467-470.

3. M. V. Dover and R. B. Appleby. ibid., 63.

4. R. O. King. Proc. Roy. Soc., A, 139. (1933), 447-459.

5. F. P. Bowden, L. Leben, and D. Tabor Trans. Faraday Soc., 35 (1939), 900-905.

6 P. Karrer. Lehrbuch der org. Chemie,

7. D. T bor. Nature, 147 (1941), 609-610.

8. 文獻 1, 附記

9. N. L. Kjdanowskyund S. E. Chajkin. Zeits. für tech. Physik. (U. S. S. R) (1933), 91-109.

棒の横振動に於ける振幅の影響

吉村慶丸・植村益次

(1948年2月17日受理)

1. 緒　　言

細い棒が横振動を行う場合，其の周期は材料の内部粘性，空氣抵抗或ひは廻轉慣性，振幅等種々の二次的原因に因つて影響されることは勿論である．振幅以外のものの影響は一應微小振動として論ずることが出來るので取扱いが容易である．それに就いての重要な報告も多數ある．併し若し振幅が少しでも影響を有するものであれば，理想的な微小振動でない限り振幅の大さを無視してそれ以外のものの影響を云々することは出來ないことである．內部粘性等の影響の大さを正確に推定する爲めの基礎を與へる意味からも，又實際に振幅が可なり大きな振動を考へる場合の必要性からも振幅の影響を出來るだけ嚴密に論じておく必要がある．このためには有限振幅に對する運動方程式を求めて，それを何等かの方法で解けばよい．

本報告では微小歪即ち Hooke の彈性法則の成立つ範圍內で，細長い直線狀の棒が任意の大さの振幅で振動する場合の運動方程式の正確な形を決定し，それを變位の微係數の３次の項までとつた場合に就いて近似的に解くことを考へた．但しこの場合座標としては物體に固定した座標を取ることによつて，運動方程式の慣性の項を空間固定の座標の場合より遙かに簡單な形にすることが出來た．

2. 歪の解析

直線狀の棒の一平面內の曲げを考える．その際棒は極めて細長く従つて有限の變位に對しても歪は微小であると考へる．従つて所謂棒の中心線に對する法線の保存が成立つと考へることが近似的に許されるから，變形の前後に於ける棒の中心線上の相對應する點 P, $\bar{P}$ の位置ヴェクトルを夫々 $\boldsymbol{r}$, $\bar{\boldsymbol{r}}$, P, $\bar{P}$ に於ける單位法線ヴェクトルを $\boldsymbol{n}$, $\bar{\boldsymbol{n}}$ とすれば，變形前に於ける P 點における中心線の法線上の點 Q $(\boldsymbol{r}+z\boldsymbol{n})$ は．變形によつてそさに相對應する點 $\bar{Q}$ $(\overline{\boldsymbol{r}+z\boldsymbol{n}})$ に移る．但し $\overline{PQ}=z$ である．P に相接近する中心線上の P' 點を取り，それに應じて上と同様に $\bar{P}'$, Q', $\bar{Q}'$ を考へ，$\overline{QQ'}=\sigma$, $\overline{\bar{Q}\bar{Q}'}=\bar{\sigma}$, 且つ變形前及び後の中心線に沿つて測つた長さを夫々 s, $\bar{s}$, 中心線に對する單位切線ヴクトルを夫々 $\boldsymbol{t}$, $\bar{\boldsymbol{t}}$, 變形後の曲率を κ とすれば，

$$\sigma=\boldsymbol{t}ds+\boldsymbol{n}dz \tag{1}$$

$$\bar{\sigma}=(1-z\kappa)\,\bar{\boldsymbol{t}}d\bar{s}+\bar{\boldsymbol{n}}dz \tag{2}$$

$$\boldsymbol{t}=\frac{d\boldsymbol{r}}{ds},\quad \bar{\boldsymbol{t}}=\frac{d\bar{\boldsymbol{r}}}{d\bar{s}} \tag{3}$$

一方歪成分 e_s, e_z, e_{sz} は

$$\bar{\sigma}^2=(1+2e_s)ds^2+(1+2e_z)dz^2+2e_{sz}dsdz \tag{4}$$

によつて定義されるから，之を(2)式と比較することによつて．

$$\left.\begin{aligned}1+2e_s&=(1-z\kappa)^2(1+\varepsilon)^2\\ e_z&=0,\quad e_{sz}=0\end{aligned}\right\} \tag{5}$$

が得られる．但し ε は中心線の伸びの歪で $1+\varepsilon=\dfrac{d\bar{s}}{ds}$ で與へられる．e_z, $e_{sz}=0$ は法線保存の假定から得られる當然の結果である．(5)式で ε, κ の一次の項のみを取れば，

$$e_s=\varepsilon-z\kappa \tag{6}$$

となる．

$\overrightarrow{P\bar{P}}$ によつて表はされる變位ヴェクトルを $\boldsymbol{u}$ で表

はせば，

$$\bar{\boldsymbol{r}}=\boldsymbol{r}+\boldsymbol{u} \tag{7}$$

且つ變位の切線及び法線成分を u, w とすれば

$$\boldsymbol{u}=u\boldsymbol{t}+w\boldsymbol{n} \tag{8}$$

從つて

$$\bar{\boldsymbol{t}}=\frac{d\bar{\boldsymbol{r}}}{ds}=\frac{1}{1+\varepsilon}\left[\left(1+\frac{du}{ds}\right)\boldsymbol{t}+\frac{dw}{ds}\boldsymbol{n}\right] \tag{9}$$

$$\bar{\boldsymbol{n}}=\frac{1}{1+\varepsilon}\left[-\frac{dw}{ds}\boldsymbol{t}+\left(1+\frac{du}{ds}\right)\boldsymbol{n}\right] \tag{10}$$

$$1+\varepsilon=\left|\frac{d\bar{\boldsymbol{r}}}{ds}\right|=\left|\left(1+\frac{du}{ds}\right)\boldsymbol{t}+\frac{dw}{ds}\boldsymbol{n}\right|$$

$$=\sqrt{\left(1+\frac{du}{ds}\right)^2+\left(\frac{dw}{ds}\right)^2} \tag{11}$$

ε に關しては變位の微係數の２乘の項迄とり，且つ$(du/ds)^2$ を $(dw/ds)^2$ に對して省略すれば，周知の關係

$$\varepsilon=\frac{du}{ds}+\frac{1}{2}\left(\frac{dw^2}{ds}\right)^2 \tag{12}$$

が得られる．次に Serret-Frenet の公式を用いることにより，(9)，(11) 式より

$$\kappa\bar{\boldsymbol{n}}=\frac{[\{u'w''-(1+u')w''\}w'\boldsymbol{t}+\{w''(1+u')-u''w'\}(1+u')\boldsymbol{n}]}{\{(1+u')^2+w'^2\}^2} \tag{13}$$

(但し " ′ " は s に關する微分を意味する)

故に

$$\kappa=\frac{\frac{d^2w}{ds^2}\left(1+\frac{du}{ds}\right)-\frac{d^2u}{ds^2}\frac{dw}{ds}}{\left\{\left(1+\frac{du}{ds}\right)^2+\left(\frac{dw}{ds}\right)^2\right\}^{3/2}} \tag{14}$$

(6) (12) 及び (14) 式が變位の微係數の２乘までとつた場合の歪を與える式であり，特に曲率を與へる (14) 式は任意の大さの變位に對して正確に成立つことを注意しておく．(14)式は，R. Kappus [3] が導いた式より分母が 1/2 乘だけ多いのであるが，Kappus は κ を考へるに當つて ε の影響を考慮しなかつたために，誤れる結果を導いたものである．

3. 彈性振動方程式

棒の微小變位の横振動の式が一次元の波動方程式であることは周知の事柄であるが，有限變位の場合にも同樣に前節の結果より導かれる彈性力に對して慣性力 $-\rho\partial^2w/\partial t^2$ (ρ, 線密度)が附加されるのみであるならば事新しく振動方程式について述べる必要はないであらう．倘有限變位の場合に縦，横の振動が相互に關聯して横振動のみを獨立に論ずることが出來ないので事柄は遙に複雜となる．

棒の垂直斷面に作用する全應力のヴェクトルを $\boldsymbol{T}$, 外力のヴェクトルを $\boldsymbol{X}$, 棒の線密度を ρ とすれば，運動の方程式は

$$\frac{\partial\boldsymbol{T}}{\partial s}+\boldsymbol{X}-\rho\frac{\partial^2\boldsymbol{u}}{\partial t^2}=0 \tag{15}$$

で與えられる．垂直合應力を T, 切線合應力を N とすれば，

$$\boldsymbol{T}=T\boldsymbol{t}+N\boldsymbol{n} \tag{16}$$

であるから，Serret-Frenet の公式によつて

$$\frac{\partial\boldsymbol{T}}{\partial s}=\left[\frac{\partial T}{\partial s}-(1+\varepsilon)N\kappa\right]\boldsymbol{t}+\left[\frac{\partial N}{\partial s}+(1+\varepsilon)T\kappa\right]\boldsymbol{n} \tag{17}$$

次に $\boldsymbol{t}$, $\boldsymbol{n}$ 系と $\bar{\boldsymbol{t}}$, $\bar{\boldsymbol{n}}$ 系との間の方向餘弦を第１表の如くとれば，(9)，(10) 式より

第 1 表

	$\boldsymbol{t}$	$\boldsymbol{n}$
$\bar{\boldsymbol{t}}$	l_1	m_1
$\bar{\boldsymbol{n}}$	l_2	m_2

$$\left.\begin{aligned} l_1&=\frac{1+\frac{\partial u}{\partial s}}{1+\varepsilon}, & m_1&=\frac{\frac{\partial w}{\partial s}}{1+\varepsilon} \\ l_2&=\frac{-\frac{\partial w}{\partial s}}{1+\varepsilon}, & m_2&=\frac{1+\frac{\partial u}{\partial s}}{1+\varepsilon} \end{aligned}\right\} \tag{18}$$

であるから，(8) (18) 式より

$$\frac{\partial^2\boldsymbol{u}}{\partial t^2}=\left(\frac{\partial^2u}{\partial t^2}\frac{1+u'}{1+\varepsilon}+\frac{\partial^2w}{\partial t^2}\frac{w'}{1+\varepsilon}\right)\bar{\boldsymbol{t}}$$

$$+\left(-\frac{\partial^2u}{\partial t^2}\frac{w'}{1+\varepsilon}+\frac{\partial^2w}{\partial t^2}\frac{1+u'}{1+\varepsilon}\right)\bar{\boldsymbol{n}} \tag{19}$$

又外力の $\boldsymbol{t}$, $\boldsymbol{n}$ 成分を X, Z とすれば

$$\boldsymbol{X}=X\boldsymbol{t}+Z\boldsymbol{n}$$

$$=\left(X\frac{1+u'}{1+\varepsilon}+Z\frac{w'}{1+\varepsilon}\right)\bar{\boldsymbol{t}}$$

$$+\left(-X\frac{\omega'}{1+\varepsilon}+Z\frac{1+u'}{1+\varepsilon}\right)\bar{\boldsymbol{n}} \tag{20}$$

であるから，結局に於いて $\boldsymbol{t}$, $\boldsymbol{n}$ 方向の運動方程式として夫々

$$\frac{\partial T}{\partial s}-(1+\varepsilon)N\kappa+\left(X-\rho\frac{\partial^2u}{\partial t^2}\right)\frac{1+u'}{1+\varepsilon}$$

$$+\left(Z-\rho\frac{\partial^2w}{\partial t^2}\right)\frac{w'}{1+\varepsilon}=0 \tag{21}$$

$$\frac{\partial N}{\partial s}+(1+\varepsilon)T\kappa-\left(X-\rho\frac{\partial^2u}{\partial t^2}\right)\frac{w'}{1+\varepsilon}$$

$$+\left(Z-\rho\frac{\partial^2w}{\partial t^2}\right)\frac{1+u'}{1+\varepsilon}=0 \tag{22}$$

が得られる．この式は任意の大さの變位に對して正確に成立つものである．倘外力が

$$\boldsymbol{X}=\bar{X}\bar{\boldsymbol{t}}+\bar{Z}\bar{\boldsymbol{n}} \tag{23}$$

なる形で，與へられた場合には，(21)，(22)の$X\dfrac{1+u'}{1+\varepsilon}+Z\dfrac{w'}{1+\varepsilon}$，$-X\dfrac{w'}{1+\varepsilon}+Z\dfrac{1+u'}{1+\varepsilon}$の代りに夫々 $\bar{X}$，$\bar{Z}$ とおけばよいことは明らかである．(21)，(22) 式で明らかな樣に，縱振動と橫振動は高次の項に於いて聯成しているのであつて，之は高次だからと云つて必ずしも省略されるとは限らない場合があるものと考へる．

通常微小振動と考へられる樣な場合でも，それに聯成する他成分の振動が勵起される樣な場合（例へば，Melde の實驗はその一例である）にはこの樣な事柄を考へる必要があるものと思はれる．中村博士は電線の唸りを弦の橫振動によつて縱振動が勵起される爲めとしているが，もし事實そうであるならば，この方程式によつて說明される筈である．これ等の事柄に關しては，後の機會に論じて見たいと思つている．

次に應力による偶力を M，外力のモーメントを G，中心線に對する陪法線の單位ヴェクトルを $\boldsymbol{b}$，體積素片 Ads（A は垂直斷面積）の廻轉慣性によるモーメントを dH とすれば，體積素片 Ads のモーメントの平衡を與へる式は

$$dM\boldsymbol{b}+[d\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{T}]+Gds\boldsymbol{b}=dH\boldsymbol{b} \tag{24}$$

從つて $\bar{\boldsymbol{t}}$ が $\boldsymbol{t}$ となす角を φ，$\boldsymbol{b}$ の周りの斷面の慣性能率を I とすれば

$$\frac{\partial M}{\partial s}+N+G-\frac{\rho I}{A}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}=0 \tag{25}$$

最初に假定した如く，微小歪の範圍內の事柄であるから，Hooke の法則を假定することが出來るので，

$$M=EI\kappa,\quad T=EA\varepsilon \tag{26}$$

と置くことが出來るのは微小變位の場合と同樣である．(21)，(22) 及び (25) 式より $(X-\rho\partial^2u/\partial t^2)$ 及び N を消去すると

$$-\frac{\partial^2M}{\partial s^2}+\rho I\frac{\partial^3\varphi}{\partial s\partial t^2}-\frac{\partial G}{\partial s}+(1+\varepsilon)T\kappa+\frac{T}{\partial s}\frac{w'}{1+u'}$$
$$+\left(\frac{M}{\partial s}+G-\rho I\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}\right)\kappa w'\frac{1+\varepsilon}{1+u'}$$
$$+\left(Z-\varphi\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}\right)\left(1+u'+\frac{w'^2}{1+u'}\right)\times\frac{1}{1+\varepsilon}=0 \tag{27}$$

が得られる．その式中 $\partial^2\varphi/\partial t^2$ は

$$\sin\varphi=w'/(1+\varepsilon) \tag{28}$$

より

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}=\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{w'}{1+\varepsilon}\right)^2}}\left[\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\frac{w'}{1+\varepsilon}\right)+\frac{w'}{1+\varepsilon}\times\right.$$
$$\left.\frac{1}{1-\left(\frac{w'}{1+\varepsilon}\right)^2}\left\{\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{w'}{1+\varepsilon}\right)\right\}^2\right] \tag{29}$$

であるから，(27) 式は w 等及び u' に關する微分方程式となり，u' が w 等にて表はされるならば，w のみが從屬變數である振動方程式が得られる．

扨て我々は細い棒即ち大きな細長比 l/i（l；棒の長さ．i；斷面の慣性半徑）を有する棒を考へる．棒が曲げを受ける場合，ε と $i\kappa/\dfrac{l}{i}$ とは同じ order の量であるから，$l/i\gg1$ に對して

$$\varepsilon\ll i\kappa \tag{30}$$

である．故に伸びの無い中心線を考へる事が出來，實際問題として板ばね等の場合の樣に軸方向變位に對して拘束を考へなければ，我々の場合 $\varepsilon=0$ としてよさそうである．故に (11)，(14)，(26) 及び (29) 式より夫々

$$1+\frac{\partial u}{\partial s}=\sqrt{1-\left(\frac{\partial w}{\partial s}\right)^2} \tag{31}$$

$$\kappa=\frac{\partial^2 w}{\partial s^2}\Big/\sqrt{1-\left(\frac{\partial w}{\partial s}\right)^2} \tag{32}$$

$$T=0 \tag{33}$$

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}=\frac{\partial^3 w}{\partial s\partial t^2}\left\{1+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial s}\right)^2\right\}+\frac{\partial w}{\partial s}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial s\partial t}\right)^2 \tag{34}$$

外力が働かず，細い棒として回轉慣性を無視すると，(21)，(22) 及び (25)の三式は次の樣に簡單になる．

$$-\rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\sqrt{1-\left(\frac{\partial w}{\partial s}\right)^2}=\rho\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}\cdot\frac{\partial w}{\partial s} \tag{35}$$

$$\frac{\partial N}{\partial s}+\rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\frac{\partial w}{\partial s}=\rho\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}\sqrt{1-\left(\frac{\partial w}{\partial s}\right)^2} \tag{36}$$

$$\frac{\partial M}{\partial s}+N\qquad=0 \tag{37}$$

これ等三式より u と N とを消去するか，或は(27)式を簡單にすると，我々の求める自由振動方程式が得られる．即ち

$$\rho\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}+EI\left\{\frac{\partial^4 w}{\partial s^4}+2\frac{\partial w}{\partial s}\cdot\frac{\partial^2 w}{\partial s^2}\cdot\frac{\partial^3 w}{\partial s^3}+\left(\frac{\partial^2 w}{\partial s^2}\right)^3\right\}$$
$$=0 \tag{38}$$

4. 振動方程式の解法
（兩端支持の場合）

(38) 式は非線型偏微分方程式であつて，嚴密に解くことは困難であるので，近似的に次の諸方法に依つて解き結果を比較檢討して見ようと思う．

(i) 近似振動數を假定する方法 (38)式に於いて $\rho/EI=\lambda^4$ とおくと

$$\frac{\partial^4 w}{\partial s^4}+2\frac{\partial w}{\partial s}\cdot\frac{\partial^2 w}{\partial s^2}\cdot\frac{\partial^3 w}{\partial s^3}+\left(\frac{\partial^2 w}{\partial s^2}\right)^3+\lambda^4\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}=0 \tag{39}$$

となる．非線型項は有限振幅に因る影響を意味し，之のために根本的に微小變位の振動と異つた狀態を示すとは思はれない．故に單に修正的作用をするものとし有限振幅の場合には微小變位の場合の圓振動數 p より極く僅か異つた圓振動數 q を持つ單弦振動をするものと假定する．

$$p^2=\frac{\pi^4}{\lambda^4 l^4},\quad \lambda^4=\frac{\pi^4}{p^2 l^4};\quad q^2=\frac{\pi^4}{\lambda_1^4 l^4},\quad \lambda_1^4=\frac{\pi^4}{q^2 l^4} \tag{40}$$

とすれば (39) 式は

$$\frac{\partial^4 w}{\partial s^4}+\lambda_1^4\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}=-2\frac{\partial w}{\partial s}\cdot\frac{\partial^2 w}{\partial s^2}\cdot\frac{\partial^3 w}{\partial s^3}-\left(\frac{\partial^2 w}{\partial s^2}\right)^3+(\lambda_1^4-\lambda^4)\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \tag{41}$$

となる．第 0 近似解として，兩端支持の境界條件と，棒の中央で $t=0$ に於て $w=a$, $\partial w/\partial t=0$ と云ふ初期條件を滿足する樣に

$$w=a\cos qt\cdot\sin ms\quad (m=\pi/l) \tag{42}$$

(a；棒の中央の振幅．l；棒の全長)

を假定する．之の w を (41) 式の右邊に代入すると

$$\text{右邊}=am^4[\cos qt\cdot\sin ms(q^2/p^2-1+3/16\cdot a^2m^2)-9/16\cdot a^2m^2\cos qt\cdot\sin 3ms+1/16\ a^2m^2\cos 3qt\cdot\sin ms-3/16\cdot a^2m^2\cos 3qt\cdot\sin 3ms] \tag{43}$$

これは見掛け上の强制振動を示す故に，共鳴を除去するため括弧内の第一項の係數を 0 と等置すると，

$$q^2=p^2(1-\frac{3}{16}a^2m^2) \tag{44}$$

なる圓振動數の第一近似解を得る．

次に (41) 式よ，w の第一近似解として

$$w=a\left[\left(1-\frac{7}{3840}a^2m^2\right)\cos qt\cdot\sin ms-\frac{9}{1280}a^2m^2\cos qt\cdot\sin 3ms-\frac{1}{384}am^2\cos 3qt\cdot\sin 3ms-\frac{1}{128}a^2m^2\cos 3qt\cdot\sin ms\right] \tag{45}$$

を得る．同樣の手續きを繰返すことによつて，順次に近似を高められるが，補正項としてこの程度で充分であろう．(44)，(45)式より分る樣に，撓形に及ぼす振幅の影響は圓振動數への影響に比して遙かに小さく，(42)式で充分の樣である．

(ii) Galerkin 法による方法　從來 Galerkin 法は專ら線型微分方程式に於いて，其の解が容易に得られない樣な場合に適用して有效であつた．非線型微分方程式の場合に如何に有效であるかは，理論的考察はともかくとして先ず實際に試みてみることが必要であらう．從來 Galerkin 法は Duncan[4] が指摘した如く，微分方程式が變分法から導かれる樣な力學特に彈性力學の問題には優秀であり．尙本問題の如く不連續が存在せず，境界條件，初期條件を滿足する樣に容易に撓を假定出來，又既に微分方程式が正確に與へられている樣な場合には，適當の樣である．尙，本法は非保存系，强制振動等にも應用出來る點に於いて遙かに廣範圍な價値があり，後報の減衰振動の場合にも用いられる．

扨て(38)式は非線型であるから，撓形として 1 項のみを考へ，前と同樣に

$$w=a\cos qt\cdot\sin ms$$

を用いる．(46)式では變位函數を固定した譯であるが實際問題としては振動數が問題となり，前の結果でも明らかな樣に變位函數には餘り影響がなく，(46)式で充分と思はれる．

此の方法は林氏[2] も用いて居られるが，茲では時間函數に就いても Galerkin 法を施す．即ち

$$\int_0^{\frac{2\pi}{q}}\int_0^l\left[EI\left\{\frac{\partial^4 w}{\partial s^4}+2\frac{\partial w}{\partial s}\cdot\frac{\partial^2 w}{\partial s^2}\frac{\partial^3 w}{\partial s^3}+\left(\frac{\partial^2 w}{\partial s^2}\right)^3\right\}+\rho\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}\right]\times w\,ds\,dt=0 \tag{47}$$

の w に(46)式を代入して積分を行うと，未知圓振動數 q が得られる．即ち

$$q^2=\frac{EIm^4}{\rho}\left(1-\frac{3}{16}a^2m^2\right)=p^2\left(1-\frac{3}{16}a^2m^2\right) \tag{48}$$

これは(44)式と全く同一であり，(i) の方法より簡單に得られた．時間函數の近似を進めたい時には

$$w=f\cdot\sin ms \tag{49}$$

とし，(47)式に代入すれば，f に關する非線型微分方程式を得る．即ち

$$\frac{d^2f}{dt^2}+p^2f+\alpha f^3=0 \tag{50}$$

$$\text{但し}\ p^2=\frac{EIm^4}{\rho},\quad \alpha=-\frac{m^2}{4}p^2 \tag{51}$$

(50)式は既に解かれて居り，其の近似解は

$$f=a\left\{\cos qt-a^2m^2/128\cdot(\cos 3qt-\cos qt)\right\} \tag{52}$$

$$q^2=p^2(1-3/16\,a^2m^2)=p^2(1-3\pi^2/16\times a^2/l^2) \tag{53}$$

である．結局撓形に及ぼす影響は僅かであり，態々 f として近似を進める程の必要もなさそうで，前の結果と一致する．そして大撓みの影響は，その大きさを示す a/l と云ふパラメーターによつて表はされる．

(iii) エネルギー法　本法は，高橋氏[1] が非線型問題のエネルギー法への一應用として用いて居られる．然し本問題の如く軸方向の變位も考慮した場合には些か面倒の樣である．

以上種々なる方法で解いたが，振動數に及ぼす影響

として，減少せしめる點は今迄の文獻[1)2)]と一致しているが，其の減少程度はより少ない．

5 振動方程式の解法 (片持梁の場合)

4の結果から，Galerkin 法が近似解法として充分妥當であると思はれるので，片持梁の場合にも適用してみる．第一近似として使用する片持梁の變位函數は微小變位理論により

$$X(x)=A\left\{\frac{\operatorname{ch} nx-\cos nx}{\operatorname{ch} nl+\cos nl}-\frac{\operatorname{sh} nx-\sin nx}{\operatorname{sh} nl+\sin nl}\right\}$$

$$(nl=1.875) \qquad (54)$$

であるが，計算が相當面倒なので，之を代數式にて表示し，境界條件を滿足する變位函數として

$$w=f(t)\cdot\frac{s^2}{11\,l^5}(20\,l^3-10\,l^2s+s^3) \qquad (57)$$

を用う．4と同樣に，この w を(47)式に代入すれば(50)式と同じく

$$\frac{d^2f}{dt^2}+p^2f+af^3=0 \qquad (50)$$

但し $p^2=12.36\dfrac{EI}{\rho l^4}$

$$a=-6.697\frac{EI}{\rho l^6}\doteqdot-0.5419\,\rho^2/l^2 \qquad (58)$$

を得る．p^2 の値は微小變位理論の結果と全く一致し，假定した代數式の妥當性を裏書きしている．

$t=0$ に於いて，$w_0=a\ (\partial w/\partial t)_0=0$ と云う先端に於ける初期條件の下に解けば前と同樣にして，

$$f=a\{\cos qt-0.0169\,a^2/l^2\cdot(\cos 3qt-\cos qt)\} \qquad (59)$$

$$q^2=(1-0.4064\,a^2/l^2)\,p^2 \qquad (60)$$

此の場合でも撓形に及ぼす影響は矢張り少く，大撓みの影響はその大きさを示す a/l と云ふパラメーターによつて表はされる．

6. 結　　言

本計算の結果を要約すれば

(1) 棒又は弦の有限振幅の振動方程式の正確な形として，u，w が互に聯成するところの非線型偏微分方程式(21)，(22)及び(25)式を得たこと．

(2) 變位の微係數の三次まで考へた場合の棒の不伸張横振動方程式(21)式を得たこと．

(3) (2)の場合の非線型微分方程式の近似解法として，近似振動數假定の方法及び Galerkin 法を適用して，兩端支持梁及び片持梁の場合を取扱つた．その結果によれば，兩解法とも實用上必要な程度に於いて一致した結果を得．Gelerkin 法で充分であること．

(4) 兩端支持，片持梁何れの場合も，振幅の大きさは變位の形には殆んど影響を持たないが，振動數を減少せしめ，振幅によつてはその影響を考へる必要があるものと思はれること．

等である．尙有限な振幅の場合に當然問題となる空氣抵抗，內部粘性等も考慮した減衰振動については，次の機會に讓ることにする．

文　獻

(1) 高橋 利衞：航空學會誌 昭18/3.
(2) 林 五郎：日本學振第6特別委員會研究速報 第2號 昭18/11.
(3) R. Kappus：Z. A. M. M., Bd. 19., Nr. 5.6.;
(4) W. J. Duncan etc：R & M. No. 1798, No. 1848..