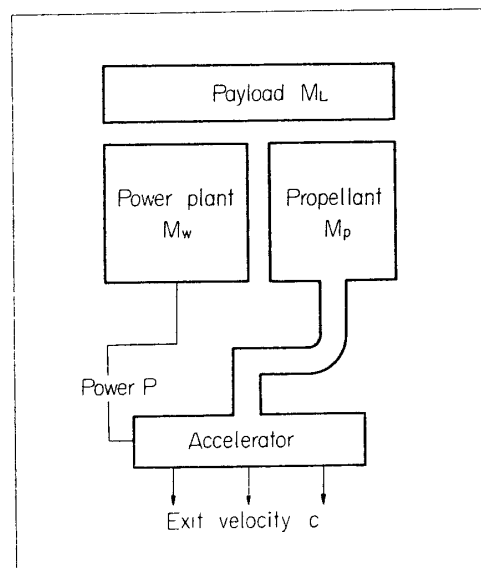
$$-\frac{dM}{dt} = \frac{dM_p}{dt}$$

運動量保存則  $T = \dot{M}c = MV$

エネルギー保存則  $\frac{\dot{M}}{2} c^2 = P$

一方、 $M_w = \alpha P$

これらから、パワー一定という仮定をすれば、



第1図

$$\frac{M_i}{M} = 1 + \frac{M_i}{M_w} \cdot \alpha \int_0^t \left(\frac{T}{M}\right)^2 dt \quad (9)$$

したがって、与えられた  $M_0$  に対して  $t=t$  で  $M$  を最大にするには、上式の右辺を最小化するように  $T/M$  のプログラムをくんでやればよい。これも一周ごとの小変化をつみ重ねる手法で扱うから独立変数を  $t \rightarrow f$  に変換しておく。

$$\frac{M_i}{M} = 1 + \frac{M_i}{M_w} \cdot \alpha \int_0^f \frac{h^3}{\mu^2} df \quad (10)$$

### 2.3 一回転中の最適スラスト計画

これは最適化操作の第一段階である。

$\omega$  と  $\chi$  は、 $e, h, M_i/M$  の変化に全くその影響を及ぼさないので、最適化を考える際には除外してのちにその最適化の結果を受身の形でうけるファクターとして考えればよい。

したがって我々は一回転での変化を評価する際に、独立変数として採用した  $f$  は時間  $t$  に対して線型と考えて、次のような最大最小問題を取り扱うことになる。

「任意の一回転をとり出して、 $f=0$  での質量を  $M_1$ 、一周して  $f=2\pi$  のときの質量を  $M_2$  とする。

$$\frac{\Delta h}{rev} = \frac{h^5}{\mu^3} \int_0^{2\pi} \frac{T/M}{(1+e \cos f)^2 \sqrt{1+e^2+2e \cos f}} df \quad (11)$$

$$\frac{\Delta e}{rev} = \frac{2h^4}{\mu^3} \int_0^{2\pi} \frac{e + \cos f}{(1+e \cos f)^2 \sqrt{1+e^2+2e \cos f}} \cdot \frac{T}{M} df \quad (12)$$

という二つの付帯条件のもとで、

$$\frac{M_1}{M_2} = 1 + \frac{M_i}{M_w} \frac{\alpha}{2} \int_0^{2\pi} \frac{h^3 T}{\mu^2 M (1+e \cos f)^2} df \quad (13)$$

を最小化せよ」

ここで Lagrange 乗数  $\lambda_1, \lambda_2$  を導入して、問題は次の新しい関数を最適化することになる。

$$\mathcal{F} = 1 + \int_0^{2\pi} \left[ \frac{M\alpha}{M_w} \left(\frac{T}{M}\right)^2 - \left(\frac{T}{M}\right) \frac{2h^2}{\mu} x \left(\lambda_1 + \lambda_2 \frac{y}{h}\right) \right] \frac{r^2}{h} df \quad (14)$$

ただし

$$\begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{1+e^2+2e \cos f}} \\ y = 2(e + \cos f) \end{cases}$$

$T/M$  の最適値を求めるため、(14) 式を  $T/M$  で偏微分して0とおくことにより、

$$\begin{aligned} \left(\frac{T}{M}\right)_{\text{opt}} &= \frac{M_w}{M_i \alpha} \frac{h^2}{\mu} x \left(\lambda_1 + \lambda_2 \frac{y}{h}\right) \\ &= \frac{M_w}{M_i \alpha} \cdot \frac{h}{\mu} \frac{h\lambda_1 + 2\lambda_2(e + \cos f)}{\sqrt{1+e^2+2e \cos f}} \end{aligned} \quad (15)$$

これを (11)~(13) に代入して、一回転中の変化を見つめることができる。留数定理を用いて積分を実行すれば、

$$\frac{M_1}{M_2} = 1 + \frac{\pi M_w h^5}{M_i \alpha \mu^4} \left[ \frac{h^2(4-3\sqrt{1-e^2})}{(1-e^2)^3} \lambda_1^2 - \frac{4eh}{(1-e^2)^2(1+\sqrt{1-e^2})} \lambda_1 \lambda_2 + \frac{1}{(1-e^2)(1+\sqrt{1-e^2})} \lambda_2^2 \right] \quad (16)$$

$$\frac{\Delta h}{rev} = \frac{2\pi M_w h^6}{M_1 \alpha \mu^4} \left[ \frac{h(4-3\sqrt{1-e^2})}{(1-e^2)^3} \lambda_1 - \frac{2e}{(1-e^2)^2(1+\sqrt{1-e^2})} \lambda_2^2 \right] \quad (17)$$

$$\frac{\Delta e}{rev} = \frac{4\pi M_w h^5}{M_1 \alpha \mu^4} \frac{\lambda_2(1-e^2) - 2he\lambda_1}{(1-e^2)^2(1+\sqrt{1-e^2})} \quad (18)$$

したがって  $M_i$  から出発した飛しょう体は (15) で表わされる推力を出しながららせん飛しょうを行い、一周したときには (16) 式で  $M_1=M_i$  とおいたときの  $M_2$  に当る質量に減っている。しかもこの一周した瞬間に、 $h$  と  $e$  は (17), (18) 式に示される変化をこうむっている。新たに迎えたきたるべき一周では、更新した  $M, e, h$  を初期値として、また (15) 式のスラスト飛行をつづけることになる。

#### 2.4 小変化と大変化の接続についての若干の考察

(16)~(18) の中の  $\lambda_1, \lambda_2$  について考えてみる。これは、次節以降で考察される変分法の中で、必然的にその値が決定されるはずのものである。

Edelbaum においては、一回転ごとにスラスト計画を作り、それをつみ重ねて行くことにより、全飛しょう期間中の最適スラスト計画ができ上る、ということになっているが、これは我々を次のような疑問に導く。

一回転ごとに最適な推力計画を求め、それを次々とつなぎ合わせて行なったときの  $e$  と  $h$  の関係が、右図  $S_1 \rightarrow S_f$  の曲線のようになったとする。  $S_1$  から始まる回転だけを最適化した微小部分  $S_1 \rightarrow S_2$  の代りに、  $S_1 \rightarrow S_2'$  という別の推力計画をとった方が、  $S_1$  から  $S_f$  への大局的立場から見たときかえって得になる場合があるのではなかろうか。言いかえると、一回転ごとの最適計画を積み重ねたのでは、全体としての最適計画にはならないのではないか。

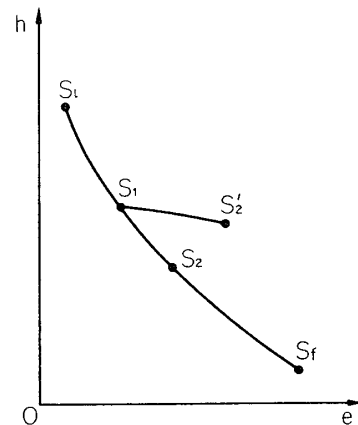
この疑問を解くカギは  $\lambda_1, \lambda_2$  にある。

(16)~(18) の段階では、  $\lambda_1$  と  $\lambda_2$  は未知であるから、  $S_1 \rightarrow S_2$  という径路を最終的に決定したことにはならず、したがって、  $S_1 \rightarrow S_2'$  という可能性が全く否定されていないわけではない。次節以下の変分法を適用する際、  $\lambda_1, \lambda_2$  が  $h, e$  と同様に変数として扱われることによって初めて、  $S_1 \rightarrow S_2$  という径路が定められる。換言すれば、(16)~(18) の段階で一定の条件をつけられた  $(e, h)$  の組み合わせの中から、変分法によって、全体の飛しょうをながめ渡したのちに、ただ一つの  $(e, h)$  の径路が選択されるのである。このように、  $\lambda_1$  と  $\lambda_2$  は全体と部分の最適径路をつなぐ結節点になっている。

#### 2.5 変分問題としての記述

(16) 式を若干変形して、

$$\frac{\Delta M}{rev}(1 \rightarrow 2) = M_2 - M_1 = -\frac{\pi M_w M_2 h^5}{\alpha M_1 \mu^4} \times \left[ \frac{h^2(4-3\sqrt{1-e^2})}{(1-e^2)^3} \lambda_1^2 - \frac{4eh}{(1-e^2)^2(1+\sqrt{1-e^2})} \lambda_1 \lambda_2 + \frac{1}{(1-e^2)(1+\sqrt{1-e^2})} \lambda_2^2 \right] \quad (19)$$



第2図

$M_2/M_1$  はある特定の一周の最初と最後の質量の比をとったものであり、のちに考察するようにはほぼ1とおいてさしつかえない。また計算の際には解のサーチを容易にするため、(17) と (18) の中の  $M_1$  (一周ごとに更新される) を初期質量  $M_i$  にとって、拘束条件を幾分ゆるやかにした。このことの成否はあとに検討する。この簡略化を施した上で、問題は二点境界値問題として提起される。

回転数  $N$  の関数  $e(N)$ ,  $\lambda_1(N)$ ,  $\lambda_2(N)$  を考え、この  $e(N)$ ,  $h(N)$  について、

$$\left. \begin{aligned} \varphi_1 &\equiv \frac{dh}{dN} - \frac{2\pi M_w}{M_i \alpha \mu^4} h^6 \left[ \frac{h(4-3\sqrt{1-e^2})}{(1-e^2)^3} \lambda_1 - \frac{2e}{(1-e^2)^2(1+\sqrt{1-e^2})} \lambda_2 \right] = 0 \\ \varphi_2 &\equiv \frac{de}{dN} - \frac{4\pi M_w}{M_i \alpha \mu^4} h^5 \left[ -\frac{2he}{(1-e^2)^2(1+\sqrt{1-e^2})} \lambda_1 + \frac{1}{(1-e^2)(1+\sqrt{1-e^2})} \lambda_2 \right] = 0 \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

なる拘束条件が与えられたとき、終末条件  $e_f=0$ ,  $h_f=129760 \text{ km}^2/\text{sec}$  (この二つで静止衛星軌道が完全に記述される) を満たしつつ、次式を最小化するような  $e$ ,  $h$ ,  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$  の特殊な組み合わせを見つけることが現在の任務である。最小化をめざす目的関数は、

$$\mathcal{H} \equiv \int_0^{N_f} \frac{\pi M_w}{\alpha M_i} \frac{h^5}{\mu^4} \left[ \frac{h^2(4-3\sqrt{1-e^2})}{(1-e^2)^3} \lambda_1^2 - \frac{4eh}{(1-e^2)^2(1+\sqrt{1-e^2})} \lambda_1 \lambda_2 + \frac{1}{(1-e^2)(1+\sqrt{1-e^2})} \lambda_2^2 \right] dN \quad (21)$$

ここで

$$\mathcal{H} \equiv \int_0^{N_f} G dN$$

によって  $G$  を定義すると、汎関数  $F$  は新たな Lagrange 乗数  $\lambda_3$ ,  $\lambda_4$  を導入することによって、次のようになる。

$$\begin{aligned} F = G + \lambda_3 \varphi_1 + \lambda_4 \varphi_2 &= \frac{\pi M_w}{\alpha M_i} \frac{h^5}{\mu^4} \left[ -\frac{h^2(4-3\sqrt{1-e^2})}{(1-e^2)^3} \lambda_3^2 \right. \\ &\quad \left. + \frac{8eh}{(1-e^2)^2(1+\sqrt{1-e^2})} \lambda_3 \lambda_4 - \frac{4}{(1-e^2)(1+\sqrt{1-e^2})} \lambda_4^2 \right] + \lambda_3 \frac{dh}{dN} + \lambda_4 \frac{de}{dN} \end{aligned} \quad (22)$$

これから作られる Euler-Lagrange 方程式の中で、 $h_f$  を使って  $h$  と  $\lambda_3$  を無次元化し ( $H$ ,  $\Lambda_3$ )、時間を静止衛星の周期で無次元化すると、

$$\frac{dH}{d\tau} = 2BH^3 \left[ \Lambda_3 \frac{4-3\sqrt{1-e^2}}{(1-e^2)^{3/2}} - \lambda_4 \frac{4e}{\sqrt{1-e^2}(1+\sqrt{1-e^2})} \right] \quad (23)$$

$$\frac{de}{d\tau} = 8BH^2 \left[ -\Lambda_3 \frac{e}{\sqrt{1-e^2}(1+\sqrt{1-e^2})} + \lambda_4 \frac{\sqrt{1-e^2}}{1+\sqrt{1-e^2}} \right] \quad (24)$$

$$\frac{d\Lambda_3}{d\tau} = 5BH^2 \left[ -\Lambda_3^2 \frac{4-3\sqrt{1-e^2}}{(1-e^2)^{3/2}} + \Lambda_3 \lambda_4 \frac{8e}{\sqrt{1-e^2}(1+\sqrt{1-e^2})} - \lambda_4^2 \frac{4\sqrt{1-e^2}}{1+\sqrt{1-e^2}} \right] \quad (25)$$

$$\begin{aligned} \frac{d\lambda_4}{d\tau} &= BH^2 \left[ -\Lambda_3^2 \frac{3e(8-5\sqrt{1-e^2})}{(1-e^2)^{5/2}} + \Lambda_3 \lambda_4 \left\{ \frac{8(1+3e^2)}{(1-e^2)^{3/2}(1+\sqrt{1-e^2})} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{8e^2}{(1-e^2)(1+\sqrt{1-e^2})^2} \right\} - \lambda_4^2 \left\{ \frac{8e}{\sqrt{1-e^2}(1+\sqrt{1-e^2})} + \frac{4e}{(1-e^2)(1+\sqrt{1-e^2})^2} \right\} \right] \end{aligned} \quad (26)$$

更に目的関数も無次元化して、



$$\int_0^{N_f} G dN = B \int_0^{N_f} H^2 \left[ \lambda_3^2 \frac{4-3\sqrt{1-e^2}}{(1-e^2)^{3/2}} - \lambda_3 \lambda_4 \frac{8e}{\sqrt{1-e^2}(1+\sqrt{1-e^2})} + \lambda_4^2 \frac{4\sqrt{1-e^2}}{1+\sqrt{1-e^2}} \right] dN \quad (27)$$

ただし,

$$B \equiv \frac{\pi M_w}{M_i \alpha \mu^4} h_f^5$$

### 3. 計算と結果

#### 3.1 計算準備

まず計算のプランについて見通しを立てておこう.

遷移時間一定という条件のもとで  $e, h$  の終末値が, それぞれ 0, 129760 km<sup>2</sup>/sec となるような  $(\lambda_3, \lambda_4, e, h)$  の初期値の組み合わせを発見するには, この一つ一つの組み合わせについて, (23)~(26) のように  $e, h$  を変化させて行き, 決められた遷移時間における  $e, h$  を所期の目的に一致させる, という手続きをとる. この 'trial and error' の 'trial' は,  $\lambda_3, \lambda_4$  に制限が無いためにはくばい回数に上るであろう. これに対してダイナミック・プログラミングの手法を用いれば試行回数を極端に減らすことができる. しかし, 本計算に用いた計算機の容量をおもんばかり, また次のような考察によって, ダイナミック・プログラミングを用いなかった. すなわち,

実際にあるロケットがペイロードを, 地表から出発軌道へ持って行くとき, その出発軌道の  $a$  (または  $h$ ) と  $e$  との間には, 一定の関係が存在するであろう. これを

$$f(e_i, h_i) = 0 \quad (28)$$

と近似することにする.

一方横断性条件は

$$(\lambda_3 \Delta h + \lambda_4 \Delta e)_i = 0 \quad (29)$$

だから, (28) より  $dh_i = g(e_i, h_i) de_i$  とすれば

$$[\lambda_3 g(e, h) + \lambda_4]_i = 0 \quad (30)$$

このように見ると, 出発軌道の  $e_i$  を一つ決めると, (28) によって  $h_i$  が決まる.  $g(e_i, h_i)$  ももちろん定まるから, (30) 式より,  $\lambda_{3i}$  と  $\lambda_{4i}$  はどちらか一方を定めることによってほかは定まる. したがってたとえば,  $(e_i, \lambda_{3i})$  の組み合わせをいろいろに与えることによって目的を追求すればよいことになり, サーチはずっと楽になる. ただ, この場合二つの問題がある. 一つは,  $\lambda_{3i}$  と  $\lambda_{4i}$  がくっついて動くために, 最適化の操作が制限され, 最適解が得られるかどうか定かでない. 二つめには,  $e_i$  が大きくなると衛星軌道が地球にぶつかり, したがって  $e_i$  には

$$0 \leq e_i \leq e_{i, \text{critical}}$$

という制限がつくことになる. すると,  $e_i = 0$  および  $e_{i, \text{critical}}$  の所では, 横断性条件が使えない, ということになる. この第二の問題は,  $e_i = 0, e_i = e_{i, \text{critical}}$  において, 横断性条件をとり払い,  $\lambda_{3i}$  と  $\lambda_{4i}$  を拘束する (30) 式から解放され, 自由に  $\lambda_{3i}, \lambda_{4i}$  を動かして最適化を行なわねばならぬことを示唆している.

本論文では, ミューロケットを参考にしながら, 次のような式を仮定した.

$$h_i = -200448 e_i^2 + 139779 e_i + 51426$$

無次元化して

$$H_i = -1.54476 e_i^2 + 1.07721 e_i + 0.39632 \quad (31)$$

$e_i$  を動かす範囲としては、閉区間  $[0, 0.1]$  を考えた。また横断性条件は、

$$\Lambda_{3i}[-3.0895 e_i + 1.0772] + H_i \lambda_{4i} = 0 \quad (32)$$

#### 4.2 計算結果—その1—

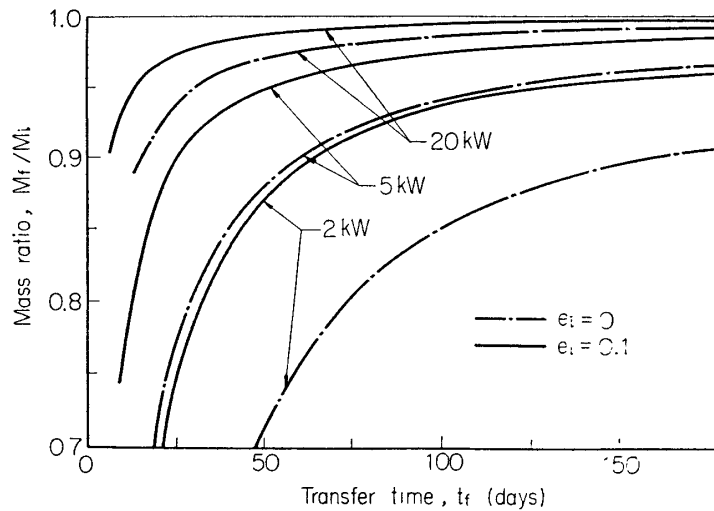
(1)  $e_i$  を开区間  $(0, 0.1)$  で動かしたとき、

$e_i = 0.001, 0.0085, 0.05$  のについて  $\Lambda_{3i}$  を  $10^{150} \sim 10^{-150}$  の範囲で変化させてサーチを試みたが、与えられた  $t_f$  (100日) に対して、終末条件  $e_f = 0, h_f = 129760 \text{ km}^2/\text{sec}$  を満足するような初期条件の組は得られなかった。範囲とサーチの密度が  $\Lambda_{3i}$  について限られているので、このようなサーチのしかたでは、サーチの各ケースについてしか断定的なことは言えないわけであるが、 $\lambda_{4i}$  が (32) によって縛られていることが、最適化に否定的な影響を及ぼしていることはいなめない事実であって、得られたデータの傾向から考えて、この中に解を求めるのは期待薄である。

(2)  $e_i$  が閉区間  $[0, 0.1]$  の端にある場合。

$e_i = 0, 0.1$  の場合は、さまざまな  $t_f$  について、終末条件を満足する  $\Lambda_{3i}, \lambda_{4i}$  が得られた。

遷移時間  $t_f$  と質量比  $M_f/M_i$  との関係が  $e_i = 0$  と  $0.1$  の場合についてパワーをパラメータとして第3図にかかっている。これを見ると、



第 3 図

- ・エンジンのパワーが与えられると、同じ遷移時間で静止衛星をうち出すには、出発軌道として  $e = 0.1$  の方が  $e = 0$  (円) よりも重量的に得である。プロペラントの全消費量の比をとると2以上である。
- ・エンジンパワーを与え、同じ質量比を得るためには、 $e = 0.1$  の方が時間が  $1/2$  ですむ。

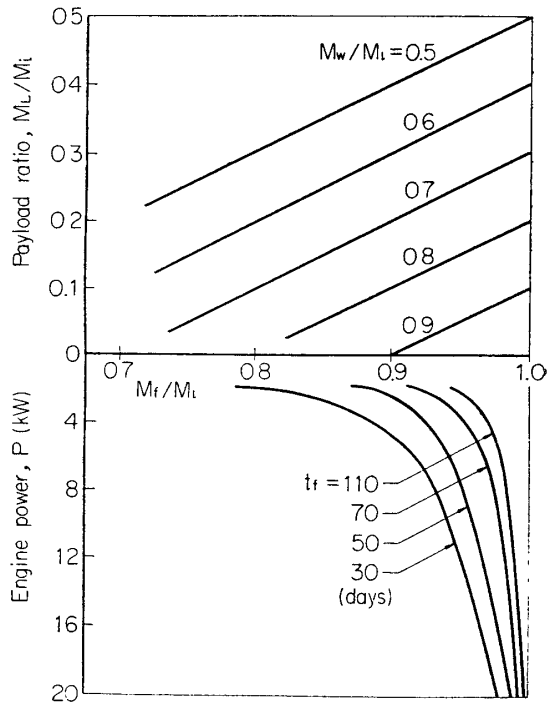
・パワーが高くなれば、 $e_i=0.1$  と  $e_i=0$  の曲線は接近してくる。これはおそらくあらゆる離心率の楕円について試みても同じ結果を招くであろう。すなわちパワーの向上は出発軌道の形状による質量比の差異を否定する傾向にある。

第3図に示された  $M_f$  は、初期質量から放出されたプロペラントの質量をさし引いたものであるから、その中に  $M_w$  と  $M_L$  を含んでいる。したがってペイロードを大にするには、与えられたパワーを出すエンジンの重さがどれくらい改良されているかが、重要なファクターとなってきいてくる。第4図には、既に最適化された  $M_f$  に対して  $M_w$  と  $M_L$  の矛盾した関係をグラフの形で示した。

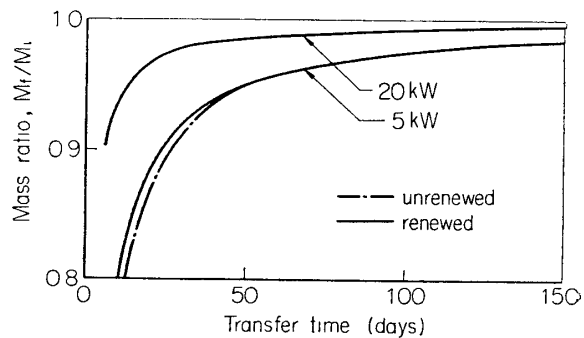
また  $e_i=0$  のとき、最適軌道としては途中の軌道を常に円軌道に保つようなものが得られた。これは、かつて多くの人によってたてられた「円近似の遷移」が、妥当なものであることを立証している。

一般に  $e_i$  が大であればあるほど有利かどうかということは興味のあることであるが、この問題に対する一つのアプローチとして、出発軌道のエネルギー一定のもとに  $e_i$  を変えて  $M_f/M_i$  を比べたのが第5図である。実線の部分は一本の曲線となっているが  $e_i=0.1775, 0.2757$  の両方がほぼ一致したのであって、どちらにしても  $e_i=0$  より  $e_i$  のある方が質量比は良好となっている。

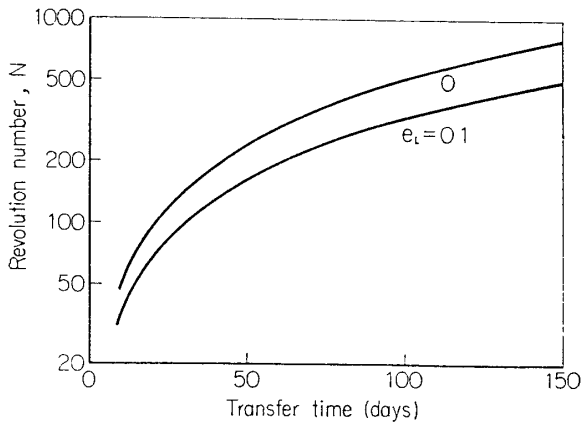
なお、この計算に関しては、前章からひきついで一つの問題があった。計算の便宜上、一周ごとの小変化の基準になる質量  $M$  を近似的に  $M_i$  でおきかえたことである。もしこの  $M$  をどんどん更新した計算をやるとうとするなら、サーチが非常に複雑になるので、ここでは、これと全く同じではないが比較的よい近似を与えられる手法で、出力 5kW, 20kW についてのみ、 $e_i=0.1$  について最適の  $M_f/M_i$  を求めてみた。これらの結果は、第6図にある。使用した手法は (23)~(26) の中の  $B$  を  $M_i B/M$  でおきかえるものである。これによると時間  $\tau$  の各きざみごとに計算される (27) 式から局所の  $M$  を出し、これを  $e, h, \lambda_3, \lambda_4$  の変化にくみ入れて行くことにな



第4図



第5図 出発軌道の離心率を変化させるときの遷移時間と質量比の関係



第6図 一周ごとに初期質量を変化させたときの質量比と変化させないときの質量比の比較

るので、 $M_i$  で一定に保つよりもいい近似を与える。第5図を見ると、パワー20kWのところではグラフでは全然差は認められず、5kWの場合にとりわけ遷移時間の短い領域において、質量比に1%弱の差があらわれることがわかった。

4.3 計算結果—その2—

回転数  $N$  は

$$N = \sum_{\tau=0}^{\tau_f} \Delta N = \sum_{\tau=0}^{\tau_f} \frac{(1-e^2)^{3/2}}{H^3} \Delta \tau$$

により近似して第7図に示した。

またスラスト計画については、

$$\left(\frac{T}{M}\right)_{opt} = \frac{M_w h^2 \lambda_3 + (2\lambda_4/h)(e + \cos f)}{\alpha M_i \mu \sqrt{1+e^2+2e \cos f}}$$

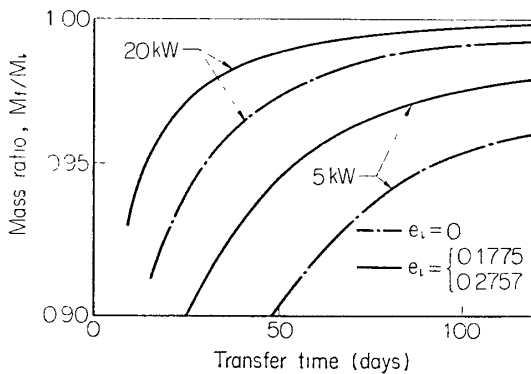
より、

$$\left(\frac{T}{M}\right)_{apogee} = \frac{M_w H}{\alpha M_i \mu} \sqrt{a_f \mu} \frac{\lambda_3 + 2\lambda_4(e-1)}{1-e}$$

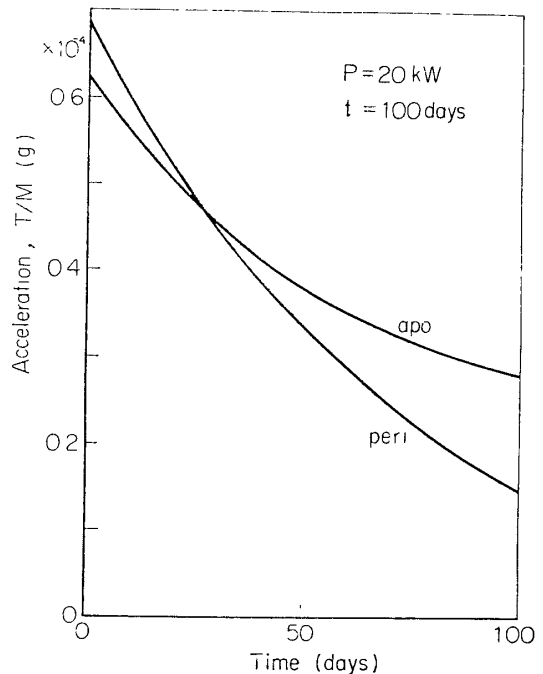
$$\left(\frac{T}{M}\right)_{perigee} = \frac{M_w H}{\alpha M_i \mu} \sqrt{a_f \mu} \frac{\lambda_3 + 2\lambda_4(e-1)}{1+e}$$

近地点での加速度、遠地点での加速度を、エンジン出力20kW、遷移時間100日の場合に対して、第8図に掲げる。

飛しょうが進むにつれて、はじめ近似点での加速度が遠地点でのそれよりも大きいのが逆転することがわかる。



第7図 遷移時間に対する回転数の変化



第8図 遠地点・近地点における加速度の時間変化

5. 結 論

結果のうちでは、出発軌道として楕円をとった方が有利であることが明らかになったこと

は注目すべき点である。また円から円への最適遷移は円軌道を保ちつつ行なわれることも計算で確かめられた。

今後の方向としては、サーチをダイナミック・プログラミングを用いてより密度濃く広範囲に行なうこと、また接線推力という条件をとり除き更に軌道傾斜面を変化させる問題へと進むことは有意義であろう。

最後に、適切な示唆・指導・援助をいただいた糸川英夫博士、東大宇宙研秋葉鏖二郎助教授、上杉邦憲君に心から感謝の意を表します。

1968年2月29日 宇宙工学

### 参 考 文 献

- [1] Stuhlinger, E.: Proc. 5th Int. Astron. Cong., '54 Vienna, Springer, Wien 100-149 ('55)
- [2] Stuhlinger, E.: J. Astron. Sci., 2, 149-152 ('55), 3, 11-14 ('56), 3, 33-36 ('56)
- [3] Stuhlinger, E.: Jet Prop., 27, 410-414, 397 ('57)
- [4] Tsien, H. S.: J. Amer. Roc. Soc., 23, 233-236, ('53)
- [5] Ehricke, K. A.: ARS J. Nov—Dec. ('53)
- [6] Peterson, J. B.: Jet Prop., 27, 1263-1264 ('57)
- [7] Dobrowolski, A.: Jet Prop., 28, 687-689 ('58)
- [8] Copeland, J.: ARS J., 29, 269-271 ('59), corrections by H. K. Karrenberg, 30, 130 ('60), and by G. Au, 30, 708 ('60)
- [9] Perkins, F. M.: J. Aero. Sci., 26, 291-297 ('59)
- [10] Arthur, P. D.: H. K. Karrenberg and H. M. Stark, ARS J., 30, 649-652 ('60)
- [11] Lass, H. and J. Lorell.: ARS J., 31, 24-28 ('61)
- [12] Citron, S. J.: ARS J., 31, 1786-1787 ('61)
- [13] Ehricke, K. A.: Space Flight, Vol. II-Dynamics, chapt. 7, D. Van Nostrand, Princeton ('63)
- [14] Davies, M. J.: Planetary equations and atmospheric perturbations of a satellite orbit ('65)
- [15] Lawden, D. F.: Astron. Acta, 4, 218-233 ('58)
- [16] Lawden, G. H.: Astron. Acta, 10, 279-295 ('64)
- [17] Irving, J. H.: Space Technology, 10-01~10-54 (H. Seifert, ed.), John Willey and Sons, New York ('59)
- [18] Edelbaum, T. N.: Optimization Techniques, chapt 1 (G. Leitmann, ed.), Academic Press, N. Y. ('62)
- [19] Billik, B.: ARS J., Nov. ('62)