Spalart-Allmaras モデルへの標準的乱流モデリングによるアプローチ

松尾裕一（JAXA），吉澤徴（JAXA 客員）

Standard turbulence modeling approach to the Spalart-Allmaras model

by
Yuichi MATSUO, and Akira YOSHIZAWA

ABSTRACT

Spalart-Allmaras (S-A) model is one of the most widely used turbulence models in RANS-CFD. The S-A model is of one-equation model type, where the eddy viscosity transport equation is solved. However, the S-A model is constructed by including his intuition, analogy and empricism. This makes it difficult to understand the model formalism and to modify the model so as to be applied to the practical problems. In this paper, the S-A model is analysed from the standard and conventional turbulence modeling approach, and the features of the model are clarified.

1. はじめに

Spalart-Allmaras モデル（S-A モデル）[1]は，航空宇宙の RANS-CFD 解析において，Baldwin-Lomax モデル（B-L モデル）[2]や Menter のモデル（SST モデル）[3]と並んで最もしばしば用いられる乱流モデルである．S-A モデルは 1 方程式モデルの範疇に属するが，方程式の各項や関数の形に特徴があり，一般的な乱流モデルの知識からは，各々の項や関数の持つ意味や挙動を連想するのが難しい．これは，Spalart 氏のオリジナル論文[1]の中で述べられているように，当該モデルが直感やアナロジー，経験則に基づいて構築されたという事情による．しかし，そのことは，S-A モデルのフォーマリズムの直感的理解や実問題への適用に際しての見通しの良い改善や改良を，ある意味難しくしているのも事実であろう．（ただし，S-A モデルが既存の乱流モデリングの基本にある枠組み（例えば，乱れの変化は乱れの移流，生成，消散，散逸に依存するという考え方）から逸脱しているわけではないことに注意.）また，これだけ各所で使われ，成功を収めている乱流モデルでありながら，基本的な特徴や特性についてあまり知られていないという印象が筆者らにはある[4].

そこで本稿では，標準的乱流モデリングのアプローチから，S-A モデルの成り立ちや特徴について考察・評価し，S-A モデルを使っている実務家の参考としたい. S-A モデル自体は，文献[1]によれば，ロバスト性，境界層厚さ等の大局的な量を使わない，非構造格子にも使える，といった数値的な配慮もされて作られているようではあるが，本稿では S-A モデルのあくまで物理的な側面だけを対象にする．

2. 質量加重レイノルズ平均乱流モデリング

慣例的なレイノルズ平均モデリングにおいては，平均操作を上付きバーで表わし，量 f を

$$f = \overline{f} + f' \tag{2.1}$$

のように，平均とそのまわりの揺らぎに分解する．これに対して，航空宇宙で扱う圧縮性流れ，すなわち密度変化を伴う流れにおいては，単位体積当たりの運動量に準拠した平均，すなわち質量加重レイノルズ平均と揺らぎ

$$\hat{f} = \langle f \rangle_M = \frac{\overline{\rho f}}{\overline{\rho}}, \qquad f'' = f - \hat{f} \tag{2.2}$$

を導入する．運動量を用いて平均を定義することの必然性は，異なる質量の粒子からなる多粒子系を考えるとき，その平均速度は全運動量を全質量で除して求められることから容易に理解できる．

密度変動を伴う流れに質量加重平均を適用した基礎式は

$$\frac{\partial \overline{\rho}}{\partial t} + \nabla \cdot (\overline{\rho}\hat{\mathbf{u}}) = 0 \tag{2.3}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\overline{\rho}\hat{u}_i + \frac{\partial}{\partial x_j}\overline{\rho}\hat{u}_i\hat{u}_j + \frac{\partial}{\partial x_j}\overline{\rho}\hat{R}_{ij} = -\frac{\partial \overline{p}}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j}\overline{\mu[s_{ij}]_{trl}} \tag{2.4}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\overline{\rho}\hat{e} + \nabla \cdot (\overline{\rho}\hat{e}\hat{\mathbf{u}}) + \nabla \cdot \hat{\mathbf{H}}_e = -\overline{p\nabla \cdot \mathbf{u}} + \nabla \cdot \left(\overline{\kappa \nabla \theta}\right) \tag{2.5}$$

と表される．上式で，レイノルズ応力 $\hat{R}_{ij}$ と乱流内部エネルギーフラックス $\hat{\mathbf{H}}_e$ は，それぞれ

$$\hat{R}_{ij} = \langle u_i'' u_j'' \rangle_M \tag{2.6}$$

$$\hat{\mathbf{H}}_e = \langle e'' \mathbf{u}'' \rangle_M \tag{2.7}$$

で定義される．ここで，ρ ：密度，$\mathbf{u} = (u_1,\ u_2,\ u_3)^t$ ：速度，e ：内部エネルギー，p ：圧力，μ ：分子粘性率，s_{ij} ：速度歪み，等は通常の定義による．また，

$$s_{ij} = \frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \tag{2.8}$$

であり，トレイス零部分は

$$[s_{ij}]_{trl} \equiv s_{ij} - \frac{1}{3}s_{\ell\ell}\delta_{ij} = \frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{2}{3}\nabla \cdot \mathbf{u}\delta_{ij} \tag{2.9}$$

で与えられる．

式（2.6）と（2.7）に代表されるように，質量加重平均は密度変動流れの平均方程式を著しく簡素化する．ただし，この簡素化の裏面として，分子粘性項［式（2.4）の右辺第 2 項］，膨張･圧縮に関わる仕事率［式（2.5）の右辺第 1 項］，分子温度拡散項［式（2.5）の右辺第 2 項］に見られるように，質量加重平均量だけでは表現できない項が残ることに注意する．

密度変動流れのレイノルズ平均モデルは，密度一定流れのモデルの拡張形として提案されることが多い．実際，S-A モデルも，密度変化を考慮することなく構成されており，その後，慣例的レイノルズ平均量を質量加重平均量に読み替えて，式（2.3）-（2.5）などに適用されている．

3. Spalart-Allmaras（S-A）モデル

Spalart-Allmaras (S-A) モデル[1]は，乱流粘性率ν_Tの輸送方程式を直接扱う 1 方程式モデルであり，レイノルズ応力などの 2 次統計量の輸送方程式を直接扱わない「陽的代数モデル」に分類される．S-A モデルは，提案されて以来，様々な変更や修正が加えられているが，ここでは原型モデル（遷移項のない SA-noft2 版）について考える．S-A モデルは，Nee-Kovaszney の乱流粘性率 1 方程式モデル[5]が元になっており，Secundov らのモデル[6]や Baldwin-Barth モデル[7]の影響を受けている．Baldwin-Barth モデルは，$K-\varepsilon$ モデルが元になっているが，S-A モデルは特に元になるものはなく新規に開発されている．

S-A モデルでは，乱流粘性率 ν_T を

$$\nu_T = \hat{\nu} f_V \tag{3.1}$$

と書き， f_V を

$$f_V = \frac{\chi^3}{\chi^3 + C_V^3},\quad \chi = \frac{\hat{\nu}}{\nu} \tag{3.2}$$

で定義する．分子粘性効果の弱い領域では， $\hat{\nu} \gg \nu$より $f_V \cong 1$ となるため，$\hat{\nu}$ はν_T の高レイノルズ数部分（分子粘性の影響を直接受けない部分）と言える．

高レイノルズ数部分 $\hat{\nu}$ は，以下の輸送方程式

$$\frac{D\hat{\nu}}{Dt} = C_P \hat{\nu}\hat{S} - C_{\varepsilon 1} f_\varepsilon \left(\frac{\hat{\nu}}{d}\right)^2 + \frac{1}{\sigma}\left(\nabla\cdot\left((\nu+\hat{\nu})\nabla\hat{\nu}\right) + C_D(\nabla\hat{\nu})^2\right) \tag{3.3}$$

で記述される．上式で， d は計算点から壁面までの距離であり， $\hat{S}$ と f_ε は

$$\hat{S} = \frac{1}{\sqrt{2}}|\overline{\omega}| + \frac{\nu}{(\kappa d)^2} f_P \tag{3.4}$$

$$f_\varepsilon = g\left(\frac{1 + C_{\varepsilon 2}^6}{g^6 + C_{\varepsilon 2}^6}\right)^{1/6} \tag{3.5}$$

で与えられる．式（4.4）と（4.5）で，f_P と g は

$$f_P = 1 - \frac{\chi}{1 + f_V \chi} = \frac{\chi^3 - C_V^3\chi + C_V^3}{\chi^4 + \chi^3 + C_V^3} \tag{3.6}$$

$$g = r + C_{\varepsilon 3}(r^6 - r),\qquad r = \frac{\hat{\nu}}{\hat{S}(\kappa d)^2} \tag{3.7}$$

で定義される．モデル定数は

$$\sigma = \frac{2}{3},\ C_V = 7.1,\ \kappa = 0.41,\ C_P = 0.13,\ C_D = 0.62,$$
$$C_{\varepsilon 1} = \frac{C_P}{\kappa^2} + \frac{1 + C_D}{\sigma},\ C_{\varepsilon 2} = 2,\ C_{\varepsilon 3} = 0.3 \tag{3.8}$$

4. レイノルズ平均モデリングにおける基本概念

4.1. 乱流中の特性時間スケール

密度一定流れの平均量方程式中の R_{ij} を

$$R_{ij} = \frac{1}{3}R_{\ell\ell}\delta_{ij} + B_{ij}$$
$$B_{ij} = R_{ij} - \frac{1}{3}R_{\ell\ell}\delta_{ij} = R_{ij} - \frac{2}{3}K\delta_{ij},\ K = \left\langle \frac{1}{2}\mathbf{u}'^2 \right\rangle \tag{4.1}$$

と書く．トレイス零部分 B_{ij} を

$$B_{ij} = L_{ij} + N_{ij} \tag{4.2}$$

と分解し，第 1 項の L_{ij} に対して，乱流粘性率 ν_T と平均速度歪み $\overline{s}_{ij}$ を用いて

$$L_{ij} = -\nu_T \overline{s}_{ij},\quad \overline{s}_{ij} = \frac{\partial \overline{u}_j}{\partial x_i} + \frac{\partial \overline{u}_i}{\partial x_j} \tag{4.3}$$

と乱流粘性表現を行う．第 2 項の N_{ij} は，同表現からのずれを与える様々な効果から成る．

乱流粘性率 ν_T の代表例として，乱流運動エネルギー K と散逸率 ε を用いた

$$\nu_T \propto \frac{K^2}{\varepsilon} \tag{4.4}$$

がある．この表現を単なる次元解析ではなく，乱流の時間スケールの視点で見るために

$$\nu_T \propto K\tau \tag{4.5}$$

と書き直す．このとき， τ は

$$\tau = \tau_E \equiv \frac{K}{\varepsilon} \tag{4.6}$$

となり，量 K の運動エネルギーが，単位時間当たり ε の割合で粘性作用によって失われる際に要する時間を意味する．揺らぎを波数分解して考えると，K は一般に低波数領域に，ε は逆に高波数領域にその起源をもつ．これより，τ_E はエネルギーカスケードによって，運動エネルギーが熱として失われる機構を特徴づける時間スケールと言える．

乱流中の時間スケールと言うと τ_E を特定しがちであるが，これは揺らぎ部分に密接に関係した量である．これに加えて，乱流の平均量部分と関連するものとして，平均歪み及び渦度時間スケール

$$\tau_S = \frac{1}{|\overline{s}|},\quad \tau_V = \frac{1}{|\overline{\omega}|}$$
$$|\overline{s}| = \sqrt{\overline{s}_{ij}\overline{s}_{ij}} = \sqrt{\overline{s}_{ij}^2},\ |\overline{\omega}| = \sqrt{\overline{\omega}_{ij}\overline{\omega}_{ij}},\quad \overline{\omega}_{ij} = \frac{\partial \overline{u}_j}{\partial x_i} - \frac{\partial \overline{u}_i}{\partial x_j} \tag{4.7}$$

を挙げることができる．テンソル量 s_{ij} と ω_{ij} は，「歪み」と「回転」という幾何学的な描像で通常捉えられるが，レイノルズ平均モデリングでは，歪みと回転に伴う時間の逆次元量という視点が重要となる．

式（4.5）の乱流粘性率中の特性時間 τ を，式（4.6）の τ_E に限定せず，広く

$$\tau = \frac{\tau_E}{\Gamma(\tau_E, \tau_S, \tau_V, \tau_X)} \tag{4.8}$$

と書くとする．上式で，Γ は τ_E などから構成される無次元汎関数であり，その中の τ_X は，式（4.6），（4.7）と異なる未知の時間スケールである．

特性時間 τ として τ_E を用いる代表的モデルとして，標準 K-εモデルがあるが，各種流れへの適用能力を向上させるために式（4.8）の形式が工夫されており，その多くは

$$\begin{aligned}\Gamma &= 1 + C_S\left(\frac{\tau_E}{\tau_S}\right)^2 + C_V\left(\frac{\tau_E}{\tau_V}\right)^2 + C_{SS}\left(\frac{\tau_E}{\tau_S}\right)^4 \\ &\quad + C_{VV}\left(\frac{\tau_E}{\tau_V}\right)^4 + C_{SV}\left(\frac{\tau_E}{\tau_S}\right)^2\left(\frac{\tau_E}{\tau_V}\right)^2 \\ &= 1 + C_S\left(\frac{K}{\varepsilon}|\overline{s}|\right)^2 + C_V\left(\frac{K}{\varepsilon}|\overline{\omega}|\right)^2 + C_{SS}\left(\frac{K}{\varepsilon}|\overline{s}|\right)^4 \\ &\quad + C_{VV}\left(\frac{K}{\varepsilon}|\overline{\omega}|\right)^4 + C_{SV}\left(\frac{K}{\varepsilon}|\overline{s}|\right)^2\left(\frac{K}{\varepsilon}|\overline{\omega}|\right)^2\end{aligned} \tag{4.9}$$

の形に書くことができる．ここで，奇数次項が含まれないのは関数形を解析的にするためである．式（4.9）を構成するときの方法論的差異が，定数 C_S などの差異となる[8].

一方，乱流を特徴づける長さスケール ℓ を用いると，ℓ と K を用いて時間スケールは

$$\tau = \frac{\ell}{\sqrt{K}} \tag{4.10}$$

と書けるので，式（3.5）は

$$\nu_T \propto \sqrt{K}\ell \tag{4.11}$$

とも表わすことができる．長さスケールに関しても，時間スケールと同様，さまざまな選択がある．しかし，時間スケールは，式（4.6），（4.7），（4.8）のように，乱流量あるいは平均流から比較的容易に構成できるのに対し，長さスケールは，（固体壁からの距離などを乱流粘性率に直接組み入れるときは極めて有用な概念ではあるものの，）異方性，すなわち方向依存性があり，その定義は一義的ではない．よって，以下では，主に時間スケールを基本概念として採用する．

4.2. 乱流量方程式

式（4.6）の時間スケールを評価するには，乱流量に対する方程式が必要となる．もっとも基本的な方程式は，R_{ij} に対するものであり

$$\frac{DR_{ij}}{Dt} = P_{ij} + \Pi_{ij} - \varepsilon_{ij} + D_{ij} \tag{4.12}$$

と書かれる．上式で，右辺各項は，生成項，再配分（圧力・歪み相関）項，消散（散逸）項，拡散項であり，それぞれ

$$P_{ij} = -R_{jk}\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_k} - R_{ik}\frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_k} \tag{4.13}$$

$$\Pi_{ij} = \left\langle \frac{p'}{\rho} s'_{ij} \right\rangle, \qquad s'_{ij} = \frac{\partial u'_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u'_i}{\partial x_j} \tag{4.14}$$

$$\varepsilon_{ij} = 2\nu \left\langle \frac{\partial u'_i}{\partial x_\ell}\frac{\partial u'_j}{\partial x_\ell} \right\rangle \tag{4.15}$$

$$D_{ij} = \frac{\partial}{\partial x_\ell}\left(-\left(\langle u'_i u'_j u'_\ell \rangle + \left\langle \frac{p'}{\rho} u'_j \right\rangle \delta_{i\ell} + \left\langle \frac{p'}{\rho} u'_i \right\rangle \delta_{j\ell} \right) \right) + \nu \nabla^2 R_{ij} \tag{4.16}$$

で定義される．式（4.12）から，K と R_{ij} のトレイス零部分の方程式は，それぞれ

$$\frac{DK}{Dt} = P - \varepsilon + D \tag{4.17}$$

$$\frac{DB_{ij}}{Dt} = [P_{ij}]_{trl} + \Pi_{ij} - [\varepsilon_{ij}]_{trl} + [D_{ij}]_{trl} \tag{4.18}$$

となる．式（4.17）の右辺各項は

$$P = -R_{ij}\frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \tag{4.19}$$

$$\varepsilon = \nu \left\langle \left(\frac{\partial u'_j}{\partial x_i} \right)^2 \right\rangle \tag{4.20}$$

$$D = \nabla \cdot \left(-\left\langle \left(\frac{1}{2}\mathbf{u}'^2 + \frac{p'}{\rho} \right)\mathbf{u}' \right\rangle \right) + \nu \nabla^2 K \tag{4.21}$$

5. S-A モデルの標準的乱流モデリングからの考察

5.1. レイノルズ応力方程式と乱流粘性表現の輸送方程式

乱流粘性率は，直接測定できる量ではなく，その意味では通常の物理量とは言えない．このような量に対する輸送方程式の導出方法としては，以下の 2 通りが考えられる：

a) 式（4.4）のような代数モデル表現をもとに，その構成要素である K などの輸送方程式を用いて，乱流粘性率方程式を求める．
b) 式（4.12）ないしレイノルズ応力のトレイス零部分の方程式（4.18）から乱流粘性率表現，すなわち式（4.3）の L_{ij} の方程式を構成し，これから乱流粘性率方程式を導出する．

後者の方法は，乱流粘性率に対する代数的な表現に直接依存しないため，輸送方程式を導出するという目的に合っていると考えられる．本稿では，文献[9]にもとづくこの定式化を採用し，S-A モデルに関する議論の出発点とする．

5.1.1. レイノルズ応力方程式のモデル化

レイノルズ応力方程式 (4.12) においては，式 (4.14) の Π_{ij}（再配分項），式（4.15）の ε_{ij}（消散項），式（4.16）の D_{ij}（拡散項）のモデル化が必要となる．消散項 ε_{ij} の対角成分は，乱流強度の粘性散逸と関係するが，非対角成分は非等方性の消散ないし崩壊という性質が強いため，Π_{ij} と合わせて

$$\begin{aligned}\Pi_{ij} - [\varepsilon_{ij}]_{trl} = &-C_{\Pi 1}\frac{1}{\tau}B_{ij} + C_{\Pi 2}K\bar{s}_{ij} \\ &+C_{\Pi 3}\left[B_{i\ell}\bar{s}_{\ell j} + B_{j\ell}\bar{s}_{\ell i}\right]_D \\ &+C_{\Pi 4}\left(B_{i\ell}\bar{\omega}_{\ell j} + B_{j\ell}\bar{\omega}_{\ell i}\right)\end{aligned} \tag{5.1}$$

とモデル化する（$C_{\Pi 1}$ などは，モデル定数）．式 (5.1) において，特性時間 τ として，式 (4.6) すなわち K/ε を採用すると，もっとも標準的なモデルを得る．議論を一般化するため，本稿ではこの選択を行わない．実際，陽的代数モデリングを考察する際，τ の選択にさまざまな余地を残すことが重要となる．

残る拡散項 D_{ij} のモデル化に関しては，もっとも簡潔なモデル

$$[D_{ij}]_{trl} = \frac{\partial}{\partial x_\ell}\left(\nu_D \frac{\partial B_{ij}}{\partial x_\ell} \right) + \nu \nabla^2 B_{ij} \tag{5.2}$$

を採用する．ここで，ν_D は拡散係数であり，後にこれを特定する．式（5.1）と（5.2）を B_{ij} に対する式（4.18）に代入し，さらに B_{ij} の分解（4.2）を用いると以下を得る．

$$\begin{aligned}\frac{DL_{ij}}{Dt} + \frac{DN_{ij}}{Dt} = &-\left(\frac{2}{3} - C_{\Pi 2}\right)K\bar{s}_{ij} \\ &-C_{\Pi 1}\frac{1}{\tau}L_{ij} + \nabla\cdot\left((\nu + \nu_D)\nabla L_{ij}\right)\frac{\nu_T}{\sigma_\nu} \\ &-C_{\Pi 1}\frac{1}{\tau}N_{ij} + \nabla\cdot\left((\nu + \nu_D)\nabla N_{ij}\right) \\ &-\left(\frac{1}{2} - C_{\Pi 3}\right)\left[L_{i\ell}\bar{s}_{\ell j} + L_{j\ell}\bar{s}_{\ell i}\right]_{trl} \\ &-\left(\frac{1}{2} - C_{\Pi 4}\right)\left(L_{i\ell}\bar{\omega}_{\ell j} + L_{j\ell}\bar{\omega}_{\ell i}\right) \\ &-\left(\frac{1}{2} - C_{\Pi 3}\right)\left[N_{i\ell}\bar{s}_{\ell j} + N_{j\ell}\bar{s}_{\ell i}\right]_{trl} \\ &-\left(\frac{1}{2} - C_{\Pi 4}\right)\left(N_{i\ell}\bar{\omega}_{\ell j} + N_{j\ell}\bar{\omega}_{\ell i}\right)\end{aligned} \tag{5.3}$$

5.1.2. 乱流粘性率輸送方程式の導出

式（5.3）を，L_{ij} とN_{ij} のそれぞれに対する方程式に分解する．L_{ij} は，レイノルズ応力の乱流粘性表現部分であり，平均速度歪み $\bar{s}_{ij}$ と直結するため，式（5.3）において

$$\frac{DL_{ij}}{Dt} = -\left(\frac{2}{3} - C_{\Pi 2}\right)K\bar{s}_{ij} - C_{\Pi 1}\frac{1}{\tau}L_{ij} + \nabla\cdot\left((\nu + \nu_D)\nabla L_{ij}\right) \tag{5.4}$$

とする．

式（4.3）の第 1 式（乱流粘性表現）を式（5.4）に代入し，拡散項中の ν_D を

$$\nu_D = \frac{\nu_T}{\sigma_\nu} \tag{5.5}$$

とモデル化する（σ_ν はモデル定数）．その後，$\bar{s}_{ij}$ との内積を取ると，乱流粘性率方程式

$$\frac{D\nu_T}{Dt} = P_\nu - \varepsilon_\nu + D_\nu + A_\nu \tag{5.6}$$

を得る．上式で，右辺各項は

$$P_\nu = C_{\nu P}K \tag{5.7}$$

$$\varepsilon_\nu = C_{\nu\varepsilon}\frac{1}{\tau}\nu_T \tag{5.8}$$

$$D_\nu = \frac{\partial}{\partial x_\ell}\left(\left(\nu + \frac{\nu_T}{\sigma_\nu}\right)\frac{\partial\nu_T}{\partial x_\ell}\right) + \frac{1}{4\sigma_\nu}\frac{\partial\nu_T^2}{\partial x_\ell}\frac{1}{|\bar{s}|^2}\frac{\partial|\bar{s}|^2}{\partial x_\ell} + \left(\nu + \frac{\nu_T}{\sigma_\nu}\right)\left(\frac{\partial\nu_T}{\partial x_\ell}\frac{1}{|\bar{s}|^2}\frac{\partial|\bar{s}|^2}{\partial x_\ell} + \nu_T\frac{1}{|\bar{s}|^2}\bar{s}_{ij}\nabla^2\bar{s}_{ij}\right) \tag{5.9}$$

$$A_\nu = -\frac{1}{2|\bar{s}|^2}\frac{D|\bar{s}|^2}{Dt}\nu_T \tag{5.10}$$

で定義される．定数部分は

$$C_{\nu P} = \frac{2}{3} - C_{\Pi 2}\left(= \frac{4}{15}\right), \qquad C_{\nu\varepsilon} = C_{\Pi 1} \tag{5.11}$$

となる．

式(5.7) - (5.9)の各項は, 乱流運動エネルギー方程式(4.17)にならって，乱流粘性率の生成項，消散項，拡散効果を含む項（拡散的な項）と呼ぶことができるであろう．式（5.7）の生成項は，ν_T の発生が乱れの強度を特徴づける乱流運動エネルギー K と密接に関係していることを示している．ν_Tの代数表現（4.5）は，式（5.6）の右辺第 1 項と 2 項から導出できる．この事実から，乱流粘性率方程式を用いるときは，K 方程式をさらに導入するか，あるいはK を的確にモデル化する必要がある．式（5.10）は，流れ方向の非一様性と関わり，いわゆる曲率ないし流線効果を意味している．流れが物体に衝突する際などこの効果が重要となると予想される．

5.2. S-A モデル表現の物理的意味の考察

§5.1.の議論をもとに, §3.のモデル方程式 (3.3) を考察する．式（3.2）における χ は，基準速度 U_R と基準長 L_R を用いると

$$\chi = \frac{Re}{Re_T} \quad \left(Re = \frac{U_R L_R}{\nu}, Re_T = \frac{U_R L_R}{\nu_T}\right) \tag{5.12}$$

と書け，レイノルズ数と乱流レイノルズ数の比となる．高レイノルズ数乱流においては，壁面近傍を除くと，一般に $\chi \gg 1$となる. §5.1.の議論おいては，ν の効果は直接取り入れられていないため，$\hat{\nu}$ と§5.1.の ν_T に対して

$$\nu_T \Leftrightarrow \hat{\nu} \tag{5.13}$$

の対応関係を付けることができる．

以下の議論では，時間スケールが重要な概念となり，その主たるものは

$$\tau_V\left(= \frac{1}{|\bar{\omega}|}\right), \qquad \tau_\nu = \frac{d^2}{\nu}, \qquad \tau_{\hat{\nu}} = \frac{d^2}{\hat{\nu}} \tag{5.14}$$

である．ここで，τ_V は式（4.7）の渦度時間スケールであり，後 2 者は距離 d だけ分子粘性ないし乱流粘性により拡散するのに要する時間である．

5.2.1. 生成項

式（3.3）の右辺第 1 項，すなわち生成項は，式（5.7）に対応する．前者において

$$\chi \gg 1: \quad f_V \to 1, \quad f_P \to 0, \quad \hat{S} \to \sqrt{\frac{1}{2}\bar{\omega}_{ij}^2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{\tau_V} \tag{5.15}$$

$$\chi \ll 1: \quad f_V = \frac{1}{C_V^3}\left(\frac{\hat{\nu}}{\nu}\right)^3, \quad f_P \to 1, \quad \hat{S} \to \frac{1}{\tau_{V\nu}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{\tau_V} + \frac{1}{\kappa^2}\frac{1}{\tau_\nu} \tag{5.16}$$

を得る．

式(5.15), すなわち分子粘性効果が弱い領域では, 式(5.7)は,

$$C_{\nu P}K \to \frac{C_P}{\sqrt{2}}\frac{\hat{\nu}}{\tau_V} \tag{5.17}$$

とモデル化されたことに対応する．S-A モデルでは，$\hat{\nu}$ が唯一の乱流量であるため，他の物理量として，渦度に注目して τ_V を採用している. 次元解析的には, τ_S などの時間次元量も可能である. 混合距離の視点で, $|\bar{S}|$ の代わりに $|\bar{\omega}|$ を採用すると

$$\hat{\nu} \propto \ell^2|\bar{\omega}| = \frac{\ell^2}{\tau_V}, \qquad K \propto (\ell|\bar{\omega}|)^2 = \left(\frac{\ell}{\tau_V}\right)^2 \tag{5.18}$$

となるので，これより

$$K \propto \frac{\hat{\nu}}{\tau_V} \tag{5.19}$$

を得る．式（5.19）は，式（5.18）のもとでの生成項であり，混合距離近似に類似した K の評価と言える．

5.2.2. 消散項

式（3.3）の右辺第 2 項の消散項を考える．式（5.8）とは

$$C_{\Pi 1}\frac{1}{\tau}\nu_T \;\Leftrightarrow\; C_{\varepsilon 1}f_\varepsilon\left(\frac{\hat{\nu}}{d}\right)^2 = C_{\varepsilon 1}\frac{\hat{\nu}}{\tau_{\hat{\nu}}/f_\varepsilon} \tag{5.20}$$

の対応関係にある．§5.1.の段階では，特性時間 τ は特定されていなかったが, S-A モデルでは，乱流拡散時間 $\tau_{\hat{\nu}}$ に直結した$\tau_{\hat{\nu}}/f_\varepsilon$ が消散に関わる時間スケールとなっている．

式（3.5）の f_ε の挙動を考える．まず，式（3.7）の r を

$$r = \frac{1}{\kappa^2}\frac{1/\hat{S}}{\tau_{\hat{\nu}}} \tag{5.21}$$

と書く．式（5.15）より

$$\chi \gg 1: \; r \to \frac{\sqrt{2}}{\kappa^2}\frac{\tau_V}{\tau_{\hat{\nu}}} \tag{5.22}$$

を得る．これより，$\chi \gg 1$ の領域では，2 つの状況

$\chi \gg 1,\ \tau_V \gg \tau_{\hat{\nu}}$：

$$r \gg 1, \quad g \to O(r^6), \quad f_\varepsilon \to 1 \tag{5.23}$$
$$C_{\varepsilon 1} f_\varepsilon \left(\frac{\hat{\nu}}{d}\right)^2 \to C_{\varepsilon 1} \frac{\hat{\nu}}{\tau_{\hat{\nu}}}$$

$\chi \gg 1,\ \tau_V \ll \tau_{\hat{\nu}}$:

$$r \to 0, \quad g \to 0, \quad f_\varepsilon \to 0 \tag{5.24}$$
$$C_{\varepsilon 1} f_\varepsilon \left(\frac{\hat{\nu}}{d}\right)^2 \to 0$$

に分類される．

式（5.23）に該当する領域では，乱流拡散時間 $\tau_{\hat{\nu}}$ の重要性から，$\hat{\nu}$ の消散は $\tau_{\hat{\nu}}$ で支配されることは合理的である．他方，式（5.24）の場合は，分子粘性も乱流粘性も重要でないことから，該当する流れは層流と見なされ，$\hat{\nu}$ の消散項が消えることになる．

式（5.22）と逆の状況では，式（5.16）より

$$\chi \ll 1: r \to \frac{1}{\kappa^2} \frac{\tau_{V\nu}}{\tau_{\hat{\nu}}} \tag{5.25}$$

となる．ここで，$\tau_{V\nu}$ は式（5.16）の最終関係式より

$$\tau_V \gg \tau_\nu:\ \tau_{V\nu} \to \tau_1, \qquad r \to \frac{1}{\kappa^2} \frac{\tau_\nu}{\tau_{\hat{\nu}}} \tag{5.26}$$

$$\tau_V \ll \tau_\nu:\ \tau_{V\nu} \to \tau_V, \qquad r \to \frac{1}{\kappa^2} \frac{\tau_V}{\tau_{\hat{\nu}}} \tag{5.27}$$

と分類される．

式（5.25）-（5.27）を合わせると，$\chi \ll 1$領域では，4 つの状況

$\chi \ll 1,\ \tau_V \gg \tau_\nu \gg \tau_{\hat{\nu}}$：

$$r \gg 1, \quad g \to O(r^6), \quad f_\varepsilon \to 1 \tag{5.28}$$
$$C_{\varepsilon 1} f_\varepsilon \left(\frac{\hat{\nu}}{d}\right)^2 \to C_{\varepsilon 1} \frac{\hat{\nu}}{\tau_{\hat{\nu}}}$$

$\chi \ll 1,\ \tau_\nu \gg \tau_V \gg \tau_{\hat{\nu}}$：

$$r \gg 1, \quad g \to O(r^6), \quad f_\varepsilon \to 1 \tag{5.29}$$
$$C_{\varepsilon 1} f_\varepsilon \left(\frac{\hat{\nu}}{d}\right)^2 \to C_{\varepsilon 1} \frac{\hat{\nu}}{\tau_{\hat{\nu}}}$$

$\chi \ll 1,\ \tau_V \gg \tau_\nu,\ \tau_{\hat{\nu}} \gg \tau_\nu$:

$$r \to 0, \quad g \to 0, \quad f_\varepsilon \to 0 \tag{5.30}$$
$$C_{\varepsilon 1} f_\varepsilon \left(\frac{\hat{\nu}}{d}\right)^2 \to 0$$

$\chi \ll 1,\ \tau_\nu \gg \tau_V,\ \tau_{\hat{\nu}} \gg \tau_V$:

$$r \to 0, \quad g \to 0, \quad f_\varepsilon \to 0 \tag{5.31}$$
$$C_{\varepsilon 1} f_\varepsilon \left(\frac{\hat{\nu}}{d}\right)^2 \to 0$$

となる．式（5.28）では，乱流拡散時間 $\tau_{\hat{\nu}}$ がもっとも重要となり，$\hat{\nu}$ の消散もこれで支配される．式（5.29）の場合も同様に $\hat{\nu}$ の消散は $\tau_{\hat{\nu}}$ で決まる．これに対して，式 (5.31) では，粘性拡散時間 τ_ν がもっとも重要となる．このような領域は固体壁近傍と考えられ，$\hat{\nu}$ の消散は式（43.3）の第 2 項ではなく，第 3 項の第 1 部分と関係することになる．式（5.22）では，乱流拡散も分子粘性拡散も重要でないことから，層流状態が該当し，$\hat{\nu}$ の消散がないことは合理的である．以上の考察から，消散項のモデルは，定性的には物理的矛盾はないと言える．

5.2.3. 拡散項

式（3.3）の右辺第 3 項の拡散項は，式（5.9）に対応する．前者の第 1 部分が後者の第 1 部分に相当し，両者とも純粋の拡散項と言える．式（5.9）で拡散項以外の項が発生しているのは，式（5.4）中の L_{ij} に関する拡散項（右辺第 3 項）を ν_T を用いて表わしたためであり，当然と言える．

式（3.3）の右辺第 3 項の第 2 部分は，拡散項という描像からかなりかけ離れた構造をしている．本来，拡散効果は正負いずれの値も取ることができる．実際，式（5.9）の第 1 項以外もこの性質をもっている．これに対して，上記第 2 部分は非負であり，式（5.9）中には対応する項はなく，レイノルズ応力方程式の視点では説明できない．

非負の量という意味では，同部分は，第 1 項の生成項と同等であり

$$C_P \hat{\nu} \hat{S} + \frac{C_D}{\sigma} (\nabla \hat{\nu})^2 \tag{5.32}$$

とまとめる方が合理的と思われる．式（5.32）中の 2 項の差異は，$\hat{\nu}$ を生成する機構の差と考えられる．前者は平均速度歪みに，後者は発生した $\hat{\nu}$ の空間的非一様性と関連する．翼まわりの流れを念頭に置くならば，前者は $\hat{\nu}$ の発生の始まる前縁近傍の速度勾配の大きい領域で，後者は発生した $\hat{\nu}$ の空間分布に直結し，後縁に近い領域で重要と考えられる．いずれにしろ，式（5.32）の第 2 部分を拡散項と位置づけることは，標準的な乱流モデリングの観点からは議論の余地がある．

5.3. 付言

S-A モデルは，§5.1.のレイノルズ応力方程式モデリングから，その主たる骨格を解釈することができるが，両者が整合する部分とそうでない部分が混在する．その主たる理由として，S-A モデルでは，計算コストの軽減と関連して，乱流粘性率が唯一の乱流量として採用されていることがあげられる．通常のレイノルズ平均モデリングでは，少なくとも 2 つの乱流量が必要となる．これに対して，S-A モデルでは，壁面と計算点間の距離 d が重要な有次元量として導入されている．この方法は，壁面周囲を扱うには適しているが，これを乱流量の代替として用いると，モデルの普遍性の点で問題が生じることは否定できないであろう．

式（3.8）の定数中で $C_{\varepsilon 1}$ に関わる第 6 式は，対数速度則から得られる式 $\nu_T = \kappa u_\tau y$を，分子粘性の重要でない領域で用いることによって得られる．式（3.5）-（3.7）は，壁面近傍の粘性効果の強い領域から離れた領域への漸近挙動と密接に関係している．これらの表現を§5.1.の視点で説明することは難しく，様々な流れへの適用を通して得られた経験式と考えるのが適当と考えられる．

6. S-A モデルの特性評価

以下では，圧力勾配の無い平板境界層の RANS 計算結果を元に S-A モデルの特性について考える．格子や計算条件等は文献[4]に合わせている．

6.1. 基本的特性

図 1 は，平板境界層の局所摩擦係数を B-L モデル[2]，S-A モデル[1]，SST モデル[3]で相互比較したものである．文献[4]から取った計算参考値と Wieghardt[10]の実験値も同時にプロットした．どのモデルの結果も互いに良い一致を示し，参考値・実験値とも極めて良く一致している．

図 2 は，$Re_x = 5 \times 10^6$ の位置における速度プロファイル U/U_∞，乱流粘性率分布 ν_Tをモデル間で比較したものである．図 2(a)は縦軸に境界層厚さで正規化した壁距離を取ったもの，図 2(b)は横軸に壁座標を取ったものである．実験値[10]

もプロットした．

図2(a)では，内層の速度分布はほぼ完全に一致しているが，外縁の分布にわずかな相違が見られる．図2(b)では，バッファー領域に軽微な差が見られるものの，対数領域では対数速度分布 $u^+ = (1/\kappa)\log y^+ + A$（ただし，$\kappa = 0.41, \mathrm{A} = 5.0$）が良く再現されていのがわかる．（対数表示では，図 2(a)の外縁の差は小さい．）

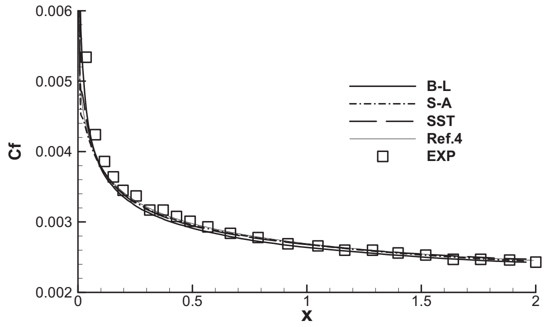
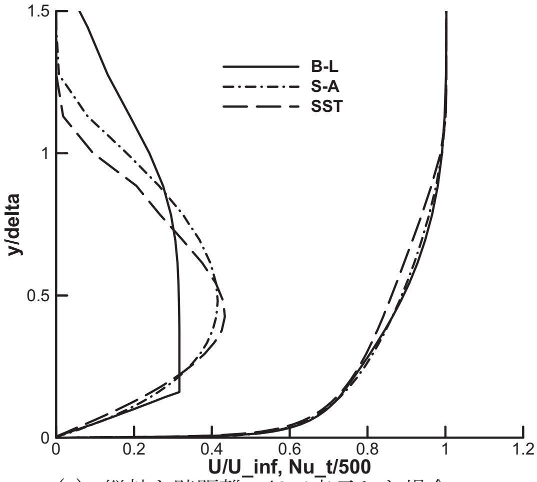
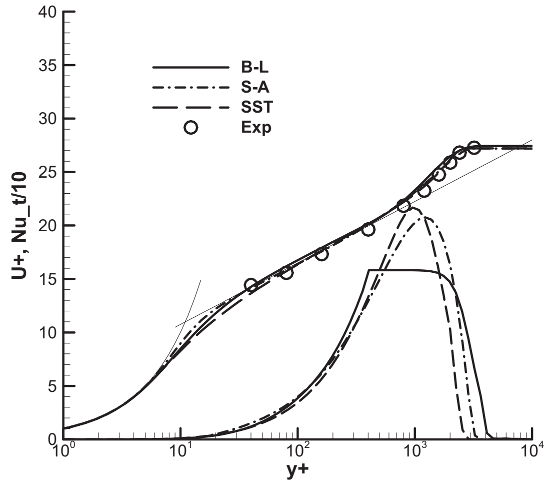


図1　平板に沿った壁面摩擦係数の相互比較



(a)　縦軸を壁距離 y/δで表示した場合

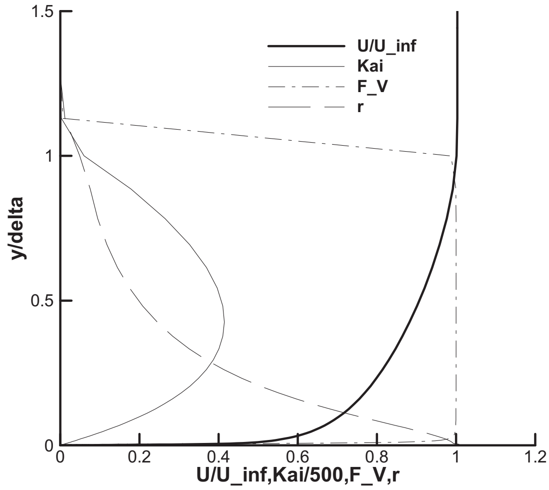


(b)　横軸を壁座標 $y^+(=u_\tau y/\nu)$で表示した場合

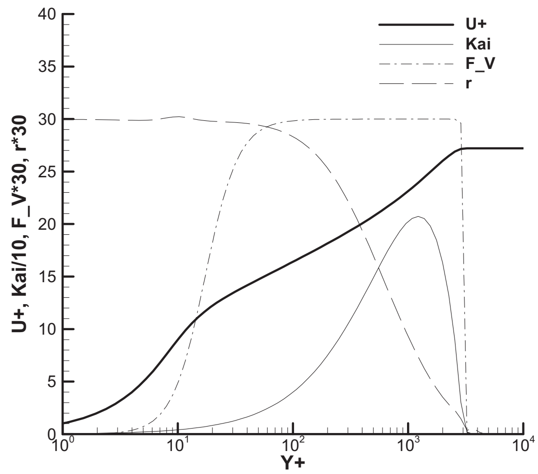
図2　平板境界層のプロファイルの相互比較（$Re_x = 5 \times 10^6$）

6.2. 関数の挙動など

図3は，平板境界層における S-A モデルの主な関数の挙動をプロットしたものである．$Re_x = 5 \times 10^6$ の位置における速度プロファイルU/U_∞，関数 χ［式（4.2)］及び関数 f_V［式（4.2)］，関数 r［式（4.7)］を，それぞれ境界層内全体 3(a)と壁近傍 3(b)で示した．関数 F_Vは，対数領域で 1 の値を取り，壁面では 0 に漸近している．この関数は，壁面によるブロッキング効果を与えるものであるが，良く知られているように S-A モデルでは $\nu_t = O(y^4)$ であり，解析的条件 $\nu_t = O(y^3)$ を満たしていない．一方，関数 r は，壁で 1，境界層外縁で 0 に漸近するような関数である．関数 f_ε［式（4.5)］は一見複雑そうに見えるが，$r \to f_\varepsilon$ への対応は文献[1]の Figure 3 に与えられている．



(a)　境界層内における関数の挙動



(b)　壁近傍における関数の挙動

図3　平板境界層における関数挙動（$Re_x = 5 \times 10^6$）

表1　S-A モデルと 3 方程式モデルの各項係数の比較

	生産項	消散項	拡散項
S-A	$C_P = 0.1355$	$C_{\varepsilon 1} = 3.238$	$\sigma = 0.667$
3 方程式	$C_{\nu P} = 0.267$	$C_{\nu\varepsilon} = 3.5$	$\sigma_\nu = 3.03$

6.3.　定数系について

S-A モデルは，§5.の考察により高レイノルズ数領域では

$$\frac{D\hat{\nu}}{Dt} = C_P\hat{\nu}\hat{S} - C_{\varepsilon 1}\frac{\hat{\nu}}{\tau_{\hat{\nu}}} + \frac{1}{\sigma}\left(\nabla\cdot(\hat{\nu}\nabla\hat{\nu}) + C_D(\nabla\hat{\nu})^2\right) \qquad (6.1)$$

となる．§5.2.3 の考察に従い項を並び変えると

$$\frac{D\hat{\nu}}{Dt} = \left(C_P\hat{\nu}\hat{S} + \frac{C_D}{\sigma}(\nabla\hat{\nu})^2\right) - C_{\varepsilon 1}\frac{\hat{\nu}}{\tau_{\hat{\nu}}} + \frac{1}{\sigma}\nabla\cdot(\hat{\nu}\nabla\hat{\nu}) \qquad (6.2)$$

一方，Yoshizawa らの 3 方程式モデル[9]においては，ν_Tの輸送方程式

$$\frac{D\nu_T}{Dt} = C_{\nu P}f_\nu K - C_{\nu\varepsilon}\frac{\Gamma}{\tau_E}\nu_T + \nabla\cdot\left(\left(\nu + \frac{\nu_T}{\sigma_\nu}\right)\nabla\nu_T\right) \qquad (6.3)$$

を解く．高レイノルズ数領域では，$\nu_T \gg \nu$より

$$\frac{D\nu_T}{Dt} = C_{\nu P}K - C_{\nu\varepsilon}\frac{\nu_T}{\tau_E} + \frac{1}{\sigma_\nu}\nabla\cdot(\nu_T\nabla\nu_T) \qquad (6.4)$$

となる．式（6.2）と（6.4）から S-A モデルと 3 方程式モデルの各項の係数を比較すると表 1 となる．大きな違いは拡散項の係数であり，寄与率からすると，S-A モデルは 3 方程式モデルの 4.5 倍程度大きいことになる．

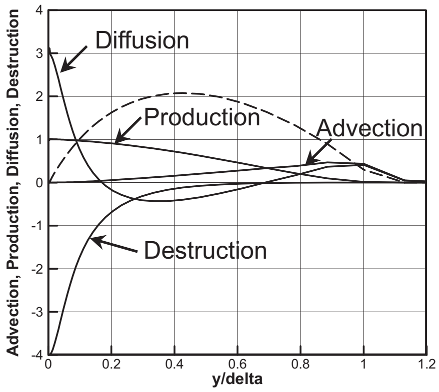
図 4 は, 境界層内における各項, すなわち対流（Advection）, 生産（Production），消滅（Destruction），拡散（Diffusion）の収支（バジェット）を比較したものである．横軸は境界層厚さで正規化した壁距離である．図 4(a)は，S-A モデルにおける収支を示し，縦軸は$C_P\tau_{wall}$を基準に数値化している．この図は，文献[1]の Figure 6 に相当する．図 4(b)は，3 方程式モデルにおける収支を示し，縦軸は$C_{\nu P}\tau_{wall}$を基準に数値化している．図 4(a)(b)における点線は，渦粘性率を 100 で割った値を示している．

図 4(a)と(b)を比較すると，S-A モデルと 3 方程式モデルの差として顕著なのは，境界層全体にわたる分布の差と生成項と拡散項の大きさの差である．（渦粘性率の分布は良く似ている.）S-A モデルでは，生成項は全体的に小さく，壁近傍で拡散項が大きくなり，拡散項と消散項がバランスしている状況なのに対して, 3 方程式モデルは生成項が全体的に大きく，拡散項は全体的に小さく，生成項と消散項が境界層全体でバランスしている．Hamba[11]は，S-A モデルの生成項は $\hat{S}$ ではなく，$\hat{S}^2$ がより適切であると提案している．

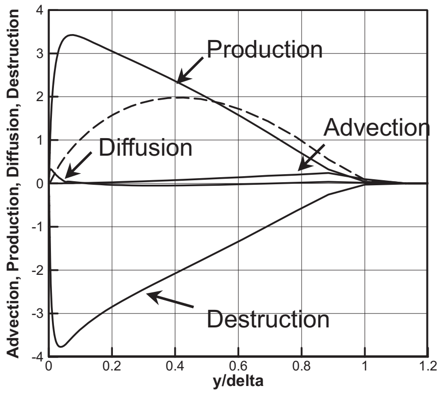
一方, 図 4(c)は, S-A モデルで生成項を$C_P\hat{\nu}\hat{S} + c_D/\sigma\,(\nabla\hat{\nu})^2$, 拡散項全体から$C_D(\nabla\hat{\nu})^2/\sigma$を引いたものの収支分布であり，図 4(d)は，3 方程式モデルで，拡散項の係数を S-A モデルと同じ ($= 2/3$)にしたときの収支分布である．図 4(c)と(d)を比べてみたとき，S-A モデルの生成項は壁近傍で大きく，拡散項は小さくなっている．また，拡散項の分布が，S-A モデルと 3 方程式モデルで全体として形が似てきているのが見てとれる．

7.　おわりに

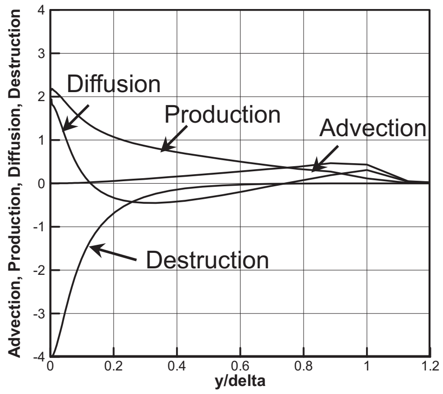
本稿では，標準的乱流モデリングのアプローチから，S-A モデルの成り立ちや特徴・特性について考察し評価した．§5. で述べたように，レイノルズ応力方程式モデリングから，S-A モデルの主な骨格を解釈することができる．ただ，両者が整合しない部分（拡散項など）も存在する．この部分の解釈，重要性についてはさらなる検討が必要である．一方，§6.における S-A モデルと Yoshizawa らの 3 方程式モデルの比較から，原型版では両者は拡散項の差が特に顕著であることがわかる．関数形については，形は複雑であるものの，主に壁の効果を表しているものと解釈される．実際に，S-A モデルの各種バリエーション[4]をみても，関数形に手を入れているものは少ない．今後の課題として，平板境界層以外のもっと実用的な流れでの検証・検討があげられる．なお，本稿における考察の詳細は，文献[12]を参照されたい．



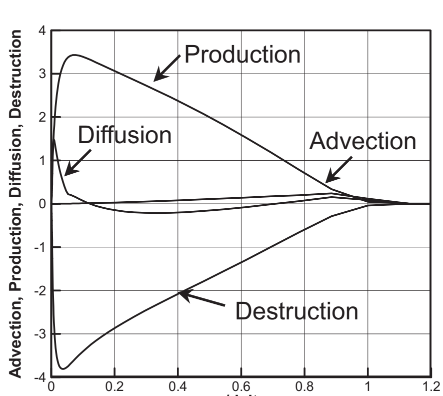
(a)　S-A モデル



(b)　3 方程式モデル



(c)　S-A モデルで生成項と拡散項を調整



(d)　3 方程式モデルで拡散係数の調整

図 4　平板境界層における各項の収支（$Re_x = 5\times10^6$）

参考文献

[1]Spalart, P. R. and Allmaras, S. R.: A one-equation turbulence model for aerodynamic flows, AIAA Paper 92-0439, 1992.

[2]Baldwin, B. and Lomax, H: Thin layer approximation and algebraic model for aerodynamic flows, AIAA Paper 78-257, 1978.

[3]Menter, F. R.: Two-equation eddy-viscosity turbulence models for engineering applications, *AIAA Journal*, Vol. 32, pp.1598-1605, 1994.

[4]Turbulence Modeling Resource, NASA Langley Research Center, http://turbmodels.larc.nasa.gov.

[5]Nee, V. W., and Kovasznay, L. S. G.: Simplae phenomenological theory of turbulent shaer flows, *Physics of Fluids*, Vol. 12, No. 3, 1969, pp.473-484.

[6]Shur, M., Strelets, M., Zaikov, L., Gulyaev, A., Kozlov, V., and Secundov, A.: Comparative Numerical Testing of One- and Two-Equation Turbulence Models for Flows with Separation and Reattachment, AIAA Paper 95-0863, 1995.

[7]Baldwin, B. S., and Barth, T. J.: A one-eauation turbulence transport model for high Reynolds number wall-bounded flows, AIAA Paper 91-0610, 1991.

[8]吉澤　徴：乱流の巨視的構造と乱流モデリング，第 3 章 乱流輸送とレイノルズ平均モデリング，ながれ（日本流体力学会誌），第 30 巻, 241-261, 2011.

[9]Yoshizawa, A., Abe, H., Matsuo, Y., Fujiwara, H., and Mizobuchi, Y.: A Reynolds-averaged turbulence modeling approach using three transport equations for the turbulent viscosity, kinetic energy, and dissipation rate, *Physics of Fluids*, Vol. 24, 075109, 2012.

[10]Wieghardt, K. and Tillmann, E.: On the turbulent friction layer for rising pressure, NACA TM 1314, 1951.

[11]Hamba, F.: Exact transport rquation for local eddy viscosity in turbulent shear flow, *Physics of Fluids*, Vol. 25, 085102, 2013.

[12]吉澤徴，松尾裕一：航空工学におけるレイノルズ平均乱流モデルの概観と時間スケールによる物理的意味の考察，宇宙航空研究開発機構研究開発報告，JAXA-RR-14-010, 2015.