

直交格子法における埋め込み境界法と Cut-Cell 法の比較 - 壁面近傍での圧力・せん断応力分布の検証 -

原田基至, 今村太郎
東京大学大学院工学系研究科

Comparison of Immersed Boundary Method and Cut-Cell Method on Cartesian Grids - Validation of Pressure and Shear Stress Distributions in Near-Wall Region -

by
Motoshi Harada and Taro Imamura (The University of Tokyo)

ABSTRACT

In this paper, an immersed boundary method (IBM) and a cut-cell method on Cartesian grids are compared. In order to understand the characteristics of the two methods, two dimensional steady flow problems are solved. Near-wall pressure and shear stress distributions are investigated in detail. The results show that the cut-cell method is superior to IBM in grid convergence. However, the oscillation of the skin friction coefficient distributions is found in the cut-cell method, whereas IBM gives smooth distributions.

1. 序論

直交格子法は格子生成が容易であり, 完全自動化が可能という利点を持つことから, 近年盛んに流体計算への適用に関する研究が行われている^{1,2)}. 反面, 直交格子法はいくつかの問題点を抱えており, そのひとつに物体壁面が階段状に表現されることがある(図 1). 最小格子幅を十分小さくすれば, よい解が得られると考えられるが, 高レイノルズ数流れのシミュレーションでは格子点数が膨大になり実用性が低い.

この欠点を補うため一般的に用いられている手法が, 埋め込み境界法 (Immersed Boundary Method, IB 法)³⁾と Cut-Cell 法⁴⁾である. IB 法では, 壁面が本来の位置に存在した場合の物理量分布を考え, これを階段状境界上の境界条件とする. IB 法は簡便な手法であり, 直交格子の形状が保たれるため, 格子生成の容易さという利点を損なわない. しかし, IB 法は物体壁面で保存則 (質量, エネルギー) が満たされないという欠点があり, 非物理的な解が生まれる可能性がある. 一方, Cut-Cell 法は物体と交差するセルを切断することで物体に沿った格子を生成する. IB 法を用いる場合と異なり, 壁面の隣でも検査体積が定義されるため, 保存則が満たされる. しかしながら, Cut-Cell 法にも欠点がある. 物体と交差するセルを切断するのは一見容易に思えるが, 物体が複雑な形状をもつ場合, 非常に多くの場合分けや例外処理を要する. これは特に三次元へ拡張する際の障壁となる. また, 正しく切断を行った場合も, 小さなセル (Small Cell) が生まれ, 一つの正方形セルが複数に分断されること (Split Cell) がある, などの問題がある. 流体計算の安定性を確保するためにはこれらのセルに対して特別な処理をしなければならない.

本稿では IB 法と Cut-Cell 法を用いて圧縮性の非粘性流と粘性流の解析を行い, 特に壁面近傍での圧力やせん断応力の分布などを比較し, 双方の利点・課題を検証する. 尚, 通常の Cut-Cell 法は格子生成が煩雑なため, 従来の Cut-Cell 法に基づいて新たに開発した手法を Cut-Cell 法として用いる.

2. 数値計算法

2. 1 流体計算

流体計算には当研究室で開発中の二次元圧縮性流体ソルバー⁵⁾を用いる. 計算手法を表 1 に示す.

支配方程式は二次元圧縮性の Euler / Navier-Stokes 方程式である. セル中心有限体積法で離散化し, 計算格子には四分木法によって細分化した階層型直交格子を使用する. 非粘性流

束は SLAU⁶⁾, 粘性流束は 2 次精度中心差分で評価する. WLSQ(G)⁷⁾で勾配計算をし, 3 次精度 MUSCL 法によって変数補間を行う. 時間積分は LU-SGS 陰解法⁸⁾である. また, 本稿では定常流のみを扱うので, すべての計算で局所時刻み法を用いる.

壁面での温度境界条件は断熱壁, 速度境界条件は Euler 方程式で滑り壁, Navier-Stokes 方程式で滑りなしとする. 遠方境界にはリーマン境界条件⁹⁾を適用する.

格子生成のパラメータには最小格子幅, Wall Layer, Smooth Layer がある. Wall Layer は物体まわりの最小格子幅をもつセルの層数, Smooth Layer は Wall Layer の外で同じ格子幅をもつセルの層数を意味する(図 2). 図 2 の場合, Wall Layer 4 層, Smooth Layer 3 層である.

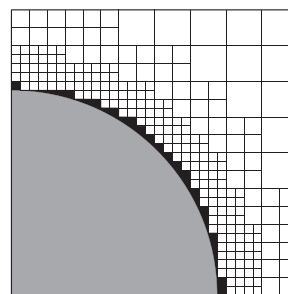


図 1 円柱周りの階層型直交格子

表 1 計算手法

支配方程式	二次元 Euler / Navier-Stokes 方程式
空間離散化	セル中心有限体積法
計算格子	四分木法による階層型直交格子
非粘性流束	SLAU
粘性流束	二次精度中心差分
勾配計算	WLSQ(G)
変数補間	3 次精度 MUSCL 法
時間積分	LU-SGS 陰解法
時刻み	局所時刻み法

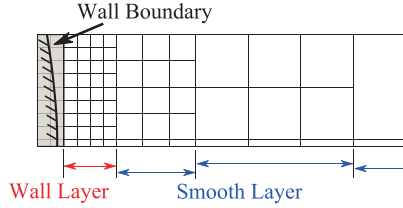


図2 Wall Layer と Smooth Layer

2. 2 Immersed Boundary Method

IB 法は物体壁面が存在する場合の壁近傍での物理量分布をモデル化し、これを直交格子の階段状境界での境界条件とする手法である。以下、IB 法の詳細を述べる。

IB 法による境界条件の与え方を図示したものが図 3、図 4 である。物体と交差するセルを境界セル、流体セル・境界セルの境界となっている辺の中心を点 FC (Face Center) と呼ぶことにする。境界条件として点 FC での物理量を考え、これを境界での流束計算に使用する。点 FC での物理量を求めるために、点 FC を通り、かつ物体壁面に垂直な直線をひく。そして、この直線上に、壁面からの距離が d_{IP} である点 IP (Image Point) を設定する。本研究では

$$d_{IP} = 3 \Delta x_{min} \quad (1)$$

とする。ただし、 Δx_{min} は最小格子幅である。IP における物理量は、IP が位置するセルのセル中心で定義されている物理量 q とその勾配 ∇q から計算される。IP の物理量と壁面上での境界条件から FC での物理量を求める。

<速度境界条件>

速度境界条件として滑り壁条件と滑りなし条件を考える。

条件 1: 滑り壁条件

滑り壁条件では FC における速度 \mathbf{u}_{FC} を

$$\mathbf{u}_{FC} = \mathbf{u}_{IP,t} + \frac{d_{FC}}{d_{IP}} \mathbf{u}_{IP,n} \quad (2)$$

とする。ただし、 $\mathbf{u}_{IP,t}$ は IP での速度の壁面に平行な成分、 $\mathbf{u}_{IP,n}$ は垂直成分、 d_{FC} は点 FC と壁面の距離である。

条件 2: 滑りなし条件

滑りなし条件では壁面上で速度が 0 になるので、

$$\mathbf{u}_{FC} = \frac{d_{FC}}{d_{IP}} \mathbf{u}_{IP} \quad (3)$$

<圧力・密度境界条件>

圧力・密度境界条件として三種類の条件を考える。

条件 1: 0 次外挿

点 IP の圧力・密度を点 FC の圧力・密度とする。

$$p_{FC} = p_{IP}, \quad \rho_{FC} = \rho_{IP} \quad (4)$$

条件 2: 1 次外挿

点 IP が位置するセルの圧力・密度勾配を用いて、点 FC の圧力・密度を求める。すなわち、

$$p_{FC} = p_{IP} + \nabla p \cdot (\mathbf{r}_{FC} - \mathbf{r}_{IP}) \quad (5)$$

$$\rho_{FC} = \rho_{IP} + \nabla \rho \cdot (\mathbf{r}_{FC} - \mathbf{r}_{IP}) \quad (6)$$

とする。ただし、 \mathbf{r}_{FC} 、 \mathbf{r}_{IP} は点 FC、IP の位置ベクトルである。

条件 3: 曲率を考慮した外挿

Curvature Corrected Symmetric Technique (CCST)¹⁰⁾ を利用する。壁近傍での運動方程式は、 \mathbf{n} を壁面法線方向(流体から物体に向かう方向が正)、 \mathbf{u}_t を速度の壁面平行成分、 R を壁面の曲率半径とすれば、

$$\frac{\partial p}{\partial n} = - \frac{\rho |\mathbf{u}_t|^2}{R} \quad (7)$$

と書ける。これは滑り壁条件のように、壁面近傍でも流体がある程度速度をもつ場合は圧力勾配が存在しうることを意味する。この式を利用して、IP の速度から IP-FC 間の圧力差が求められる。すなわち、

$$p_{FC} = p_{IP} - \frac{\rho_{IP} |\mathbf{u}_{IP,t}|^2}{R} |\mathbf{r}_{FC} - \mathbf{r}_{IP}| \quad (8)$$

となる。密度については、IP-FC 間での等エントロピーを仮定すれば、 γ を比熱比として、

$$\rho_{FC} = \rho_{IP} \left(\frac{p_{FC}}{p_{IP}} \right)^{\frac{1}{\gamma}} \quad (9)$$

を得る。

以降、圧力・密度境界条件について、条件 1 を P0、条件 2 を P1、条件 3 を CCST と呼ぶことにする。

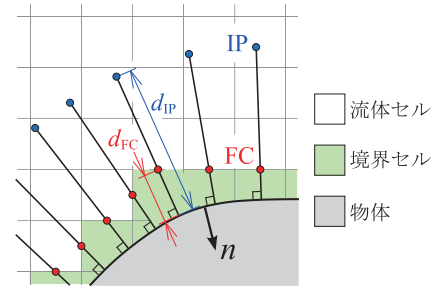


図3 点 FC と点 IP の定義

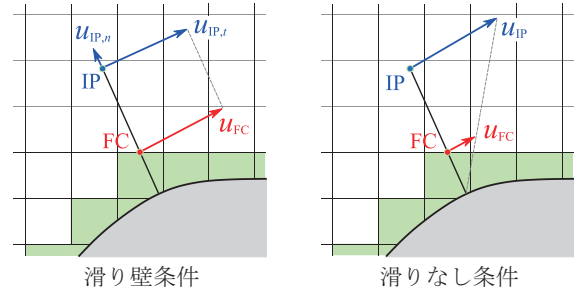


図4 速度境界条件の与え方

2. 3 Cut-Cell 法

Cut-Cell 法は物体と交差しているセルを切断することで、壁面に沿った格子を生成する(図 5)。Cut-Cell 法による計算では非粘性流で良好な結果が得られている¹¹⁾。

Cut-Cell 法を適用する際の主な問題点には

- 1) セルの形状に関して多くの場合分けが必要
- 2) セルの切断により Small Cell が発生する
- 3) セルの切断により Split Cell が発生する

の三つがある。まず、1) について述べる。切断により正方形は 3~5 角形となり、さらに元の正方形のどの頂点が流体側にあるかにより四つのパターンがある。二次元ではこのようにリストアップすることができるが、三次元では膨大な分類が必要となり、航空機のように複雑な形状の物体に対しても格子生成のロバスト性を確保するのは困難となる。

続いて 2) の問題について述べる。図 5 中の赤色のセルが Small Cell である。セルを切断することで、元のセルに比べて面積(三次元では体積)が半分以下のセル、Small Cell が生じる。Small Cell が存在すると流体計算の際、時間刻み幅を大きくとれなくなり、計算効率が低下する。これを避けるために一般的には Small Cell を隣接セルに結合する Cell Merging 法¹²⁾が用いられている。

3)の Split Cell は、物体に最小格子幅より薄い箇所がある場合、一つの正方形セルが複数に分断されることで生じる(図5 青色のセル)。この分断法が四分木法の分割法と全く異なっているため、例外処理として Split Cell を扱う必要がある。

以上のように、Cut-Cell 法では膨大な場合分けや多数の例外処理が要求されるため、四分木直交格子法の利点であるシンプルさが損なわれてしまう。

従来の Cut-Cell 法の問題点を回避するために物体適合格子の格子生成法¹³⁾を参考にして、新たな手法を考える。Cut-Cell 法のように、壁面に接するセル以外は直交格子のままとする。壁に接する格子は物体適合格子のように壁面への射影を利用して生成する。図6に壁面上の格子を生成する前の初期状態、生成後の格子を示す。太線で示された物体に面する格子線を Cartesian Front (CF)¹⁴⁾と呼ぶ。CF 上にある格子点は次の三種類に分類することができる：

- FP : Flat Point, CF が平らな部分にある点
- CP : Concave Point, CF が窪んだ部分にある点
- PP : Prominent Point, CF が突き出た部分にある点

このうち、FP と CP を射影の起点とし、格子線を壁面に向けてのぼす。格子線をのぼす方向は

- FP : CF に垂直な方向
- CP : 壁面に垂直な方向

とする。のぼした格子線が物体と交差しない場合は壁面上の最も近い点につながるものとする。のぼした格子線と物体壁面を新たなセル境界とし、CF は削除する。PP を射影の起点として使用しなかったのは PP から格子線をのぼしてもセル境界にならないためである。

上記の手法では元の直交格子セルを拡張することで格子を生成するため、Small Cell や Split Cell が生まれることはない。また、場合分けも CF 上の格子点の分類のみである。この手法により生成される格子の形状は従来の Cut-Cell 法の格子とはやや異なるが、大きな差異はない。そのため、本稿ではこの手法を Cut-Cell 法と呼び、IB 法との比較に利用する。

Cut-Cell 法での流体計算は通常非構造格子での計算と同様である。境界条件には IB 法と同様、二種類の速度境界条件、三種類の圧力・密度境界条件を使用する。

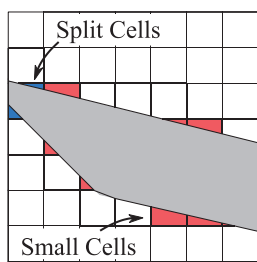
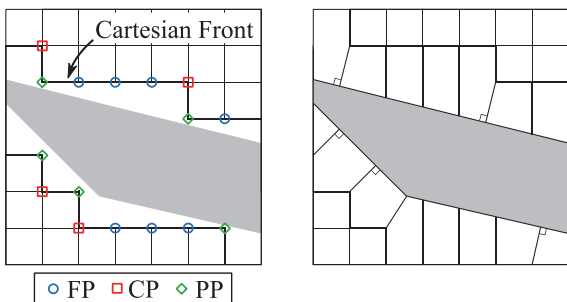


図5 Cut-Cell法による格子



射影前の初期状態 射影後の格子

図6 提案手法による Cut-Cell 格子

3. 非粘性流 二次元円柱まわりの流れ

非粘性流での検証計算を行う。二次元円柱まわりのポテンシャル流の理論解では、速度の最大値は一樣流速の二倍となる¹⁵⁾。つまり、Euler 方程式で一樣流マッハ数を 0.1 とすれば、最大マッハ数は 0.2 程度となり、解はおおむねポテンシャル流の解と一致すると考えられる。そこで、一樣流マッハ数 $M_\infty = 0.1$ の二次元円柱まわりの非粘性流を解き、IB 法、Cut-Cell 法の計算結果とポテンシャル流の理論解を比較する。

円柱の直径を D とし、角度 θ , x, y 軸を図7のように定義する。計算領域は $200D \times 200D$ とする。速度境界条件は滑り壁条件である。圧力・密度については P0, P1, CCST の三通りの条件で計算を行う。最小格子幅は $0.02D$ であり、円柱表面に沿ったセルの数は 148 セルである。Wall Layer, Smooth Layer はともに 4 層とする。

円柱表面における圧力係数 C_p の分布を図8に示す。破線で示されているポテンシャル流の理論解は

$$C_p = 4 \left(\frac{x}{0.5D} \right)^2 - 3 \quad (10)$$

である。境界条件が P0(0 次外挿)のとき、IB 法と Cut-Cell 法の双方で C_p の振動がみられるが、P1 と CCST ではなめらかな解が得られた。また、P1 と CCST による解はポテンシャル流の理論解とおおむね一致している。しかし、円柱の背後 ($\theta = 0$)での C_p に注目すると、 C_p が 1 まで回復しておらず、全圧の損失が確認できる。いずれの境界条件でも全圧の損失は IB 法の方が大きい。

続いて、抵抗係数 C_d を比較する。非粘性流なので、d'Alembert のパラドックスから C_d は 0 となるのが望ましい。図9に最小格子幅 Δx_{\min} と C_d の関係を示す。Cut-Cell 法の方が粗い格子でも C_d が比較的小さく、格子収束性がよいことが分かる。一方、IB 法は境界条件によらず Cut-Cell 法より大きな C_d が発生している。ただし、IB 法でも CCST を用いることで C_d が改善する。

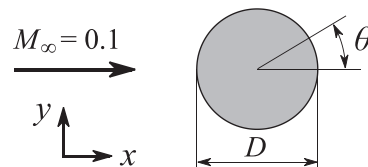


図7 D, θ, x, y の定義

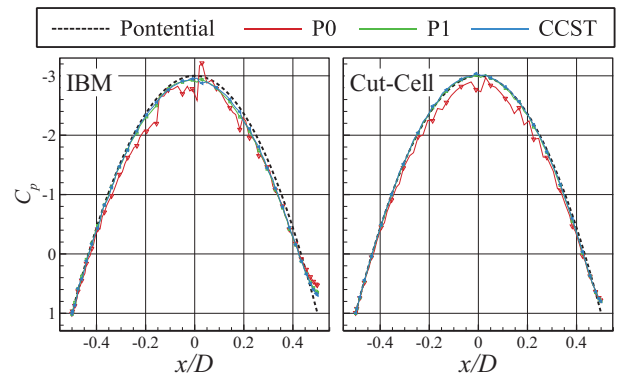


図8 円柱表面の圧力係数分布

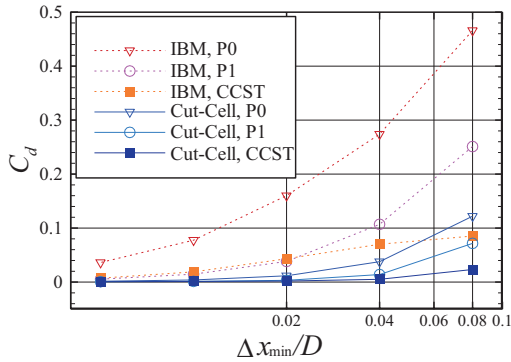


図9 最小格子幅とC_dの関係

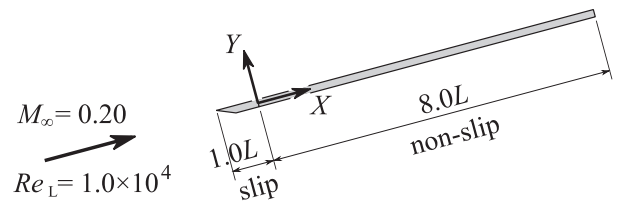


図11 平板の配置とX-Y座標の定義

4. 粘性流

4. 1 平板上の層流境界層

平板まわりの層流の計算を行い、境界層速度分布・摩擦抵抗係数を Blasius 解と比較する。IB 法による直交格子では一般に格子は物体壁面に沿わない。そこで、格子が物体に沿っていない場合でも正しい速度分布が得られるかを検証するために、図10のように平板を傾けた状態でも計算する。このときの平板の角度をθとする。平板は図11のように配置する。上流側の長さLの区間に対しては滑り壁条件を、下流側の長さ8Lの区間には滑りなし条件を課す。レイノルズ数の基準長はLとする。また、滑りなし区間が始まる点を原点として、平板に沿った座標系X-Yを設定する。一様流マッハ数M_∞は0.20、レイノルズ数Re_Lは1.0×10⁴とする。計算領域は200L×200Lである。Wall Layer, Smooth Layer はどちらも4層とする。

最小格子幅Δx = 1.0 × 10⁻³L, θ = 0°, 15°, 30°, 45° のときのX/L = 2.0における境界層速度分布を図12(a)に、摩擦抵抗係数の分布を図12(b)に示す。ただし、

$$\eta = \frac{Y}{X} \sqrt{Re_x}, \quad Re_x = Re_L \frac{X}{L} \quad (11)$$

また、UはX方向の速度、VはY方向の速度である。Uについては、IB法・Cut-Cell法の双方で平板の角度θによらずBlasius解とよく一致している。一方、Vはθ = 0°以外のときオーバーシュートしているが、VはUの10⁻²程度の大きさであり、一様流に対する誤差としては小さい。摩擦抵抗係数はUと同様、すべての角度でBlasius解に一致している。

次に、摩擦抵抗係数分布の最小格子幅依存性を図13に示す。X/Lの小さなところでもBlasius解に近い解となっているものはX/L = 0付近の薄い境界層を解像できていることを意味する。すなわち、同じ最小格子幅であれば、Cut-Cell法の方がIB法よりも境界層をよく解像できているといえる。IB法ではImage Pointと壁面の間で線形な速度分布を仮定しており、速度に関する実質的な最小格子幅はImage Pointと壁面の距離であると考えられる。一方、Cut-Cell法では壁面に隣接したセルが存在するため、格子幅通りの解像度が期待できる。

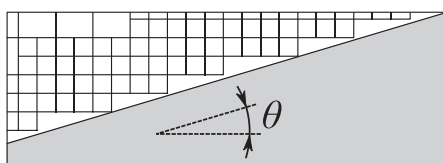
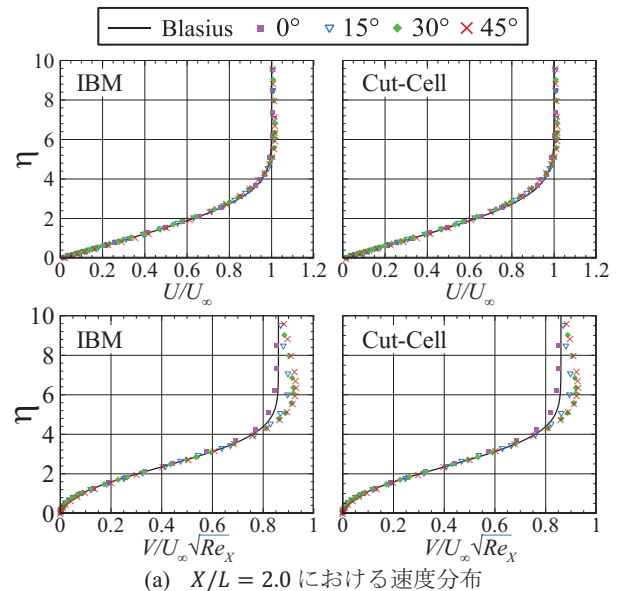
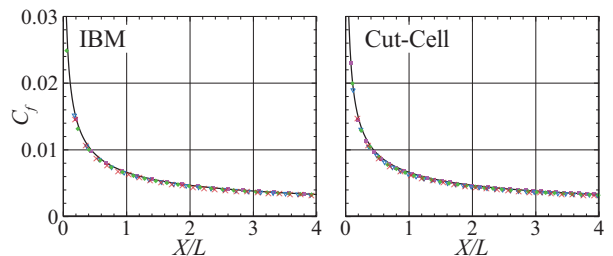


図10 斜め平板上まわりの格子



(a) X/L = 2.0における速度分布



(b) 平板上のC_f分布

図12 速度分布およびC_f分布 (Δx/L = 1.0 × 10⁻³)

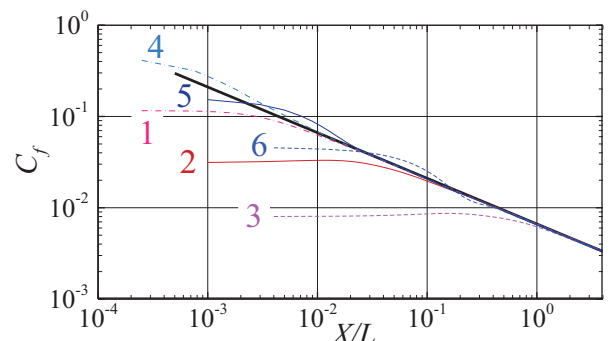
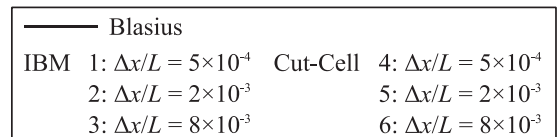


図13 C_f分布の最小格子幅依存性

4. 2 NACA0012 まわりの定常層流

翼型まわりの流れの検証として、NACA0012 まわりの定常層流の解析を行う。一様流マッハ数を $M_\infty = 0.50$ ，コード長を基準としたレイノルズ数を $Re_c = 5.0 \times 10^3$ ，迎角を $\alpha = 0^\circ$ とする。この計算条件は過去に多数の研究で検証問題として使用されており，80%コード付近で流れがはく離するという結果が示されている^{4,16-20}。本節では抵抗係数 C_d ，圧力抵抗係数 $C_{d,p}$ ，粘性抵抗係数 $C_{d,v}$ およびはく離点の収束値，格子収束性を上記の文献データと比較する。

計算格子はすべて Wall Layer 4 層，Smooth Layer 12 層とした。コード長を c ，最小格子幅 Δx を最大で $8.0 \times 10^{-3} c$ とし，2 分の 1 ずつ小さくしていく。最も細かい格子の最小格子幅は $1.25 \times 10^{-4} c$ である。計算領域は $200c \times 200c$ とする。

図 14 にマッハ数分布と後縁付近の流線を示す。80-90%コード付近ではく離していることが分かる。図 15 に抵抗係数 C_d ，粘性抵抗係数 $C_{d,v}$ ，圧力抵抗係数 $C_{d,p}$ ，はく離点の収束の様子を示す。 $C_d, C_{d,p}, C_{d,v}$ のいずれも IB 法・Cut-Cell 法でほぼ同じ値に収束しており，参考文献のデータともよく一致している。ただし，IB 法に比べて，Cut-Cell 法の方が格段に速く収束している。この傾向は粘性抵抗係数で特に顕著である。Cut-Cell 法では比較的粗い格子でもある程度の精度で抵抗が計算できている。

はく離点の収束性も抵抗と同様，Cut-Cell 法の方が速い。粗い格子における IB 法での結果は，はく離点が文献データと大きく異なる位置になっている。

最後に摩擦抵抗係数の分布を図 16 に示す。前節の平板の計算で言及したとおり，IB 法は Cut-Cell 法に対して上流側の境界層の解像度が劣る。これは NACA0012 でも同様であり，前縁付近の摩擦抵抗係数が小さく評価されている。Cut-Cell 法では前縁付近でも境界層がよく解像できているものの，摩擦抵抗係数に振動がみられる(図 17)。この原因は文献 4) で指摘されている通り，物体に隣接するセルのセル中心と物体の距離が一定でないためであると考えられる(図 18)。IB 法では壁面と Image Point の距離が一定であるため滑らかな分布が得られる。文献 4) では，Cut-Cell 法においても IB 法のように壁面に垂直なプローブ上の Image Point を考えることで振動を抑制できることが示されている。

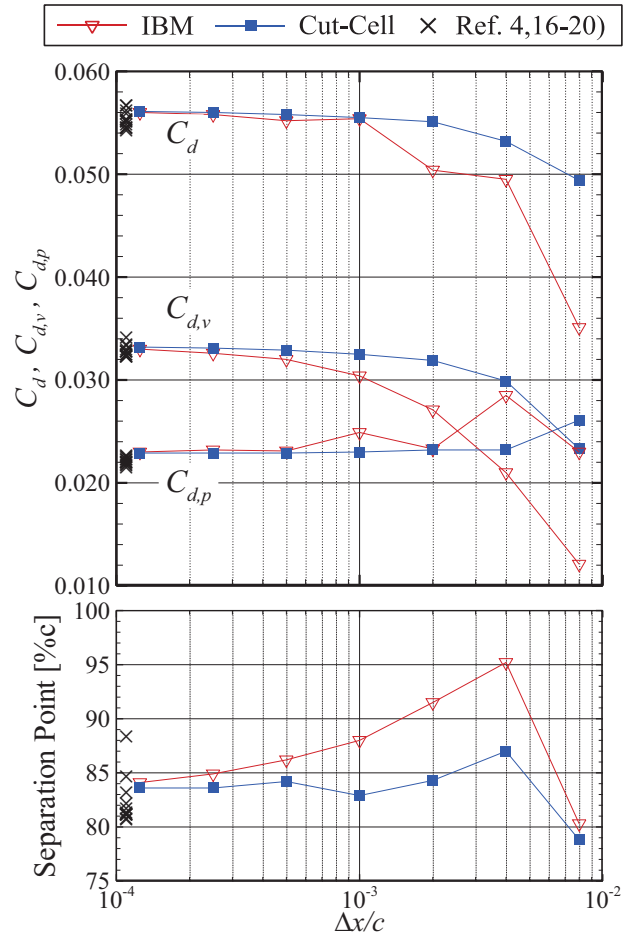


図 15 最小格子幅と抵抗係数・はく離点の関係 (上: $C_d, C_{d,v}, C_{d,p}$, 下: はく離点)

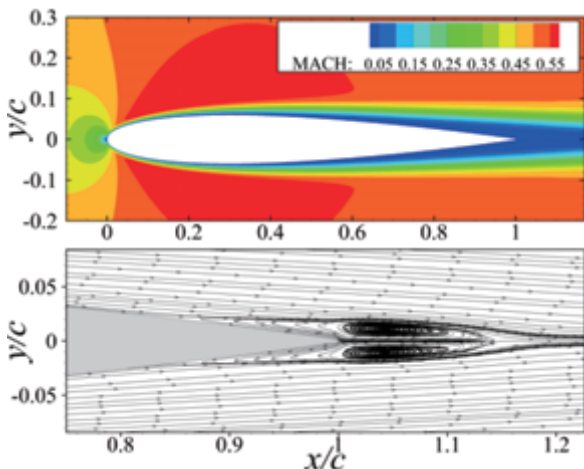


図 14 NACA0012 まわりの流れ (上: マッハ数分布, 下: 流線)

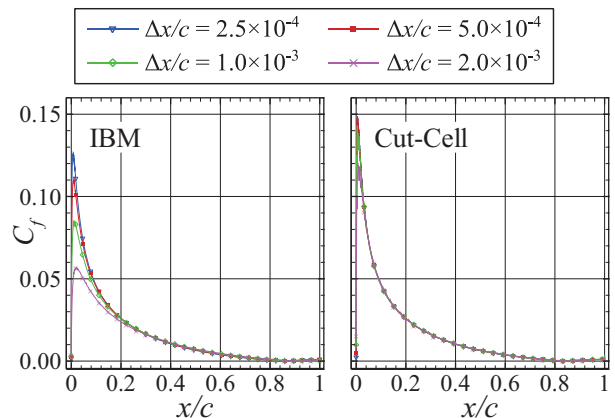


図 16 NACA0012 の摩擦抵抗係数分布

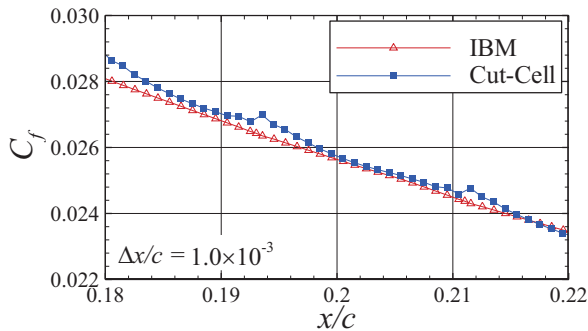


図 17 $x/c = 0.2$ 付近の摩擦抵抗係数分布

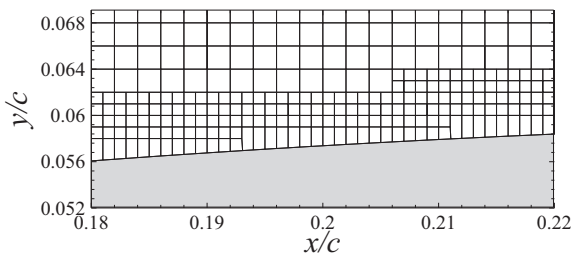


図 18 Cut-Cell 法による計算格子

5. 結論

IB 法と Cut-Cell 法を用いて圧縮性非粘性流・粘性流の解析を行った。解析結果について、特に圧力やせん断応力分布等の比較を行い、以下の結論を得た。

非粘性流での検証として、二次元円柱まわりの流れを解析した。三種類の圧力・密度境界条件を用いたところ、一次外挿と曲率効果を反映した条件 CCST でなめらかな表面圧力係数分布が得られた。また、抵抗係数の格子収束性は、IB 法に比べて Cut-Cell 法の方が優れていることが分かった。特に、Cut-Cell 法と CCST を組み合わせた場合に最も抵抗係数が小さくなった。

続いて、平板上の層流境界層の計算を行った。境界層の主流方向速度成分と摩擦抵抗係数分布は、IB 法、Cut-Cell 法の双方で Blasius 解とよく一致した。一方、平板が直交格子に対し傾けて配置されている場合に、平板垂直方向の速度成分にオーバーシュートがみられた。しかし、垂直方向速度は主流方向速度の 100 分の 1 程度の大きさであるので、相対的には小さな誤差である。また、摩擦抵抗係数分布を両対数グラフ上に示すことで、Cut-Cell 法の方が境界層の解像度にすぐれることが明らかとなった。

最後に、実用問題として NACA0012 まわりの流れの解析を行った。抵抗係数、はく離点を過去の研究による値と比較したところ、よい一致がみられた。NACA0012 の計算でも円柱や平板と同様、IB 法よりも Cut-Cell 法の方が格子収束性に優れることが分かった。物体表面の摩擦抵抗係数分布に注目すると、IB 法では前縁付近の薄い境界層を十分解像できていないことが判明した。ただし、IB 法では滑らかな摩擦抵抗係数分布となったのに対し、Cut-Cell 法では振動が発生した。この原因は、Cut-Cell 法において壁面上のセルのセル中心と壁面間の距離が一定でないためであると考えられる。

以上の解析結果から、IB 法と Cut-Cell 法とでは同程度の精度の結果を得ることはできるが、Cut-Cell 法の方が解像度に優れるため、より少ない格子点数で解析が可能であるといえる。

謝辞

本研究は JSPS 科研費 15H05559(若手研究(A))の助成を受けた。ここに感謝の意を表す。

参考文献

- 1) Capizzano, F., "Turbulent Wall Model for Immersed Boundary Methods", AIAA J., 49, pp.2367-2381, 2011.
- 2) Nakahashi, K., "Immersed Boundary Method for Compressible Euler Equations in the Building Cube Method", AIAA 2011-3386, 2011.
- 3) Mittal, R. and Iaccarino, G., "Immersed Boundary Methods", Annu. Rev. Fluid Mech., 37, pp.239-261, 2005.
- 4) Berger, M. J. and Aftosmis, M. J., "Progress Towards a Cartesian Cut-Cell Method for Viscous Compressible Flow", AIAA 2012-1301, 2012.
- 5) Imamura, T. and Takahashi, Y., "Unsteady Flow Simulation around Cylinder under Airfoil using Cartesian-based Flow Solver", AIAA 2013-2857, 2013.
- 6) Shima, E. and Kitamura, K., "Parameter-Free Simple Low-Dissipation AUSM-Family Scheme for All Speeds", AIAA J., 49, pp.1693-1709, 2011.
- 7) Shima, E., Kitamura, K. and Fujimoto, K., "New Gradient Calculation Method for MUSCL Type CFD Schemes in Arbitrary Polyhedra", AIAA 2010-1081, 2010.
- 8) Yoon, S. and Jameson, A., "Lower-Upper Symmetric-Gauss-Seidel Method for the Euler and Navier-Stokes Equations", AIAA J., 26, pp.1025-1026, 1988.
- 9) Chakravarthy, S. R. and Osher, S., "Numerical Experiments with the Osher Upwind Scheme for the Euler Equations", AIAA J., 21, pp.1241-1248, 1983.
- 10) Wang, Z. J. and Sun, Y., "Curvature-Based Wall Boundary Condition for the Euler Equations on Unstructured Grids", AIAA J., 41, pp.27-33, 2003.
- 11) Aftosmis, M. J., Nemce, M. and Cliff, S., "Adjoint-Based Low-Boom Design with Cart3D", AIAA 2011-3500, 2011.
- 12) Clarke, D. K., Salas, M. D. and Hassan, H. A., "Euler Calculations for Multielement Airfoils Using Cartesian Grids", AIAA J., 24, pp.353-358, 1986.
- 13) Lahur, P. R., Hashimoto, A. and Murakami, K., "Automatic Grid Generation for Dirty STL Data using Approximate Concave Feature", AIAA 2012-0154, 2012.
- 14) Wang, Z. J. and Chen, R. F., "Anisotropic Solution-Adaptive Viscous Cartesian Grid Method for Turbulent Flow Simulation", AIAA J., 40, pp.1969-1978, 2002.
- 15) 巽友正, "流体力学", 培風館, 1982.
- 16) Mavriplis, D. J. and Jameson, A., "Multigrid Solution of the Navier-Stokes Equations on Triangular Meshes", AIAA J., 28, pp.1415-1425, 1990.
- 17) Radespiel, R. and Swanson, R. C., "An Investigation of Cell Centered and Cell Vertex Multigrid Schemes for the Navier-Stokes Equations", AIAA 89-0543, 1989.
- 18) Kitamura, K., Fujimoto, K., Shima, E., Kuzuu, K. and Wang, Z. J., "Validation of Arbitrary Unstructured CFD Code for Aerodynamic Analyses", Trans. JSASS, 53, pp.311-319, 2011.
- 19) Bassi, F. and Rebay, S., "A High-Order Accurate Discontinuous Finite Element Method for the Numerical Solution of the Compressible Navier-Stokes Equations", Journal of Computational Physics, 113, pp.267-279, 1997.
- 20) Sun, Y., Wang, Z. J. and Liu, Y., "Efficient Implicit Non-linear LU-SGS Approach for Compressible Flow Computation Using High-Order Spectral Difference Method", Commun. Comput. Phys., 5, pp.760-778, 2009.