

Weighted Compact Nonlinear Scheme における 中心差分および低散逸な重みの適用

神谷朋宏¹, 朝原誠², 野々村拓³
¹青学大院, ²青学大, ³宇宙機構宇宙研

Application of Central Differencing and Low Dissipation Weights in Weighted Compact Nonlinear Scheme

by
Tomohiro Kamiya, Makoto Asahara and Taku Nonomura

ABSTRACT

This paper proposes WCNSCUZ which is adapted central difference and low dissipative weights to refer concepts of WENO-CU and WENO-Z. WCNSCUZ is high resolution because interpolation of this scheme is applied central stencil constructed by upwind stencils and downwind stencil. Smoothness indicator of downwind stencil is obtained from central stencil, in order to solve discontinuity stable. Moreover, interpolation of 6th order WCNSCUZ completes enough accuracy in smooth region by using low dissipative weights. 6th order WCNSCUZ implemented robust linear difference formulation, resolution and robustness of this scheme were evaluated. These evaluations showed that WCNSCUZ achieves high resolution than 7th order classical robust WCNS and can give crisp result about discontinuity. However, present study has not enough evaluation about robustness of WCNSCUZ by variable interpolation.

1. はじめに

圧縮性流れを高次で計算する解析手法として重み付き平均を用いた Weighted essentially non-oscillatory (WENO) Scheme¹⁾が注目され、様々な解析に用いられている。近年では、デトネーションのような圧縮性反応流の解析にも使用され、詳細な波面構造の理解に寄与している。また、本研究グループでは、Weighted Compact Nonlinear Scheme (WCNS)²⁻⁴⁾を用いたデトネーションの解析を行い、デトネーション波面に見られる渦構造を高解像度で示し、流体力学的不安定性がデトネーション波面に擾乱を与えることを明らかにした。しかしながら、WENO や WCNS に代表される高次精度スキームは、風上型のステンシルから構築されているため、不連続面のみならず滑らかな領域においても散逸的であり、計算時間に見合った十分な解像度を得ることはできない。

過去の研究において、WENO には様々な改良が施されたが、その中でも本稿では解像度を向上するために施された①重みの改良と②中心差分の導入の2つに注目した。まず、重みの高次精度化を施すことで、オリジナルの WENO より低散逸なスキームを実現した。Henrick et al.⁵⁾は5次精度 WENO¹⁾が5次精度となる重みに関する条件を導き、オリジナルの重みでは臨界点において5次精度とならないことを指摘した。さらに、彼らは精度を保つための条件を達成する重みを用いた WENO-M⁶⁾を提案し、そのスキームがオリジナル WENO よりも低散逸となることを示した。しかし、WENO-M の重みは算出量が多く、計算に時間がかかる。Borges et al.⁶⁾はオリジナル WENO の smoothness indicator を用いて、簡単に高次精度な smoothness indicator を構築することで、算出量が少ないながらもオリジナル WENO より低散逸な WENO-Z を提案した。

中心差分を導入することで、オリジナル WENO より低散逸なスキームが提案されてきた。Hu et al.⁷⁾は、中心差分を構築するために風下サブステンシルを導入した。また、その風下サブステンシルの smoothness indicator をステンシル全体から計算することで、滑らかな領域では中心差分型、不連続面では風上型となる WENO-CU を提案し、最適重みへの寄与を大きくするパラメータを加えた WENO-Z の重みの定式から得られる重みを用いた。さらに、解像度評価結果からスキームが非常に低散逸であることを示した。また、Fan et al.⁸⁾は Lagrange 補間の多項式を用いて smoothness

indicator を構築することで、オリジナル WENO の smoothness indicator より簡単に smoothness indicator を定義した。

WCNS は WENO と比較し、解像度が高い^{2,4)}、さまざまな流束評価法が使用可能²⁾、曲線座標系において一様流保持が可能⁹⁾といった利点がある。これらの特徴の多くは WCNS の非線形補間が変数補間に適用可能であることに起因する。WENO と WCNS の重みの制御およびステンシルの取り扱いが同様であるため、WENO-Z で用いられる重み付き平均および WENO-CU での中心差分の取り扱いは WCNS の非線形補間に適用可能であると考えられ、WCNS の利点を保持した高解像度なスキームが構築できると予想される。この新しい WCNS は住と黒滝¹⁰⁾によって試行されているが、彼らの論文では詳細な実装方法や一般的な問題における様々なスキームの比較は行われていない。

そこで本研究では住と黒滝が利用しているように WENO-Z で用いられる重み付き平均および WENO-CU での中心差分の取り扱いを WCNS の非線形補間に適用させた新しい高次精度スキームである、WCNSCU6Z の定式化を示し、その解像度評価を行う。この際に住と黒滝の実装とは異なり、重みを計算する際に単純な WCNS 型 (Fan et al.⁸⁾と同様の smoothness indicator を用いた実装とした。また、一般的な WENO との比較を行うため、基本的に WENO 法で一般的な Lax Friedrich 流束分割法を用いて比較し、住と黒滝らが実装した WCNS で一般的な変数補間タイプに関してはその効果を見るため1ケースのみ変数補間タイプで解像度を評価した。

2. 数値解析手法

2.1. 5次精度 WCNS の非線形補間

本節では WCNS の非線形補間について流束補間ベースで、1次元の移流方程式

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} f(u) = 0 \quad (1)$$

を用いて述べる。移流速度は df/du で示され、正であるとし、 $x_j = j\Delta x$ と式(1)を空間について離散化する。ここで、 Δx は格子幅を示し、 $u(x_j) = u_j$ 、 $f(x_j) = f_j$ と表記する。5次精度 WCNS は図1で示されるように風上型ステンシル S_0 を3つの風上型サブステンシル S_0 、 S_1 、 S_2 に分割し、それぞれにおいて数

値流束を導出する．サブステンシル S_k における数値流束を $\tilde{f}_{k,j+1/2}$ と表記する．Lagrange補間を用いることで

$$\begin{aligned}\tilde{f}_{0,j+1/2} &= \frac{3}{8}f_{j-2} - \frac{5}{4}f_{j-1} + \frac{15}{8}f_j \\ \tilde{f}_{1,j+1/2} &= -\frac{1}{8}f_{j-1} + \frac{3}{4}f_j + \frac{3}{8}f_{j+1} \\ \tilde{f}_{2,j+1/2} &= \frac{3}{8}f_j + \frac{3}{4}f_{j+1} - \frac{1}{8}f_{j+2}\end{aligned}\quad (2)$$

と数値流束を得る．式(2)についてテイラー展開すると

$$\tilde{f}_{k,j+1/2} = f_{j+1/2} + A_k \Delta x^3 + O(\Delta x^4) \quad (3)$$

のように表すことができる．ここで A_k は Δx とは独立している．セル境界における数値流束 $\tilde{f}_{j+1/2}$ は、それぞれのサブステンシルにおいて導出された数値流束 $\tilde{f}_{k,j+1/2}$ に非線形重み w_k を用いた凸結合を施すことで

$$\tilde{f}_{j+1/2} = \sum_{k=0}^2 w_k \tilde{f}_{k,j+1/2} \quad (4)$$

と導出される．式(4)の重み w_k に関してオリジナルのWCNSでは

$$w_k = \frac{\alpha_k}{\sum_{k=0}^2 \alpha_k}, \quad \alpha_k = \frac{d_k}{(IS_k + \varepsilon)^p} \quad (5)$$

で定義される．ここで、 ε はゼロ割防止に用いられる小さな数であり、 $p=2$ とし、式(5)の中の IS はsmoothness indicatorを示す．本稿ではDeng and Zhang²⁾によってオリジナルのWCNSに使われて、かつFan et al.⁸⁾が通常のWENOでも利用できることを示したLagrange補間の多項式を基にしたsmoothness indicatorを用いる．これは r 点で構成されたステンシル $S_{j,r} = \{x_j, x_{j+1}, \dots, x_{j+r-1}\}$ の場合

$$IS = \sum_{m=1}^{r-1} [\Delta x^m P_{j,r}^{(m)}(x_j)]^2 \quad (6)$$

で示される．ここで、括弧付き上付き添え字(m)は m 階の導関数を表し、 $P_{j,r}$ はステンシル $S_{j,r}$ におけるラグランジュ補間の多項式

$$P_{j,r}(x) = \sum_{i=0}^{r-1} f_{j+i} \prod_{l=0, l \neq i}^{r-1} \frac{x - x_{j+l}}{x_{j+i} - x_{j+l}} \quad (7)$$

を示している．したがって、各サブステンシル S_0 、 S_1 、 S_2 におけるsmoothness indicatorは

$$\begin{aligned}IS_0 &= \frac{1}{4}(f_{j-2} - 4f_{j-1} + 3f_j)^2 + (f_{j-2} - 2f_{j-1} + f_j)^2 \\ IS_1 &= \frac{1}{4}(f_{j-1} - f_{j+1})^2 + (f_{j-1} - 2f_j + f_{j+1})^2 \\ IS_2 &= \frac{1}{4}(3f_j - 4f_{j+1} + f_{j+2})^2 + (f_j - 2f_{j+1} + f_{j+2})^2\end{aligned}\quad (8)$$

となる．また、式(5)の d_k は最適重みを示し、5次精度の場合 $d_0=1/16$ 、 $d_1=10/16$ 、 $d_2=5/16$ となる．各サブステンシルで導出された数値流束を最適重みにより

$$\tilde{f}_{j+1/2} = \sum_{k=0}^2 d_k \tilde{f}_{k,j+1/2} \quad (9)$$

と結合したときに得られる数値流束 $\tilde{f}_{j+1/2}$ は風上型ステンシル S_U でLagrange補間をした数値流束に等しくなる．

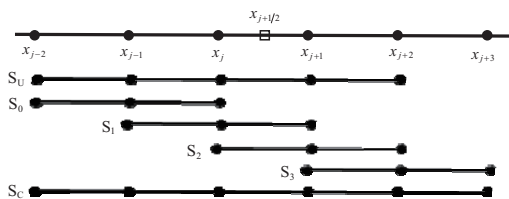


Fig. 1. Computational uniform grid and stencils. S_U is the five-points upwind stencil, S_0 , S_1 , and S_2 are upwind three-points sub-stencils, S_3 is downwind three-points sub-stencils and S_C is the six-points central stencil.

2. 2. 6次精度陽的線形差分スキーム

線形差分スキームによって式(1)の $\partial f / \partial x$ を計算する．オリジナルWCNSの線形差分は

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{75}{64\Delta x}(\tilde{f}_{j+1/2} - \tilde{f}_{j-1/2}) - \frac{25}{384\Delta x}(\tilde{f}_{j+3/2} - \tilde{f}_{j-3/2}) \\ &\quad + \frac{3}{640\Delta x}(\tilde{f}_{j+5/2} - \tilde{f}_{j-5/2}) + O(\Delta x^6)\end{aligned}\quad (10)$$

である．式(10)の線形差分は計算が破綻しやすいという欠点がある．そのためノードの値を用いた堅牢な線形差分スキーム¹¹⁾

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{3}{2\Delta x}(\tilde{f}_{j+1/2} - \tilde{f}_{j-1/2}) - \frac{3}{10\Delta x}(f_{j+1} - f_{j-1}) \\ &\quad + \frac{1}{30\Delta x}(\tilde{f}_{j+3/2} - \tilde{f}_{j-3/2}) + O(\Delta x^6)\end{aligned}\quad (11)$$

が過去に提案された．式(11)を用いることで式(10)では解くことができない、強い衝撃波を解析することが可能となった．

2. 3. 6点ステンシルにおける6次精度補間

図1の中心ステンシル S_C においてLagrange補間を

$$\begin{aligned}\tilde{f}_{j+1/2} &= \frac{1}{256}(3f_{j-2} - 25f_{j-1} + 150f_j + 150f_{j+1} - 25f_{j+2} + 3f_{j+3}) \\ &= f_{j+1/2} + O(\Delta x^6)\end{aligned}\quad (12)$$

と施すことで、最適6次精度の数値流束を算出することができる．

2. 4. 風下ステンシルの適用

Hu et al.⁷⁾に倣い、中心差分型ステンシル S_C をサブステンシルに分割するために、風下型ステンシル S_3 を追加した．風下型ステンシルにおいてLagrange補間の多項式を用い

$$\tilde{f}_{3,j+1/2} = \frac{15}{8}f_{j+1} - \frac{5}{4}f_{j+2} + \frac{3}{8}f_{j+3} \quad (13)$$

のように外挿することで数値流束を得る．式(13)も式(2)と同様に式(3)のように示すことができる．ここで、オリジナルWCNS同様に非線形重みを用い、

$$\tilde{f}_{j+1/2} = \sum_{k=0}^3 w_k \tilde{f}_{k,j+1/2} \quad (14)$$

と凸結合を施し数値流束を導出する．また、 w_3 を決定するsmoothness indicatorに関してはステンシル S_3 を用いるかわりに S_C を用い

$$\begin{aligned}IS_3 &= IS_C = \sum_{m=1}^5 [\Delta x^m P_{j-2,6}^{(m)}(x_j)]^2 \\ &= \left(\frac{1}{20}f_{j-2} - \frac{1}{2}f_{j-1} - \frac{1}{3}f_j + f_{j+1} - \frac{1}{4}f_{j+2} + \frac{1}{30}f_{j+3} \right)^2 \\ &\quad + \left(-\frac{1}{12}f_{j-2} + \frac{4}{3}f_{j-1} - \frac{5}{2}f_j + \frac{4}{3}f_{j+1} - \frac{1}{12}f_{j+2} \right)^2 \\ &\quad + \left(-\frac{1}{4}f_{j-2} - \frac{1}{4}f_{j-1} + \frac{5}{2}f_j - \frac{7}{2}f_{j+1} + \frac{7}{4}f_{j+2} - \frac{1}{4}f_{j+3} \right)^2 \\ &\quad + (f_{j-2} - 4f_{j-1} + 6f_j - 4f_{j+1} + f_{j+2})^2 \\ &\quad + (-f_{j-2} + 5f_{j-1} - 10f_j + 10f_{j+1} - 5f_{j+2} + f_{j+3})^2\end{aligned}\quad (15)$$

のように得られる．ステンシル S_C に不連続面を含む場合、次の3つの状況が考えられる．

- ① 風上型ステンシル S_0 、 S_1 、 S_2 のどれかまたは複数および風下型ステンシル S_3 が不連続面を含む
- ② 風上型ステンシル S_0 、 S_1 、 S_2 に不連続面を含み、風下型ステンシル S_3 に不連続面を含まない
- ③ 風上型ステンシル S_0 、 S_1 、 S_2 に不連続面を含まず、風下型ステンシル S_3 に不連続面を含む

w_3 を決定する smoothness indicator をステンシル S_3 のかわりに S_c を用いることで上述のどの場合においても風下型ステンシル S_3 を用いて導出した数値流束の重みを小さくすることができ、安定して不連続面を解く事ができると予想される。

2. 5. 重みの高次精度化

本節では Henrick et al.⁵⁾ に倣い WCNSCU において重みと補間精度の関係を導くことで、的確な非線形重みを定義する。本稿ではこれまで、流束補間ベースで記述してきたが、本節では WCNS で一般的な近似 Riemann 解法を用いる変数補間ベースを念頭に考える。近似 Riemann 解法は多種存在し、数値流束の精度は非線形補間の打ち切り誤差と同じ、あるいは、打ち切り誤差より低次である、と考えられるように非線形補間の精度に依存する。そのため、本稿では非線形補間の精度に注目した。式(14)は

$$\begin{aligned}\tilde{f}_{j+1/2} &= \sum_{k=0}^3 d_k \tilde{f}_{k,j+1/2} + \sum_{k=0}^3 (w_k - d_k) \tilde{f}_{k,j+1/2} \\ &= \left[f_{j+1/2} + O(\Delta x^6) \right] + \sum_{k=0}^3 (w_k - d_k) \tilde{f}_{k,j+1/2}\end{aligned}\quad (16)$$

と分解することができる。6次精度で収束するためには青下線を引かれた項が6次の誤差項でなければならない。式(16)の青下線が引かれた項に式(3)を代入して展開すると

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^3 (w_k - d_k) \tilde{f}_{k,j+1/2} &= \sum_{k=0}^3 (w_k - d_k) \left(f_{j+1/2} + A_k \Delta x^3 + O(\Delta x^4) \right) \\ &= \underline{f_{j+1/2} \sum_{k=0}^3 (w_k - d_k)} + \underline{\Delta x^3 \sum_{k=0}^3 A_k (w_k - d_k)} \\ &\quad + \sum_{k=0}^3 \left\{ (w_k - d_k) O(\Delta x^4) \right\}\end{aligned}\quad (17)$$

となる。式(17)の第1項(赤下線)が6次の誤差以下となる関係は

$$\sum_{k=0}^3 (w_k - d_k) \leq O(\Delta x^6) \quad (18a)$$

であり、第2項(青下線)が6次の誤差以下となる関係は

$$w_k - d_k \leq O(\Delta x^3) \quad (18b)$$

である。式(18b)が成り立てば第3項(緑下線)は6次の誤差以下の値となる。したがって、式(14)が6次精度を達成するためには、式(18a)および式(18b)を同時に満たさなければならない。

ここで、式(5)の非線形重みを本稿で示した新しい WCNS の非線形補間に実装(式(5)の総和記号の範囲は $k=0$ から $k=3$ となる)したとき式(18a), (18b)を満たすかどうか調べる。式(5)から

$$\sum_{k=0}^3 w_k = \sum_{k=0}^3 d_k = 1 \quad (19)$$

の関係が得られるため、式(18a)を満たす。ここで、式(5)を展開するために smoothness indicator 式(8), (15)をテイラー展開すると

$$\begin{aligned}IS_0 &= (f_j^{(1)} \Delta x)^2 + \left(f_j^{(2)2} - \frac{2}{3} f_j^{(1)} f_j^{(3)} \right) \Delta x^4 \\ &\quad + \left(\frac{1}{2} f_j^{(1)} f_j^{(4)} - 2 f_j^{(2)} f_j^{(3)} \right) \Delta x^5 + O(\Delta x^6) \\ IS_1 &= (f_j^{(1)} \Delta x)^2 + \left(f_j^{(2)2} + \frac{1}{3} f_j^{(1)} f_j^{(3)} \right) \Delta x^4 + O(\Delta x^6) \\ IS_2 &= (f_j^{(1)} \Delta x)^2 + \left(f_j^{(2)2} - \frac{2}{3} f_j^{(1)} f_j^{(3)} \right) \Delta x^4 \\ &\quad - \left(\frac{1}{2} f_j^{(1)} f_j^{(4)} - 2 f_j^{(2)} f_j^{(3)} \right) \Delta x^5 + O(\Delta x^6) \\ IS_3 &= (f_j^{(1)} \Delta x)^2 + (f_j^{(2)} \Delta x^2)^2 + (f_j^{(3)} \Delta x^3)^2 + O(\Delta x^7)\end{aligned}\quad (20)$$

と示され、これらは臨界点を除き

$$IS_k = \{f_j^{(1)} \Delta x\}^2 \{1 + O(\Delta x^2)\} = D(1 + O(\Delta x^2)) \quad (21)$$

のように表現することができる。ただし、 D は k から独立した0でない定数である。式(5)の $\varepsilon=0$ とし式(21)を代入して展開すると

$$\alpha_k = \frac{d_k}{[D(1 + O(\Delta x^2))]^2} = \frac{d_k}{D^2} (1 + O(\Delta x^2)) \quad (22a)$$

$$\sum_0^3 \alpha_k = \frac{1}{D^2} (1 + O(\Delta x^2)) \quad (22b)$$

が得られる。式(22)の2式から

$$w_k - d_k = O(\Delta x^2) \quad (23)$$

が得られる。式(23)は式(18b)を満たさないため、式(5)から重みを導出した場合、式(14)は6次精度で収束しない。次に、Hu et al.⁷⁾ が用いた重みを用いた非線形補間の精度を調べる。この重みは Borges et al.⁶⁾ により提案された WENO-Z の重みの定式に最適重みへの寄与を大きくするパラメータ C を加えたものであり、

$$w_k = \frac{\alpha_k}{\sum_{k=0}^3 \alpha_k}, \quad \alpha_k = d_k \left(C + \frac{\tau}{IS_k + \varepsilon} \right) \quad (24)$$

で示される。式(24)のように重みを定義した場合も式(19)が成り立つため、式(18a)は満たす。 $\varepsilon=0$ とし、 $\tau = O(\Delta x^n)$ のとき式(24)の第2式括弧内の第2項(赤下線)は

$$\begin{aligned}\frac{\tau}{IS_k} &= \frac{O(\Delta x^n)}{\{f_j^{(1)} \Delta x\}^2 (1 + O(\Delta x^2))} = O(\Delta x^{n-2}) \frac{1}{1 + O(\Delta x^2)} \\ &= O(\Delta x^{n-2})\end{aligned}\quad (25)$$

と表すことができる。式(24)および式(25)より

$$w_k - d_k = O(\Delta x^{n-2}) \quad (26)$$

の関係が導かれる。式(26)が式(18b)を満たすためには、 $n \geq 5$ であればよい。本研究では Hu et al. に倣い式(18b)を十分満たす

$$\tau = \left| IS_c - \frac{IS_0 + 4IS_1 + IS_2}{6} \right| = O(\Delta x^6) \quad (27)$$

を使用する。式(27)で定義した τ では $n=6$ であり、式(26)に $n=6$ を代入すると式(18b)の条件を満たしていることが容易に確認できる。

ここまで、WENO において施された中心差分の導入および重みの高次精度化を WCNS に適用してきた。ここで、本稿におけるそれぞれのスキームの表記法を述べる。スキーム名 + 精度 + 重みの形式で表記する。スキーム名はオリジナル WCNS およびオリジナル WENO はそのまま、WCNS, WENO であり、Hu et al. が提案した中心差分を適用させた WENO を WENOCU, 本稿で示した中心差分を適用させた WCNS を WCNSCU と表記する。WCNS 系はスキーム名の頭に R をつけた場合、式(11)の堅牢な線形差分を用いたことを表し、スキーム名の末尾に V をつけた場合は、変数補間ベースであることを示す。重みに関しては式(24)で導出した場合 Z と表記し、式(5)を用いて重みを導出した場合特に表記しない。表1にいくつかの例を示す。

3. 評価

本稿で示した新しい WCNS の解像度と堅牢性をさまざまな検証問題を用い評価した。支配方程式には Euler 方程式

$$\frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial x} = 0, \quad \mathbf{Q} = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \\ e \end{pmatrix}, \quad \mathbf{E} = \begin{pmatrix} \rho u \\ p + \rho u^2 \\ (e + p)u \end{pmatrix} \quad (28)$$

Table 1. The notation of some schemes.

Notation	Scheme name	Accuracy	Weights	Interpolated quantity	Different scheme
WCNS5	WCNS	5	Eq. (5)	Flux	Eq. (10)
RWCNS5	WCNS	5	Eq. (5)	Flux	Eq. (11)
WENO6Z	WENO6Z	6	Eq. (24)	Flux	—
WCNS6Z	WCNS6Z	6	Eq. (24)	Flux	Eq. (10)
RWCNS6Z	WCNS6Z	6	Eq. (24)	Variable	Eq. (11)

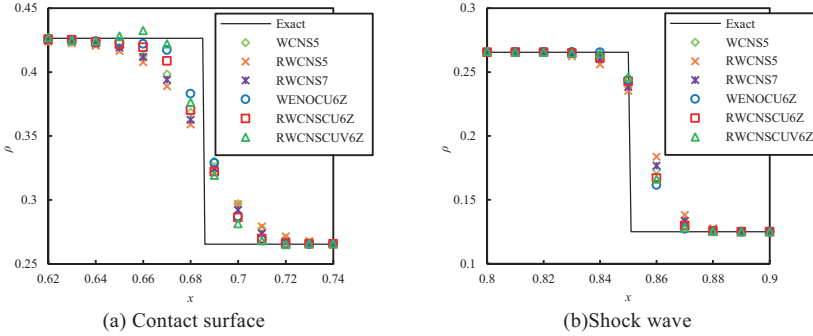


Fig. 2. The density profiles of Sod problem on a 101 points grid.

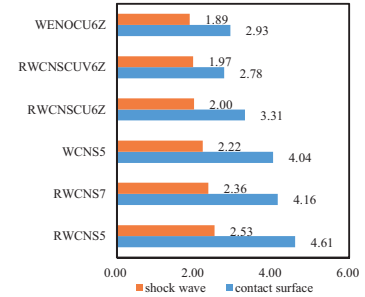


Fig. 3. Quantitative evaluation of Sod problem.

および理想気体の状態方程式

$$\rho e = \frac{1}{\gamma - 1} p + \frac{1}{2} \rho u^2 \quad (29)$$

を使用した。ここで、 ρ は密度、 u は流速、 p は圧力、 e は単位体積あたりの全エネルギーを示す。数値解析手法は時間積分には3次精度 SSPRK¹²⁾を用いた。Roe平均によりセル境界における物理量を評価し、差分WENO法で一般に用いられるLax-Friedrich flux splittingを用いて流束を分離する。本稿ではWCNS5, RWCNS5, RWCNS7, WENO6Z, RWCNS6Z, RWCNS6Zを比較した。RWCNS6Zの流束評価法にはAUSMDVスキーム¹³⁾を用いた。重みを導出する際の各パラメータは式(5)の場合 $\varepsilon=10^{-6}$, $p=2$ を用い、式(24)の場合では $\varepsilon=10^{-40}$, $C=20$ を使用した。時間刻みはすべての問題でCFL=0.6となるように決定した。

3. 1. Sod問題

衝撃波管問題であるSod問題¹⁴⁾を用いて不連続面の捕捉性能を評価した。Sod問題の初期値は

$$(\rho, u, p) = \begin{cases} (1, 0, 1) & \text{if } 0 < x < 0.5 \\ (0.125, 0, 0.1) & \text{if } 0.5 < x < 1 \end{cases} \quad (30)$$

で示され、格子点数101点とし、 $t=0.2$ まで解析した。図2に解析結果の密度分布を示す。図の(a)は接触面近傍を、(b)は衝撃波近傍を拡大したグラフである。RWCNS6Zは接触面においてオーバーシュートが発生している。他のスキームは安定して不連続面を捉えている。ここでNonomura et al.¹¹⁾に倣い不連続面の厚さに注目し、不連続面を定量的に評価した。この定量的評価法は値が小さいほど不連続面を薄く捉えていることを意味し、高解像度であることを示す。定量的評価結果を図3に示す。WENO6Z, RWCNS6Z および RWCNS6Z の定量的評価値が小さいことから、中心差分の適用および重みの高次精度化を施したスキームは高解像度であるといえる。本稿で示した、RWCNS6Z および RWCNS6Z は WENO6Z より低解像度であることも確認できる。

3. 2. 高周波問題

Shu-Osher問題¹⁰⁾を用いてスキームの散逸誤差の大きさを比較する。この問題の初期値は

$$(\rho, u, p) = \begin{cases} (3.857, 2.629, 10.333) & \text{if } 0 < x < 1 \\ (1 + 0.2 \sin(5x), 0, 1) & \text{if } 1 < x < 10 \end{cases} \quad (31)$$

のように与えられ、衝撃波後方に激しく密度が変化する領域が発生する。その高周波に対し各スキームの散逸性を比較する。格子点数は201点とし、 $t=1.8$ まで解析した。解析結果の密度分布を図4に示す。その際、衝撃波後方の激しく密度が変化する領域を拡大して示す。また、WCNS5を用い格子点数10001点で準厳密解を計算した。図からWCNS5およびRWCNS5が高周波を捉えることができていないが、RWCNS7, WENO6Z, RWCNS6Z および RWCNS6Z は高周波を捉えている。さらにRWCNS7よりWENO6Z, RWCNS6Z および RWCNS6Zのほうが低散逸であることが確認できる。したがって、中心差分の適用および重みの高次精度化を施したスキームは高解像度であるといえる。

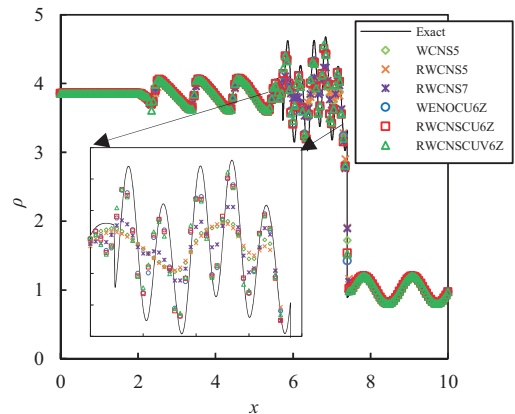


Fig. 4. The density profiles of Shu-Osher problem on a 201 points grid.

3. 3. 厳しい衝撃波問題

堅牢性の評価を行うために、強い衝撃波が生じる条件を課した。初期値¹¹⁾は

$$(\rho, u, p) = \begin{cases} (1, 0, 0.1PR) & \text{if } 0 < x < 0.5 \\ (1, 0, 0.1) & \text{if } 0.5 < x < 1 \end{cases} \quad (32)$$

で与えられ、時間100ステップ以内に計算が破綻しないかどうかを調べる。格子点数は101点で、圧力比 $PR=10, 100, 1000, 10000, 100000$ の場合で解析した。解析結果を

表 2 にまとめる。○は問題なく計算できた条件，×は計算が途中で破綻してしまった条件を示している。表 2 より堅牢な線形差分 (式(11)) を用いたスキームはすべての条件において計算できたことがわかる。したがって，堅牢な線形差分を用いることで新しい WCNS は大きな圧力比が存在する条件下において計算可能であると考えられる。

Table 2. Computation of stiff shock tube problems. A circle denotes that the problem is solved without a blow-up and across denotes that the computation has blown up.

PR	10	100	1000	10000	100000
WCNS5	○	×	×	×	×
WENOCU6Z	○	○	○	○	○
RWCNS5	○	○	○	○	○
RWCNS7	○	○	○	○	○
RWCNSCU6Z	○	○	○	○	○
RWCNSCUV6Z	○	○	○	○	○

3. 4. Rayleigh-Taylor instability 問題

この問題は 2 次元においてスキームの散逸性を評価する問題である。初期値は

$$(\rho, u, v, p) = \begin{cases} \left(2, 0, -0.025 \sqrt{\frac{5p}{3\rho}} \cos(8\pi x), 2y+1 \right), & \text{if } 0 < y < \frac{1}{2} \\ \left(1, 0, -0.025 \sqrt{\frac{5p}{3\rho}} \cos(8\pi x), y + \frac{3}{2} \right), & \text{if } \frac{1}{2} < y < 1 \end{cases} \quad (33)$$

$$0 \leq x \leq 0.25, 0 \leq y \leq 1$$

で与えられる。左右に仮想格子点を用い滑りあり反射壁条件を課した。 $t=1.95$ まで解析し，格子点数は 121×480 で解析した。図 5 に解析結果の密度分布を示す。図から WCNS5, RWCNS5, RWCNS7 に比べ，WENOCU6Z, RWCNSCU6Z, RWCNSCUV6Z は詳細に渦を捉えているため，WENOCU6Z, RWCNSCU6Z, RWCNSCUV6Z は低散逸であるといえる。ここで，Hu et al. の中心差分タイプのスキーム⁷⁾は非対称が現れているが，これらのスキームの結果は非対称が現れやすいことが知られている¹⁷⁾。ここでは議論しないが別途非対称が出にくくなる実装も提案されており，これを利用することで非対称性を抑えられると考えられる。

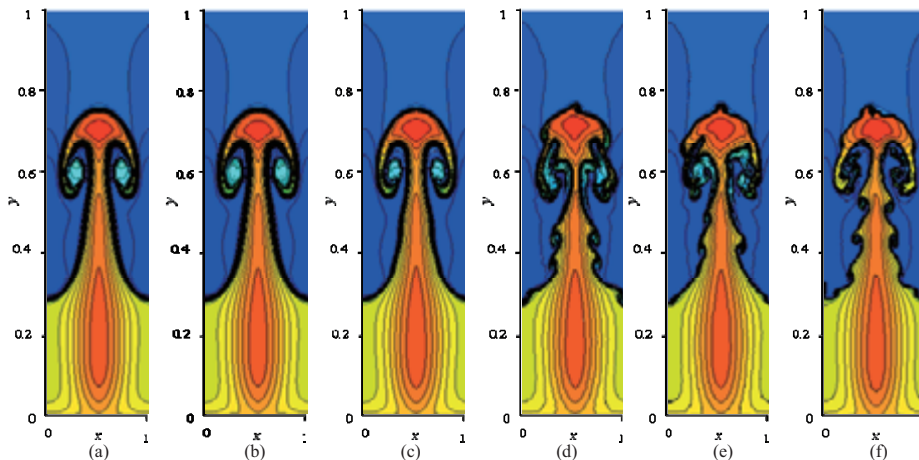


Fig. 5. Density profiles of the Rayleigh-Taylor instability problem. The mesh resolutions are 121×480 . (a) WCNS5, (b) RWCNS5, (c) RWCNS7, (d) WENOCU6Z, (e) RWCNSCU6Z, and (f) RWCNSCUV6Z.

3. 5. Double Mach reflection 問題

Woodward and Colella¹⁸⁾による Double Mach reflection 問題を考える。この問題は比較的厳しい条件であるため堅牢性に関して評価する。初期値は

$$(\rho, u, v, p) = \begin{cases} (8, 8.25 \cos(\pi/6), -8.25 \sin(\pi/6), 116.5), & \text{if } x < 1/6 + y/\sqrt{3} \\ (1.4, 0, 0, 1.0), & \text{if } x > 1/6 + y/\sqrt{3} \end{cases} \quad (34)$$

$$0 \leq x \leq 4, 0 \leq y \leq 1$$

で与えられる。上側の境界条件には衝撃波の動きに合わせて厳密解を与え，下側 ($x > 1/6$) は仮想格子点を用い滑りあり反射壁を課した。また，この問題は強い衝撃波を伴うため，WCNSCU を用い変数に非線形補間を施すと負圧が発生し計算が破綻するといった問題が生じた。そこで，本研究では当問題においてのみ RWCNSCU6Z の非線形補間において負密度および負圧が発生した場合 1 次精度でセル境界における変数を求める。格子点数 960×240 で， $t=0.2$ まで解析した。図 6 は計算結果の密度分布を $2 \leq x \leq 3, 0 \leq y \leq 0.5$ の領域を拡大して示す。図から WENOCU6Z, RWCNSCU6Z および RWCNSCUV6Z は滑り線における渦を捉えることができ低散逸であるといえる。また，堅牢性について考えると，WCNS5 では計算が破綻した。RWCNSCUV6Z は非線形補間後に負圧が発生することが原因で計算が破綻した。図 6 の計算結果は上述したように負圧，負密度発生時に 1 次精度内挿にした場合の結果であり，そのような，修正を施すことで RWCNSCUV6Z は安定して計算することができた。

4. 結論

本稿で，WENO で提案された解像度を高くする手法である WENO-Z および WENOCU を WCNS に適用し，RWCNSCU6Z を提案した。高次精度の重みを適用することで滑らかな領域において非線形補間が 6 次精度であることを確認した。Euler 方程式を用いた数値検証においては堅牢な線形差分と組み合わせた RWCNSCU6Z および変数補間ベースの RWCNSCUV6Z の解像度と堅牢性を評価した。これらのスキームはほとんどの場合で安定して不連続面を捉えることができ，WCNS5, RWCNS5 だけではなく RWCNS7 よりも低散逸である。RWCNSCUV6Z では非線形補間後に負圧が発生する 때가 あり，その場合は補間値を修正する必要がある。

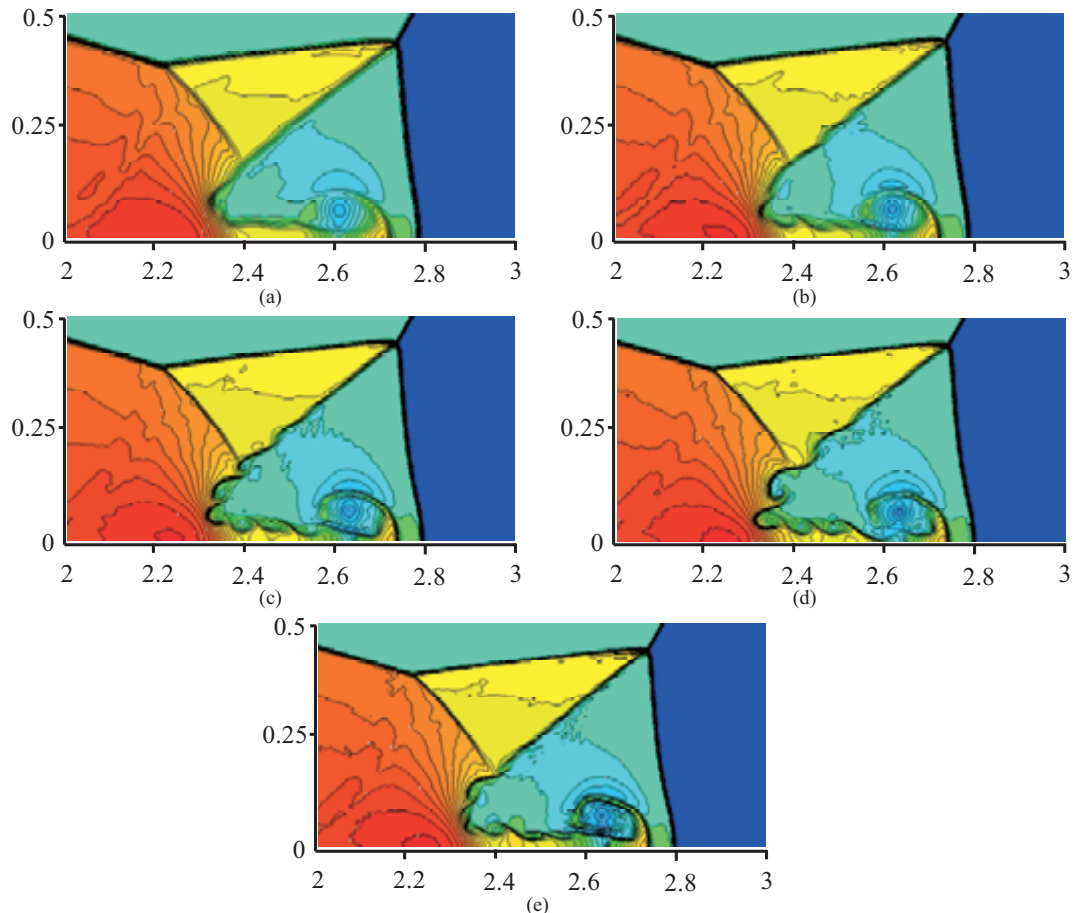


Fig. 6. Density profiles of the double Mach reflection problem. The mesh resolutions are 960×240 . (a) RWCNS5, (b) RWCNS7, (c) WENO6Z, (d) RWCNS6Z, and (e) RWCNS6Z.

参考文献

- 1) Jiang, G.S., Shu, C.W., Efficient Implementation of Weighted ENO Schemes, *J. Comput. Phys.*, 126, 1996, pp. 200-228.
- 2) Deng, X.G., Zhang, H., Developing High-order Weighted Compact Nonlinear Schemes, *J. Comput. Phys.*, 165, 2000, pp. 22-44.
- 3) Nonomura, T., Iizuka, N., Fujii, K., Effects of difference scheme type in high-order weighted compact nonlinear schemes, *J. Comput. Phys.*, 228, 2009, pp. 3533-3539.
- 4) Zang, S., Jiang, S., Shu, C.W., Development of Nonlinear Weighted Compact Schemes with Increasingly Higher Order Accuracy, *J. Comput. Phys.*, 227, 2008, pp. 7294-7321.
- 5) Henrick, A.K., Aslam, T.D., Powers J.M., Mapped weighted essentially non-oscillatory schemes: Achieving optimal order near critical points, *J. Comput. Phys.*, 207, 2005, pp. 542-567.
- 6) Borges, R., Carmona, M., Coasta, B., Dan, W.S., An improved weighted essentially non-oscillatory scheme for hyperbolic conservation laws, *J. Comput. Phys.*, 227, 2008, pp. 3197-3211.
- 7) Hu, X.Y., Wang, Q., Adams, N.A., An adaptive central-upwind weighted essentially non-oscillatory scheme, *J. Comput. Phys.*, 229, 2010, pp. 8952-8965.
- 8) Fan, P., Shen, Y., Tian, B., Yang, C., A new smoothness indicator for improving the weighted essentially non-oscillatory scheme, *J. Comput. Phys.*, 269, 2014, pp. 329-354.
- 9) Nonomura, T., Iizuka, N., Fujii, K., Freestream and Vortex Preservation Properties of High-order WENO and WCNS on Curvilinear Grids, *Comput Fluid*, 39, 2010, pp. 197-214.
- 10) 住, 黒滝, 重み付きコンパクトスキームの堅牢性および解像度向上への試み, 第27回数値流体力学シンポジウム, 2013.
- 11) Nonomura, T., Fugii, K., Robust explicit formulation of weighted compact nonlinear scheme, *Comput. Fluid*, 85, 2013, pp. 8-18.
- 12) Gottlieb, S., Shu, C.W., Tadmor, E., Strong Stability-Preserving High-Order Time Discretization Methods, *Siam Review*, 43, 2001, pp. 89-112.
- 13) Wada, Y., Lion, M.S., A Flux Splitting Scheme With High-Resolution and Robustness for Discontinuities, *AIAA Paper*, 94-0083, 1994.
- 14) Sod, G.A., A Survey of Several Finite Difference Methods for Systems of Nonlinear Hyperbolic Conservation Laws, *J. Comput. Phys.*, 27, 1978, pp. 1-31.
- 15) Lax, P.D., Weak solutions of Nonlinear Hyperbolic Equations and Their Numerical Computation, *Comm. Pure Appl. Math.*, 7, 1954, pp. 159-193.
- 16) Shu, C.W., Osher S., Efficient implementation of essentially non-oscillatory shock-capturing schemes II, *J. Comput. Phys.*, 83, 1989, pp. 32-78.
- 17) Jung, C.Y., Nguyen T.B., A New Adaptive Weighted Essentially Non-Oscillatory WENO- θ Scheme for Hyperbolic Conservation Laws, *math. NA*, 3, 2015.
- 18) Woodward, P., Collella P., The Numerical Simulation of Two Dimensional Fluid with Strong Shock, *J. Comput. Phys.*, 54, 1984, pp. 115-173.