

# 直線的に変化する外圧による円筒かくの座屈

植村 益次・森田 道子

## Buckling of Cylindrical Shell under Linearly-Varying Lateral Pressure

By

Masuji UEMURA and Michiko MORITA

**Abstract:** The buckling pressures of simply-supported cylindrical shells subjected to linearly-varying lateral pressure are analysed for the cases (a) under lateral pressure only and (b) under combined lateral and axial pressures. The buckling pressures and the numbers of circumferential lobes are obtained by use of the stationary principle of total potential energy with parameters of  $R/t$  and  $L/R$ , where  $L, R$  and  $t$  are axial length, radius and thickness of cylindrical shell, respectively.

It is natural that the superposition of axial pressure upon lateral pressure decreases the buckling values, but it has no appreciable effect except for extremely short and thick cylinders. The buckling pressures under linearly-varying lateral pressure are a little small compared with those under uniform lateral pressure which is equal to the average value of linearly-varying lateral pressure. This will be one of useful measures for design purpose.

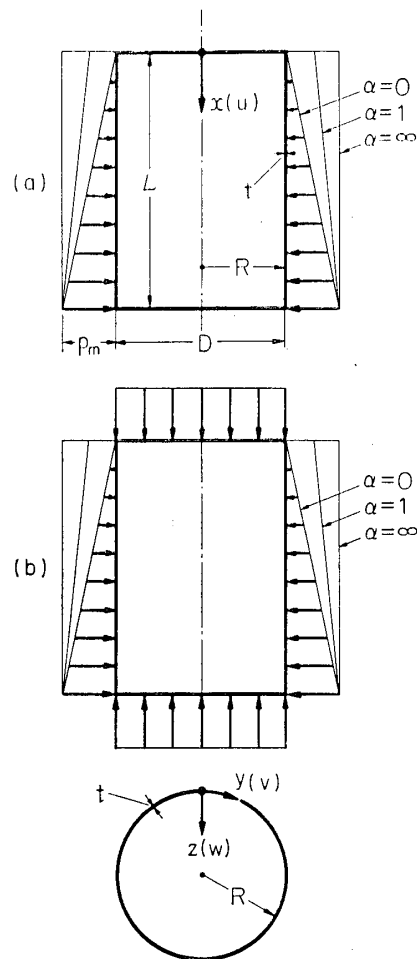
### 概 要

円筒かくの外圧による座屈は従来均一外圧のもとで解析されてきたが、本文では、軸方向に直線的に変化する外周圧力のもとでの臨界座屈値を求めた。有限変形を考慮したうえ、座屈時のエネルギー変化を変位成分の同次式で与え、停留原理によって固有値問題として両端単純支持条件のもとで、座屈外圧力を求めた。 $R/t$ ,  $L/R$  ( $L$ : 筒軸長,  $R$ : 筒半径,  $t$ : かく厚) をパラメータにし、(a) 半径方向外周圧力のみの場合、(b) 軸方向圧力も重畳する場合の両方を解析した。軸方向圧力の重畳はもちろん臨界圧力値 ( $p_{cr}$ ) を低下させるが、その影響は  $R/t$ ,  $L/R$  のごく小さい場合を除いて小さい。また均一外周圧力の場合に比較して、外周圧力が軸方向に直線的に変化する場合の  $p_{cr}$  は、圧力平均値の均一外圧力をうけるとした場合の  $p_{cr}$  よりもわずかに小さい程度で、設計に有益な目安を与えてくれる。

### 1. ま え が き

従来円筒かくの外圧による座屈は、圧力容器・真空容器・貯蔵タンク・潜水艦など多くの薄肉構造物の設計上重要な課題として取り上げられてきた。しかし、ほとんどの従来の解析は均一な外圧力のもとでの座屈問題として取り扱われている [1]~[4]。最近海洋開発とともに海中貯蔵タンクが問題となり、その他土中貯蔵タンクなど高さに比例する外圧のもとで

の円筒かくの座屈値を求める必要に迫られるようになった。そこで本文では直線的に変化する外圧による円筒かくの座屈値について、有限変形を考慮した上座屈時のエネルギー変化を同次化し、固有値問題として臨界値を解析した結果について述べる。たまたま講演会の席上東北大八巻教授より、Brushら[5]が「ひずみエネルギーの二次変分の一般式とそのかく座屈解析へ応用」の論文中例題として本問題を取り上げていることを知った。そのため本文の意義は半減したと思うが、解法やエネルギー項の取り方で相異なる点もあるのであえて発表する次第です。



第1図 外圧をうける円筒殻

## 2. 解 析

第1図に示すような円筒かく（直径  $D$ 、半径  $R$ 、筒長  $L$ 、かく厚  $t$ ）が、(a) 半径方向外圧力のみをうける場合と (b) 軸方向外圧力も合わせてうける場合の両方について考える。

境界条件としては、実際の円筒かくの両端にはリングあるいは端板があり、従来の均一外圧による座屈値は、境界条件が固定の場合には単純支持の場合に比較してももちろん大きい

が、大差はないので、ここでは安全設計のためたわみ変形に対する境界条件は単純支持として扱うことにする。

### 1. 基礎方程式

第 1 図に示すように、円筒軸方向、周方向、半径（内向）方向にそれぞれ  $x, y, z$  軸をとる。外圧力をうけて座屈する前には、円形断面を保つとし、その状態を添字“0”を付して示す。座屈前の半径方向変形は、両端近傍で小さいが、ごく短い筒長の場合を除いてこの影響は小さいので、座屈前のひずみは次式で表わされるものとする。

$$\varepsilon_{x0} = \frac{1}{E} \left( -P + \frac{\nu p R}{t} \right), \quad \varepsilon_{y0} = \frac{1}{E} \left( -\frac{p R}{t} + \nu P \right) \quad (1)$$

ここで  $P = \text{軸応力} = p_m R/2t$ ,

$$p = \text{半径方向外圧力} = \frac{p_m}{1+\alpha} \left( \frac{x}{L} + \alpha \right)$$

( $0 \leq \alpha \leq \infty$ ,  $\alpha$  は第 1 図に示すように半径方向外圧力の形状を示すパラメータである.)

$E$ : 縦弾性係数,  $\nu$ : ポアソン比

外力が大きくなってある臨界値に達すると、円筒かくは周方向に波を生じつつ、半径方向に大きくたわんで座屈する。このときの附加的変位成分を、 $x, y, z$  軸方向にそれぞれ  $u, v, w$  とすると、座屈後のひずみは次式で表わされ、本座屈問題の性格を考え微量を省略すると、次のように簡単化される。すなわち座屈前には軸対称形をしていると考えれば、 $\gamma_{xy}$  の 2 次項は省略でき、半径方向  $w$  はかくの一般的取扱いと同様に  $u, v$  よりも大きいと考え、また周方向には座屈後に波を発生して不伸張変形に近くなると考え、 $v_y - (w/R) \ll 1$  としてその 2 次項は省略した。

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \varepsilon_{x0} + u_x + (u_x^2 + v_x^2 + w_x^2)/2 \\ &\doteq \varepsilon_{x0} + u_x + w_x^2/2 \\ \varepsilon_y &= \varepsilon_{y0} + v_y - \frac{w}{R} + \frac{1}{2} \left\{ u_y^2 + \left( v_y - \frac{w}{R} \right)^2 + \left( w_y + \frac{v}{R} \right)^2 \right\} \\ &\doteq \varepsilon_{y0} + v_y - (w/R) + \{ w_y + (v/R) \}^2 / 2 \\ \gamma_{xy} &= u_y + v_x + u_x u_y + v_x \{ v_y - (w/R) \} \\ &\quad + w_x \{ w_y + (v/R) \} \\ &\doteq u_y + v_x \end{aligned}$$

ここで添字“ $x$ ”, “ $y$ ” は  $x, y$  に関する微分を意味する。

全ポテンシャルエネルギーの停留原理によって解析するため、式 (2) を用いて以下各エネルギーを求める。

#### ① 伸張ひずみエネルギーの増加

$$\begin{aligned} \Delta U_e &= [Et/2(1-\nu^2)] \int_0^{2\pi R} \int_0^L [(\varepsilon_x^2 + 2\nu\varepsilon_x\varepsilon_y + \varepsilon_y^2) \\ &\quad - (\varepsilon_{x0}^2 + 2\nu\varepsilon_{x0}\varepsilon_{y0} + \varepsilon_{y0}^2)] dx dy \\ &= [Et/2(1-\nu^2)] \int_0^{2\pi R} \int_0^L [u_x^2 + v_y^2 + (w/R)^2 + 2\nu u_x v_y \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -2\nu u_x(w/R) - 2\nu v_y(w/R)] dx dy \\
& + R \int_0^{2\pi R} \int_0^L p \{ (w/R) - \{ (v/R) + w_y \}^2 / 2 \} dx dy \\
& - (Pt/2) \int_0^{2\pi R} \int_0^L w_x^2 dx dy - Pt \int_0^{2\pi R} (u_L - u_0) dy
\end{aligned} \tag{3}$$

ここで添字“0”“L”は、円筒の上端，下端を意味する。

### ② 曲げひずみエネルギーの増加

$$\begin{aligned}
\Delta U_b &= [Et^3/24(1-\nu^2)] \int_0^{2\pi R} \int_0^L [\kappa_x^2 + \kappa_y^2 + 2\nu\kappa_x\kappa_y \\
& + 2(1-\nu)\kappa_{xy}^2] dx dy \\
&= [Et^3/24(1-\nu^2)] \int_0^{2\pi R} \int_0^L [\tau w_{xx}^2 + \{w_{yy} + (w/R^2)\}^2 \\
& + 2\nu w_{xx}\{w_{yy} + (w/R^2)\} + 2(1-\nu)w_{xy}^2] dx dy
\end{aligned} \tag{4}$$

ここで  $\kappa_x, \kappa_y, \kappa_{xy}$ : かく中性面の曲率変化,

$$\kappa_x = w_{xx}, \quad \kappa_y = w_{yy} + (w/R^2), \quad \kappa_{xy} = w_{xy}$$

### ③ せん断ひずみエネルギーの増加

$$\begin{aligned}
\Delta U_s &= [Et/4(1+\nu)] \int_0^{2\pi R} \int_0^L \gamma_{xy}^2 dx dy \\
&= [Et/4(1+\nu)] \int_0^{2\pi R} \int_0^L (u_y + v_x)^2 dx dy
\end{aligned} \tag{5}$$

### ④ 外圧力のポテンシャルエネルギー

外圧力一定のもとで座屈するものとする

まず半径方向外周圧力について考える。外圧力は殻面に垂直に作用するが、座屈変形した表面を考えると、外圧力は  $x, y, z$  方向に次の成分をもつようになる。

$$\left. \begin{aligned}
dP_x &= p w_x dx dy \\
dP_y &= p \{ (v/R) + w_y \} dx dy \\
dP_z &= p \{ 1 + v_y - (w/R) + u_x \} dx dy
\end{aligned} \right\} \tag{6}$$

これらを考慮し、 $x, y, z$  軸方向の変位に対して積分すれば、外周圧力のポテンシャルエネルギーとして結局次式がえられる。

$$\begin{aligned}
\Delta T_1 &= \int_0^{2\pi R} \int_0^L \left[ \int p w_x \delta u + \int p \{ (v/R) + w_y \} \delta v \right. \\
& \left. - \int p \{ 1 + v_y - (w/R) + u_x \} \delta w \right] dx dy \\
&= - \int_0^{2\pi R} \int_0^L p \{ \tau w - \{ (v^2/R) + (w^2/R) + w_x u + w_y v - v_y w \\
& - u_x w \} / 2 \} dx dy \\
& \int_0^{2\pi R} \int_0^L v_y w dx dy = \int_0^L |v w|_0^{2\pi R} dx - \int_0^{2\pi R} \int_0^L v w_y dx dy
\end{aligned}$$

$$\int_0^{2\pi R} \int_0^L u_x w dx dy = \int_0^{2\pi R} |u w|_0^L dy - \int_0^{2\pi R} \int_0^L u w_x dx dy$$

の関係を用いると、右辺第 1 項はともに境界条件を考慮して 0 となり、 $\Delta T_1$  は次式となる

$$\begin{aligned} \Delta T_1 = & - \int_0^{2\pi R} \int_0^L p \{ \tau w - (v^2/2R) - (\tau w^2/2R) \\ & - u w_x - v w_y \} dx dy \end{aligned} \quad (7)$$

次に両端における軸方向圧力について考える．端面近傍の容積減少は

$$\int_0^{2\pi R} \{ u(R-w)^2/2R \} dy \doteq \int_0^{2\pi R} u \{ (R/2) - w \} dy$$

なので、上下両端を考えると、軸方向圧力のポテンシャルエネルギーは次式で与えられる．

$$\begin{aligned} \Delta T_2 = & (p_m R/2) \int_0^{2\pi R} (u_L - u_0) dy - p_m \int_0^{2\pi R} \{ (u w)_L - (u w)_0 \} dy \\ = & P t \int_0^{2\pi R} (u_L - u_0) dy - (2 P t / R) \int_0^{2\pi R} \{ (u w)_L - (u w)_0 \} dy \end{aligned} \quad (8)$$

結局全ポテンシャルエネルギー  $\Pi$  は、式 (3), (4), (5), (7), (8) を加え、

$$\Pi = \Delta U_e + \Delta U_b + \Delta U_s + \Delta T_1 + \Delta T_2$$

で表わされるが、ある項は互に消し合い、結局軸方向圧力も作用する場合は次式となる．

$$\begin{aligned} \Pi = & \{ E t / 2 (1 - \nu^2) \} \int_0^{2\pi R} \int_0^L \{ u_x^2 + v_y^2 + (\tau w / R)^2 + 2 \nu u_x v_y \\ & - 2 \nu u_x (\tau w / R) - 2 v_y w / R \} dx dy \\ & + \{ E t^3 / 24 (1 - \nu^2) \} \int_0^{2\pi R} \int_0^L \{ w_{xx}^2 + w_{yy}^2 + (w / R^2)^2 + 2 \tau w v_{yy} / R^2 \\ & + 2 \nu w_{xx} \{ \tau w_{yy} + (w / R^2) \} + 2 (1 - \nu) w_{xy}^2 \} dx dy \\ & + \{ E t / 4 (1 + \nu) \} \int_0^{2\pi R} \int_0^L (u_y + v_x)^2 dx dy \\ & + R \int_0^{2\pi R} \int_0^L p \{ -(\tau w_y^2 / 2) + (\tau w / R)^2 / 2 + (u w_x / R) \} dx dy \\ & - (P t / 2) \int_0^{2\pi R} \int_0^L w_x^2 dx dy - 2 (P t / R) \int_0^{2\pi R} \{ (u w)_L - (u w)_0 \} dy \end{aligned} \quad (9)$$

## 2. 変位成分

全ポテンシャルエネルギー  $\Pi$  は変位成分に関する 2 次項で表わされ、両端単純支持の境界条件を満足する近似的な変位成分を仮定することにより、固有値としての座屈値が求められることになる．変位成分  $u, v, w$  としては次式のようなものを考える．

$$\left. \begin{aligned} u &= \sin(ny/R) \{ A \cos(\pi x/L) + B \cos(2\pi x/L) \} \\ v &= \cos(ny/R) \{ C \sin(\pi x/L) + D \sin(2\pi x/L) \} \\ w &= \sin(ny/R) \{ E \sin(\pi x/L) + F \sin(2\pi x/L) \} \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

ここで  $A, B, C, D, E, F$  は任意常数、 $n$  は周方向の波数を意味する．一般に  $u, v, w$  は軸方向には無限フーリエ級数で表現されるべきものであるが、例えば均一圧力や直線的に変化する圧力のもとでのたわみ  $w$  は

$$w \sim \sum_{n=1}^{\infty} (1/n^5) \sin(n\pi x/L)$$

の形で展開され、収れん度が大きいこと、およびかくの座屈値が多くの因子の影響を受け、実験値との相異が大きいことを考えると、有効数字 2~3 けた程度で実用上十分であることなどから式 (10) のように 2 項で表示した。式 (10) の括弧内第 2 項は、外周圧が  $x$  に比例することを考慮して附加した項である。

3. エネルギーの停留原理

全ポテンシャルエネルギーの最小の原理、すなわち停留原理によって、式 (10) を式 (9) に代入して求めた  $\Pi$  の  $A, B, C, D, E, F$  に対する停留条件

$$\partial \Pi / \partial A = \partial \Pi / \partial B = \partial \Pi / \partial C = \partial \Pi / \partial D = \partial \Pi / \partial E = \partial \Pi / \partial F = 0 \tag{11}$$

より、 $A, B, C, D, E, F$  についての次の 6 元同次方程式が求められる。

$$\left. \begin{aligned} a_{11}A + a_{12}B + a_{13}C + a_{14}D + a_{15}E + a_{16}F &= 0 \\ \dots\dots\dots \\ a_{61}A + a_{62}B + a_{63}C + a_{64}D + a_{65}E + a_{66}F &= 0 \end{aligned} \right\} \tag{12}$$

ここで  $a_{ij} = a_{ji}$ ,  $a_{11} = 1 - \nu + 2\beta^2$ ,  $a_{13} = (1 + \nu)\beta$

$$\begin{aligned} a_{15} &= [2\nu + \phi_m(1 + 2\alpha)/(1 + \alpha)](\beta/n), \\ a_{16} &= -(80/9\pi^2)\phi_m\beta/n(1 + \alpha), \quad a_{22} = 1 - \nu + 8\beta^2, \quad a_{24} = 2(1 + \nu)\beta \\ a_{25} &= -(40/9\pi^2)\phi_m\beta/n(1 + \alpha), \quad a_{26} = (2\beta/n)[2\nu + \phi_m(1 + 2\alpha)/(1 + \alpha)] \\ a_{33} &= 2 + (1 - \nu)\beta^2, \quad a_{35} = 2/n, \quad a_{44} = 2[1 + 2(1 - \nu)\beta^2], \quad a_{46} = 2/n \\ a_{55} &= (2/n^2) + (1/6)(t/R)^2 \{n^2(1 + \beta^2)^2 - 2 + (1/n^2) - 2\nu\beta^2\} + \\ &\quad (\phi_m/n^2) \{(1 - n^2)(1 + 2\alpha)/(1 + \alpha) - n^2\beta^2\}, \\ a_{56} &= (32/9\pi^2)[\phi_m/(1 + \alpha)] \times [1 - (1/n^2)], \\ a_{66} &= (2/n^2) + (1/6)(t/R)^2 \{n^2(4\beta^2 + 1)^2 - 2 + (1/n^2) \\ &\quad - 8\nu\beta^2\} + (\phi_m/n^2) \{(1 - n^2)(1 + 2\alpha)/(1 + \alpha) - 4n^2\beta^2\} \end{aligned} \tag{13}$$

上記以外の  $a_{ij} = 0 (i, j \leq 6)$ ,  $\beta = \pi R/nL$ ,  $\phi_m = p_m R(1 - \nu^2)/Et$

半径方向の外圧のみが作用する場合 (第 1 図(a)) には、 $a_{55}$   $a_{66}$  の式中  $n^2\beta^2$ ,  $4n^2\beta^2$  の項を省略すればよい。

さて式 (12) において、 $A, B, C, D, E, F$  がともに 0 以外の nontrivial な解をもつためには、係数  $a_{ij}$  に関する行列式が 0 でなければならない。

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots\dots\dots & a_{16} \\ a_{21} & \dots\dots\dots & & \\ \dots\dots\dots & & & \\ a_{61} & a_{62} & \dots\dots\dots & a_{66} \end{vmatrix} = 0 \tag{14}$$

円筒殻の寸法が与えられると  $\beta$  がきまり、 $n$  をパラメータにして式 (14) から  $\phi_{m, cr}$  が求められる。最小の  $\phi_{m, cr}$  を与える周方向座屈波数  $n$  のもとで座屈すると考えてよい。

3. 数値計算とその検討

上述の解析手続に従い、 $R/t, L/R$  をパラメータにし、座屈値の無次元数  $p_{m, cr}/E$  を求める。

## 1. 臨界座屈圧力

一例として  $R/t=300$ ,  $L/R=1.0$  の場合について,  $\nu=0.3$  として,  $p_{m,cr}/E$  の  $n$  に対する変化を示すと, 第 1 表のようになる.

第 1 表  $p_{m,cr}/E$  の  $n$  に対する変化

$n$	(a) 半径方向圧力のみ	(b) 半径および軸方向圧力
10	$1.32 \times 10^{-6}$	$1.20 \times 10^{-6}$
11	$1.22 \times 10^{-6}$	$1.13 \times 10^{-6}$
12	$1.23 \times 10^{-6}$	$1.15 \times 10^{-6}$

第 2 表 臨界座屈圧力  $p_{m,cr}/E$  [( ) 内は  $n$  の値]

$R/t$	$R/L$	$\alpha=0$ (直線的圧力)		$\alpha=1$		$\alpha=\infty$ (均一圧力)	
		(a)半径方向 圧力	(b)半径および 軸方向圧力	(a)半径方向 圧力	(b)半径および 軸方向圧力	(a)半径方向 圧力	(b)半径および 軸方向圧力
20	0.1	$9.14^{-5}(2)$	$8.86^{-5}(2)$	$6.31^{-5}(2)$	$6.18^{-5}(2)$	$4.76^{-5}(2)$	$4.68^{-5}(2)$
	0.3	$3.25^{-4}(3)$	$2.93^{-4}(3)$	$2.24^{-4}(3)$	$2.08^{-4}(3)$	$1.69^{-4}(3)$	$1.60^{-4}(3)$
	0.5	$5.69^{-4}(4)$	$4.90^{-4}(4)$	$3.97^{-4}(4)$	$3.57^{-4}(4)$	$2.99^{-4}(4)$	$2.76^{-4}(4)$
	1.0	$1.39^{-3}(6)$	$1.00^{-3}(5)$	$9.70^{-4}(5)$	$7.60^{-4}(5)$	$7.31^{-4}(5)$	$6.05^{-4}(5)$
	2.0	$3.95^{-3}(8)$	$2.06^{-3}(5)$	$2.72^{-3}(8)$	$1.70^{-3}(6)$	$2.05^{-3}(8)$	$1.43^{-3}(6)$
50	0.1	$1.12^{-5}(3)$	$1.10^{-5}(3)$	$8.29^{-6}(3)$	$8.22^{-6}(3)$	$6.33^{-6}(2)$	$6.24^{-6}(2)$
	0.3	$3.10^{-5}(4)$	$2.94^{-5}(4)$	$2.15^{-5}(4)$	$2.07^{-5}(4)$	$1.62^{-5}(4)$	$1.57^{-5}(4)$
	0.5	$5.43^{-5}(5)$	$4.94^{-5}(5)$	$3.77^{-5}(5)$	$3.52^{-5}(5)$	$2.84^{-5}(5)$	$2.70^{-5}(5)$
	1.0	$1.20^{-4}(7)$	$1.00^{-4}(7)$	$8.40^{-5}(7)$	$7.38^{-5}(7)$	$6.34^{-5}(7)$	$5.74^{-5}(7)$
	2.0	$3.04^{-4}(10)$	$2.04^{-4}(8)$	$2.11^{-4}(10)$	$1.59^{-4}(9)$	$1.59^{-4}(9)$	$1.27^{-4}(9)$
100	0.1	$1.72^{-6}(3)$	$1.70^{-6}(3)$	$1.20^{-6}(3)$	$1.19^{-6}(3)$	$9.02^{-7}(3)$	$8.96^{-7}(3)$
	0.3	$5.45^{-6}(5)$	$5.26^{-6}(5)$	$3.80^{-6}(5)$	$3.71^{-6}(5)$	$2.87^{-6}(5)$	$2.82^{-6}(5)$
	0.5	$9.34^{-6}(6)$	$8.75^{-6}(6)$	$6.47^{-6}(6)$	$6.18^{-6}(6)$	$4.87^{-6}(6)$	$4.71^{-6}(6)$
	1.0	$2.02^{-5}(9)$	$1.76^{-5}(8)$	$1.41^{-5}(8)$	$1.27^{-5}(8)$	$1.06^{-5}(8)$	$9.84^{-6}(8)$
	2.0	$4.67^{-5}(12)$	$3.56^{-5}(11)$	$3.26^{-5}(11)$	$2.67^{-5}(11)$	$2.46^{-5}(11)$	$2.11^{-5}(11)$
300	0.1	$1.13^{-7}(4)$	$1.13^{-7}(4)$	$7.94^{-8}(4)$	$7.91^{-8}(4)$	$6.00^{-8}(4)$	$5.98^{-8}(4)$
	0.3	$3.50^{-7}(6)$	$3.42^{-7}(6)$	$2.40^{-7}(6)$	$2.36^{-7}(6)$	$1.80^{-7}(6)$	$1.78^{-7}(6)$
	0.5	$5.85^{-7}(8)$	$5.64^{-7}(8)$	$4.04^{-7}(8)$	$3.93^{-7}(8)$	$3.04^{-7}(8)$	$2.98^{-7}(8)$
	1.0	$1.22^{-6}(11)$	$1.13^{-6}(11)$	$8.43^{-7}(11)$	$8.00^{-7}(11)$	$6.36^{-7}(11)$	$6.11^{-7}(11)$
	2.0	$2.62^{-6}(16)$	$2.26^{-6}(15)$	$1.84^{-6}(15)$	$1.64^{-6}(15)$	$1.39^{-6}(15)$	$1.27^{-6}(15)$
500	0.1	$3.15^{-8}(4)$	$3.13^{-8}(4)$	$2.15^{-8}(4)$	$2.14^{-8}(4)$	$1.62^{-8}(4)$	$1.61^{-8}(4)$
	0.3	$9.62^{-8}(7)$	$9.45^{-8}(7)$	$6.61^{-8}(7)$	$6.53^{-8}(7)$	$4.98^{-8}(7)$	$4.93^{-8}(7)$
	0.5	$1.63^{-7}(9)$	$1.58^{-7}(9)$	$1.12^{-7}(9)$	$1.10^{-7}(9)$	$8.42^{-8}(9)$	$8.29^{-8}(9)$
	1.0	$3.33^{-7}(13)$	$3.15^{-7}(13)$	$2.31^{-7}(13)$	$2.23^{-7}(13)$	$1.74^{-7}(13)$	$1.69^{-7}(13)$
	2.0	$7.04^{-7}(18)$	$6.30^{-7}(18)$	$4.92^{-7}(18)$	$4.54^{-7}(17)$	$3.71^{-7}(18)$	$3.50^{-7}(17)$

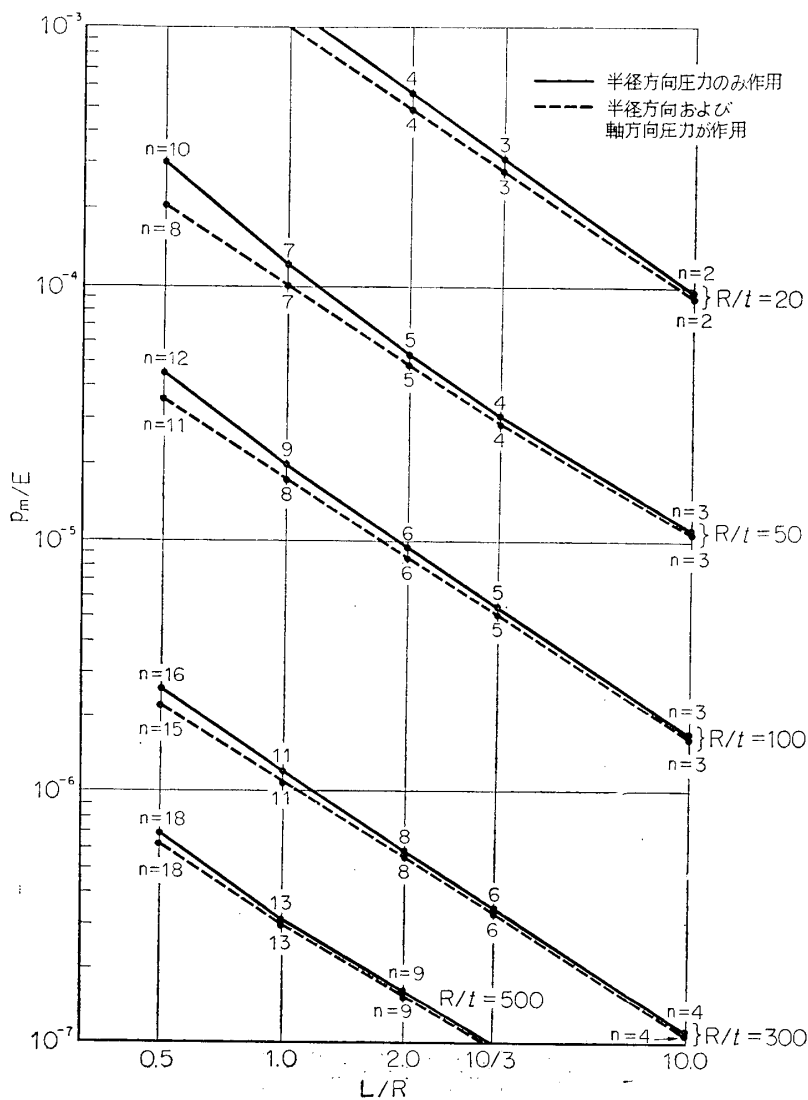
註) 例  $9.12^{-5}$  は  $9.12 \times 10^{-5}$  を意味する.

第1表から、 $n=11$  の場合が最小の  $p_{m, cr}$  の値を与えることになる。このようにして求めた  $p_{m, cr}/E$  の値を、各種の  $R/t$ ,  $L/R$  の値について、(a), (b) 両種の圧力負荷の場合を第2表に示す。 $\nu=0.3$  としたが第1図に示すように  $\alpha=0$  は外圧が直線的に変化する場合、 $\alpha=\infty$  は均一外圧の場合に相当し、 $\alpha=1$  はその中間の両者が重畳した場合である。また直線的に変化する外周圧力を受ける場合 ( $\alpha=0$ ) の  $p_{m, cr}/E$  を第2図に示す。

2. 軸方向圧力の重畳の影響

第2表や第2図からわかるように、半径方向圧力のほかに軸方向圧力も重畳すると、臨界座屈圧力はもちろん低下する。しかし  $R/L$  が小さく、 $R/t$  が大きくなり、いわゆる円筒かくらしくなるにつれて両者の相異はきわめて小さくなる。ただ厚肉化し、筒長が短かくなると、軸方向圧力による  $p_{m, cr}$  の低下は大きくなる。

3. 均一外圧が作用する場合との比較検討



第2図 外圧による円筒殻の座屈値



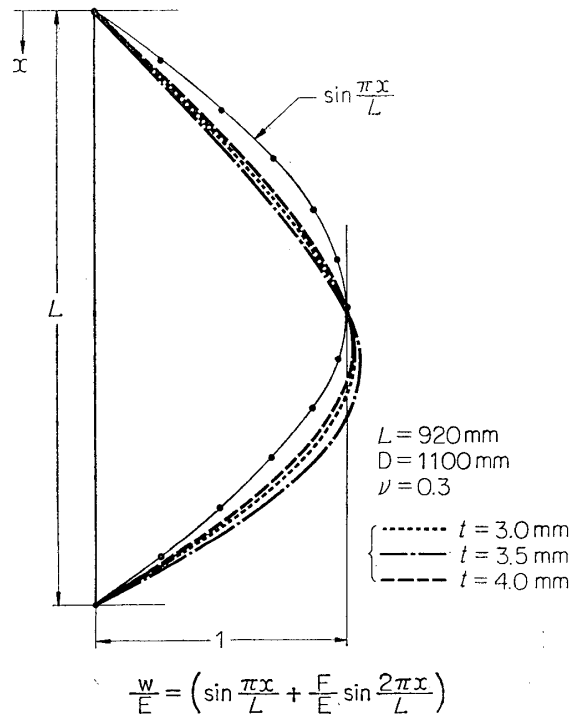
第 3 表 各係数比 ( $R/L=0.5$  の場合) ( $\nu=0.3$ )

$\alpha$	$R/t$	$\phi_m$	$n$	$A/E$	$B/E$	$C/E$	$D/E$	$F/E$
0	50	$2.47 \times 10^{-3}$	5	$5.03 \times 10^{-2}$	$-7.19 \times 10^{-3}$	$-2.03 \times 10^{-1}$	$2.51 \times 10^{-2}$	$-1.28 \times 10^{-1}$
	100	$8.50 \times 10^{-4}$	6	$3.74 \times 10^{-2}$	$-5.90 \times 10^{-3}$	$-1.69 \times 10^{-1}$	$2.01 \times 10^{-2}$	$-1.20 \times 10^{-1}$
	300	$1.60 \times 10^{-4}$	8	$2.25 \times 10^{-2}$	$-3.94 \times 10^{-3}$	$-1.26 \times 10^{-1}$	$1.43 \times 10^{-2}$	$-1.12 \times 10^{-1}$
$\infty$	50	$1.29 \times 10^{-3}$	5	$5.04 \times 10^{-2}$	$-3.82 \times 10^{-7}$	$-2.03 \times 10^{-1}$	$1.33 \times 10^{-6}$	$-6.79 \times 10^{-6}$
	100	$4.44 \times 10^{-4}$	6	$3.74 \times 10^{-2}$	$-3.13 \times 10^{-7}$	$-1.69 \times 10^{-1}$	$1.07 \times 10^{-6}$	$-6.37 \times 10^{-6}$
	300	$8.31 \times 10^{-5}$	8	$2.25 \times 10^{-2}$	$-2.07 \times 10^{-7}$	$-1.26 \times 10^{-1}$	$7.49 \times 10^{-7}$	$-5.89 \times 10^{-6}$

均一外圧が作用する場合には，前述の解析において  $\alpha = \infty$  とおけばよい．当然予想されるように式 (10) の第 2 項係数  $B, D, F$  を 0 とおいてよく，その場合には式 (12) は 3 元同次方程式となり， $a_{ij}(i, j=1, 3, 5)$  の行列式を解けば， $\phi_m$  に関する 2 次方程式が得られ，臨界座屈値が求められる．第 2 表には単に  $\alpha = \infty$  とおき， $B, D, F$  の項も考慮した計算結果を示す． $E$  を基準にして各係数値の比を  $R/L=0.5$  の場合を一例にして，半径および軸方向圧力とともに作用する場合について第 3 表に示すが，これから  $B=D=F=0$  としても，大きな影響はないものと思われる．

第 2 表に示した均一外圧のもとでの計算結果は，従来の解析式，たとえば von Mises の式 [1] による値とほとんど一致している．

第 2 表から，直線的に変化する圧力の場合 ( $\alpha=0$ ) と均一圧力の場合 ( $\alpha=1$ ) の臨界外



第 3 図 座屈たわみ変形波形

第4表 各常数比 ( $L=920\text{mm}$ ,  $R=570\text{mm}$ )

$t$ (mm)	$A/E$	$B/E$	$C/E$	$D/E$	$F/E$
3.0	0.027	-0.005	-0.127	0.017	-0.131
3.5	0.027	-0.006	-0.127	0.020	-0.160
4.0	0.034	-0.004	-0.145	0.015	-0.104

圧力値を比較すると、前者の  $p_{m,cr}$  は後者の2倍よりは数%程度低いことがわかる。すなわち直線的に変化する圧力の場合、平均値をとって均一外圧と見なし、そのときの座屈値より約数%低く見積ればよいことになる。

第1図の  $\alpha=1$  の場合にも同様なことがいえ、平均外圧を均一外圧とする座屈値よりも極くわずかに低い座屈値を示している。これらの結論は、実際的な設計上は有益な目安となろう。

#### 4. 座屈たわみ波形

式(14)の行列式が0である場合には、1常数を不定として各常数比が求まり、たわみ変形のモードが決定される。いま一例として軸方向圧力を作用する場合について、最大値をとる  $E$  に対する各常数比を、具体的数値例について、 $\nu=0.3$  として第4表に示す。

最も問題となる半径方向のたわみ変形波形を第3図に示す。均一的な外圧のみが作用する場合の正弦関数  $\sin(\pi x/L)$  と比較すれば、外圧の大きい下部のたわみが大きく、予想されるとおりである。

#### 4. む す び

本文は、従来均一外圧のもとで解かれた円筒かくの座屈を、半径方向外圧が直線的に変化する場合に拡張したものである。このように三角状の外圧が作用する場合には、平均的な外圧値をとって従来の均一外圧による座屈値と見なしても大差ないが、5%程度低くなり、危険側にくるので、その点注意しなければならない。

1970年7月17日 航空力学部

#### 参 考 文 献

- [1] von Mises: Zeit. VDI 58 (1914) 750/755.
- [2] W. A. Nash: Jour. Appl. Mech. (1953/12) 469/474.
- [3] B. O. Almroth: Jour. Appl. Mech. (1962/12) 675/682.
- [4] 山本善之ほか: 機械学会論文集, 34, 265. (1968/9) 1502/1511: 35, 271 (1969/3) 470/481.
- [5] D. O. Brush & B. O. Almroth: Proc. 4th U. S. Nat. Congr. Appl. Mech. (1962) 497/505.