

断面が変化する管中の衝激波の伝播について

村 崎 壽 満

(1954年8月28日受理)

On Propagation of Strong Shock Wave through a Duct of Variable Cross Section

Toshimitsu MURASAKI

(Received August 28, 1954)

ABSTRACT: Even when we consider a one dimensional problem of shock propagation in a duct of variable cross section, it needs rather tedious process to get a final answer. In practice it is very important to investigate such a time-depending problem, for example, in connection with the technique of increasing Mach number in a shock tube.

By applying a graphical method for a simple flow model, it was possible to show some essential aspects of shock propagation through a diverging or converging duct.

1. ま え が き

断面が変化する管の中を衝激波が伝播する現象を一次元的に考える事¹⁾にしても、特に衝激波が強くなると計算が面倒である。実際には Shock Tube の M 数をあげるために断面を変える事が必要であり。又他にも実用上重要な問題が、この様な現象に關聯して居る。ここでは断面の変化するに依じて衝激波の伝播の様子や、後の流れの場の M 数が如何様に変化するかを簡単に概観する事にした。

2. 微分方程式と特性曲線

本論に入る前提として、基礎の關係式を誘導しつつ、使用される記号の説明と、方針の大略を示す。例によつて密度 ρ 、圧力 p 、速度 u 、エントロピー S 及び x 軸に沿うダクトの断面積を $Q(x)$ で表せば、流れの場は次の四つの方程式によつて規定する事が出来る。

$$\begin{aligned} \rho_t + u\rho_x + \rho u_x + \rho u(\log Q)_x &= 0 \\ \rho u_t + \rho u_x + p_x &= 0 \\ S_t + uS_x &= 0 \\ p &= f(\rho, S) \end{aligned} \quad (2.1)$$

実際にこれを解く事は、所謂特性曲線の方法によつてやればよいが、正直にその過程をたどれば、可成りの手数を必要とし、而も種々の場合を考えると言うことになると尙更大変である。ここでは計算過程を出来るだけ簡単化するかわりに、起り得る場合を総括的に理解して、流れの大略の様子を先づ知つて置くと言う事に重点を置いた。

3. u - p 面と衝激波曲線 (shock polar)

(2.1) 式に於いて ρ を消去し、変数として u, p 及び S を取る事にし、次ぎに、二次元の定常流の場で使われる hodograph 面に相当する所の u - p 面を取つて考える事にすれば、エントロピー S の異なる領域も同一の点で表される等の便宜があるので、以下 u - p 面¹⁾ を中心に議論を進める事を予めことわつて置く。又基礎方程式が非線型性を有する事からもわかる様に、圧縮波はたまつて一般には衝激波を形成する事になる。衝激波は流れの方向に強い速度勾配を有するために本来粘性と密接な關聯をもつて論ぜらるべき²⁾ ものであるが、ここでは例によつて Rankine Hugoniot の關係式を使つて、例えば u - p 面上に於ける一つの曲線上の点として衝激波の前後の状態を規定し、これを

衝撃波曲線 (*shock polar*) と呼ぶ事にする。衝撃波が x 軸の方向に速度 U で進み、前方の静止状態を p_0, c_0 (=音速) 後方を p_1, u_1, c_1 等で表せば

$$\frac{p_1}{p_0} = (1 + \mu^2) M_0^2 - \mu^2$$

$$\frac{u_1}{c_0} = (1 - \mu^2) \left(M_0 - \frac{1}{M_0} \right) \quad (3.1)$$

$$\text{但し } M_0 = U/c_0, \quad \mu^2 = \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1}$$

等の関係が衝撃波曲線 (*Shock polar*) に沿つて成立する事は言うまでもない。

4. 強い衝撃波とエントロピーの変化

強い衝撃波が断面積の変化のために、その強さを変えると、衝撃波の後ろの流れにエントロピーの変化が起る。これを計算に入れないと正しくないわけであつて、この場合エントロピーの変化の大きさは、圧力や密度と同じ order を持つて居る事の証明を附記しよう。さて衝撃波の前後で τ_0 (=比容積), p_0 及び τ_1, p_1 とすると Hugoniot の曲線は e を単位質量当りの内部エネルギーとすれば

$$H(\tau, p) = e(\tau, p) - e(\tau_0, p_0) + \frac{1}{2}(\tau - \tau_0)(p + p_0) = 0$$

で, shock polar の上で $dH=0$ であり, 又 $de = TdS - pd\tau$ と言う関係を使うと,

$$2TdS - (p - p_0)d\tau + (\tau - \tau_0)dp = 0$$

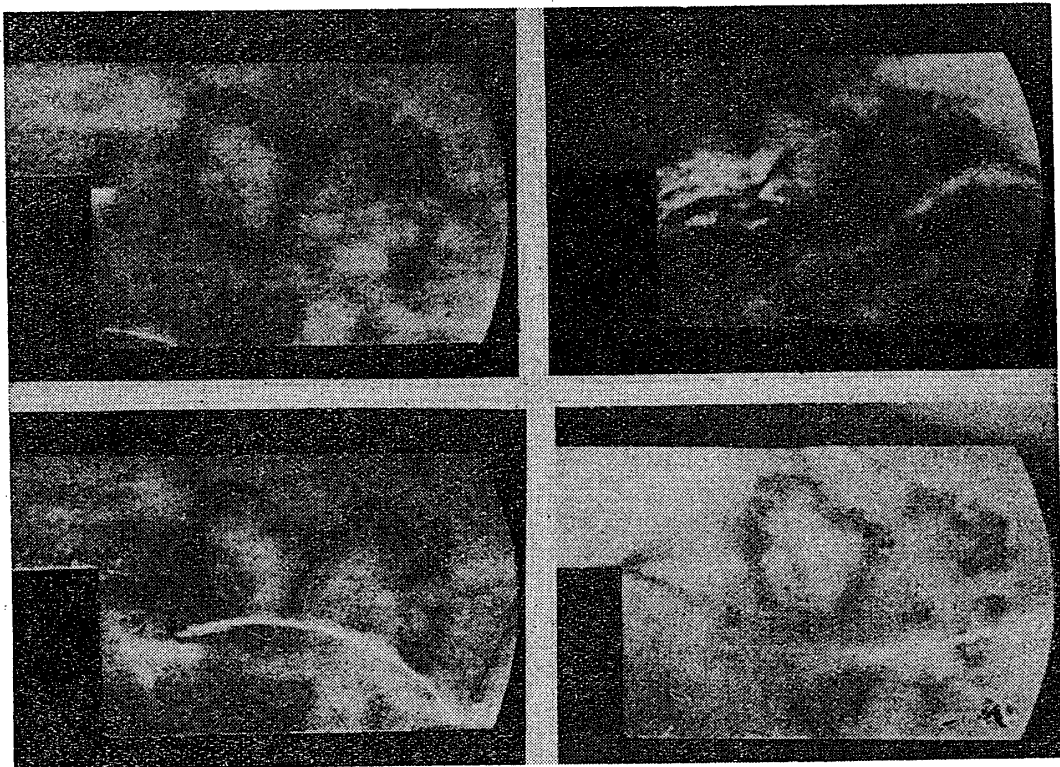
従つて結局

$$dS = \frac{1}{2T_1} [(p_1 - p_0)d\tau - (\tau_1 - \tau_0)dp]$$

なる変化が (τ_1, p_1) の状態のガスに生ずる事になる。即ち dS は $d\tau, dp$ と同じ order になる。

5. 不連続断面と定常性の仮定

断面が徐々に変化する代りに、断面積はある点で急に変化するものとして、計算を進めたいわけであるが、これは断面積の変る附近から充分離れた所では、不連続面による近似計算でよい結果が得られると信ずるからである。又時間 t に関する微係数は時間の経過と共に高次の微小量となり、他方 x に関する微係数は大きいと言う事を考えれば、不連続断面の前後の状態は、定常流の仮定で結ぶ事も差支えない。この様な事の考察のために矩形の断面が急に開いた場合の shock wave の伝播を示す Schlieren 写真を載せておく。実際には急に開いた面に衝撃波が来ると、先づその圧力差は大きい方の管の全領域に波及し、通りぬけた波面は一次元的な仮定に近い様に進行をつづけ



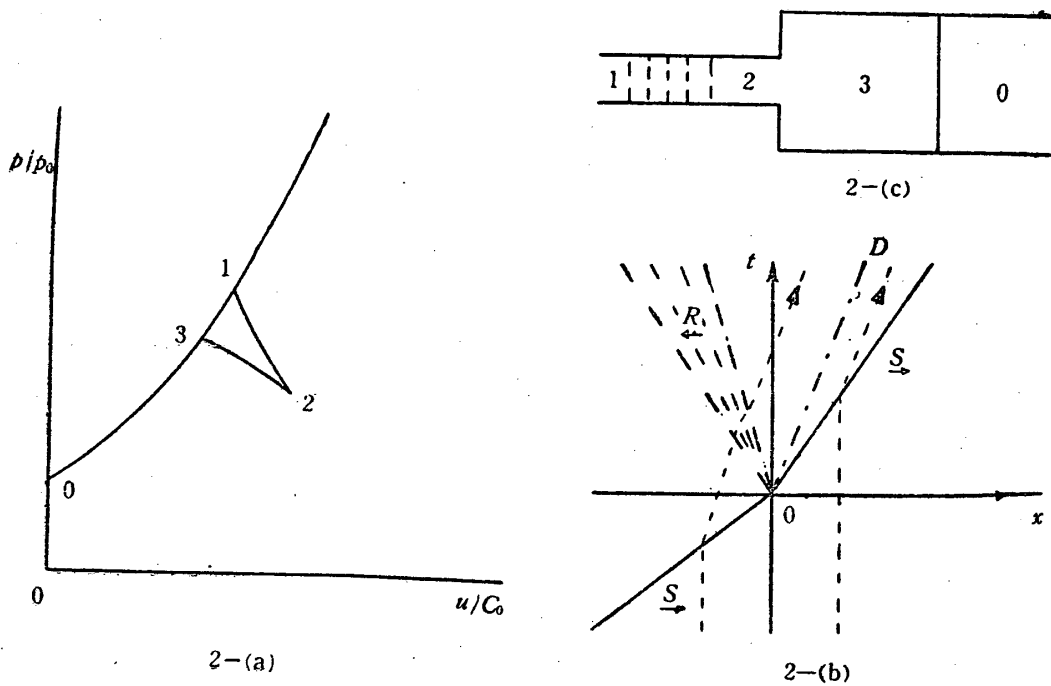
第1図 急に断面積の拡大する矩形管内の衝撃波の伝播を示す Schlieren 写真
(三井造船白戸健君撮影)

る。不連続面の近くでは反射波が何回か繰返され同時に渦が出来て separation が起り、定常状態に近づくと流れは壁から離れて一定の(約 20°)角度を持って流れる様である。兎に角問題を簡単にするため、不連続面を置き、不連続断面から充分離れた所に主眼を置く事にして、その前後で定常流を仮定する事にした。

6. 本 論

はじめ静止して居る管内の流体の断面積 Q_0 に作られた入射衝激波 S は不連続面を通つて断面積 Q_1 の管中に伝播する。先づ $Q_0 < Q_1$ の場合を考える。第2図(a) $u-p$ 面, (b) $x-t$ 面, (c) 管の中の波の伝播状況を示す図, 以上三つの図を参照しながら説明すると、先づ入射した衝激波は断

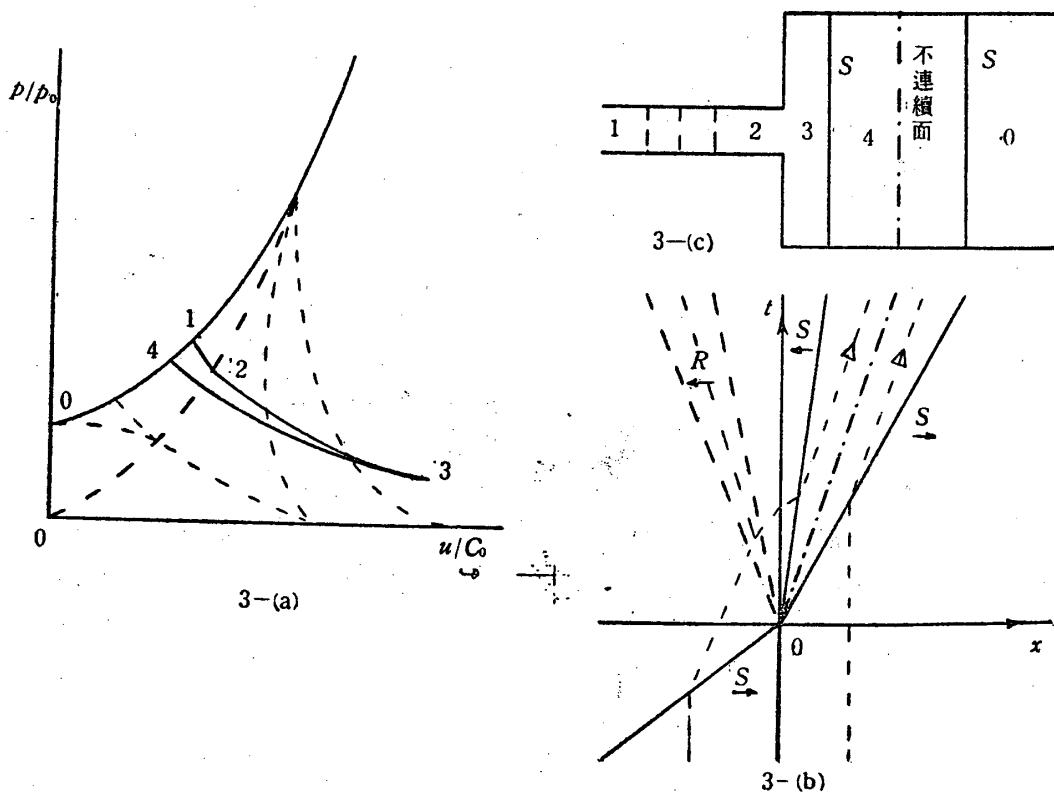
が与えられ Q_1/Q_0 の値が与えられて居れば3の点は唯一つに決定する。その時の $x-t$ 面の様子を書けば第2図(b)の様になつて居り、実際の流れの様子は第2図(c)の様である。以上の様にして作図して見るとわかる様に入射衝激波の強さと断面積の拡大率との大きさによつては、上に説明したのは別の Flow pattern を考えねばならぬ事がわかる。入射衝激波 S の強さが強くなつた場合には、断面積の拡大率が充分に大きいと第3図(b)に示す如く、 Q_1 の中に超音速の領域が出来、同時に後退する反射衝激波 S が表れる。更に入射波 S が強くなると Q_0 の中で既に超音速の領域(第4図の1)が表れ、 Q_1 に伝播後はやはり反射後退衝激波が Q_1 の中に表れる。第4図(c)がその Flow pattern で、Herzberg によつて始めて高



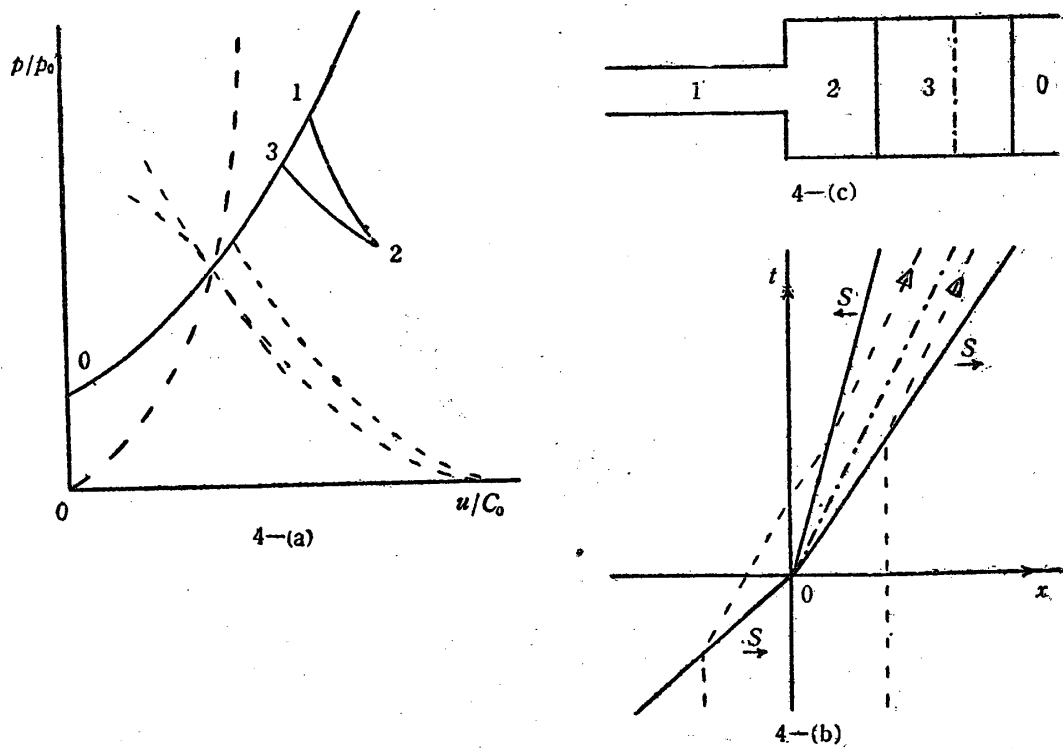
第2図 (a) (b) (c)

面積が拡がるためにその強さを減ずる。即ち衝激波の後ろのガスの状態ははじめ $u-p$ 面の shock polar 上の1にあつたものが、速度も圧力も共に、下つて3の点に来る。3の点を求めるためには3と2の状態が定常流の関係で結ばれて居る事を使えばよろしい。その際3と2の間で、丁度面積が Q_1 から Q_0 に変る様になつて居る事が必要である。最後に1と2は非定常波 R (今の場合は膨脹波の反射) によつて結ばれる。この様にして静止状態0と入射衝激波の強さ、言い換えると1の点

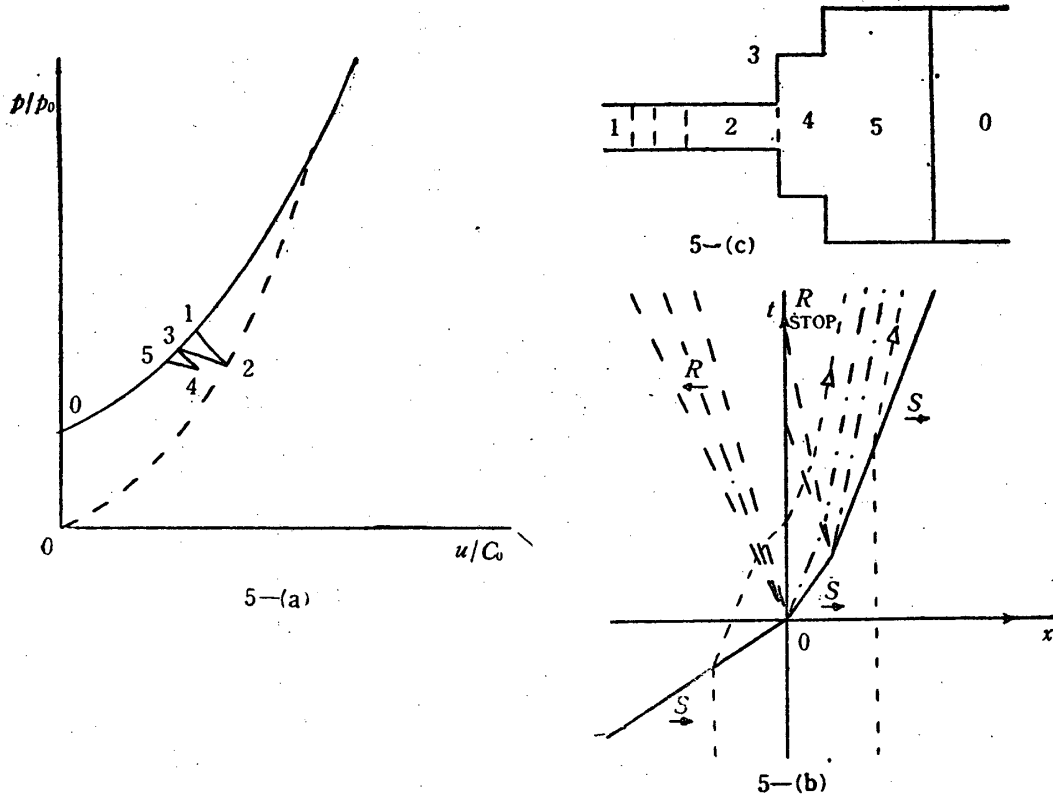
い M 数を shock tube の中で得る方法として利用されたものに当つて居る。第2図から第4図の状態にうつる中間にまだ他の flow pattern が得られる事もわかる。第5図がそれで反射する膨脹波 R は、断面積の拡大率が大きすぎるために出現した音速領域(第5図の2)にはばまれて、上流に逆昇る事が出来ず途中に波がたまる場合である。この場合に限り第5図に示す如く不連続面を二段にして説明する必要がある。次に $Q_0 > Q_1$ の場合にも $Q_0 < Q_1$ の場合に対応して全く同様に



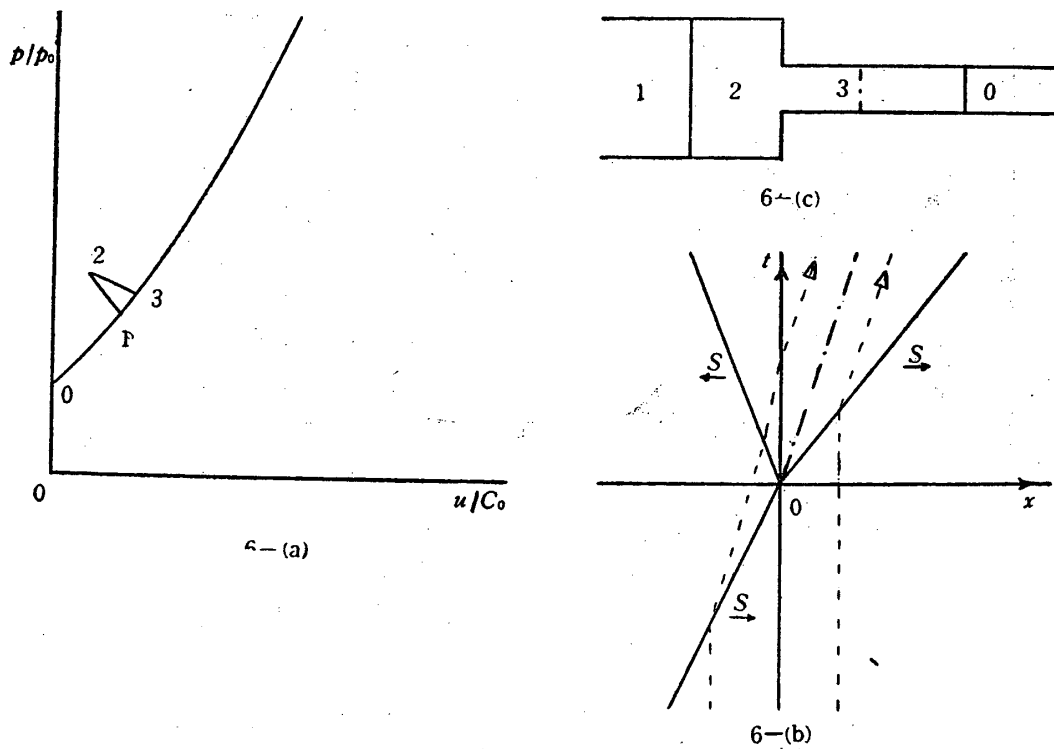
第 3 図 (a) (b) (c)



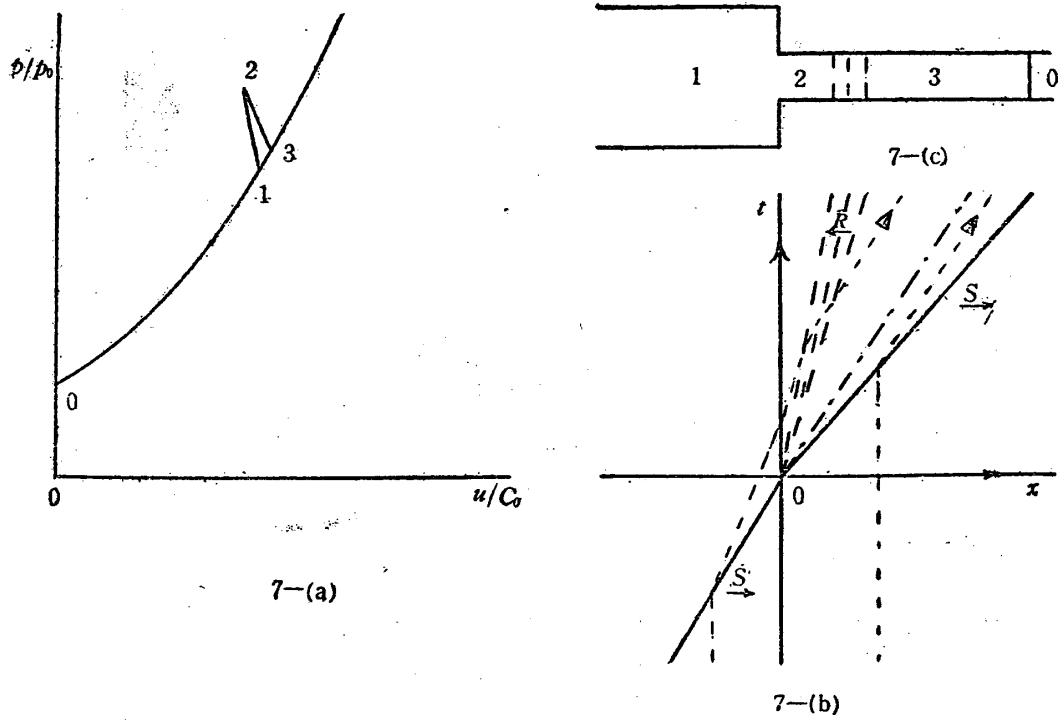
第 4 図 (a) (b) (c)



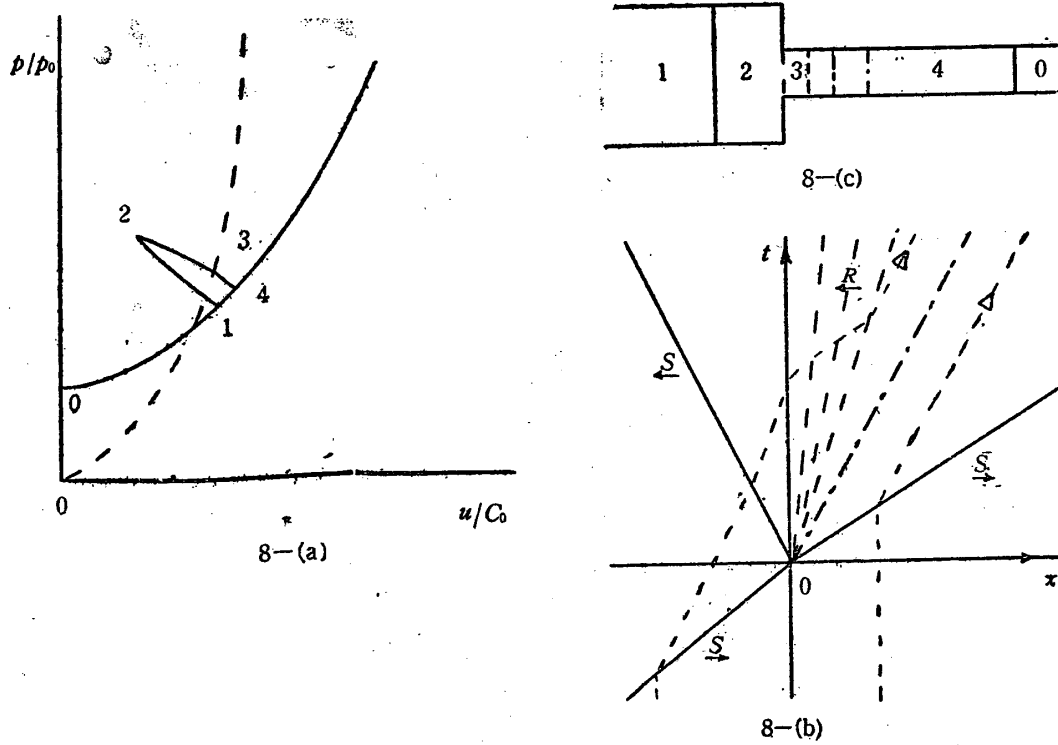
第5図 (a) (b) (c)



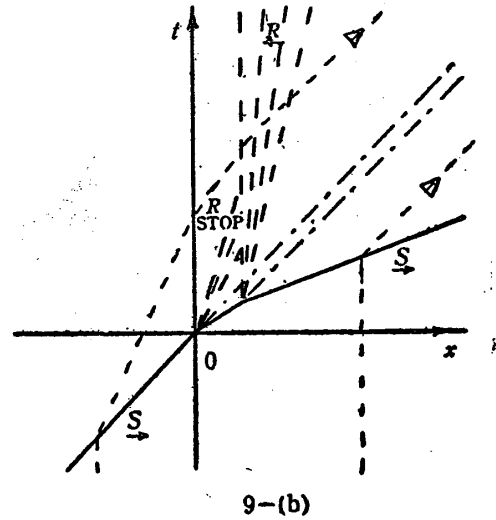
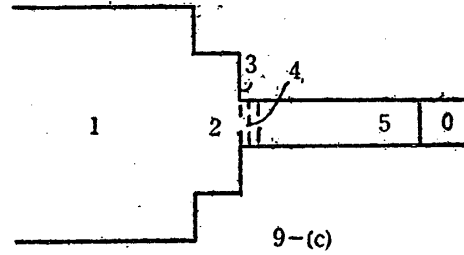
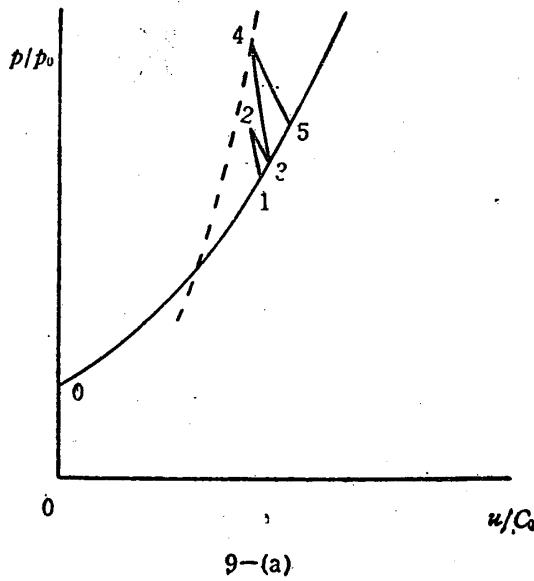
第6図 (a) (b) (c)



第 7 図 (a) (b) (c)



第 8 図 (a) (b) (c)

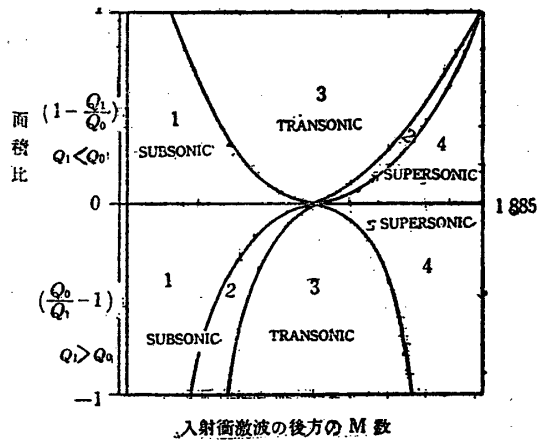


第9図 (a) (b) (c)

四つの場合が表れるが説明を省略して、図だけ置いて置く。

7. 結 言

前節に得られた結果を纏めて見る。先づ衝激波の後ろの M 数は 0 から 1.885 の間で変化する事に注意する。入射衝激波が弱くて後ろの M 数が 1 以下で $Q_1/Q_0 > 1$ が比較的小さいと、第2図の場合のみが得られ、更に入射波が強くなると Q_1/Q_0 の値を大きくするにつれて、反射波がたまる場合(第5図)と拡大部に超音速の表れる(第3図)場合とがある。入射波を更に強くして後ろの流れが $M > 1$ になると第3図(a)と同じで而も膨張波が表れない場合と、第4図(b)に相当するものが表れる。縦に面積比、横軸に入射波の後ろの M 数を取つて、夫れ夫れの起る領域を示したものが第10図である。その図の下半分が $Q_1/Q_0 > 1$ に相当し領域1と2は管全体に亜音速、3は遷音速、4は衝激波の後全体が超音速と言う具合に分類される。 $Q_1/Q_0 < 1$ の場合は同図の上半分に相当し、1は管全体が亜音速、2と4は衝激波の後ろ全体が超音速、3は遷音速の領域である。この様に面積比と入射衝激波の強さとによつて、



第10図

流れの様相が異つて来る事を、寧ろ定性的に証明したのであるが、これ等の事実があると言う事は、実用的に見て注目に値するものであらう。

文 献

- 1) R. Courant and K. O. Friedrichs: *Supersonic Flow and Shock Waves* (1948)
- 2) Hilder Geiringer: *Advances In Applied Mechanics* Vol. I (1948) p. 201~248.
- 3) Sulzer Technical Review: No. I (1945) p. 6~24.
- 4) R. E. Meyer: *Quar. Jour. Mech. Appl. Math.*

Part 3 Sept 1952.

- 5) P. M. Stocker: *Proc. Camb. Phil. Soc.* Vol. 48, Part 3 (1952) p. 482~498.

- 6) P.A. Lagerstrom, J. D. Cole and L. Trilling: *Problems in the theory of viscous compressive fluids*, Galcit, Oct. 1950.