

# 喰い違いのあるノズルよりの遷音速噴流について

村 崎 壽 満

(1954年8月28日受理)

## On Sonic and High Subsonic Free Jet with Staggered Nozzle Exit

Toshimitsu MURASAKI

(Received August 28, 1954)

**ABSTRACT:** The field of free jet, outside pressure of which is not lower than a critical value, is decided by using Tricomi's equation. It is natural that, when a nozzle is staggered, the deviation of jet will be a function of the length of stagger. As is usually done, a calculation is made in a hodograph plane, and a singularity which appears at infinity in the physical plane is treated by introducing Fourier expansion of the boundary condition on vertical axis which has a discontinuity at the origin of hodograph plane.

### 1. ま え が き

境界の圧力が臨界圧以上の自由噴流の流れの場を Tricomi の方程式を使つて決定する。ノズルの出口がくいちがいを持つ場合には、そのくいちがいの長さで噴流の方向との間に一定の函数関係がある事を示す。例によつてホドグラフ面に於ける解が求められるが、その際に表れる特異性は、縦軸上で不連続の値を持つ境界条件をフーリエ級数で表はして簡単に処理され、その解は級数解の形で求められた、計算は境界の圧力が臨界圧に等しい場合について概略が示されて居る。

### 2. 基礎方程式と境界条件

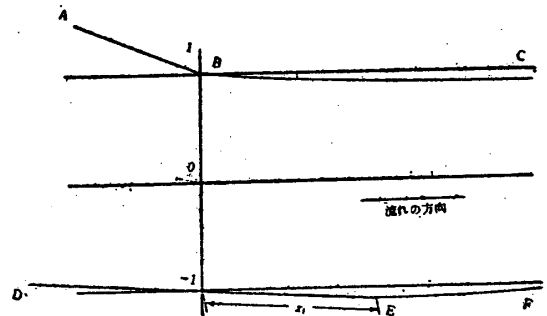
第1図に示す如く  $AB, DE$  を出口とする自由噴流の外圧が臨界圧又は臨界圧以上の値に与えられて居る場合を考える。流れの場は音速に近い値を有する事から、遷音速流場の近似が用いられ、ここではホドグラフ面に於ける場の方程式

$$wy_{vv} + y_{ww} = 0 \quad (1)$$

又は

$$\begin{cases} -wy_v + x_w = 0 \\ x_v + y_w = 0 \end{cases} \quad (1)'$$

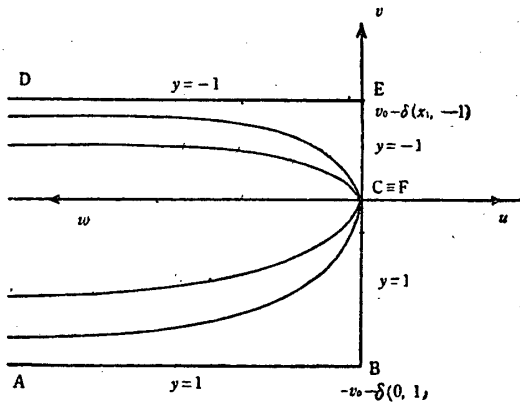
を基本式として出発する。



第1図 噴流に関する物理面

但し  $w = -u = \frac{\gamma+1}{a^*} (\bar{u} - a^*)$ ,  $v = \frac{\gamma+1}{a^*} \bar{v}$  であり、 $\bar{u}, \bar{v}$  は夫々二次元流の  $x, y$ -方向の速度成分、 $a^*$  は臨界音速、 $\gamma$  はガス常数を表す。

第1図に示す様に  $AB$  と  $DE$  は  $x_1$  だけの長さの喰い違いを有し、従つて流れは下流に行くにつれて、即ち  $C, F$  に於いて偏向するわけであつてその偏向角の大きさを  $\delta$  とする。次にあらかじめ噴流の無限下流の方向に平行に  $x$  軸、それに垂直に  $y$  軸を取つておく。この様に取つた  $x$  軸に対しては  $AB$  は  $-v_0 - \delta$ ,  $DE$  は  $v_0 - \delta$  だけの傾きを有する。さてホドグラフ面に於いて、境界条件は第2図の如く  $DE, EF$  上に於いては  $y = -1$ ,  $AB, BC$  上に於いては  $y = +1$  である。かくして音速に相当する  $C \equiv F$  点(これからの計算は音速噴流



第 2 図 噴流に関するホドグラフ面

を例にとるが、音速に近い亜音速噴流の場合にも全く同様の操作が行われる事は言うまでもないが特異点であつて、言い換えれば物理面の無限下流の領域に相当する  $C \equiv F$  点に於いてホドグラフ面上の境界値が不連続値を持つ事になるのである。

3. 境界値問題の解

微分方程式 (1) が線型であるので解を三つの部分、解の I、解の II、解の III に分けて求め、後に重ね合せを行う事にする。

解の I: 第 3 図の如き境界値を有する解 I.

$y_1$  が  $w$  に無関係であるから (1) 式は

$$w y_{vv} = 0 \quad \text{となり、これを積分して}$$

$$y_I = -\frac{(v+\delta)}{v_0} \quad \text{となる。}$$

解の II: 第 4 図の如き境界値を有する解 II.

境界条件を  $v$  軸上でフーリエ級数に展開すると

$$y_{w=0} = -2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\pi} \sin \lambda_n (v+\delta) \quad (2)$$

$$\text{但し } \lambda_n = \frac{n\pi}{v_0}$$

となる。そこで解を変数分離の形に求める事にして、 $y = \sum_{n=1}^{\infty} V_n(v) W_n(w)$  とおくと、境界条件を満たすためには、 $V_n(v) = \sin \lambda_n (v+\delta)$  とおけばよい事になる。一方  $W_n(w)$  の満たす微分方程式は、従つて  $-\lambda_n^2 w W_n + (W_n)_{ww} = 0$  となる。この二階常微分方程式の解は

$$W_n = \sqrt{w} Z_{1/3} \left( i \frac{2\lambda_n}{3} w^{3/2} \right)$$

但し  $Z_{1/3}$  は  $1/3$  次のベッセル函数を表す。一般解を

$$W_n = C_n w^{1/2} I_{1/3} \left( \frac{2\lambda_n}{3} w^{3/2} \right) + D_n w^{1/2} I_{-1/3} \left( \frac{2\lambda_n}{3} w^{3/2} \right)$$

とすると、 $w=0$  の時  $w^{1/2} I_{-1/3}$  の項のみが残り

$$W_{n(w=0)} = D_n w^{1/2} \frac{2^{1/3}}{(-1/3)!} \left( \frac{2}{3} \lambda_n w^{3/2} \right)^{-1/3}$$

となる。ここで境界条件 (3) を考慮すれば

$$D_n = -\frac{2 \cdot 3^{-1/3}}{n\pi} \Gamma \left( \frac{2}{3} \right) \left( \frac{n\pi}{v_0} \right)^{1/3}$$

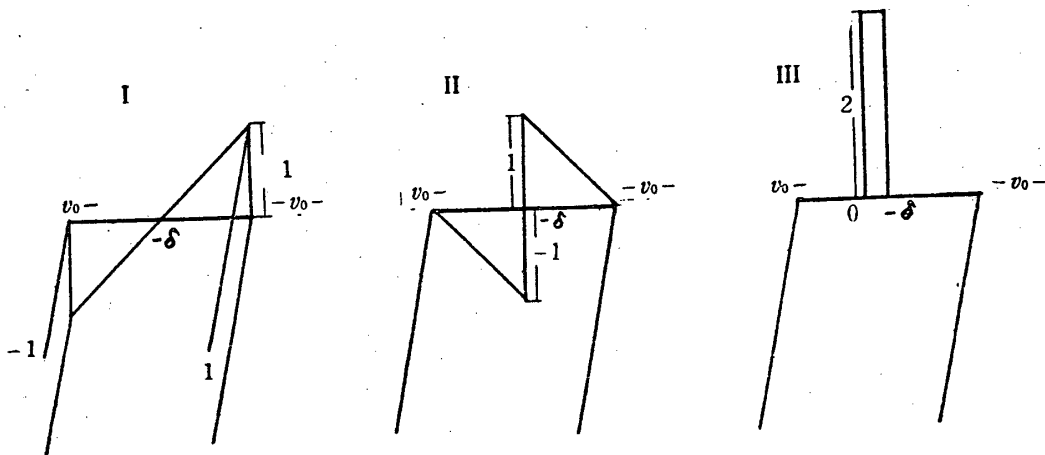
次に  $w=\infty$  に於いては一般に

$$I_p \left( \frac{2}{3} \lambda_n w^{3/2} \right) \sim \frac{e^{2/3 \lambda_n w^{3/2}}}{\sqrt{2\pi \cdot 2/3 \lambda_n w^{3/2}}}$$

であり。

$$W_n \rightarrow 0 \quad (\text{For } w = \infty)$$

とならねばならぬ事から  $C_n = -D_n$  となる。



第 3 図 ホドグラフ面に於ける解 I に対する境界値を示す図

第 4 図 ホドグラフ面に於ける解 II に対する境界値を示す図

第 5 図 ホドグラフ面に於ける解 III に対する境界値を示す図

この様にして結局

$$y_{II} = -\frac{2 \cdot 3^{-1/3}}{\pi n} \Gamma\left(\frac{2}{3}\right) \left(\frac{n\pi}{v_0}\right)^{1/3} w^{1/2} \times \frac{2 \sin \pi/3}{\pi} K_{1/3}\left(\frac{2}{3} \lambda_n w^{3/2}\right) \sin \lambda_n (v+\delta)$$

が求められた。ここで  $x$  の値を求める手順をやつて置こう。

$$y = y_I + y_{II} = -\frac{(v+\delta)}{v_0} - \frac{2 \cdot 3^{1/6} \Gamma(2/3)}{\pi^{5/3} v_0^{1/3}} w^{1/2} \times \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(v+\delta/v_0) n\pi}{n^{2/3}} K\left(\frac{2n\pi}{3v_0} w^{3/2}\right)$$

この  $y$  の値に対応する  $x$  の値を求めるには

$$x_v = -y_w = -\frac{2 \cdot 3^{1/6} \Gamma(2/3)}{\pi^{5/3} v_0^{1/3}} \sum_{n=1}^{\infty} -w \frac{\sin(v+\delta/v_0) n\pi}{n^{2/3}} \times \frac{n\pi}{v_0} K_{-2/3}\left(\frac{2n\pi}{3v_0} w^{3/2}\right)$$

なる関係式を作つて、これを  $v$  について積分すると

$$x = \frac{2 \cdot 3^{1/6} \Gamma(2/3)}{\pi^{5/3} v_0^{1/3}} w \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(v+\delta/v_0) n\pi}{n^{2/3}} \times K_{-2/3}\left(\frac{2n\pi}{3v_0} w^{3/2}\right) + f(w) \tag{3}$$

ここで  $f(w)$  は  $-wy_v + x_w = 0$  の関係式を用いて

$$f(w) = -\frac{w^2}{2v_0} + \text{const},$$

ときまる。

上の結果からわかる様に  $w=0$  に於ける第一、第二の解に相当する  $x$  の値は、 $v = \pm v_0 - \delta$  に於いて、同じ値を有し、而も  $\delta$  に無関係である。かくしてここまでの解は、喰い違いの長さ  $x_1$  と偏向角  $\delta$  の函数関係を求めるための計算には必要がない事がわかる。

解の III: 第5図の境界条件を満す解  $y_{III}$

解の II を求めるのと全く同じ方法をたどつて解の III が得られるので、ここでは省略する。ただその際の境界条件を与える前記 (2) 式に対してこの場合の  $v$  軸上の境界値をフーリエ級数に展開すると、次の式になる事を示して置く。

$$y_{(w=0)} = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n\pi} \left\{ \cos \frac{n\pi}{2} \left( \cos \frac{n\pi\delta}{2v_0} - 1 \right) - \sin \frac{n\pi}{2} \sin \frac{n\pi\delta}{2v_0} \right\} \sin \frac{n\pi}{2v_0} (v+v_0+\delta) \tag{4}$$

#### 4. 喰い違いの長さ $x_1$ と噴流の偏向角 $\delta$ の関係

前節の終りに与えられた (4) 式の境界条件を満す第三の解は

$$y_{III} = -\frac{2^{2/3} 3^{1/6} \Gamma(2/3)}{\pi^{5/3} v_0^{1/3}} w^{1/2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Delta_n(\delta)}{n^{2/3}} \times \sin \frac{n\pi}{2v_0} (v+v_0+\delta) K_{1/3}\left(\frac{n\pi}{3v_0} w^{3/2}\right)$$

但し

$$\Delta_n(\delta) = 2 \left\{ \cos \frac{n\pi}{2} \left( \cos \frac{n\pi\delta}{2v_0} - 1 \right) - \sin \frac{n\pi}{2} \sin \frac{n\pi\delta}{2v_0} \right\}$$

と与えられる。ここで前と同様の操作によつて、 $x_{III}$  に対応する  $x$  を求めると

$$x = \frac{2^{2/3} 3^{1/6} \Gamma(2/3)}{\pi^{5/3} v_0^{1/3}} \times w \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Delta_n(\delta) \cos \frac{n\pi}{2v_0} (v+v_0+\delta)}{n^{2/3}} \times K_{-2/3}\left(\frac{n\pi}{3v_0} w^{3/2}\right) + g(w) \tag{5}$$

$g(w)$  は前と同様に形を決定出来る。

さて  $x$  に対する条件としてノズルの出口の角で音速になると言う条件を式の形に書けば

$$x_1 = x_{w=0}, \quad v = v_0 - \delta \\ 0 = x_{w=0}, \quad v = -v_0 - \delta \tag{6}$$

(5) 式と (6) 式より  $x_1$  が次の様に  $\delta$  の函数として求まる。

$$x_1 = \frac{2^{2/3} 3^{1/6} \Gamma(2/3)}{\pi^{5/3} v_0^{1/3}} \frac{\pi}{\sqrt{3}} \frac{2^{2/3} 3^{2/3} v_0^{2/3}}{\Gamma(1/3) \pi^{2/3}} \times \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Delta_n(\delta)}{n^{4/3}} (\cos n\pi - 1) \tag{7}$$

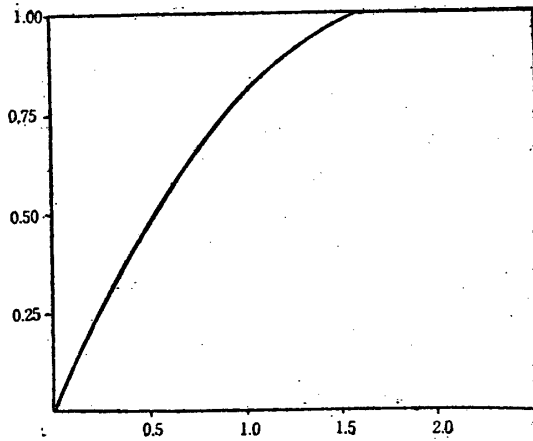
又は

$$x_1 = \frac{2^{3/6} 3^{1/3} \Gamma(2/3)}{\pi^{4/3} \Gamma(1/3)} v_0^{1/3} \times \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} \sin \frac{n\pi}{2} \sin \frac{n\pi\delta}{2v_0} / n^{4/3} \tag{7}'$$

第 (7) 式又は (7)' 式は  $x_1$  と  $\delta$  との間の函数関係を与える式である。例えば  $\delta=0$  の時  $\Delta_n(\delta)=0$  となり  $x_1=0$  即ち喰い違いがなければ偏向する事はないと言う当然の結果を得る。又  $v=v_0$  の時

$$x_1 = \text{const} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\cos n\pi - \cos n\pi/2) (\cos n\pi - 1)}{n^{4/3}} = 2 \text{const} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{n^{4/3}}$$

実際には  $\delta$  即ち偏向角は喰い違いの量  $x_1$  に応じて 0 と  $v_0$  との中間の値を取ると言うわけである。これについて (7)' の式を使つて、偏向角と喰い違いの長さとの函数関係を表すグラフを第 6 図に示して置く。



第 6 図

## 5. 結 言

この他上の問題の流線の形や、圧力分布等も容易に求められるが、ここでは省略する。著者は別の問題に關聯して一般に Tricomi 型の方程式の特異点を有する解を調べて置きたいと思つて、途中この様に境界上に不連続値を持つ場合が、変数分離によつて簡単に取り扱い得られたので、ここに注意を向けた次第である。

## 文 献

- F. Tricomi: *Sulle equazioni lineari alle derivate parziali di 2° ordine, di Tipo Misto. Atti della R. Accademia Nazionale dei Lincei 1923. Serie Quinta, Memorie della Classe di Scienze Fisiche Matematiche e Naturali. Volume XIV, p. 134.*  
 Translated By: J. B. Diaz. *The graduate division of applied mathematics, Brown University. Translation No. A9-T-26.*