

搜索レーダにおける自動追尾 (II)

(カルマンフィルタの応用)

飯田 尚志・水町 守志・東口 実

The Track-While-Scan Technique for Search Radar (II) The Theoretical Analysis of Aircraft Tracking by the Application of Kalman Filter

By

Takashi IIDA, Moriyuki MIZUMACHI, Minoru HIGASHIGUCHI

Abstract: A theoretical model is proposed here for the analysis of track-while-scan technique.

On condition that the root-mean-square tracking error should be minimized, Kalman filter is introduced, assuming the input signal to be stochastic. The model is analysed computing gain functions on different types of input signals.

It is concluded that Kalman filter theory could be applied for the linear tracking computation, moreover that the various assumptions of the theoretical model could be reasonable on the practical conditions.

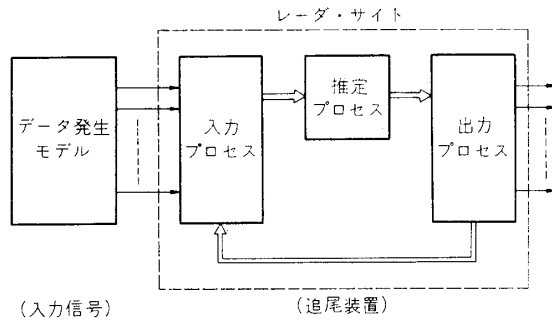
概 要

搜索レーダにおいて航空機を自動追尾する場合、搜索レーダ特有の問題を考慮して追尾装置への入力信号のモデルを作り、その統計的性質を考えて入力信号に対して前処理を施し、前処理出力に対して平均2乗誤差を最小とする線型追尾計算を行なうために、カルマンフィルタの理論を応用してその重み関数を求めた。

さらに重み関数を求める際の種々の仮定に対して検討を加えて実際の場合にほぼ満足されることを明らかにした。

1. 序

搜索レーダにおいて航空機を自動追尾する場合にまず障害となるのはデータの取得率が低いこと、雑音およびクラッタが混合することである。すなわち追尾を行なうにはデータを把握することがまず必要であるが、把握したデータが確かに追尾中の航空機のデータであるか否かは確率的にしか与えられない。さらに航空機のデータを把握できたと仮定しても、それを追尾するためには、次の3種の原因による揺らぎを考慮する必要がある。それは航空機の運動の揺らぎ、データの測定誤差および過去のデータに揺らぎが存在するために予測点に生ずる揺らぎである。したがって、このようなデータを使って自動追尾を考えるためには、

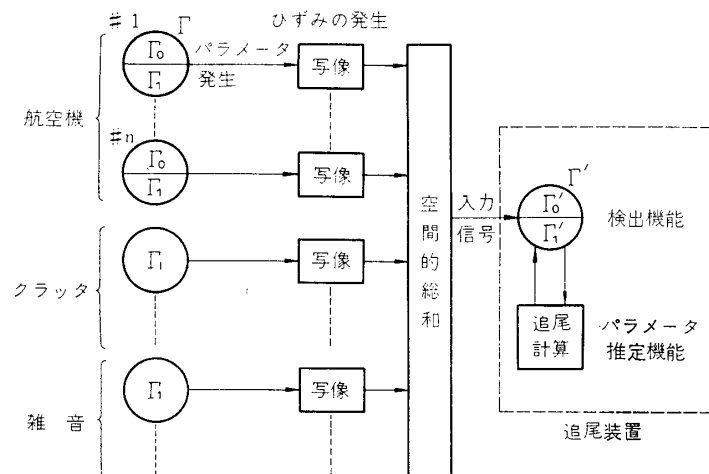


第 1 図 搜索レーダにおける自動追尾のモデル図

装置への入力信号のモデルを作り、それに基づいて追尾装置内でのデータの前処理の 1 方法および追尾計算にはカルマンフィルタを応用する方法について述べ、そのときの問題点を明らかにする。

2. 信号のモデル

搜索レーダで観測される値はターゲットのスキャンごとの位置の情報だけであるので、ここでは追尾装置への入力信号のパラメータとして、位置だけを考えることにすると信号のモデルとして第 2 図のようなものが考えられる。第 2 図で航空機 #1 について考えると、 Γ はパラメータ空間、 Γ_1 は検出されるべきパラメータを発生する空間、 Γ_0 は Γ_1 の補空間である。また Γ' は観測空間で Γ_1' は検出可能な空間、 Γ_0' は Γ_1' の補空間である。写像はパラメータに対するひずみを表わし、 Γ_1 中の素子が Γ_1' に写像されるときは航空機が検出される。このときひずみは加法性であるとし、 Γ_0' に写像されるときは航空機エコーの消滅となる。航空機の Γ 中に存在する確率密度関数は、 Γ_1 、 Γ_0 空間に対してそれぞれ確率密度関数を与え、それぞれを Γ_1 、 Γ_0 に存在する確率で結びつけた形になる。航空機は 1 機ではなく n 機を考えるとすればこのようなものが第 2 図のごとく #1 から # n まで存在し、それぞれは無



第 2 図 追尾装置への入力信号のモデル

まず全体をモデル的に考えてみると第 1 図のように考えることができる。第 1 図で入力プロセスは検出、決定の機能を持ち、入力信号を前処理して追尾すべきデータを取捨選択し、推定プロセスではパラメータを推定する。出力プロセスではパラメータ推定値に基づいて入力プロセスの予測範囲を動かし、同時に必要な追尾出力を得る。そこでここでは、まず追尾

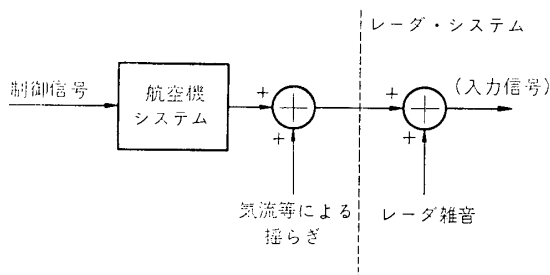
相関であると仮定すると単に並列に並べたものとなる。クラッタについてはパラメータ空間として Γ_1 のみを考えれば十分で、写像の性質は同様である。このときも各クラッタは互に無相関とすると、クラッタの個数だけ並べて書く。雑音についてもクラッタと同様に Γ_1 のみを考え、やはり写像によるひずみを伴うものとする。さらにクラッタ、雑音によって発生するパラメータは航空機によって発生するパラメータに対するひずみには関係しないものと仮定する。また写像はそれぞれ独立に作用するものとする。したがってクラッタ、雑音によって発生するパラメータは航空機の存否に関係なく、また本来望ましくないものである。以下これらをまとめて雑音パラメータ（略して《雑音》）と呼ぶことにする。空間的総和とは Γ' にそれぞれのパラメータを並べることに相当するものとする。

次に航空機について、もう少しくわしく見ると第3図のような形に書き表わせるものと思われる(ただし、写像が Γ' になされたとき)。点線より左はレーダにとってはターゲットの真の位置となる。レーダ雑音は位置の揺らぎを生ずるレーダ・システムの雑音であり、具体的にはシンチレーションによる方位角の揺らぎや、伝搬路の状態変化による遅延時間の変化、雑音の加わったことによる推定位置の揺らぎおよびレーダ・ビデオ・ディジタイザを使うときは量子化誤差等すべてを含むものとする。これらの雑音は信号の S/N に関するものと、量子化誤差のように、 S/N に無関係のものがあるが、量子化誤差については十分小さいとしてガウス分布を持つものと仮定できる。航空機には気流その他パイロットの操縦の揺らぎなどの外乱が加わって位置の揺らぎが生ずる。これらは全体としてみれば酔歩の理論を適用できると思われるし、これは何回も繰り返せばガウス分布になることが知られている。酔歩の方向は正常の進路に対して対称と仮定できるから酔歩の平均値は零のガウス分布と置くことができる。航空機自体ではこのような外乱を考慮して自己の位置を推定して制御信号を加えるので第3図以外の閉ループが存在するはずであるがくわしくは後述する。第2図の写像は第3図の気流等による揺らぎとレーダ雑音の二つによるパラメータのひずみを区別しないで考えたものである。

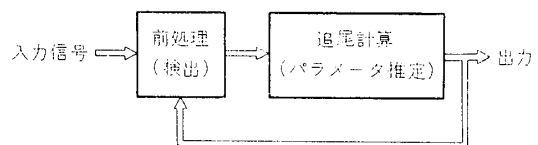
3. 自動追尾に対するカルマンフィルタの応用

3.1 追尾装置

ここでは追尾装置として単純化した第4図のようなものを考える。前処理は第1図の入力



第3図 航空機に関する入力信号の発生モデル



第4図 簡単な追尾装置

プロセスに相当するもので、予測点の周囲に予測範囲を設けて次の規則にしたがって入力信号の取捨選択を行ない、出力にはその時点での航空機のデータと見なしたものを出力する。この予測範囲の大きさはベイズの判定法によって平均の損失を最小にするようなもの [1]、あるいは予測値の標準偏差をもとにして決定したものなどが考えられる。

規則 1) 予測範囲内に得られたデータが複数のときは、全部のデータの平均値をその時点の航空機の観測値として出力する。

規則 2) 予測範囲内にデータが得られない場合は前回の予測値をその時点の航空機の観測値として出力する。

したがって、前処理の出力は上の規則によりスキャンごとに 1 個である。

追尾計算は前処理の出力により追尾計算の出力の平均 2 乗誤差を最小とするような線型な追尾計算を行なうものとする。《雑音》を無視して航空機の運動だけを考えると、この追尾計算はカルマンフィルタと原理的に同一となる。以下では最も簡単な場合として、航空機がただか 1 機、《雑音》もまたただか 1 個の場合について考察を進める。

3.2 追尾計算への入力データ (前処理の出力)

ここでは最も簡単な場合を考えることにし、航空機に関するデータは真の位置には揺らぎは存在せず、レーダ雑音だけを考慮することにと次のように表わせる。

$$x_k = \Phi_{k, k-1} x_{k-1} \quad (1)$$

$$z_k = H_k x_k + b_k \quad (2)$$

ただし、 x_k : t_k 時刻でのシステムの状態ベクトル、 $\Phi_{k, k-1}$: $t_{k-1} \rightarrow t_k$ の状態遷移行列、 $\Phi_{k, k-1} \Phi_{k-1, k-2} = \Phi_{k, k-2}$ 、 $(\Phi_{k, k-1})^{-1} = \Phi_{k-1, k}$ 、 $\Phi_{k, k} = I$ 、 z_k : 観測ベクトル、 H_k : 観測行列、 b_k : 加法性ランダム系列(ガウス分布) $E\{b_k\} = 0$ (すべての k について) $E\{b_k b_j^T\} = B_k \delta_{kj}$ 、 B_k : 非負値、初期状態 $E\{x_0\} = 0$ 、 $E\{x_0 x_0^T\} = M_0$ とする。また《雑音》に関しては本来空間に一様に分布するものであるが、ここでは以下の計算につごうがよいように予測点の周囲に分布すると考えて次のように仮定する (この仮定についてはあとで検討する)。

$$z_k = H_k \hat{x}_k |_{k-1} + n_k \quad (3)$$

ただし、 $\hat{x}_k |_{k-1}$: t_{k-1} 時点までのデータを基にした t_k 時点での推定値、 n_k : 予測点から《雑音》までの距離で加法性ランダム系列 (ガウス分布)、 $E\{n_k\} = 0$ (すべての k に対して)、 $E\{n_k n_j^T\} = N_k \delta_{kj}$ 、 $E\{b_k n_j^T\} = 0$ 、 N_k : 非負値とする。この場合に前処理の出力として、次の 4 種類の場合が考えられる。

(I) 航空機と《雑音》とが同時に予測範囲内に検出された場合

$$z_k = 1/2 \{(H_k x_k + b_k) + (H_k \hat{x}_k |_{k-1} + n_k)\} \triangleq z_{k1} \quad (4)$$

(II) 航空機のみが予測範囲内に検出された場合

$$z_k = H_k x_k + b_k \triangleq z_{k2} \quad (5)$$

(III) 航空機は予測範囲内に検出されず《雑音》のみが検出された場合

$$z_k = H_k \hat{x}_k |_{k-1} + n_k \triangleq z_{k3} \quad (6)$$

(IV) 航空機、《雑音》共に予測範囲内に検出されない場合

$$z_k = H_k \hat{x}_k |_{k-1} \triangleq z_{k4} \quad (7)$$

そこで航空機の予測範囲内への検出確率を p_u 、《雑音》の検出確率 (誤警報確率) を p_n

(ただし, p_a, p_n は k に対して独立で一定と仮定する) とすると上の4種類の場合の生起確率は (I) $p_a p_n$, (II) $p_a(1-p_n)$, (III) $(1-p_a)p_n$, (IV) $(1-p_a)(1-p_n)$ となる. そこで γ_k, δ_k なる確率変数を導入して前処理の出力の4種類の場合を一つにまとめて書くと [2] 次の様に表わせる.

$$\begin{aligned} z_k &= \gamma_k \delta_k z_{k1} + \gamma_k (1-\delta_k) z_{k2} \\ &\quad + (1-\gamma_k) \delta_k z_{k3} \\ &\quad + (1-\gamma_k) (1-\delta_k) z_{k4} \end{aligned} \quad (8)$$

ただし,

$$\begin{aligned} Prob\{\gamma_k=1\} &= p_a \\ Prob\{\gamma_k=0\} &= 1-p_a \\ Prob\{\delta_k=1\} &= p_n \\ Prob\{\delta_k=0\} &= 1-p_n \end{aligned} \quad (9)$$

とする. 前処理では Z_k を航空機のデータと見なしたのであるから追尾計算は以下のように出力の平均2乗誤差を最小とするものを考える.

3.3 追尾計算

平均2乗誤差最小とは推定値と真値との誤差を, $\hat{x}_k \triangleq \hat{x}_k | k - x_k$ とすると

$$E\{\hat{x}_k^T \hat{x}_k\} = \min \quad (10)$$

とすることであり, 線型追尾では $\hat{x}_k | k$ は次のように書くことができる.

$$\hat{x}_k | k = \hat{x}_k | k-1 + K_k(z_k - H_k \hat{x}_k | k-1) \quad (11)$$

そこで, (10) 式を満たすように重み関数 K_k を決定すればよい. また誤差の共分散 P_k は $P_k \triangleq E\{\hat{x}_k \hat{x}_k^T\}$ とすると,

$$\text{trace } P_k = E\{\hat{x}_k^T \hat{x}_k\} \quad (12)$$

の関係がある. そこで K_k を求めるために以下の計算では $\text{trace } P_k$ が最小となるようにする. 以下, 簡単な場合から順に K_k を求め, P_k も求める.

3.3.1 常に航空機のデータが得られると仮定した場合

この場合は $p_n=0, p_a=1$ のときであるので確率1で $\gamma_k=1, \delta_k=0$ であるから, $z_k = z_{k2}$ となるので, k での推定値は

$$\hat{x}_k | k = \hat{x}_k | k-1 + K_k(H_k x_k + b_k - H_k \hat{x}_k | k-1) \quad (13)$$

一方, $\hat{x}_k | k-1 = \Phi_{k, k-1} \hat{x}_{k-1} | k-1$ であるから誤差 \hat{x}_k は

$$\hat{x}_k = (I - K_k H_k) \Phi_{k, k-1} \hat{x}_{k-1} + K_k b_k \quad (14)$$

となる. そこで P_k を求めると, $E\{\hat{x}_{k-1} \hat{x}_{k-1}^T\} = P_{k-1}$, $E\{b_k b_k^T\} = B_k$, $E\{b_k \hat{x}_{k-1}^T\} = 0$, $E\{\hat{x}_{k-1} b_k^T\} = 0$ を使って,

$$P_k = (I - K_k H_k) P_{k-1} (I - K_k H_k)^T + K_k B_k K_k^T \quad (15)$$

ただし, $P_{k-1} \triangleq \Phi_{k, k-1} P_{k-1} \Phi_{k, k-1}^T$ とする. そこで $\text{trace } P_k$ を最小とするために P_k を次の形に整理すると,

$$\begin{aligned} P_k &= P_{k-1} - K_k H_k P_{k-1} - P_{k-1} H_k^T K_k^T \\ &\quad + K_k (H_k P_{k-1} H_k^T + B_k) K_k^T \end{aligned} \quad (16)$$

(16) 式の第4項中の $(H_k P_{k-1} H_k^T + B_k)$ は対称で非負値であるので,

$$S_k S_k^T \triangleq H_k P_{k-1} H_k^T + B_k \quad (17)$$

とおくことができる。そこで S_k を使って P_k を次の形で書き表わす。

$$P_k = P_k' + (K_k S_k - A_k)(K_k S_k - A_k)^T - A_k A_k^T \quad (18)$$

ただし、 $A_k = P_k' H_k^T (S_k^{-1})^T$ である。(18) 式は第 2 項の積の部分だけが K_k を含み、かつ非負値であるので $\text{trace } P_k$ は次のようにすると最小となる。

$$K_k S_k = A_k = P_k' H_k^T (S_k^{-1})^T \quad (19)$$

ゆえに求める重み関数 K_k は、

$$K_k = P_k' H_k^T [H_k P_k' H_k^T + B_k]^{-1} \quad (20)$$

また、

$$P_k = P_k' - K_k H_k P_k' \quad (21)$$

となる。これはカルマンフィルタそのものである [3]。

3.3.2 《雑音》がないと仮定した場合

$p_n = 0$, つまり $P_{\text{rob}}\{\delta_k = 0\} = 1$ の場合である。観測値は、

$$\begin{aligned} z_k &= \gamma_k z_{k2} + (1 - \gamma_k) z_{k1} \\ &= \gamma_k (H_k x_k + b_k) + (1 - \gamma_k) H_k \hat{x}_{k-1} \end{aligned} \quad (22)$$

この場合も 3.3.1 と同様にして \hat{x}_k を求めると、

$$\hat{x}_k = (I - K_k \gamma_k H_k) \Phi_{k, k-1} \hat{x}_{k-1} + K_k \gamma_k b_k \quad (23)$$

共分散 P_k は x および γ に対して期待値を求めたものとすれば、

$$P_k \triangleq E_x E_\gamma \{x_k x_k^T\} \quad (24)$$

ところで (9) 式より $E_\gamma \{\gamma_k\} = E_\gamma \{\gamma_k^2\} = p_a$ であるので、 p_k は、

$$\begin{aligned} P_k &= P_k' - p_a P_k' H_k^T + K_k^T - p_a K_k P_k' \\ &\quad + K_k [p_a H_k P_k' H_k^T + p_a B_k] K_k^T \end{aligned} \quad (25)$$

そこで $S_k S_k^T \triangleq p_a (H_k P_k' H_k^T + B_k)$ とおいて、3.3.1 と同様にして、 $\text{trace } P_k$ を最小とする K_k を求めると、

$$\begin{aligned} K_k &= p_a P_k' H_k^T [p_a (H_k P_k' H_k^T + B_k)]^{-1} \\ &= P_k' H_k^T [H_k P_k' H_k^T + B_k]^{-1} \end{aligned} \quad (26)$$

このとき P_k は

$$P_k = P_k' - p_a K_k H_k P_k' \quad (27)$$

となる。(26) 式は 3.3.1 の場合の K_k と同じである。しかし誤差の共分散 P_k については (26) 式のように第 2 項に p_a が含まれており、データ消滅の効果が現われ、それだけ共分散の収束を悪くしていることがわかる。

3.3.3 《雑音》1 個と航空機 1 機が常に出現するとした場合

$p_n = 1$, $p_a = 1$ の場合で

$$z_k = z_{k1} = H_k \Phi_{k, k-1} \{1/2(x_{k-1} + \hat{x}_{k-1}|_{k-1})\} + 1/2(b_k + n_k) \quad (28)$$

この場合も 3.3.1 と同様に計算を行なうと、

$$\hat{x}_k = (I - 1/2 K_k H_k) \Phi_{k, k-1} \hat{x}_{k-1} + 1/2 K_k (b_k + n_k) \quad (29)$$

$$\begin{aligned} P_k &= P_k' - 1/2 K_k H_k P_k' - 1/2 P_k' H_k^T K_k^T \\ &\quad + K_k \{1/4 (H_k P_k' H_k^T + B_k + N_k)\} K_k^T \end{aligned} \quad (30)$$

$\text{trace } P_k$ を最小とする K_k は

$$K_k = 2P_k' H_k^T (H_k P_k' H_k^T + B_k + N_k)^{-1} \quad (31)$$

$$P_k = P_k' - 1/2 K_k H_k P_k' \quad (32)$$

この場合は航空機と《雑音》の単純な算術平均 (1/2) をとったので、 $\hat{x}_k|k$ の計算を経てうまく \hat{x}_k が出たが、そのほかの加重平均ではこのようにうまくはいかない。しかし、理想的には予測値の確からしさに基いて観測値と予測値との距離によって平均をするときの重み付けを考える方が妥当と思われる。また、この場合 K_k は一見2倍になってデータに対する重みが増したように見えるが分母に N_k が入っているのでそれだけ小さくなる。また共分散の収束も悪くなっていることがわかる。

3.3.4 《雑音》1個と航空機1機の一般の場合

この場合は 3.3.1~3 を包含するものであり、観測値は (8) 式であるので誤差 \hat{x}_k を求めると

$$\begin{aligned} \hat{x}_k = & [I - K_k \gamma_k (1 - 1/2 \delta_k) H_k] \Phi_{k, k-1} \hat{x}_{k-1} \\ & + K_k \{ \gamma_k (1 - 1/2 \delta_k) b_k + \delta_k (1 - 1/2 \gamma_k) n_k \} \end{aligned} \quad (33)$$

この場合の共分散は x , γ および δ について期待値を求めると、

$$P_k = E_x E_\gamma E_\delta \{ \hat{x}_k \hat{x}_k^T \} \quad (34)$$

一方 (9) 式から $E_\gamma \{ \gamma_k \} = E_\gamma \{ \gamma_k^2 \} = p_a$, $E_\delta \{ \delta_k \} = E_\delta \{ \delta_k^2 \} = p_n$ であり、 γ_k , δ_k の相互に相関がないものと仮定すれば

$$E_\gamma E_\delta (\gamma_k \delta_k) = p_a p_n \quad (35)$$

であるので、 p_k は次のようになる。

$$\begin{aligned} P_k = & P_k' - p_a (1 - 1/2 p_n) P_k' H_k^T K_k^T \\ & - p_a (1 - 1/2 p_n) K_k H_k P_k' \\ & + K_k [p_a (1 - 3/4 p_n) \{ H_k P_k' H_k^T + B_k \} \\ & + p_n (1 - 3/4 p_a) N_k] K_k^T \end{aligned} \quad (36)$$

そこで、trace P_k を最小とする K_k は

$$\begin{aligned} K_k = & p_a (1 - 1/2 p_n) P_k' H_k^T \{ p_a (1 - 3/4 p_n) \\ & (H_k P_k' H_k^T + B_k) + p_n (1 - 3/4 p_a) N_k \}^{-1} \end{aligned} \quad (37)$$

また、

$$P_k = P_k' - p_a (1 - 1/2 p_n) K_k H_k P_k' \quad (38)$$

となる。 p_a , p_n に適当な値を与えると 3.3.1~3 の結果と一致することがわかる。

以上のように、得られたデータの真偽が確率的に与えられた場合にそのデータによって予測値をどのくらいの重みで修正すればよいかについて平均2乗誤差最小という意味で最適な線型追尾を設計することができる。

ここでさらに、(1) 式の誘導と《雑音》および p_a , p_n について考察を進めることにする。

4. 航空機に関する状態方程式

4.1 状態方程式

航空機に関する運動方程式は縦方向、横方向等複雑であるが、ここでは航空機のダイナミ

ックシステムを一般的に次のように書く [4].

$$\left. \begin{aligned} \dot{R} &= V \\ \dot{V} &= f(R, V, U, W) \end{aligned} \right\} \quad (39)$$

ただし, R ; 位置, V ; 速度, U : 制御量, W ; ランダム雑音とする.

3. の議論を適用するためには方程式を線型化する必要があるので, 次のように規定値に * を付けて表わし, 方程式をテーラー展開してその第 1 項までをとると

$$\left. \begin{aligned} \dot{r} &= v \\ \dot{v} &= \frac{\partial f}{\partial R^*} r + \frac{\partial f}{\partial V^*} v + \frac{\partial f}{\partial U^*} u + \frac{\partial f}{\partial W^*} w \end{aligned} \right\} \quad (40)$$

ただし, $r \triangleq R - R^*$, $v \triangleq V - V^*$, $u \triangleq U - U^*$, $w \triangleq W - W^*$ とする.

そこで状態ベクトルとして, $x^T = (r \ v)$ とおくと (39) 式は,

$$\dot{x} = F(t)x + G(t)u + E(t)w \quad (41)$$

ただし,

$$F(t) = \begin{bmatrix} 0 & I \\ \frac{\partial f}{\partial R^*} & \frac{\partial f}{\partial V^*} \end{bmatrix}$$

$$G(t) \triangleq \frac{\partial f}{\partial U^*}$$

$$E(t) \triangleq \frac{\partial f}{\partial W^*}$$

$G(t)$, $E(t)$ の次元は適当にそろえるものとする.

(41) 式を (1) 式の形にするために (40) 式を解く. $t = t_1$ で,

$$\begin{aligned} x(t_1) &= \Phi(t, t_0)x(t_0) \\ &+ \int_{t_0}^{t_1} \Phi(t_1, \tau)G(\tau)u(\tau)d\tau \\ &+ \int_{t_0}^{t_1} \Phi(t_1, \tau)E(\tau)w(\tau)d\tau \end{aligned} \quad (42)$$

ただし, $\Phi(t, t_0)$ は $\dot{\Phi}(t, t_0) = F(t)\Phi(t, t_0)$ の解である. そこで t_0, t_1 を t_{k-1}, t_k に対応させ, $n(t)$, $w(t)$ が $[t_{k-1}, t_k]$ で一定と仮定すると

$$x_k = \Phi_{k, k-1}x_{k-1} + \Gamma_{k, k-1}u_{k-1} + \Lambda_{k, k-1}w_{k-1} \quad (43)$$

ただし

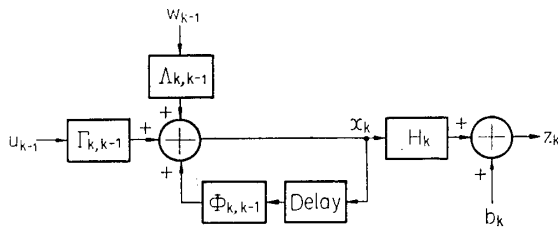
$$\Gamma_{k, k-1} = \int_{t_{k-1}}^{t_k} \Phi(t_k, \tau)G(\tau)d\tau$$

$$\Lambda_{k, k-1} = \int_{t_{k-1}}^{t_k} \Phi(t_k, \tau)E(\tau)d\tau$$

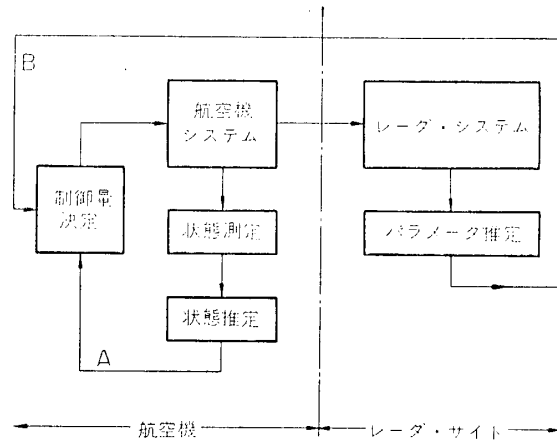
$$E\{w_k\} = 0 \quad (\text{すべての } k \text{ に対して})$$

$$E\{w_k w_j^T\} = W_k \delta_{kj}$$

となる. (43) 式は基本の式である. (1) 式は制御量およびランダム雑音を無視した式であった. (43) 式と (2) 式を図で表わせば第 5 図のようになる. 第 5 図は第 3 図のモデルと



第5図 航空機の状態方程式と観測値



第6図 制御ループの説明図

ほぼ同じものになっていることがわかる．ところが搜索レーダにおける自動追尾では次の問題がある．

4.2 制御量について

(43) 式には制御量 u_{k-1} が入っており，一般に状態ベクトルの推定値を出すには u_{k-1} が既知でなければならない．一般の制御システムでは状態ベクトルの推定値に基いて u_{k-1} を決定するのでシステムにとって， u_{k-1} は既知の量である．ところが搜索レーダの場合に制御システムを第6図のように外からながめるときは u_{k-1} は未知の量となり，搜索レーダにおける自動追尾のように制御システム自体の制御ループAのほかにレーダサイトからの制御ループBがある場合でも，Bのループだけが動作する場合以外はレーダサイトにおいては u_{k-1} は既知の量ではない．Bのループはたとえば航空機衝突の危険のある場合に動作するものである．そこで，ここでは u_{k-1} は次のように決定されると仮定する．

$$u_{k-1} = \Psi_{k-1} [x_{k-1} + q_{k-1}] \tag{44}$$

q_{k-1} は $E\{q_k\} = 0, E\{q_k q_j^T\} = Q_k \delta_{kj}$ なるガウス性ランダム系列で，制御量を決定する際の揺らぎを表わすものであり， Ψ_{k-1} は状態ベクトルと制御量を結びつける操作行列であるが，これは航空機特有の操縦者の特性が関与するところである．(44) 式を仮定することにより，

$$x_k = [\Phi_{k,k-1} + \Gamma_{k,k-1} \Psi_{k-1}] x_{k-1} + \Psi_{k-1} q_{k-1} + \Lambda_{k,k-1} w_{k-1} \tag{45}$$

となるので，

$$\Omega_{k,k-1} \triangleq \Phi_{k,k-1} + \Gamma_{k,k-1} \Psi_{k-1} \tag{46}$$

とおくことができる．実際に外から見えるのは $\Omega_{k,k-1}$ であるからこれは状態遷移行列に相当し， $\Gamma_{k,k-1} \Psi_{k-1}$ による $\Phi_{k,k-1}$ の修正といってよいと思われる．

ここで， w_k, q_k, b_k, n_k はすべて相互に無相関と仮定するとこの場合の線型追尾計算は(11), (37), (38) 式より

$$\hat{x}_k | k = \Omega_{k,k-1} \hat{x}_{k-1} | k-1 + K_k [z_k - H_k \hat{x}_k | k-1] \tag{47}$$

$$K_k = p_a(1 - 1/2 P_n) P_k'' H_k^T \{ p_a(1 - 3/4 p_n) \cdot (H_k P_k'' H_k^T + B_k) + p_n \left(1 - \frac{3}{4} p_a \right) N_k \}^{-1} \quad (48)$$

$$P_k'' = \Omega_{k, k-1} P_{k-1} \Omega_{k, k-1}^T + \Psi_{k-1} Q_{k-1} \Psi_{k-1}^T + \Lambda_{k, k-1} W_{k-1} \Lambda_{k, k-1}^T \quad (49)$$

$$p_a = P_k'' - p_a(1 - 1/2 p_n) K_k H_k P_k'' \quad (50)$$

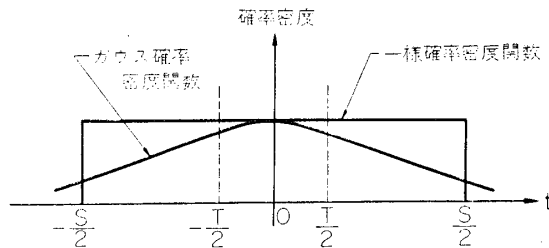
となる。また予測値は次のようになる。

$$\hat{x}_{k+1|k} = \Omega_{k+1, k} \hat{x}_k | k \quad (51)$$

5. 《雑音》について

3. では予測点の周囲にガウス分布する《雑音》について、しかも 1 個だけを考えて議論を進めたが、実際との対応について考察する。

まず実際の現象は、予測範囲をスキャンごとに設けていったときに、予測範囲内に航空機以外に《雑音》が検出される。このときの《雑音》は 1 個でないかもしれないが、確率 p_n でたかだか 1 個が検出されるものと仮定しておく。このとき、予測点から、この《雑音》までの距離を考えたときに、この距離は少なくとも予測範囲内では一様分布をしていると考えられる。この現象を第 2 図のモデルで考えるとき、多数の雑音源によってこの現象は引き起こされるが、簡単のために 1 個の雑音源により《雑音》が検出されるものと仮定する。



第 7 図 《雑音》の確率密度関数

まず一様分布の場合を考えて、第 7 図のように予測範囲 T のそとに範囲 S を考え、与えられた p_n になるように一様分布する S の範囲を決める。3. では誤警報確率と《雑音》の分散の積 $p_n N_k$ という形で入っているので、ここでも $p_n N_k$ を考えることにするとこの場合は、

$$p_n = T/S, \quad p_n N_k = T^2/12 p_n \quad (52)$$

となる。ところで、一様分布では 3. の議論は適用できないので、この一様分布をガウス分布でおき替えることを考える、分散 σ^2 のガウス分布を持つ確率変数 t による検出確率は

$$p_n = 2 \int_0^{T/2} 1/\sqrt{2\pi\sigma^2} \exp(-t^2/2\sigma^2) dt \quad (53)$$

である。そこでいかなるガウス分布を使ったらよいかを決める評価として、予測範囲内での一様分布からのずれ ξ を考えると、この ξ は $\sigma \geq T$ であるなら 10% 以内に収めることが可能である。そこで今度は逆に p_n となるような S を考える。このとき $p_n \sigma^2$ を考えて、 $p_n N_k$ との比 α を考えると、 $\alpha \approx 1.7$ である。したがって一様分布をガウス分布でおき替えても支障は起らないものと思われる。以上のように考えておいて p_n を所定の値にするのを考えるが、 p_n は予測範囲の大きさと、ガウス分布の分散で決ってしまい、任意の値はとれず、 $p_n \rightarrow$ 小とすると (52) 式から予想されるように $p_n N_k \rightarrow \infty$ となってしまう。これは初めのところで S 内に存在する確率を 1 としたために起る矛盾で、実際には $p_n = p_{n1} \cdot p_{n2}$ としなければならない。ただし p_{n1} は S 内に存在する確率、 p_{n2} は S 内に存在する条件の

もとで T 内に存在する確率である。

6. 航空機の検出確率について

航空機の予測範囲内に検出される確率 p_a は「雑音」の場合と同様に、レーダシステムの信号検出確率 p_{a1} と信号が検出されたという条件のもとで予測範囲内に受信される確率 p_{a2} との積で表わすことができる。

ここで、 p_{a2} について考えると予測値 $H_k \hat{x}_k |_{k-1}$ の周囲に T_k なる大きさの予測範囲を考えたとき、真値からの誤差の共分散は P_k'' と求まっているから、 p_{a2} は n をベクトルの次元とすると、

$$p_{a2} = \int_{H_k \hat{x}_k |_{k-1} - T_k/2}^{H_k \hat{x}_k |_{k-1} + T_k/2} \frac{1}{(2\pi)^{n/2} |P_k'' + B_k|^{1/2}} \exp\{-1/2(z_k - H_k \hat{x}_k |_{k-1})^T (P_k'' + B_k)^{-1} (z_k - H_k \hat{x}_k |_{k-1})\} dz_k \quad (54)$$

のように書ける。ここで注意しなければならないのは P_k'' は時刻 k によって変化するので、**3.**に仮定したように p_a を一定に保つためには p_{a1} はほぼ一定と仮定すると、 T_k を変化させる必要がある。ところで T_k を変化させると一般に p_n も変化することになる。また p_{a2} が(54)式のように表わせるところから p_a には $k-1$ 時点前の p_a, p_n の値との相関が生ずることにもなって複雑となる。しかし T_k についてある程度大きさが決まっていると仮定すれば、適当な補正係数を掛けることにより**3.**の議論が適用できるものと思われる。

7. あとがき

ここでは搜索レーダにおける自動追尾の場合に、搜索レーダ特有の問題を考慮するために、追尾装置への入力信号モデルとして航空機および「雑音」を考え、それらの生起が確率的に与えられたとき、前処理として入力信号に対して予測範囲に検出される信号を平均する操作を考えたときに、その前処理出力に対して平均2乗誤差を最小とする線型追尾計算を行なうためにカルマンフィルタの理論を応用してその重み関数 K_k を求め、信号の検出確率、誤警報確率および状態方程式に対するカルマンフィルタの理論を応用する場合の仮定に対して検討を加え、その仮定が実際の場合に満足されることを明らかにした。ただ搜索レーダにおける自動追尾ではパラメータ推定を高精度で行なうことがもとより望ましいがそれが第1の目的ではなく、あくまで追尾を続行させるための同定の手段が第一義と考えた。さらに実際のシステムに当てはめようとするとき個々の定数の値などについては実験的に求める必要があると思われる。

1970年7月17日 計測部

参考文献

- [1] 東口, 水町, 飯田, 航空交通管制用レーダにおける自動追尾のモデルについて, 1988 昭和45年電気四学会連合大会
- [2] N. E. Nahi, Optimal Recursive Estimation with Uncertain Observation, IEEE Trans. IT-15

-4, July, 1969.

- [3] H. W. Sorenson, Kalman Filtering Techniques, Advances in Control Systems, Vol. 3. Academic Press. 1965.
- [4] H. W. Sorenson, On the Treatment of Inertial Measurement Unit Data in Optimal Linear Navigation Policies. IEEE AES-5-3 May, 1969.