

# 加熱と垂直圧力を受ける円形平板の変形\*

砂 川 恵

## Large-Deflection Analysis for a Circular Flat Plate

Subjected to

Heating and Normal Pressure

By

Megumi SUNAKAWA

**Abstract:** The deformation of a circular plate, subjected to arbitrary symmetrical temperature and normal pressure distributions, is analyzed in addition to the preceding paper [1] where the existence of the normal pressure was not taken into account.

The fundamental equations for the thermoelastic problems of a circular plate are solved for both boundary conditions, that is, for the simply supported and clamped edges.

The temperature gradient through the thickness due to the rapid heating or cooling has the similar effect to the normal pressure and has the great influence on the thermal deformation and stress.

Some qualitative discussions and some numerical examples are given on the several cases showing that the Durchschlag phenomenon may occur in the case where the heating is followed by the rapid cooling only, not to speak of the case where the heating is applied together with the normal pressure.

### 概 要

任意の対称分布の加熱および垂直圧力を受ける円板の変形を、有限変形を考慮して解析した。

円板の熱弾性基礎方程式を一般的に解き、周縁が単純支持および固定の場合についての解を与えた。急速加熱および冷却によって生ずる板厚方向温度勾配の影響は面圧効果と等価であり、円板の熱変形および熱応力に大きく影響する。

解析結果に基づき、数種の場合について数値計算例および定性的な検討を加え、加熱と垂直圧力とが組み合っただけの場合はいうまでもなく、加熱後の急速冷却のみによっても、飛越挫屈現象が起る可能性のあることを示した。

---

\* 昭和36年7月28日 日本航空学会宇宙科学技術シンポジウムにおいて講演。

## 1. まえがき

筆者は前報 [1] において円板の熱変形を検討したが、本論文はその続報として、空力的垂直圧力も同時に考慮して、円板の変形現象を解析する。すなわち、急速加熱および冷却による板厚方向温度勾配は、面内分布如何によっては面圧力と等価の作用を有し、温度分布が熱変形および熱応力に及ぼす影響については、各種の場合 [2]~[5] について筆者らが論じてきた通りである。したがって、加熱条件は空力的圧力に附加的效果を呈し、変形および応力に大きく影響する。円形平板が垂直圧力のみを受ける場合には飛越挫屈を呈することはないが、加熱を合わせ考慮すれば飛越挫屈を呈することも考えられ、挫屈値に大きく関与する。

本論文はこれらの諸点に注目したものであるが、更に、垂直圧力が存在しなくても、加熱後の急速冷却のみによっても飛越挫屈が起ることをも指摘する。

## 記 号

- $d, r_0$  それぞれ円板の板厚および半径.  
 $h$  熱伝達係数.  
 $p$  板面に垂直な分布荷重 (上面での負圧を正).  
 $t$  時間.  
 $u, v, w$  それぞれ中立面の  $r, \theta, z$  方向の変位.  
 $A, B, C$  常数.  
 $D$  板の曲げ剛性,  $D \equiv Ed^3/12(1-\nu^2)$ .  
 $E$  板材料のヤング率.  
 $T$  無歪無応力状態よりの温度上昇.  
 $\bar{T}, \tilde{T}$  (5) 式.  
 $T_E$  断熱界面温度.  
 $\bar{\Phi}, \tilde{\Phi}, \Psi$  それぞれ平均温度, 温度勾配および垂直圧力に関する無次元変数. (19) 式.  
 $\alpha, \rho, c_p, k$  それぞれ板材料の線膨脹係数, 密度, 比熱および熱伝導率.  
 $\delta$  中立面中央における無歪無応力状態よりの最大撓み.  
 $\sigma_{11}, \sigma_{22}$  それぞれ  $r, \theta$  方向の応力.  
 $\nu$  ポアソン比.  
 $\zeta = r/r_0$ .  
 $\chi$  応力函数.  
 添字 “ $\zeta$ ” は  $\zeta$  に関する偏微分を意味する.  
 上線 “ $-$ ” は中立面成分を示す.

## 2. 基礎方程式及びその解

加熱と垂直圧力を受ける円板の熱弾性基礎方程式は次式で与えられる [1].

平衡方程式：

$$\begin{aligned} & \frac{1}{12(1-\nu^2)} \left(\frac{d}{r_0}\right)^2 \frac{1}{\zeta} \frac{\partial}{\partial \zeta} \left\{ \zeta \frac{\partial}{\partial \zeta} \left[ \frac{1}{\zeta} \frac{\partial}{\partial \zeta} \left( \zeta \frac{\partial w'}{\partial \zeta} \right) \right] \right\} \\ & = \frac{1}{\zeta} \frac{\partial}{\partial \zeta} \left( \chi \frac{\partial w'}{\partial \zeta} \right) - \frac{\alpha}{(1-\nu)} \frac{1}{\zeta} \frac{\partial}{\partial \zeta} \left( \zeta \frac{\partial \bar{T}}{\partial \zeta} \right) \\ & + \left(\frac{r_0}{d}\right)^2 \frac{p}{E}, \end{aligned} \quad (1)$$

適合条件式：

$$\zeta \frac{\partial}{\partial \zeta} \left[ \frac{1}{\zeta} \frac{\partial}{\partial \zeta} (\zeta \chi) \right] = -\frac{1}{2} \left(\frac{d}{r_0}\right)^2 \left(\frac{\partial w'}{\partial \zeta}\right)^2 - \alpha \zeta \frac{\partial \bar{T}}{\partial \zeta}, \quad (2)$$

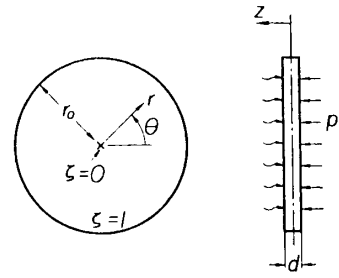


Fig. 1. Circular flat plate.

ここに

$$w' = w/d, \quad \zeta = r/r_0, \quad (3)$$

$$\frac{\bar{\sigma}_{11}}{E} = r_0 \frac{\chi}{r} = \frac{\chi}{\zeta}, \quad \frac{\bar{\sigma}_{22}}{E} = r_0 \frac{\partial \chi}{\partial r} = \frac{\partial \chi}{\partial \zeta}, \quad (4)$$

$$\bar{T} = \frac{1}{d} \int_{-d/2}^{d/2} T(\zeta, z) dz, \quad \bar{T} = \frac{1}{d^2} \int_{-d/2}^{d/2} z T(\zeta, z) dz. \quad (5)$$

基礎方程式 (1) 式および (2) 式を、実際問題としての両極端の条件、すなわち、i) 周縁単純支持の場合、および、ii) 周縁固定の場合について解く。この基礎方程式は非線型連立偏微分方程式であり、その厳密解を得ることは至難であるから、逐次近似法を用いる。

円板上の温度分布および圧力分布は中心に関する任意の対称形を仮定し、次式で与える。

$$\bar{T} = \sum_i \bar{T}_i \zeta^i, \quad (i=0, 2, 4, \dots \text{even}), \quad (5)$$

$$\bar{T} = \sum_j \bar{T}_j \zeta^j, \quad (j=0, 2, 4, \dots \text{even}), \quad (6)$$

$$p = \sum_k p_k \zeta^k, \quad (k=0, 2, 4, \dots \text{even}). \quad (7)$$

ここで、温度および圧力の対称分布に対し、撓み関数を第一次近似としてまず (8) 式で近似する。

$$\begin{aligned} w' &= \frac{\delta}{d} \left( 1 + \sum_{s=1}^{\infty} A_s \zeta^s \right) \\ &\doteq \frac{\delta}{d} (1 + A_2 \zeta^2 + A_4 \zeta^4), \end{aligned} \quad (8)$$

ここに、 $\delta$  は無歪無応力状態からの円板中央の最大撓みであり、また  $A_2$  および  $A_4$  は、 $w'$  に関する境界条件に対応して次のように与える。

i) 周縁単純支持の場合

境界条件：

$$\left. \begin{aligned} & \zeta=0 \text{ において, } w' = \frac{\delta}{d}, \quad w'_\zeta = 0, \\ & \zeta=1 \text{ において, } w' = 0, \\ & \frac{E}{12(1-\nu^2)} \left(\frac{d}{r_0}\right)^2 \left( w'_{\zeta\zeta} + \nu \frac{w'_\zeta}{\zeta} \right) + \frac{E\alpha}{(1-\nu)} \bar{T} = 0, \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

$$A_2 = -\frac{2(3+\nu)}{(5+\nu)}, \quad A_4 = \frac{(1+\nu)}{(5+\nu)}. \quad (10)$$

ii) 周縁固定の場合

境界条件:

$$\left. \begin{aligned} \zeta=0 \text{ において, } \quad w' &= \frac{\delta}{d}, \quad w'_\zeta=0, \\ \zeta=1 \text{ において, } \quad w' &= w'_\zeta=0 \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

$$A_2 = -2, \quad A_4 = 1. \quad (12)$$

ここで、周縁固定の場合は  $w'$  は境界条件を満足しているが、周縁単純支持の場合、 $\zeta=1$  では温度勾配による温度モーメントの項  $E\alpha\bar{T}/(1-\nu)$  をも含めた境界条件を満足していないが、第一次近似としてこの項は一応無視し、逐次近似法によって、平衡方程式を積分する際に満足させられる。

さて、第一次近似の撓み函数  $w'$  (8) 式を用いて適合条件式 (2) 式を積分して応力函数  $\varkappa$  を求め、この  $\varkappa$  と (8) 式の  $w'$  とを用いて平衡方程式 (1) 式を積分すれば、更に近似度の高い撓み函数が求まるが、途中の経過は前報 [1] と全く同様であるのでその記述を省略し、計算結果のみを次に記す。

$$\varkappa = \frac{B_0}{\zeta} + B\zeta - \alpha \sum_{i=2}^{\infty} \frac{\bar{T}_i}{(i+2)} \zeta^{i+1} - \left(\frac{d}{r_0}\right)^2 \left(\frac{\delta}{d}\right)^2 \left(\frac{A_2^2}{4} \zeta^3 + \frac{A_2 A_4}{3} \zeta^5 + \frac{A_4^2}{6} \zeta^7\right), \quad (13)$$

ここに

$$B_0 = 0.$$

i) 周縁単純支持の場合

$$B = -\frac{\alpha}{(1-\nu)} \left[ \bar{T}_0 + (1+\nu) \sum_{i=2}^{\infty} \frac{\bar{T}_i}{(i+2)} \right] + \frac{(109-\nu-17\nu^2-3\nu^3)}{6(1-\nu)(5+\nu)^2} \left(\frac{d}{r_0}\right)^2 \left(\frac{\delta}{d}\right)^2, \quad (14)$$

ii) 周縁固定の場合

$$B = -\frac{\alpha}{(1-\nu)} \left[ \bar{T}_0 + (1-\nu) \sum_{i=2}^{\infty} \frac{\bar{T}_i}{(i+2)} \right] + \frac{(5-3\nu)}{6(1-\nu)} \left(\frac{d}{r_0}\right)^2 \left(\frac{\delta}{d}\right)^2.$$

$$\frac{1}{12(1-\nu^2)} \left(\frac{d}{r_0}\right)^2 w'$$

$$= C_1 + C_2 \ln \zeta + C_3 \zeta^2 + C_4 \zeta^2 \left( \ln \zeta - \frac{1}{2} \right) + \frac{1}{4} \left(\frac{\delta}{d}\right) B \left( \frac{A_2}{4} \zeta^4 + \frac{A_4}{9} \zeta^6 \right)$$

$$- 2\alpha \left(\frac{\delta}{d}\right) \sum_{i=2}^{\infty} \frac{\bar{T}_i}{(i+2)(i+4)} \left[ \frac{A_2}{(i+2)(i+4)} \zeta^{i+4} + \frac{2A_4}{(i+6)^2} \zeta^{i+6} \right]$$

$$- \frac{1}{48} \left(\frac{d}{r_0}\right)^2 \left(\frac{\delta}{d}\right)^3 \left( \frac{A_2^3}{6} \zeta^6 + \frac{5A_2^2 A_4}{24} \zeta^8 + \frac{A_2 A_4^2}{10} \zeta^{10} + \frac{A_4^3}{45} \zeta^{12} \right)$$

$$- \frac{\alpha}{(1-\nu)} \sum_{j=2}^{\infty} \frac{\bar{T}_j}{(j+2)^2} \zeta^{j+2} + \frac{1}{E} \left(\frac{r_0}{d}\right)^2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{p_k \zeta^{k+4}}{(k+2)^2 (k+4)^2}, \quad (15)$$

ここに

$$C_2 = 0, \quad C_4 = 0,$$

i) 周縁単純支持の場合

$$\begin{aligned}
C_1 = & \frac{\alpha}{2(1-\nu^2)} \left\{ \bar{T}_0 + \sum_{j=2}^{\infty} \frac{[(1-\nu)j+4]}{(j+2)^2} \bar{T}_j \right\} + \frac{1}{2(1+\nu)E} \left( \frac{r_0}{d} \right)^2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(k+5+\nu)p_k}{(k+2)(k+4)^2} \\
& + \frac{\alpha}{(1-\nu^2)(5+\nu)} \left\{ \frac{(107+40\nu+5\nu^2)}{72} \left[ \bar{T}_0 + (1+\nu) \sum_{i=2}^{\infty} \frac{\bar{T}_i}{(i+2)} \right] \right. \\
& + 4(1-\nu) \sum_{i=2}^{\infty} \frac{[(i^3+18i^2+108i+214)+2(i+5)(i+8)\nu+2(i+5)\nu^2]}{(i+2)(i+4)^2(i+6)^2} \bar{T}_i \left. \right\} \left( \frac{\delta}{d} \right) \\
& - \frac{(87249+47111\nu+3566\nu^2-3198\nu^3-895\nu^4-73\nu^5)}{4320(1-\nu^2)(5+\nu)^3} \left( \frac{d}{r_0} \right)^2 \left( \frac{\delta}{d} \right)^3, \\
C_3 = & -\frac{\alpha}{2(1-\nu^2)} \left[ \bar{T}_0 + \sum_{j=2}^{\infty} \frac{(1-\nu)\bar{T}_j}{(j+2)} \right] - \frac{1}{2(1+\nu)E} \left( \frac{r_0}{d} \right)^2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(k+3+\nu)p_k}{(k+2)^2(k+4)} \\
& - \frac{1}{4} \left( \frac{\delta}{d} \right) B \left[ \frac{(3+\nu)}{2(1+\nu)} A_2 + \frac{(5+\nu)}{3(1+\nu)} A_4 \right] \\
& + \frac{\alpha}{(1+\nu)} \left( \frac{\delta}{d} \right) \sum_{i=2}^{\infty} \frac{\bar{T}_i}{(i+2)(i+4)} \left[ \frac{(i+3+\nu)}{(i+2)} A_2 + \frac{2(i+5+\nu)}{(i+6)} A_4 \right] \\
& + \frac{1}{24} \left( \frac{d}{r_0} \right)^2 \left( \frac{\delta}{d} \right)^3 \left[ \frac{(5+\nu)}{4(1+\nu)} A_2^3 + \frac{5(7+\nu)}{12(1+\nu)} A_2^2 A_4 + \frac{(9+\nu)}{4(1+\nu)} A_2 A_4^2 \right. \\
& \left. + \frac{(11+\nu)}{15(1+\nu)} A_4^3 \right], \tag{16}
\end{aligned}$$

ii) 周縁固定の場合

$$\begin{aligned}
C_1 = & -\frac{\alpha}{2(1-\nu)} \sum_{j=2}^{\infty} \frac{j\bar{T}_j}{(j+2)^2} + \frac{1}{2E} \left( \frac{r_0}{d} \right)^2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{p_k}{(k+2)(k+4)^2} \\
& + \frac{\alpha}{(1-\nu)} \left\{ \frac{5}{72} \left[ \bar{T}_0 + (1+\nu) \sum_{i=2}^{\infty} \frac{\bar{T}_i}{(i+2)} \right] \right. \\
& \left. + 8(1-\nu) \sum_{i=2}^{\infty} \frac{(i+5)\bar{T}_i}{(i+2)(i+4)^2(i+6)^2} \right\} \left( \frac{\delta}{d} \right) - \frac{(173-73\nu)}{4320(1-\nu)} \left( \frac{d}{r_0} \right)^2 \left( \frac{\delta}{d} \right)^3, \\
C_3 = & \frac{\alpha}{2(1-\nu)} \sum_{j=2}^{\infty} \frac{\bar{T}_j}{(j+2)} - \frac{1}{2E} \left( \frac{r_0}{d} \right)^2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{p_k}{(k+2)^2(k+4)} \\
& + \frac{1}{6} B \left( \frac{\delta}{d} \right) - 8\alpha \left( \frac{\delta}{d} \right) \sum_{i=2}^{\infty} \frac{\bar{T}_i}{(i+2)^2(i+4)(i+6)} - \frac{23}{720} \left( \frac{d}{r_0} \right)^2 \left( \frac{\delta}{d} \right)^3.
\end{aligned}$$

この第二次近似の  $w'$  に積分常数を代入し、 $w'(0)=\delta/d$  とおき整理すると、結局、次式が得られる。

i) 周縁単純支持の場合

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{6} \left( \frac{d}{r_0} \right)^2 \left( \frac{\delta}{d} \right) + \frac{(87249+47111\nu+3566\nu^2-3198\nu^3-895\nu^4-73\nu^5)}{2160(5+\nu)^3} \left( \frac{d}{r_0} \right)^2 \left( \frac{\delta}{d} \right)^3 \\
& = \alpha \left\{ \bar{T}_0 + \sum_{j=2}^{\infty} \frac{[(1-\nu)j+4]}{(j+2)^2} \bar{T}_j \right\} + \frac{(1-\nu)}{E} \left( \frac{r_0}{d} \right)^2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(k+5+\nu)p_k}{(k+2)(k+4)^2} \\
& + \frac{\alpha}{(5+\nu)} \left\{ \frac{(107+40\nu+5\nu^2)}{36} \left[ \bar{T}_0 + (1+\nu) \sum_{i=2}^{\infty} \frac{\bar{T}_i}{(i+2)} \right] \right. \\
& \left. + 8(1-\nu) \sum_{i=2}^{\infty} \frac{[(i^3+18i^2+108i+214)+2(i+5)(i+8)\nu+2(i+5)\nu^2]}{(i+2)(i+4)^2(i+6)^2} \bar{T}_i \right\} \left( \frac{\delta}{d} \right), \tag{17}
\end{aligned}$$

あるいは

$$\Psi_s + \tilde{\Phi}_s + 5.667\bar{\Phi}_s \left(\frac{\delta}{d}\right) = \left[1.5 + 2.835 \left(\frac{\delta}{d}\right)^2\right] \left(\frac{\delta}{d}\right), \quad (17a)$$

ii) 周縁固定の場合

$$\begin{aligned} & \frac{1}{(1-\nu^2)} \left(\frac{d}{r_0}\right)^2 \left(\frac{\delta}{d}\right) + \frac{(173-73\nu)}{360(1-\nu)} \left(\frac{d}{r_0}\right)^2 \left(\frac{\delta}{d}\right)^3 \\ &= -\frac{6\alpha}{(1-\nu)} \sum_{j=2}^{\infty} \frac{j\bar{T}_j}{(j+2)^2} + \frac{6}{E} \left(\frac{r_0}{d}\right)^2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{p_k}{(k+2)(k+4)^2} \\ &+ \frac{5\alpha}{6(1-\nu)} \left\{ \bar{T}_0 + \sum_{i=2}^{\infty} \frac{\bar{T}_i}{(i+2)} \left[ (1+\nu) + \frac{576}{5} \frac{(1-\nu)(i+5)}{(i+4)^2(i+6)^2} \right] \right\} \left(\frac{\delta}{d}\right), \end{aligned} \quad (18)$$

あるいは

$$\Psi_c + \tilde{\Phi}_c + 6.667\bar{\Phi}_c \left(\frac{\delta}{d}\right) = \left[6 + 3.304 \left(\frac{\delta}{d}\right)^2\right] \left(\frac{\delta}{d}\right), \quad (18a)$$

ここに

$$\left. \begin{aligned} \Psi_s &= \frac{2}{E} \left(\frac{r_0}{d}\right)^4 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(3k+16)p_k}{(k+2)(k+4)^2}, \\ \Psi_c &= \frac{32}{E} \left(\frac{r_0}{d}\right)^4 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{p_k}{(k+2)(k+4)^2}, \\ \bar{\Phi}_s &= \left(\frac{r_0}{d}\right)^2 \alpha \left\{ \bar{T}_0 + \sum_{i=2}^{\infty} \frac{\bar{T}_i}{(i+2)} \left[ \frac{4}{3} + \frac{3}{17} \frac{(9i^3+168i^2+1052i+2176)}{(i+4)^2(i+6)^2} \right] \right\}, \\ \bar{\Phi}_c &= \left(\frac{r_0}{d}\right)^2 \alpha \left\{ \bar{T}_0 + \sum_{i=2}^{\infty} \frac{\bar{T}_i}{(i+2)} \left[ \frac{4}{3} + \frac{384}{5} \frac{(i+5)}{(i+4)^2(i+6)^2} \right] \right\}, \\ \tilde{\Phi}_s &= 9 \left(\frac{r_0}{d}\right)^2 \alpha \left\{ \bar{T}_0 + \frac{2}{3} \sum_{j=2}^{\infty} \frac{(j+6)\bar{T}_j}{(j+2)^2} \right\}, \\ \tilde{\Phi}_c &= -48 \left(\frac{r_0}{d}\right)^2 \alpha \sum_{j=2}^{\infty} \frac{j\bar{T}_j}{(j+2)^2}, \\ \nu &= \frac{1}{3}. \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

したがって、任意の対称分布の温度および垂直圧力が与えられると、(17a)式および(18a)式より、円板中央の最大撓みと温度変化および圧力変化との関係を求めることができる。(17a)式および(18a)式をそれぞれ Fig. 2 および Fig. 3 に示す。

### 3. 板厚方向温度勾配が変形に及ぼす影響

(17a)式および(18a)式から、 $\tilde{\Phi}_s$  および  $\tilde{\Phi}_c$  が  $\Psi$  と等価に働らくことが分る。すなわち、周縁単純支持の場合には  $\bar{T}$  が端部モーメントを通じて、また周縁固定の場合には  $\partial/\partial\zeta(\zeta\partial\bar{T}/\partial\zeta)$  が、それぞれ垂直圧力の作用と等価に働らくので、これらが存在すると、円板は Euler 型の挫屈現象を呈しないで加熱初期から撓み始める。

そこで、 $\tilde{\Phi}$  が  $\Psi$  に対していかなる程度の作用を有するかを、周縁単純支持の場合を例にとって検討しよう。いま、 $p \equiv p_0$ 、 $\bar{T} \equiv \bar{T}_0$  とし、 $p_0/E = 10^{-6}$  の場合における  $\tilde{\Phi}_{s0}/\Psi_0 \sim d/r_0$  の関係を求めると Fig. 4 のようになる。たとえば、 $d/r_0 = 10^{-2}$  の場合、 $\alpha\bar{T}_0 = 10^{-3}$  にお

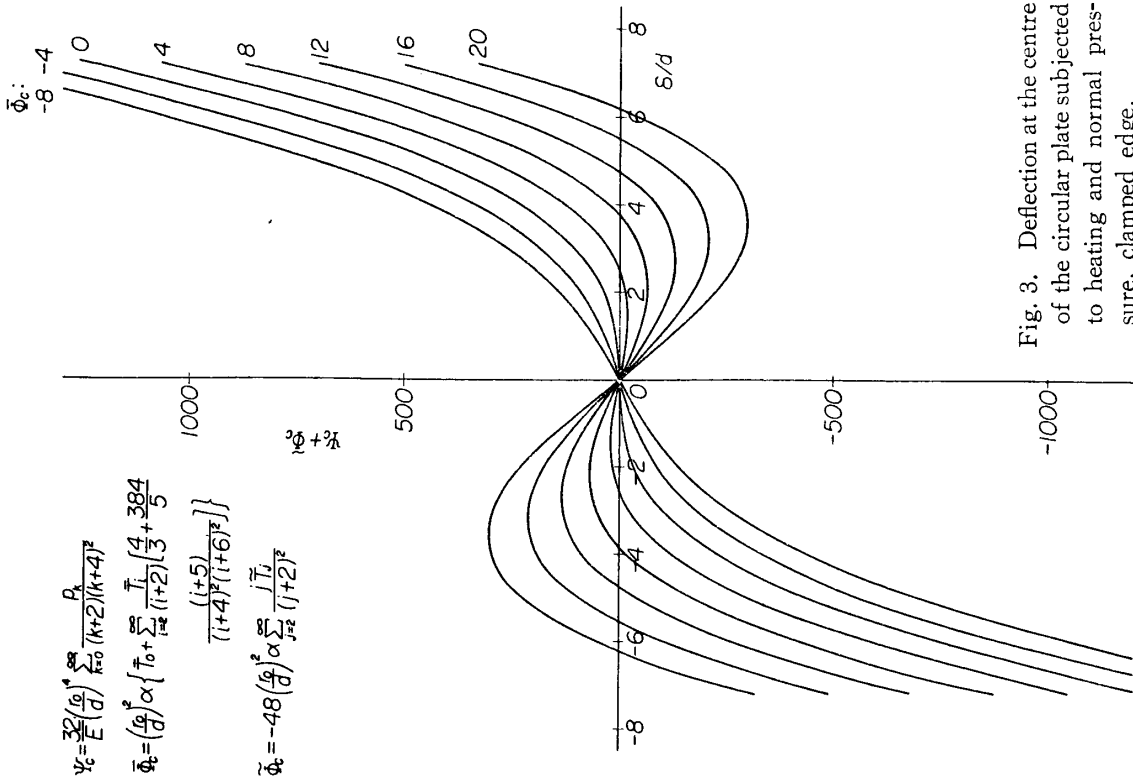


Fig. 3. Deflection at the centre of the circular plate subjected to heating and normal pressure, clamped edge.

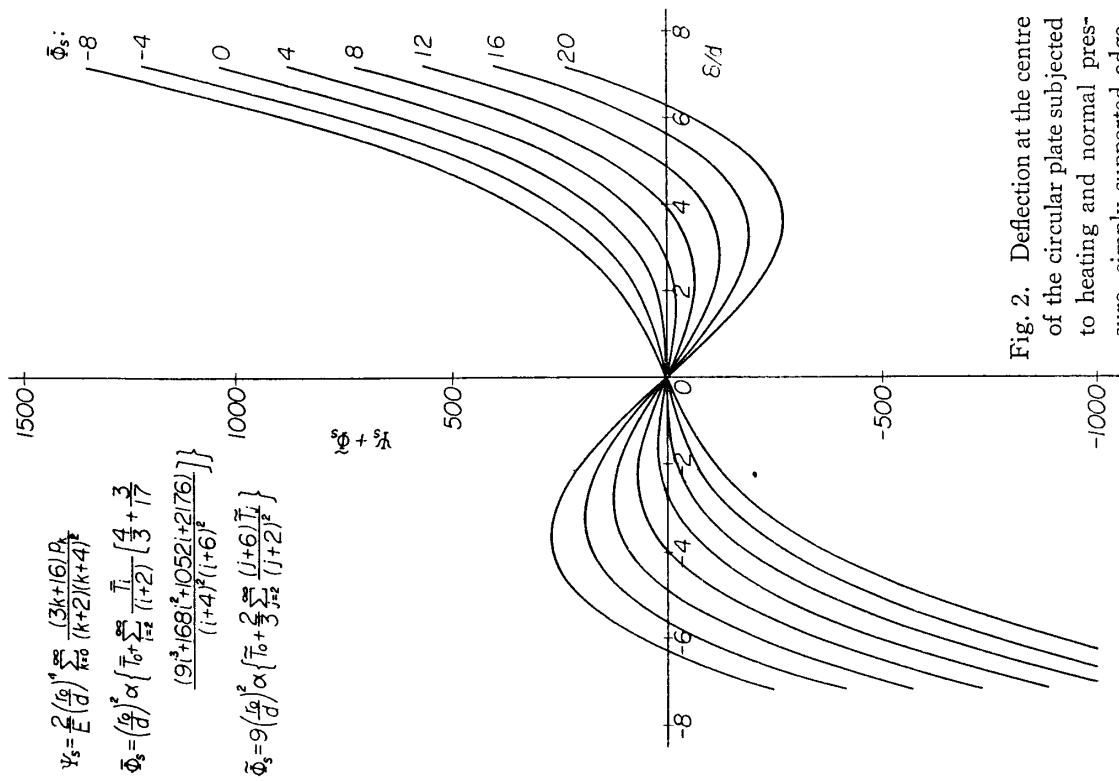


Fig. 2. Deflection at the centre of the circular plate subjected to heating and normal pressure, simply supported edge.

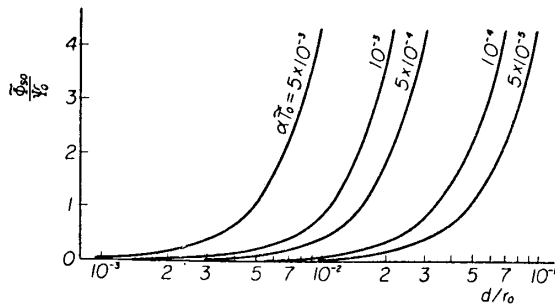


Fig. 4. Relations between the ratio of temperature gradient to normal pressure and the thickness, simply supported edge,  $p_0/E=10^{-6}$ .

$p_0/E=10^{-6}$  の場合に対して Fig. 5 が得られる。  $\tilde{\Phi}_{SE}$  の影響は当然加熱初期に著るしいが、たとえば Biot 数  $hd/k=1$  の場合、  $\alpha T_E=10^{-2}$  として、加熱初期には既に  $\tilde{\Phi}_{SE}/\Psi_0=1$  となる。なお、  $E=2 \times 10^4 \text{ kg/mm}^2$ 、  $\alpha=2 \times 10^{-5}$  とすると、  $p_0/E=10^{-6}$  および  $\alpha T_E=10^{-2}$  は、それぞれ  $p_0=2 \text{ atm.}$ 、  $T_E=500^\circ\text{C}$  に相当する。

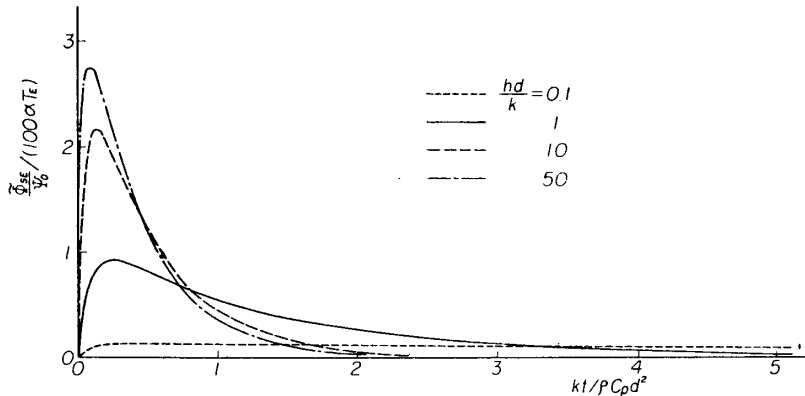


Fig. 5. Variation of the ratio of temperature gradient to normal pressure with the time, simply supported edge,  $d/r_0=2 \times 10^{-2}$ ,  $p_0/E=10^{-6}$ .

以上の検討から、 i)  $d/r_0$  が大きい場合、 ii)  $\alpha$  および  $E$  の大きい材料の場合、 iii) Biot 数  $hd/k$  が大きくて  $T_E$  が大きい場合の加熱の初期には、板厚方向温度勾配が変形に及ぼす影響は、垂直圧力と較べて無視できない（条件によっては同程度あるいは却って大きい場合もある）ことが分る。

#### 4. 加熱と垂直圧力を受ける円板の変形の様相

##### 4.1. 加熱のみの場合 $\Psi=0$ .

この場合、  $\tilde{\Phi}$  の値によって、3 種の場合について変形様式を議論する (Fig. 6)。 ① は  $\tilde{\Phi}=0$ 、すなわち板厚方向の温度勾配が存在しない場合（熱挫屈、この場合のみ  $\delta/d$  の符号は正負いずれでもよい）、 ② は  $\tilde{\Phi}=\text{const} \times \bar{\Phi}$ 、すなわち板厚方向の温度勾配が指定され温度上昇を考えた場合（① は ② の特殊の場合と考えてもよい）、 ③ は  $\tilde{\Phi}=F(t)$ 、すなわち板厚方向の温度勾配が時間的に変化する場合で、 ③<sub>1</sub> および ③<sub>2</sub> はそれぞれ上面での加熱温



度が挫屈温度以上および以下の場合である. なお, ① の場合は, Fig. 6 において  $\bar{\Phi} = \text{const}$  の曲線と横軸との交点が  $\bar{\Phi} \sim \delta/d$  の関係を示し,  $\delta/d=0$  において横軸に接する曲線の  $\bar{\Phi}$  の値が挫屈臨界温度を意味する.

具体例については, 既に前報 [1] において述べたので省略する.

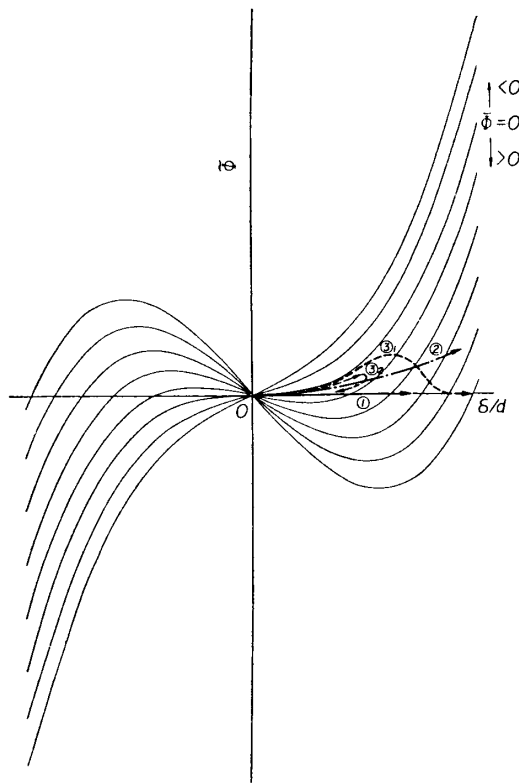


Fig. 6. Explanatory diagram for the case of 4. 1.

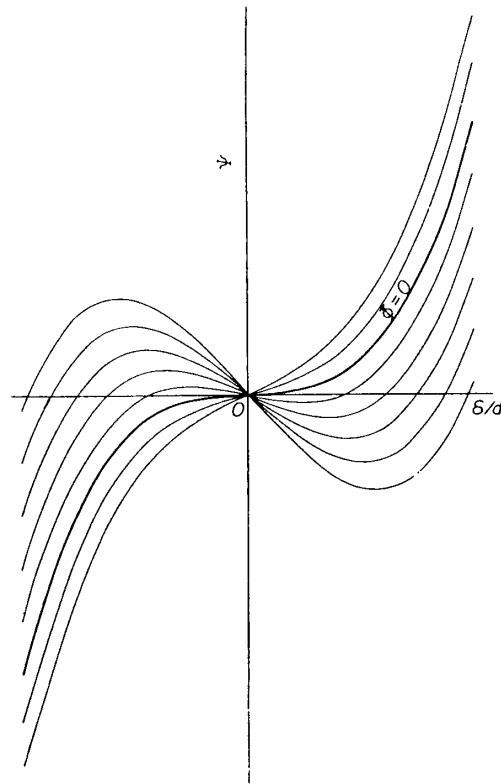


Fig. 7. Explanatory diagram for the case of 4. 2.

#### 4. 2. 垂直圧力のみの場合 $\bar{\Phi} = \tilde{\Phi} = 0$ .

$\bar{\Phi} = \tilde{\Phi} = 0$  の場合. 本論文の解は, 分布荷重が作用している円板の変形解析の一つの方法を示すもので, その結果は, (17a) 式および (18a) 式より直ちに次の如く求められる.

$$\psi_s = \left[ 1.5 + 2.835 \left( \frac{\delta}{d} \right)^2 \right] \left( \frac{\delta}{d} \right), \quad (20)$$

$$\psi_c = \left[ 6 + 3.304 \left( \frac{\delta}{d} \right)^2 \right] \left( \frac{\delta}{d} \right). \quad (21)$$

これらは既に別の方法で求められている他の解析結果 [6] と大体一致している. (20) 式および (21) 式は Fig. 7 のようになるが, これは Fig. 2 および Fig. 3 における  $\bar{\Phi} = 0$  の曲線である.

#### 4. 3. 最初垂直圧力が加わり (温度変化なし), 次に 或る一定圧力状態で 温度が変化する 場合

Fig. 8 に示すように, まず  $\bar{\Phi} = 0$  の曲線に沿って一定圧力  $\psi_0$  に対応する P 点に達す

る。P点以後の変形は、いま一例として加熱の場合 ( $\bar{\Phi} > 0$ ) を考えると、 $\Psi_0 > 0$  および  $\bar{\Phi} > 0$  (あるいは  $\Psi_0 < 0$ ,  $\bar{\Phi} < 0$ ) の場合 (①) は 4. 1. で述べたような各種の変形様式に従うので問題ないが、 $\Psi_0 < 0$  で  $\bar{\Phi} > 0$  (あるいは  $\Psi_0 > 0$ ,  $\bar{\Phi} < 0$ ) の場合には、 $\Psi_0$  と  $\bar{\Phi}$  の値によっては、② i) に示すような飛越挫屈の現象が起る可能性がある。 [ $\bar{\Phi} = 0$  であれば当然 ii)].

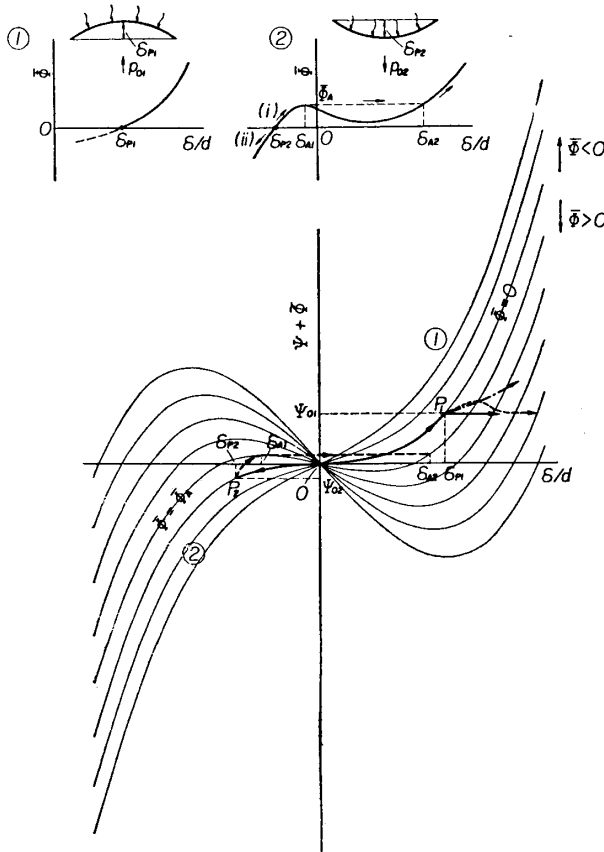


Fig. 8. Explanatory diagram for the case of 4. 3.

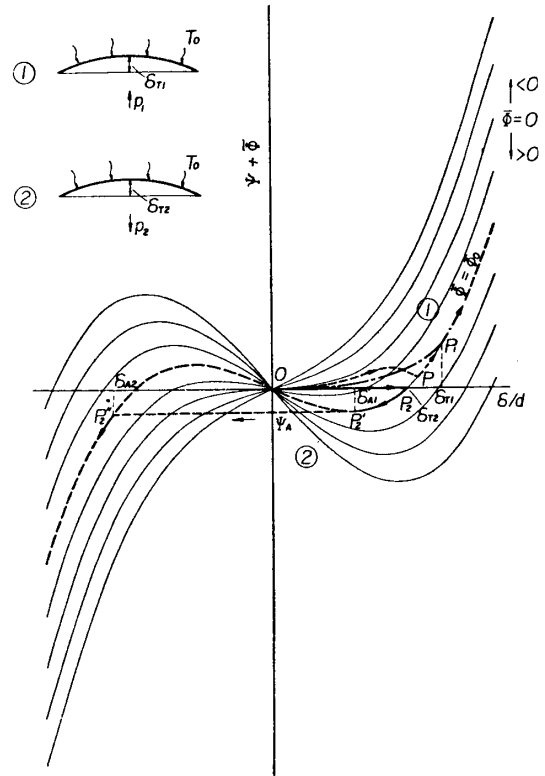


Fig. 9. Explanatory diagram for the case of 4. 4.

4. 4. 最初加熱され (圧力変化なし), 次に温度一定のまま垂直圧力が加わる場合 (Fig. 9)

まず加熱条件によって、4. 1. で述べた様な変形を行なって P 点に達し、それ以後は平均温度一定の曲線に沿って変化する。最初の変形方向と圧力の向きが同じ場合にはそのまま単調に撓みが増大する (①) が、逆の場合は、② に示すように飛越挫屈の現象が起り得る。たとえば、最初の加熱  $\bar{\Phi}_0$  で  $\delta_{r2}$  撓んだ円板 (P<sub>2</sub> 点) に  $\Psi < 0$  の圧力が加わると、圧力の増大とともに撓みは  $\bar{\Phi} = \bar{\Phi}_0$  の曲線上を矢印のように変化し、P<sub>2</sub>' 点において圧力一定 ( $\Psi_A$ ) のまま P<sub>2</sub>'' 点に飛び移り、その後は単調に撓みが増大する。

4. 5. 加熱された後急速に冷却される場合

これは加速されて高温になった後、急激に減速される飛行体の表面の状態と考えることも

できる。Fig. 10-1 に示すように、加速時の変形を行なって P 点に達し、次に急速冷却に伴う  $\bar{\Phi}$  の符号の急変によって PP' に沿って変化するが、飛越挫屈の現象を伴って P' から P'' に飛び、P''→P''' の変形をする場合も考えることができる。

この場合の数値計算例を、周縁単純支持の場合について示す。簡単のために  $\Psi=0$  とし、かつ  $hd/k=50$  とする。円板上面が瞬間的に断熱界面温度  $\Phi_E=0.8$  による熱伝達で加熱され、高温になった後急激に冷却される場合の温度と撓みとの関係を  $kt/\rho C_p d^2$  をパラメータとして Fig. 10-2 に示す。すなわち、加熱時は 4.1. の ③ に対応する経路を辿って  $kt/\rho C_p d^2 = \infty$  の点 ( $\bar{\Phi}=0.8, \bar{\Phi}=0$ ) まで達し、その状態から急激に冷却されると、 $\bar{\Phi}$  が減少すると同時に  $\bar{\Phi}$  の符号が負になるので図に示すように撓みが減少するが、 $\bar{\Phi} \approx 0.57$  の近傍で飛越挫屈が起って撓みの方向が逆になり、冷却が進むとともに平板状に復帰する。Fig. 10-2 を書き直すと Fig. 10-3 が得られる。点線および実線がそれぞれ急速加熱および冷却の場合の温度と撓みの時間的変化であっ

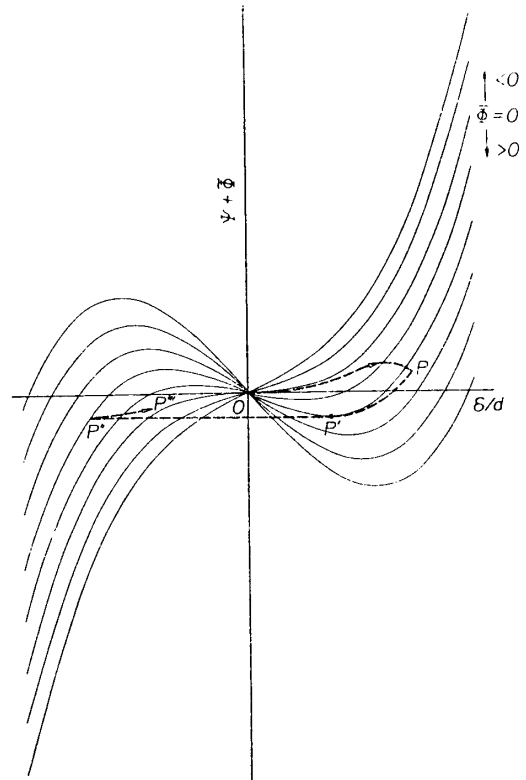


Fig. 10-1. Explanatory diagram for the case of 4. 5.

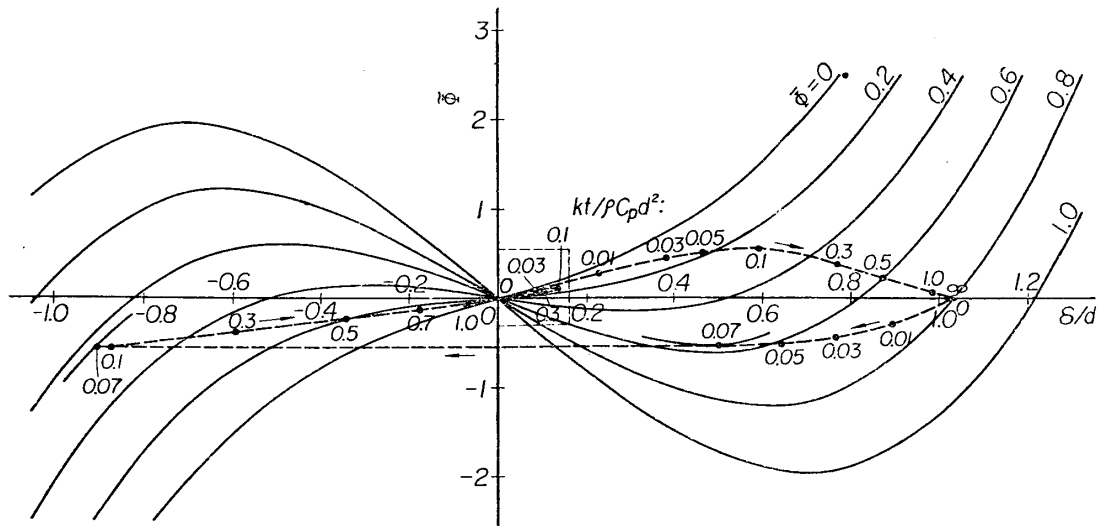


Fig. 10-2. Variation of the deflection at the centre of the circular plate with the time which is subjected to rapid heating followed by rapid cooling,  $\Phi_E=0.2$  &  $0.8, hd/k=50$ .

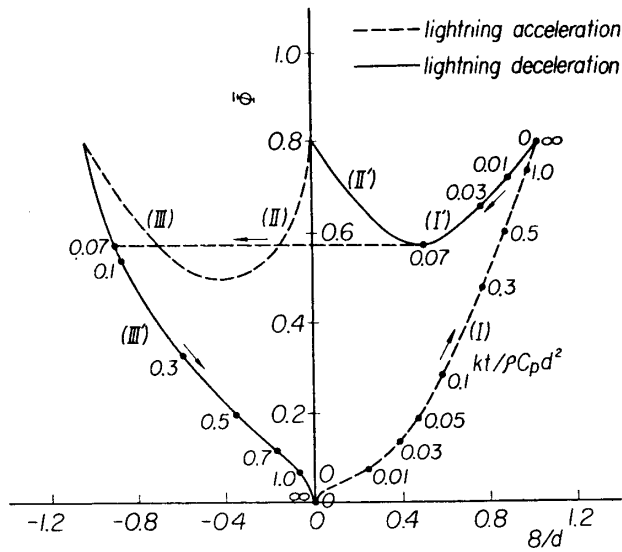


Fig. 10-3. Variation of the deflection at the centre of the circular plate with the time which is subjected to rapid heating followed by the rapid cooling,  $\Phi_E=0.8$ ,  $hd/k=50$ .

によって立証されている [7]. たとえば, Fig. 10-3 において, (I) および (III) 領域は安定平衡, (II) 領域は不安定平衡状態にあり, エネルギー水準の考察によって図中矢印の方向に進むことが示されているので, 本論文では特にこのような検討は行なわなかった.

## 5. あとがき

本論文においては, 前報 [1] の補足的意味で, 加熱と垂直圧力を受ける円板の変形について一般的に解析した. 前報の結果は, 当然, 本報の結果の一部として含まれることになる.

前報の結果に加うるに, 板厚方向温度勾配の影響は面圧の作用と等価であるので, 円形平板においても, 加熱と垂直圧力が組み合っただけの場合はいうまでもなく, 加熱後の急速冷却のみによっても, 飛越挫屈の現象が起る可能性のあることが示された.

本研究において懇切な御指導を戴いた植村益次助教授に厚く御礼申上げる.

昭和 36 年 8 月 8 日 航空力学部

## 文 献

- [1] 砂川 恵: 円板の熱変形, 東京大学航空研究所集報, 2, 5 (1961/3), 269.
- [2] Uemura, M.: Deformation and Thermal Stress of Rectangular Beams or Flat Strips Heated at one Surface, Aero. Res. Inst., Univ. of Tokyo, Report 352 (1960).
- [3] Sunakawa, M. and Uemura, M.: Deformation and Thermal Stress in a Rectangular Plate Subjected to Aerodynamic Heating (For the Case of Simply Supported Edges), Aero. Res. Inst., Univ. of Tokyo, Report 359 (1960).
- [4] 砂川 恵: 空力加熱による矩形平板の熱変形 (四辺固定の場合), 日本航空学会誌, 9 (1961), 37.

- [5] 砂川 恵：円筒殻の熱変形と熱座屈，日本航空学会宇宙科学技術シンポジウムにおいて講演，昭和36年2月25日。
- [6] たとえば  
Timoshenko, S.: “Theory of Plates and Shells”, McGraw-Hill, 1940.
- [7] 植村益次：非線型問題における弾性安定条件の検討（急速加熱・冷却による円板の飛越座屈），東京大学航空研究所構造力学輪講発表，昭和36年7月4日。