

速度インパルスによる軌道推移における 達成軌道高度の極値について

浜崎 襄二・石谷 久・玉木 康子

On the extremum of the perigee height of a satellite orbit

By

Joji HAMASAKI, Hisashi ISHITANI and Yasuko TAMAKI

Abstract: At the launch of the satellite, it is desirable to put the satellite into an earth orbit as far as possible, even if the attained orbit may be different from the predetermined one because of the disturbance of the launch vehicles which cannot be controlled now. In order to attain this purpose, it is necessary to maximize the perigee height of the final orbit by controlling the ignition time and the direction of the final motor on the condition that the suborbit of the preceding vehicle and the total impulse of the additional velocity obtained by the motor are given and estimated.

Though it is mathematically a mere extremum problem of the function of two variables, position on the preceding suborbit and the launching direction of the final motor, it seems that this problem is not analysed in the full range of the variables due to the difficulties in the calculation containing the trigonometric function.

In this paper, this problem is analyzed for all conditions except when the final orbit becomes circular one, and it is shown that the extremum of the perigee or apogee height exists only in the so-called 'Hohmann Transfer' or in the condition when the final orbit becomes linear one. These results are derived individually in each condition and some numerical example is computed, from which the validity of results is assured.

概 要

人口衛星の打上げにおいては、現在制御されていない打上げロケットの受ける外乱のために予定軌道と異なっても、可能なかぎり衛星軌道に投入することが望ましく、このためには前段軌道および最終段ロケットモータによる速度増分が与えられたという条件で（最終段ロケットの）点火時刻および打出し方向とを制御して最終軌道の近地点高度を最大にすることが必要な場合がある。

これは、数学的には単に前段軌道上の打出し位置および打出し方向との2変数の関数の極値問題に過ぎないが、全変域について解析したものは見当たらない様である。

本文において最終軌道が円軌道になる場合を除き、この問題をすべての条件について検討した結果、遠近地点の極値は、いわゆる「Hohmann 移行」か直線軌道となる場合のみ存在することが示された。

これらの結果は、おのおのの条件に従って誘導される。また数値計算例は、この結果に矛盾のないことを示す。

1. ま え が き

ある楕円軌道上の任意の点から任意の方向に大きさの定まった速度インパルスを加えて、達成される軌道の近地点高度を最大にする問題は数学上は2独立変数の関数の極値を求めるいわゆる曲面追跡にすぎない。しかしながらこの問題は三角関数を含むため変域がトラス状に変化するうえ、計算も複雑で従来全変域について関数の変化を検討したものは見当らない様である。

実際の打ち上げにおいては（最終段ロケットの燃焼時間が短かく速度インパルスとみなせると考える）。前段軌道が与えられた後、最終段ロケットの打出し時刻と方向を制御して可能な限り衛星にすることが望ましく、そのためには達成される軌道の近地点高度を最大にしたとき衛星となるかどうかを判断することが必要である。したがって人工衛星打上げ実験においては上記問題の結果は重要な意味を持つと考えられる。

本文ではこの問題を解析的に求めた結果、Hohmann 移行が解となることが示されたので、その結果について報告する。前述の様に誘導は論理的には単純で、結論に意味があるので、なるべく簡単に結果を得ることを目的としている。

2. 基本式と前提条件

前段軌道は与えられたものとして、軌道長半径、離心率をおのおの a , e とする。

また、角運動量、速度、高度をそれぞれ h , v , r とし、原則として、前段軌道に関するものを添字3で、達成軌道に関するものを添字4で示す。これらを

$$\begin{array}{lll} \text{高度長(さ)} & a, & \text{エネルギー} & R/2a, \\ (\text{角運動量})^2 & Ka & \text{速度} & \sqrt{Ka} \end{array}$$

で正規化し、大文字で表わしたものをを用いると、前段軌道のエネルギーおよび（角運動量）²すなわち H_3^2 は、それぞれ1および $1-e^2$ と表わされる。ここに K は地球の重力定数を表わす。なお達成軌道エネルギーを E_{n4} で表わす。

一般に軌道遠近地点を

$$r_m = a_4(1 \pm e_4) \quad (1)$$

とすると、

$$e_4^2 = 1 + 2h_4^2/K^2 \cdot E_{n4} \quad (2)$$

$$E_{n4} = -K/2a_4 = v_4^2/2 - K/r \quad (3)$$

$$h_4^2 = a_4 K (1 - e_4^2)$$

より

$$\frac{2E_{n4}}{K} r_m^2 + 2r_m = \frac{h_4^3}{K}$$

となる⁽¹⁾. 今インパルスによるエネルギーおよび角運動量の二乗の増分を正規化単位で表わしたものを D_c , D_h^2 とすると,

$$(-1 + D_c)R_m^2 + 2R_m = (1 - e^2 + D_h^2) = H_4^2 \quad (6)$$

となる.

今, 速度インパルスの大きさを U_m , 打出し方向を β , 前段軌道上速度を v (方向を α), 高度を r とし, その離心近点離角 (Eccentric Anomaly) を E とする. (図1)

$$r = a(1 - e \cos E)$$

$$rv \sin \alpha = k$$

$$rv \cos \alpha = \sqrt{aK} \cdot e \sin E$$

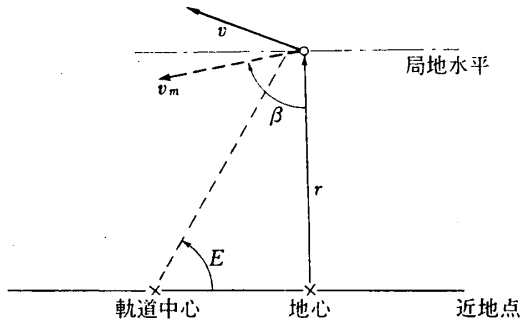


図1 E , β , r の関係

であるから簡単な計算により

$$D_c = D_v \{2(1 - e \cos E)^{-1}(e \cos \beta \sin E + \sqrt{1 - e^2} \sin \beta) + D_v\} \quad (7)$$

$$D_h^2 = D_v(1 - e \cos E) \sin \beta \{2\sqrt{1 - e^2} + D_v(1 - e \cos E) \sin \beta\} \quad (8)$$

を得る. ここに

$$D_v = \sqrt{a/K} v_m \quad (9)$$

$R_m(E, \beta)$ の E, β に関する停留点の必要十分条件は, E および β を \mathbf{P} としたとき, $\partial R_m / \partial \mathbf{P} = 0$ で与えられるので (6) より誘導される.

$$2[1 + (-1 + D_c)R_m] \partial R_m / \partial \mathbf{P} = \partial D_h^2 / \partial \mathbf{P} - R_m^2 \partial D_c / \partial \mathbf{P} \quad (10)$$

から $\partial R_m / \partial \mathbf{P} = 0$ となる解を求めればよい. この極値の必要条件はいくつかの場合に分けられるので次の順序で十分性を検討し停留条件を求める.

(10) は

$$X = \partial R_m / \partial \beta, \quad Y = \partial R_m / \partial E,$$

$$A = \partial D_h^2 / \partial \beta, \quad B = \partial D_c / \partial \beta, \quad C = \partial D_h^2 / \partial E,$$

$$D = \partial D_c / \partial E,$$

$$\alpha = 2[1 + (-1 + D_c)R_m] \quad (11)$$

とおくと,

$$\alpha X = A - R_m^2 B$$

$$\alpha Y = C - R_m^2 D \quad (12)$$

と表わせる. これから $X = Y = 0$ を導く必要十分条件は次の二つに分けられる.

A) $\alpha = 0$

この場合, 十分条件は定まらず別に検討する必要があるが, 極値条件が極限の形式で入るため計算が複雑となり, それに比べ一般性が少ないので省略する.

B) $\alpha \neq 0$

このとき, $X = Y = 0$ の必要十分条件は, (12) より

$$A = R_m^2 B \quad C = R_m^2 D \quad (13)$$

であり、次の三通りに分けられる。

$$B-1. \quad D=0, \quad C=0 \text{ かつ } A=R_m^2 B \quad (14)$$

$$B-2. \quad B=0, \quad A=0 \text{ かつ } C=R_m^2 D \quad (15)$$

$$B-3. \quad BD \neq 0$$

$$\frac{A}{B} = \frac{C}{D} = R_m^2 \quad (16)$$

これは、変形の都合上便利な

$$AD=BC \text{ かつ } (A=BR_m^2 \text{ または } C=DR_m^2)$$

でもよい。

(7)(8) より

$$B = \partial D_c / \partial \beta = 2D_v(1-e \cos E)^{-1}(-e \sin \beta \sin E + \sqrt{1-e^2} \cos \beta) \quad (17)$$

$$D = \partial D_c / \partial E = 2D_v e \{ \cos \beta (\cos E - e) - \sqrt{1-e^2} \sin \beta \sin E \} \times (1-e \cos E)^{-2} \quad (18)$$

$$A = \partial D_h^2 / \partial \beta = 2D_v(1-e \cos E) \cos \beta \{ \sqrt{1-e^2} + D_v \times (1-e \cos E) \sin \beta \} \quad (19)$$

$$C = \partial D_h^2 / \partial E = 2D_v e \sin \beta \sin E \{ \sqrt{1-e^2} + D_v \times (1-e \cos E) \sin \beta \} \quad (20)$$

となる。

以上において、 $1-e \cos E \neq 0$ とする。これは $e=1$ かつ $E=0$ 、すなわち直線軌道の近地点で打つ解を除いて考えることを示し、 D_c は有限と考える。したがって $a_4 \neq 0$ である。

なお速度インパルスの方向は前段軌道面内のみを考えているが、 β と直交方向にも回転することを許す場合、打出し前後の軌道面の変化を考えないで、軌道形状の変化のみを問題とすると、速度インパルスの大きさを0から D_v まで変化して同一軌道面内に打出した場合と等価になる。これは速度インパルスの内、新しい軌道面に投影される成分の大きさが、0から D_v まで変化することにより示される。 R_m の D_v に関する極値は、この場合0か D_v (最大値) にしか存在しないことが示されるので、極値問題においては前段軌道面内のみで方向を変化することを考えれば十分である。

3. 停留点の必要十分条件

3.1 $\alpha=0$

$$\alpha = 1 + (-1 + D_c)R_m = 0 \quad (21)$$

であるから、(6) より直ちに

$$R_m = H_4^2$$

を得、(1)(4) を用いれば必要条件として

$$A_4 e_4 (e_4 \pm 1) = 0 \quad (22)$$

を得る。このうち $A_4=0$ は除外されており、 $e_4 = \pm 1$ では、(6) より

$$\alpha R_m + R_m = 0$$

となって、 $R_m=0$ または $\alpha=-1$ となり (21) の条件は満たされない。一方 (4)(6) より $e_4=0$ は (21) を満たすことが示され、できる軌道が円軌道となることがこの場合の必要十分条件である。前述の様に本文においてはこの場合を省略するので、達成軌道が円軌

道となる E, β に対しては注意を要する.

3.2 $\alpha \neq 0$

まず $R_m = 0$ の場合を考えると, これは明らかに直線軌道の近地点であり応用上あまり意味がないが, 解として得られるので, Case B-0 としてまとめておく. このとき遠地点は $R_m \neq 0$ で, 近地点だけで停留条件が満たされる.

Case B-1

(18) より $D=0$ の条件は

$$e=0 \quad UD_v=0 \quad UB_2=0 \quad (23)$$

ただし

$$B_2 = \cos \beta (\cos E - e) - \sqrt{1-e^2} \sin \beta \sin E$$

であって, 次の各場合に分けられる.

a) $D_v=0$

このとき $A=B=C=D=0$ であるから (13) は確かに満足されるが, trivial solution である.

b) $e=0$

条件 (14) のうち, $C=0$ は満たされ, 残る条件 $A=R_m^2 B$ は

$$2D_v \cos \beta (1+D_v \sin \beta) = 2D_v \cos \beta R_m^2 \quad (24)'$$

となる. $D_v \neq 0$ とすれば, これは

$$\cos \beta (1+D_v \sin \beta - R_m^2) = 0 \quad (24)$$

であるから, この条件が必要条件である.

i) $\cos \beta = 0$

これは任意の位置で水平に打出す解である.

ii) $D_v \sin \beta + 1 = R_m^2$

(8) より $e=0$ では常に

$$H_4^2 = 1 + D_v^2 = 1 + 2D_v \sin \beta + D_v^2 \sin^2 \beta = (1 + D_v \sin \beta)^2$$

であるから, この場合

$$X = 1 + D_v \sin \beta > 0$$

とおいて, (6) に代入すると

$$X^2 = (-1 + D_v)X + 2\sqrt{X}$$

となる. 一方 (7) と X の定義より

$$(-1 + D_v) = 2X - 3 + D_v^2$$

であるから, 上の条件は

$$X(X - 3 + D_v^2) + 2\sqrt{X} = 0$$

となる. したがってその解は

$$X = 0 \quad \text{または} \quad 2 + \sqrt{X}(X - 3 + D_v^2) = 0$$

により与えられる. ところが

$$y = \sqrt{X}(X - 3 + D_v^2)$$

とおくと、 y は $X=1-D_v^2/3$ で最小値をとり、 $X>0$ の範囲では任意の D_v につき $y>-2$ であることが示される。したがってこの場合には $X=0$ のみが必要十分条件となり

$$X=1+D_v \sin \beta = R_m^2 = 0$$

によって条件が与えられる。 $R_m=0$ であるからこれは Case B-0 にほかならず、そのときの β は上式で与えられる。なお $|D_v|<1$ では、 $X \neq 0$ であるから極値とはならない。

c) $e \neq 0, D_v \neq 0$

このとき、 $D=0$ の条件は $B_2=0$ すなわち

$$\cos \beta (\cos E - e) - \sqrt{1-e^2} \sin \beta \sin E = 0 \quad (25)$$

で、停留点の必要十分条件はこのほかに (14) すなわち

$$\sin \beta \sin E \{ \sqrt{1-e^2} + D_v(1-e \cos E) \cos \beta \} = 0 \quad (26)$$

および

$$\begin{aligned} & (-e \sin \beta \sin E + \sqrt{1-e^2} \cos \beta) R_m^2 \\ & = (1-e \cos E)^2 \cos \beta \{ \sqrt{1-e^2} + D_v(1-e \cos E) \sin \beta \} \end{aligned} \quad (27)$$

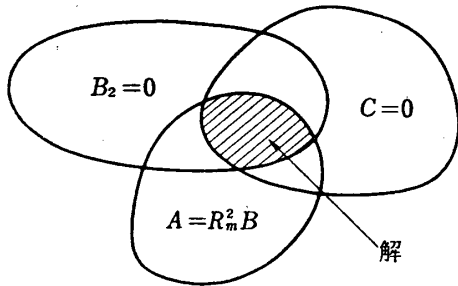


図2 解の領域

が同時に成立することである。これを (25) から求めるのは困難であるが、この解は図2に示される様に (26) すなわち $C=0$ と $B_2=0$ 、および $A=R_m^2B$ の成立する領域の共通部分であるから、(26) の十分条件により分類できる。

i) $\sin \beta = 0$

$\cos \beta = \pm 1$ から (25) より $\cos E = 0$ となり、残る条件 (27) は

$$\sqrt{1-e^2} \{ R_m^2 - (1-e^2) \} = 0 \quad (28)$$

となる。 $1-e \cos E = 1-e^2 \neq 0$ を仮定しているので、この解は

$$R_m = 1 - e^2 \quad (29)$$

であるが、(8) より $\sin \beta = 0$ では $D_h^2 = 0$ となり、

$$1 - e^2 = H_4^2 = A_4(1 - e_4^2) \neq 0$$

を得るので結局

$$A_4(1 \pm e_4) = A_4(1 - e_4^2) \neq 0 \quad (30)$$

となる。これは $e_4 = 0$ 以外には成立せず Case A となって除外される。

ii) $\sin E = 0$

(25) より $\cos \beta = 0$ となり、これは同時に (27) をも満足するので解となる。これは前段軌道の遠近地点において局地水平方向に打出すことを示し、一般的な Hohmann 移行にはならない。

$e = \pm 1$ のときには、 $e = \cos E$ も (25) を満たすが、 $1 - e \cos E \neq 0$ の仮定により除外される。

iii) その他の場合

$$\sqrt{1-e^2} + D_v(1-e \cos E) \sin \beta = 0 \quad (31)$$

が $C=0$ の十分条件であるが、この場合には

$$X = D_v(1 - e \cos E) \sin \beta$$

とおくと

$$D_h^2 = X(2\sqrt{1-e^2} + X)$$

であるから, (30) より直ちに

$$H_4^2 = 1 - e^2 + D_h^2 = 0$$

となることが示される。これは直線軌道となることを示すが, 逆に $R_m = 0$ の場合に (30) が成立することも容易に示されるので (30) と直線軌道となることは必要十分な関係にある。

このとき一般に (25) は満たされず Case B-1 からは除かれる。この場合の一般的考察は Case B-3 において検討する。

Case B-2

$eD_v \neq 0$ の場合を考えると, $B = 0$ の条件は

$$e \sin \beta \sin E = \sqrt{1-e^2} \cos \beta \quad (32)$$

であり, このほかに $A = 0$, $C = R_m^2 D$ が同時に成立することが停留条件である。前と同様に $A = 0$, すなわち

$$2D_v(1 - e \cos E) \cos \beta \{ \sqrt{1-e^2} + D_v(1 - e \cos E) \sin \beta \} = 0 \quad (33)$$

の十分条件により分類する。

a) $\cos \beta = 0$

(32) より直ちに $\sin E = 0$ となる。このとき $D = 0$ で, Case B-1 に含まれる。

b) (31) の成立する場合。

これは Case B-3 において検討する。

Case B-3

(17)~(20) より, $AD = BC$ は

$$eD_v^2 \{ \sqrt{1-e^2} + D_v(1 - e \cos E) \sin \beta \} \times (1 - e \cos E)^{-1} \times f(E, \beta) = 0 \quad (32)$$

$$f(E, \beta) \equiv e \sin^2 \beta \sin^2 E - 2\sqrt{1-e^2} \sin \beta \cos \beta \sin E + \cos^2 \beta (\cos E - e) \quad (33)$$

となるが, $eD_v \neq 0$ を考えるので (32) の十分条件として次の二通りの場合が考えられる。

a) (31) の成立する場合。

前述の様に, これは達成軌道が直線軌道となることを示しているので, その近地点 $R_m = 0$ においては (13) を満足することは明らかであり, Case B-0 にほかならない。

$R_m \neq 0$ の場合には $A = C = 0$ であるから停留条件を満足するためには, $B = D = 0$ も同時に成立しなければならない。この解は (17), (18) より直ちに

$$\cos \beta = \sin E = 0$$

が導かれるので, Case B-1, c)-(ii) に含まれている。

b) $f(E, \beta) = 0$ となる場合

$$\sin \beta \sin E = \cos \beta \{ \sqrt{1-e^2} \pm \sqrt{1-e \cos E} \} / e \quad (34)$$

となるが, $\cos \beta = 0$ では $\sin E = 0$ で Case B-1 に含まれる。残る条件は $\cos \beta \neq 0$ で (34) が成立する条件および

$A = BR_m^2$ すなわち

$$\begin{aligned} & (1-e \cos E) \cos \beta \{ \sqrt{1-e^2} + D_v(1-e \cos E) \sin \beta \} \\ & = R_m^2(1-e \cos E)^{-1}(-e \sin \beta \sin E + \sqrt{1-e^2} \cos \beta) \end{aligned} \quad (35)$$

が同時に成立することである。(34) (35) より

$$(1-e \cos E)^2 \{ \sqrt{1-e^2} + D_v(1-e \cos E) \sin \beta \} = \pm R_m^2 \sqrt{1-e \cos E} \quad (36)$$

であるが

$$H_4 = \sqrt{1-e^2} + D_v(1-e \cos E) \sin \beta$$

であることと、(4) から打出し高度は $1-e \cos E$ であることを用いると、発射地点で

$$(1-e \cos E) = A_4(1-e_4 \cos E_4) \quad (37)$$

となり (36) は

$$(1-e_4 \cos E_4)^2 \sqrt{1-e_4^2} = (1 \pm e_4)^2 \sqrt{1-e_4 \cos E_4} \quad (38)$$

と表わされる。

簡単な計算により、 $|\cos E_4| \leq 1$ $0 < |e_4| \leq 1$ では (38) は解を持たないことが示される。 $e_4=0$ では (38) が成立するが、これは Case A で除外されており、結局 $f(E, \beta)=0$ から新しい停留条件は導かれない。

3.3 停留条件

以上より、 R_m の停留条件は次の様にまとめられる。

- a) Hohmann 移行によるもの。 $\sin E = \cos \beta = 0$
 - b) $R_m=0$ すなわち直線軌道となる場合の近地点
 - c) Trivial Solution として $D_v=0$ の場合、任意の地点において任意の方向
 - e) $e=0$ の場合には、任意の地点において $\cos \beta=0$ となる場合。
- ただし (a) において $e=1$ の場合 $\cos E=1$ は除かれる。

4. 停留点における性質

4.1 Hohmann 移行における2階微分

前述の様に Nontrivial な停留点は Hohmann 移行と $R_m=0$ となる場合のみであることが示されたが、その点における R_m の性質は、第2変分により求めることができる。

今 R_m の p による2階微分を R_{mpp} と表わすことにすれば、停留点において

- 1) $R_m^2 \beta E < R_{mEE} R_{m\beta\beta}$ であれば極値となる。さらに $R_{m\beta\beta}$ (または R_{mEE}) > 0 であれば極小値、

$R_{m\beta\beta}$ (または R_{mEE}) < 0 であれば極大値である。

- 2) $R_m^2 \beta E \geq R_{mEE} R_{m\beta\beta}$ であれば鞍点である。

(10) を E, β でもう一度偏微分すると、たとえば、

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 R_m}{\partial \beta^2} \cdot 2 \{ 1 + (-1 + D_c) R_m \} + 2 \left(\frac{\partial R_m}{\partial \beta} \right)^2 (-1 + D_c) + 2 R_m \frac{\partial D_c}{\partial \beta} \frac{\partial R_m}{\partial \beta} \\ & = \frac{\partial^2 D_c}{\partial \beta^2} - 2 R_m \frac{\partial R_m}{\partial \beta} \frac{\partial D_c}{\partial \beta} - R_m^2 \frac{\partial^2 D_c}{\partial \beta^2} \end{aligned} \quad (41)'$$

を得る。停留点においては

$$\partial R_m / \partial E = \partial R_m / \partial \beta = 0$$

であるから、上式は、次の様に簡単化される。

$$2XR_{m\beta\beta} = D_h^2\beta\beta - R_m^2 D_{c\beta\beta} \quad (41)$$

同様にして

$$2XR_{mEE} = D_h^2 EE - R_m^2 D_{cEE} \quad (42)$$

$$2XR_{mE\beta} = D_h^2 E\beta - R_m^2 D_{cE\beta} \quad (43)$$

ここに

$$X \equiv 1 + (-1 + D_c)R_m \approx 0 \quad (44)$$

(41)~(43) の右辺は (7) (8) より計算され

$$D_{c\beta\beta} = 2D_v(1 - e \cos E)^{-1}(-e \cos \beta \sin E - \sqrt{1 - e^2} \sin \beta) \quad (45)$$

$$D_h^2\beta\beta = 2D_v(1 - e \cos E) \{-\sin \beta[\sqrt{1 - e^2} + D_v(1 - e \cos E)\sin \beta] \\ + \cos \beta D_v(1 - e \cos E)\cos \beta\} \quad (46)$$

$$D_{cEE} = -2D_v e(1 - e \cos E)^{-3} \{\cos \beta \sin E(1 + e \cos E - 2e^2) \\ + \sin \beta \sqrt{1 - e^2}[\cos E(1 - e \cos E) - 2e \sin^2 E]\} \quad (47)$$

$$D_h^2 EE = 2D_v e \sin \beta \{\cos E[\sqrt{1 - e^2} + D_v \sin \beta(1 - e \cos E)] \\ + e D_v \sin \beta \sin^2 E\} \quad (48)$$

$$D_{cE\beta} = -2D_v e(1 - e \cos E)^{-2}[\sqrt{1 - e^2} \cos \beta \sin E + \sin \beta(\cos E - e)] \quad (49)$$

$$D_h^2 E\beta = 2D_v e \sin E \cos \beta[\sqrt{1 - e^2} + 2D_v(1 - e \cos E)\sin \beta] \quad (50)$$

により与えられる。

Hohmann 移行においては、 $\cos \beta = \sin E = 0$ であるから、上式はさらに簡単になり次の様に表わされる。

$$D_{c\beta\beta} = -2D_v \sqrt{1 - e^2} \sin \beta(1 - e \cos E)^{-1} \quad (51)$$

$$D_h^2\beta\beta = -2D_v(1 - e \cos E)\sin \beta[\sqrt{1 - e^2} + D_v(1 - e \cos E)\sin \beta] \quad (52)$$

$$D_{cEE} = -2D_v e \sin \beta \cos E \sqrt{1 - e^2}(1 - e \cos E)^{-2} \quad (53)$$

$$D_h^2 EE = 2D_v e \sin \beta \cos E[\sqrt{1 - e^2} + D_v(1 - e \cos E)\sin \beta] \quad (54)$$

$$D_{cE\beta} = -2D_v e \sin \beta \cos E(1 - e \cos E)^{-1} \quad (55)$$

$$D_h^2 E\beta = 0 \quad (56)$$

Hohmann 移行により達成される軌道は、移行地点で速度は水平であるから達成軌道遠地点または近地点となり R_m の一つである。今一般的に発射地点が達成軌道の近地点になるものと考えたと

$$R_m = (1 - e \cos E) = A_4(1 - e_4) \quad (57)$$

と表わせるが、遠地点になった場合には $e_4 < 0$ と考えれば一般性は失われない。

反対側の R_m (以後反対地点とも呼ぶ) は

$$R_m = A_4(1 + e_4) \quad (58)$$

となり、 $e_4 > 0$ では遠地点、 $e_4 < 0$ では近地点を表わす。

一方 $(-1 + D_c)$ は正規化した達成軌道エネルギーであるから

$$(-1 + D_c) = -a_3/a_4$$

となり、(44) により定義される X は、

$$X = 1 + (-1 + D_c)R_m = \begin{cases} e_4 & \text{発射地点} \\ -e_4 & \text{反対地点} \end{cases} \quad (59)$$

と表わせる。

(51)~(56) を用いると、次式により定義される F は、

$$F_{\beta\beta} \triangleq D_h^2 \beta\beta - R_m^2 D_{c\beta\beta} = 2D_v \sqrt{1-e^2} \sin\beta (1-e \cos E)^{-1} \\ \times \{R_m^2 - (1-e \cos E)^2 [1 + D_v \sin\beta (1-e \cos E)(1-e^2)^{-1/2}]\} \quad (60)$$

$$F_{EE} \triangleq D_h^2 EE - R_m^2 D_{cEE} = 2D_v e \sin\beta \cos E \sqrt{1-e^2} (1-e \cos E)^{-2} \\ \times \{R_m^2 + (1-e \cos E)^2 [1 + D_v \sin\beta (1-e \cos E)(1-e^2)^{-1/2}]\} \quad (61)$$

$$F_{\beta E} \triangleq D_h^2 \beta E - R_m^2 D_{c\beta E} = -R_m^2 2D_v e \sin\beta \cos E (1-e \cos E)^{-1} \quad (62)$$

となる。今移行地点における前段および達成軌道上の正規化された速度をおのおの V_3, V_4 とおくと、

$$V_3 = \sqrt{1-e^2} (1-e \cos E)^{-1} \quad (63)$$

$$V_4 = |V_3 + D_v \sin\beta| = (1+e_4)^{1/2} (1-e \cos E)^{-1/2} \quad (64)$$

であるから、(60) (61) に現われる項は

$$|1 + D_v \sin\beta (1-e \cos E)(1-e^2)^{-1/2}| = V_4/V_3 \quad (65)$$

と簡単化される。

以上と $\cos^2 E = \sin^2 \beta = 1$ を用いると結局

$$F_{\beta\beta} F_{EE} - F_{\beta E}^2 = 4D_v^2 e \cos E (1-e \cos E)^{-2} \\ \times [R_m^4 - (1+e_4)(1-e \cos E)^4] \quad (66)$$

となる。上式右辺の括弧内は (57) (58) を用いて発射地点側で

$$R_m^4 - (1+e_4)(1-e \cos E)^4 = -(1-e \cos E)^4 e_4 \quad (67)$$

反対地点側で

$$A_4^4 (1+e_4) [(1+e_4)^3 - (1-e_4)^4] \quad (68)$$

と表わせる。また (60) 右辺の括弧内も簡単化され、発射地点側で

$$R_m^2 - (1-e \cos E)^2 (\pm V_4/V_3) = A_4^2 (1-e_4)^2 [1 \mp \sqrt{1+e_4} \sqrt{1-e \cos E} / \sqrt{1-e^2}] \quad (69)$$

反対地点側で

$$A_4^2 [(1+e_4)^2 \mp (1-e_4)^2 (1+e_4)^{1/2} (1-e \cos E)^{1/2} (1-e^2)^{-1/2}] \quad (70)$$

となる。複号は $V_3 + D_v \sin\beta$ の符号を表わす。

以上を用いると $e_4 \neq 0$ すなわち $X \neq 0$ では

$$D \equiv R_{m\beta\beta} R_{mEE} - R_{m\beta E}^2 = (F_{\beta\beta} F_{EE} - F_{\beta E}^2) / 4e_4^2 \quad (71)$$

の符号が極値の性質を示す。

4.2 Hohmann 移行における停留点の性質

まず一般的な場合として $0 < e < 1$ を考える。その他の場合は特殊な場合として次節で検討する。

4.2.1 $E = \pi, \beta = \pi/2$

a) 発射地点

$$X = e_4 \quad (72)$$

$$D = D_v^2 e(1+e)^2 / e_4 \quad (73)$$

である。さらに $\sin \beta = 1$ から $V^3 + D_v \sin \beta > 0$ である。

以上より、 $e_4 > 0$ すなわち発射地点が近地点となると $D > 0$ で極値となり

$$F_{\beta\beta} = 2A_4^2(1-e_4)^2 D_v V_3 [1 - \sqrt{1+e_4}/\sqrt{1-e}] < 0 \quad (74)$$

であるから (72) より $R_{m\beta\beta} < 0$ すなわち極大となる。

$e_4 < 0$ すなわち遠地点となれば、 $D < 0$ で鞍点である。

b) 反対地点

$$X = -e_4 \quad (75)$$

$$D = -D_v^2 e(1+e_4)(1+e)^{-2} e_4^{-2} A_4^2 \times [(1+e_4)^3 - (1-e_4)^4] \quad (76)$$

となる。

$e_4 > 0$ すなわち反対地点遠地点となれば、 $D < 0$ で鞍点である。

$e_4 < 0$ では $D > 0$ で極値となる。このとき (75) より $X > 0$ であり

$$F_{\beta\beta} = 2A_4^2 \sqrt{1+e_4} D_v V_3 [(1+e_4)^{3/2} - (1-e_4)^2 (1-e)^{-1/2}] < 0 \quad (77)$$

であるから、 $R_{m\beta\beta} < 0$ すなわち極大となる。

以上いずれの地点でも常に近地点は極大、遠地点は鞍点となる。

4.2.2 $E = \pi$, $\beta = -\pi/2$

a) 発射地点

(72) (73) はそのまま成立するので、 $e_4 < 0$ すなわち遠地点では $D < 0$ で鞍点である。

$e_4 > 0$ すなわち発射地点が近地点になれば $D > 0$ で極値となる。前段軌道遠地点で後方に打って、達成軌道近地点となるためには

$$V_3 - D_v < -V_3 \quad \text{すなわち} \quad D_v > 2V_3$$

でなければならず、 $V_3 + D_v \sin \beta < 0$ であるから

$$F_{\beta\beta} = -2A_4^2(1-e_4)^2 D_v V_3 [1 + \sqrt{1+e_4}/\sqrt{1-e}] < 0 \quad (78)$$

となり、(72) から $R_{m\beta\beta} < 0$ すなわち極大となる。

b) 反対地点

(75) (76) より $e_4 > 0$ では、 $D < 0$ で鞍点となる。

$e_4 < 0$ すなわち反対地点が近地点になるとき、 $D > 0$ で極値となる。 $F_{\beta\beta}$ は D_v の大きさにより次の様になる。

i) $V_3 > D_v$ すなわち $V_3 + D_v \sin \beta > 0$

$$F_{\beta\beta} = -2A_4^2 \sqrt{1+e_4} D_v V_3 [(1+e_4)^{3/2} - (1-e_4)^2 / \sqrt{1-e}] > 0 \quad (79)$$

となり、(75) より $X > 0$ であるから $R_{m\beta\beta} > 0$ すなわち極小となる。

ii) $V_3 < D_v$ すなわち $V_3 + D_v \sin \beta < 0$

$$F_{\beta\beta} = -2A_4^2 D_v V_3 [(1+e_4)^2 + (1-e_4)^2 \sqrt{1+e_4}/\sqrt{1-e}] < 0 \quad (80)$$

であるから、 $R_{m\beta\beta} < 0$ すなわち極大となる。

以上より遠地点は鞍点となる。近地点は、 $V_3 < D_v$ で極小、 $V_3 > D_v$ で極大となる。後者の場合には Hohman 移行以外で直線軌道となり得て、その近地点 $R_m = 0$ において最小となることが示される。

4.2.3 $E = 0$, $\beta = \pi/2$

a) 発射地点

(72) はそのまま成立するが

$$D = -D_0^2 e(1-e)/e_4 \quad (81)$$

となるので, $e_4 > 0$ すなわち発射地点が近地点となるとき $D < 0$ で鞍点となる. $e_4 < 0$ すなわち発射地点が遠地点になることはあり得ない.

b) 反対地点

(75) はそのまま成立し,

$$D = D_0^2 e A_4^2 (1+e_4)(1-e)^{-2} e_4^{-2} [(1+e_4)^3 - (1-e_4)^4] \quad (82)$$

となるから, $e_4 > 0$ すなわち反対地点が遠地点となるとき $D > 0$ で極値となる. このとき $X < 0$ で

$$F_{\beta\beta} = 2A_4^2 D_0 V_3 \sqrt{1+e_4} [(1+e_4)^{3/2} - (1-e_4)^2 / \sqrt{1+e}] > 0 \quad (83)$$

となるから, $R_{m\beta\beta} < 0$ すなわち極大となる.

以上より近地点は鞍点, 遠地点は極大となる.

4.2.4 $E=0, \beta=-\pi/2$

a) 発射地点

(72) (81) より, $e_4 > 0$ すなわち近地点で $D < 0$ となり鞍点となる. $e_4 < 0$ では, $D > 0$ で極値となり, $X < 0$ かつ

$$F_{\beta\beta} = -2A_4^2 D_0 V_3 (1-e_4)^2 [1 \mp \sqrt{1+e_4} / \sqrt{1+e}] < 0 \quad (84)$$

であるから, $R_{m\beta\beta} > 0$ すなわち遠地点で極小となる.

b) 反対地点

(82) より, $e_4 > 0$ すなわち遠地点で $D > 0$ となり極値をとる. $X < 0$ で

$$F_{\beta\beta} = -2A_4^2 D_0 V_3 [(1+e_4)^{3/2} \mp (1-e_4)^2 / \sqrt{1+e}] < 0 \quad (85)$$

となるから, $R_{m\beta\beta} > 0$ すなわち極小となる. $e_4 < 0$ すなわち近地点では鞍点となる.4.3 $R_m=0$ における性質 $R_m=0$ においては (44) より直ちに

$$X=1$$

を得る. またこの場合 §3.2 に示した様に (31) が常に成立するので (41)~(50) より

$$R_{m\beta\beta} = D_0^2 \beta\beta / 2 = D_0^2 (1-e \cos E)^2 \cos^2 \beta \quad (87)$$

$$R_{mEE} = D_0^2 EE / 2 = D_0^2 e^2 \sin^2 E \sin^2 \beta \quad (88)$$

$$R_{mE\beta} = D_0^2 E\beta / 2 = D_0^2 e \sin E \sin \beta \cos \beta (1-e \cos E) \quad (89)$$

となり, 恒等的に

$$R_{m^2 E\beta} = R_{mEE} R_{m\beta\beta} \quad (90)$$

すなわち $D=0$ が成立する.一方 (87) (88) より $R_{mEE} \geq 0, R_{m\beta\beta} \geq 0$ であるから, これと (90) より任意の $\Delta E, \Delta \beta$ に対して次の2次形式

$$R_{mEE} (\Delta E)^2 + 2R_{mE\beta} (\Delta E \cdot \Delta \beta) + R_{m\beta\beta} (\Delta \beta)^2 \geq 0 \quad (91)$$

は半正定値となる。これは (31) を満足する $E-\beta$ 面上の閉曲線に沿って、 R_m の許され得る最小値 $R_m=0$ をとることを示し、強い意味の極小値とはならないが、最小値を与えることを示している。

4.2 及び 4.3 の結果をまとめると、遠近地点の性質は表1および図3に示される。なお $E=0, \beta=\pi/2$ では双曲線軌道となりやすく、このとき遠地点は無限大となるが、これを極大と考えれば一般性は失わない。ただし今までの検討は楕円軌道の範囲 ($|e_4| \geq 1$) で行なわれている。また図3より明らかに極大・極小はほとんどそのまま最大・最小となることが示されている。 $D_0 > V_3$ の場合に近地点に極大が二つ現われるが、この場合は、明らかに $\beta=\pi/2$ が最大であり、 $\beta=-\pi/2$ は極大値に過ぎない。

4.4 特殊な場合

4.4.1 $e=0$

このとき、明らかに R_m は E によらないので、 β のみの関数として $R_{m\beta\beta}$ を検討すればよい。 $(R_{mE\beta}=R_{mEE}=0$ で $D=0$ となるので、 R_m を E, β の関数とみると、強い意味の極値とはならない)。このためには $E=0, \pi$ いずれか一方のみで検討すれば一般性を失わないから、前節の結果を用いることができる。

a) $\beta=\pi/2$

このとき発射地点は常に近地点となり、 $e_4 > 0$ である。したがって、 $X < 0$ であり、(74) から $F_{\beta\beta} > 0$ であるから $R_{m\beta\beta} < 0$ すなわち極大である。

b) $\beta=-\pi/2$

発射地点では、 $e_4 > 0$ すなわち近地点となるとき、(72) (78) より極大となる。他方 $e_4 > 0$

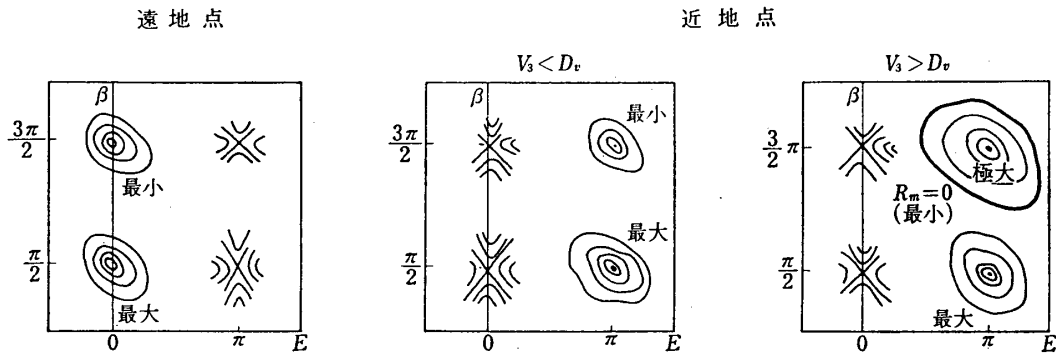


図3 R_m の等高線

表1 R_m の極値

β	遠地点		近地点	
	$E=\pi$	$E=0$	$E=\pi$	$E=0$
$\pi/2$	鞍点	極大	極大	鞍点
$-\pi/2$	"	極小	極小*	"

* $D_0 > V_3$ では極大となる。このとき以外はすべて最大・最小を表わす。

すなわち遠地点になるときは, (72) (84) が成立して極小値をとる.

反対地点では, $e_4 > 0$ すなわち遠地点となるときの (85) が成立し極小である. $e_4 < 0$ の場合には, $V_3 > D_v$ では (79) から極小, $V_3 < D_v$ では (80)

より極大となる.

以上をまとめると, $e=0$ に対して表2の結果を得る.

4.4.2 $e=1$

$E=0$ では, 達成軌道の近地点は0, 遠地点は無窮大となるが除外されている.

$E=\pi$ では, 4.2の結果はそのまま成立する. ただし4.4.2においては $V_3=0$ であるから反対地点が近地点となるときは, 常に極大となる. 近地点の変化の様子は図4に示される.

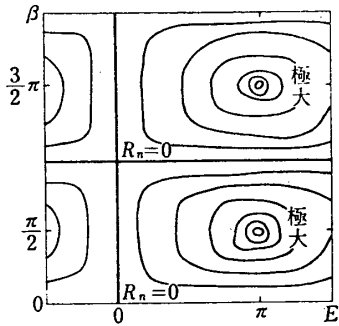


図4 $e=1$ における近地点変化

表2 $e=0$ における R_m の極値

β	近地点 $D_v > 1$	遠地点
$\pi/2$	極大	極大
$\sin\beta = -1/D_v$		0 (最小)
$-\pi$	極小	極大* 極小

* 以外は最大・最小となる.

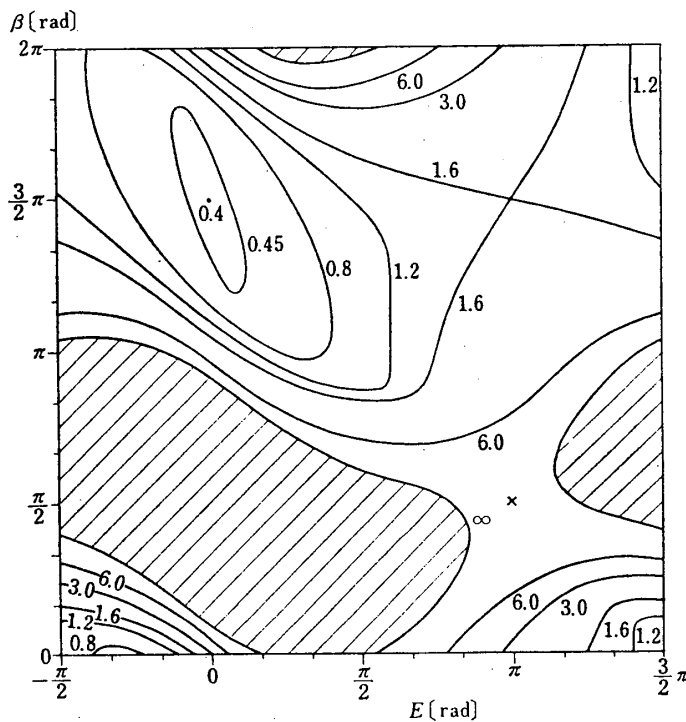


図5 遠地点一定の軌跡

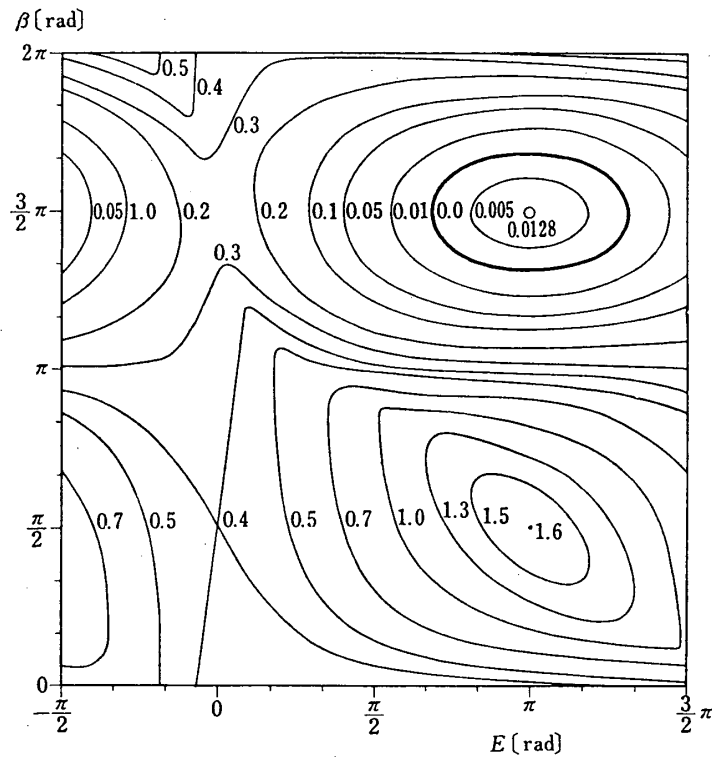


図6 近地点一定の軌跡

5. 数 値 例

以上の数値例として、 $e=0.6$ 、 $D_0=0.6$ の場合の達成軌道の遠近地点の変化の様子を図5、6に示す。

変域 E 、 β はともに周期 2π の三角関数として R_m に含まれるので、境界の直線で軸と一致し、トーラス状の変域と考えられる。 R_m を等高線で示しているので、極値は閉曲線で囲まれ、鞍点は X 状に示される。 $E=\pi$ では、 $V_3=0.5 < D_0$ であるから直線軌道が現われ、その内部はまた増加して極大となる状況を示している。

本文は観測ロケットの Radio Guidance 方式の研究の一部をまとめたものであり、Radio Guidance 検討会において平素よりいろいろ指導いただいている斎藤教授、野村教授、東口助教授をはじめ関係の方々に深謝の意を表わします。また付図作製に関して協力いただいた前田、長岡両君に感謝する次第である。

1971年5月31日新設部(工学)

参 考 文 献

- [1] 東口 実:「軌道移行の基本的考え方について」スペース・エレクトロニクス・シンポジウム1969/6